



۱ اگر $f(x) = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^x + \text{Log}_{\frac{1}{5}} x \right)^2$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $f(x) < f(2^{-2x})$ کدام است؟

- ☐ ۱ $(0, \frac{1}{8})$
☐ ۲ $(1, +\infty)$
☐ ۳ $(\frac{1}{8}, +\infty)$
☐ ۴ $(0, 1)$

۲ اگر $f(x) = (x + \text{Log } x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $f(x) < f(x^5)$ کدام است؟

☐ ۱ $(0, 5)$
☐ ۲ $(0, 1)$
☐ ۳ $(5, +\infty)$
☐ ۴ $(1, +\infty)$

۳ تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

☐ ۱ ۱
 ☐ ۲ ۲
 ☐ ۳ ۳
 ☐ ۴ صفر

۴ تابع با ضابطه $y = |2x + 2| - \left| \frac{x}{2} - 2 \right|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

- ☐ ۱ $-\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}, x \geq -\frac{5}{2}$
☐ ۲ $-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, x \geq -\frac{5}{2}$
☐ ۳ $-\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}, x \geq -\frac{3}{2}$
☐ ۴ $-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, x \geq -\frac{3}{2}$

۵ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور x ها کدام است؟

- ☐ ۱ 1 و $-\frac{1}{2}$
☐ ۲ 1 و $-\frac{1}{2}$
☐ ۳ $\frac{3}{2}$ و -1
☐ ۴ 3 و $-\frac{1}{2}$

۶ نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- ☐ ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
☐ ۲ $\frac{\sqrt{5}}{2}$
☐ ۳ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
☐ ۴ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۷ تابع f روی R اکیداً نزولی است. اگر $f(3) = 0$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸ تابع $y = 2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

۹ چندجمله‌ای $p(x) = x^{n+1} + 2x^n + x^6 + 3x^5 + 16a$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x + 2$ بخش‌پذیر است. برای $n = 1$ ، باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^2 + 2x - 3$ کدام است؟

- (۱) $-15x + 24$ (۲) $-15x + 14$ (۳) $-5x + 24$ (۴) $-5x + 44$

۱۰ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x) = x^2 + 4x + 5$ برابر $x + 2$ است. اگر $f(1) = 13$ و $f(-1) = 11$ باشد، خارج‌قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟

- (۱) $-x + 2$ (۲) $2x - 1$ (۳) $3x - 2$ (۴) $-2x + 3$

۱۱ فرض کنید برد تابع $f(x) = 2\sqrt[3]{9 \cos^2(x)-1} - 2\sqrt[3]{1-9 \cos^2(x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{21}{4}$

۱۲ فرض کنید باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ ، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌مانده‌ی تقسیم $4p(-x) + p(x^2)$ بر $x - 2$ ، کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) -۱

۱۳ در بازه‌ی (a, b) ، نمودار تابع $y = (x - 1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^2$ است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۴ باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - 1$ و $2x + 1$ به ترتیب، ۸ و ۵ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ ، کدام است؟

- (۱) $-x + 4$ (۲) $x + 3$ (۳) $2x + 6$ (۴) $2x - 3$

۱۵ در تقسیم عبارت $4x^3 - 19x + 12$ بر دو جمله‌ای $2x - 3$ ، مجموع ضرایب چند جمله‌ای خارج‌قسمت، کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۱۶ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1 - a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x ها است؟

- (۱) $a < 1$ (۲) $a < -2$ (۳) $a > 3$ (۴) $-2 < a < 1$

۱۷ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

۱۲ (۴)

۱۲، -۴ (۳)

-۱۲، ۴ (۲)

-۴ (۱)

۱۸ در تقسیم عبارت $(3x^3 - 8x^2 + 7x + 3)$ بر دو جمله‌ای $3x - 2$ ، مقدار چند جمله‌ای خارج قسمت، به ازای $x = -1$ ، کدام است؟

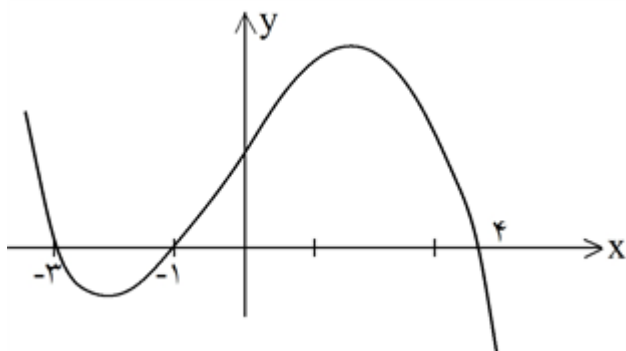
۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۹ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟



$[-5, -3] \cup [0, 2]$ (۴)

$[-5, -3] \cup [-1, 2]$ (۳)

$[-3, 1] \cup [0, 2]$ (۲)

$[-1, 1] \cup [0, 6]$ (۱)

۲۰ گزینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱/۵ (۴)

۱ (۳)

۰/۵ (۲)

-۲ (۱)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. f تابعی اکیداً نزولی است.

$$f(f(x)) < f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\right) \Rightarrow f(x) > \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^2 \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{\frac{1}{5}} x\right)^2 > \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{\frac{1}{5}} x > \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \log_{\frac{1}{5}} x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع f اکیداً صعودی است.

$$f(f(x)) < f(x^0) \Rightarrow f(x) < x^0 \Rightarrow (x + \log x)^0 < x^0 \Rightarrow x + \log x < x \\ \Rightarrow \log x < 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دامنه تابع $(-\infty, 0)$ است. حال چون اکیداً نزولی است باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$-m^2 + 2m - 3 < m^2 - m - 5 < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 = (2m + 1)(m - 2) > 0 \Rightarrow m > 2 \text{ یا } m < -\frac{1}{2} \\ m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

پس مجموعه مقادیر m برابر $\left(2, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ است که این مجموعه فقط شامل $m = -1$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\xrightarrow{x \leq -1} y = -2x - 2 + \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x - 4 \xrightarrow{y \geq -\frac{5}{2}} f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}, x \geq -\frac{5}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق فرض نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - 5x^2 - x + m$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به

طول ۲ قطع می‌کند. پس:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 16 - 20 - 2 + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x^2 - x + 6$$

بنابراین با توجه به این که یکی از ریشه‌های این تابع $x = 2$ است، بنابراین $f(x)$ بر $x - 2$ بخش پذیر است. با تقسیم

$f(x)$ بر $x - 2$ ، خارج قسمت تقسیم $2x^2 - x - 3$ می‌شود. بنابراین:

$$f(x) = (x - 2)(2x^2 - x - 3)$$

به این ترتیب ریشه‌های دیگر f (غیر از $x = 2$) از معادله $2x^2 - x - 3 = 0$ به دست می‌آید:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{3}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶

$$f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{یکی به راست}} \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{قرینه به محور } x} \frac{-1}{x-1} \xrightarrow{\text{تا پایین ۲}} \frac{-1}{x-1} - 2$$

$$\frac{1}{x} = \frac{-1}{x-1} - 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = -2 \Rightarrow \frac{2x-1}{x^2-x} = -2 \Rightarrow \cancel{2x} - 1 = -2x^2 + \cancel{2x}$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), (0,0) \Rightarrow d = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷

$$x^2 f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow \text{اعداد صحیح نامنفی} = \{0, 1, 2, 3\}$$

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
f(x)	+	-	

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸

$$y = 2^{x+|x|} \xrightarrow{\text{واحد در جهت منفی محور } x} y = 2^{(x+3)+|x+3|} \xrightarrow{\text{واحد در جهت منفی } y} y = 2^{(x+3)+|x+3|}$$

$$y = 2^{x+3+|x+3|} - 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2^{x+3+|x+3|} = 2^1 \Rightarrow x + 3 + |x + 3| = 1$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \Rightarrow 2(x+3) = 1 \Rightarrow x = -2/5 \\ x < -3 \Rightarrow (x+3) - (x+3) = 1 \Rightarrow 0 = 1 \end{cases}$$

غ ق ق ۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹

$$p(x) = x^{n+1} + 2x^{rn} + x^f + 3x^0 + 16a \xrightarrow{n=1} p(-2) = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$p(x) = x^f + 3x^0 + x^f + 2x^r + 32$$

$$p(x) = (x^r + 2x - 3)Q(x) + R(x) \xrightarrow{x=1} p(1) = R(1) = 39$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x = 1$ برابر ۳۹ میشود: $-5x + 44$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به گزینه‌ها، خارج قسمت را باید درجه یک بگیریم. خارج قسمت را $\alpha x + \beta$ در نظر

می‌گیریم و داریم:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)(\alpha x + \beta) + x + 2$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1 \cdot (\alpha + \beta) + 3 = 13 \Rightarrow \alpha + \beta = 10 \\ f(-1) &= 2(-\alpha + \beta) + 1 = 11 \Rightarrow -\alpha + \beta = 5 \end{aligned} \right\} \beta = 3, \alpha = -2$$

خارج قسمت $-2x + 3$ است.

$$f(x) = 2\sqrt[3]{9 \cos^2(x) - 1} - 2\sqrt[3]{1 - 9 \cos^2(x)}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۱)

$$-1 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 9 \cos^2 x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq 9 \cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \sqrt[3]{9 \cos^2 x - 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{9 \cos^2 x - 1} = t \quad -1 \leq t \leq 2$$

$$f(t) = 2t - 2t^{-1} \Rightarrow -1 \leq t \leq 2$$

تابع $2t$ اکیداً صعودی است.

تابع $2t^{-1}$ اکیداً نزولی است.

تابع $-2t^{-1}$ اکیداً صعودی است.

یعنی $2t - 2t^{-1}$ اکیداً صعودی است.

$$-1 \leq t \leq 2 \Rightarrow f(-1) = 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$f(2) = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{15}{4}$$

$$b - a = \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4} + \frac{6}{4} = \frac{21}{4}$$

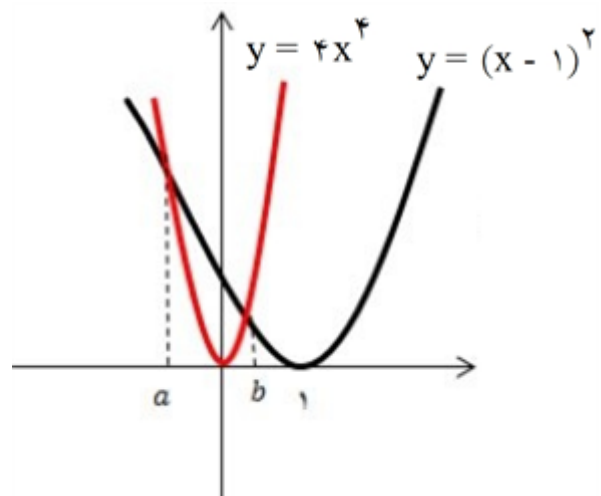
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۱۲)

$$p(4) = 3$$

$$p(-2) = 1$$

$$\xrightarrow{x=2} p(2) + 2p(-2) = p(4) + 2p(-2) = 3 + 2 = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۳)



$$(x-1)^2 > 4x^2 \Rightarrow |x-1| > 2x$$

$$x \geq 1 \Rightarrow 2x^2 < x-1 \Rightarrow 2x^2 - x + 1 < 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 > 0 \Rightarrow \text{عبارت همواره مثبت است} \\ \text{و نمی تواند منفی باشد} \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$

$$x \leq 1 \Rightarrow 2x^2 < -x + 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow b - a = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$$

۱۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 1$ و $2x + 1$ به ترتیب ۸ و ۵ است، به معنای آن است که:

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ and } p(1) = 1$$

$$p(x) = (\mathfrak{Y}x^{\mathfrak{r}} - x - \mathfrak{I})q(x) + \mathfrak{a}x + b$$

$$p(\mathfrak{v}) = \Lambda \Rightarrow a + b = \Lambda$$

$$p\left(-\frac{1}{\Upsilon}\right)=\mathfrak{O}\Rightarrow -\frac{1}{\Upsilon}a+b=\mathfrak{O}\Rightarrow a=\Upsilon, b=\mathfrak{F}\Rightarrow R=\Upsilon x+\mathfrak{F}$$

۱۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 19x + 12 & 2x - 3 \\ - (2x^3 - 6x^2) & \\ \hline 6x^2 - 19x + 12 & \\ - (6x^2 - 9x) & \\ \hline -10x + 12 & \\ - (-10x + 10) & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$\therefore \text{مجموع ضرایب چند جمله‌ای خارج قسمت} = 5 - 3 + 2 = 0$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{e})^2 + 4a(1 - a) < 0 \Rightarrow 4 + 4a - 4a^2 < 0 \\ \Rightarrow a^2 - a - 1 > 0 \Rightarrow (a + 2)(a - 3) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} a < -2$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. باید معادله‌ی تلاقی نمودار تابع $y = 2x^2 + (m + 1)x + m + 6$ با نیم‌ساز ناحیه‌ی اول ($y = x$) ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\Upsilon x^{\Upsilon} + (m + 1)x + m + \mathfrak{f} = x \Rightarrow \Upsilon x^{\Upsilon} + \mathfrak{m}x + m + \mathfrak{f} = . \xrightarrow{\Delta=} m^{\Upsilon} - \mathfrak{f}(\Upsilon)(m + \mathfrak{f}) = .$$

$$\Rightarrow m^{\Upsilon} - \Lambda m - \Upsilon \Lambda = . \Rightarrow (m - \mathbb{1}\Upsilon)(m + \Upsilon) = . \Rightarrow m = \mathbb{1}\Upsilon, m = -\Upsilon$$

چون تأکید شده نمودار بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول مماس است. ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی تلاقی (طول نقطه‌ی تماس) باید مثبت باشد.

ریشه‌ی مضاعف منفی دارد. $m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$.

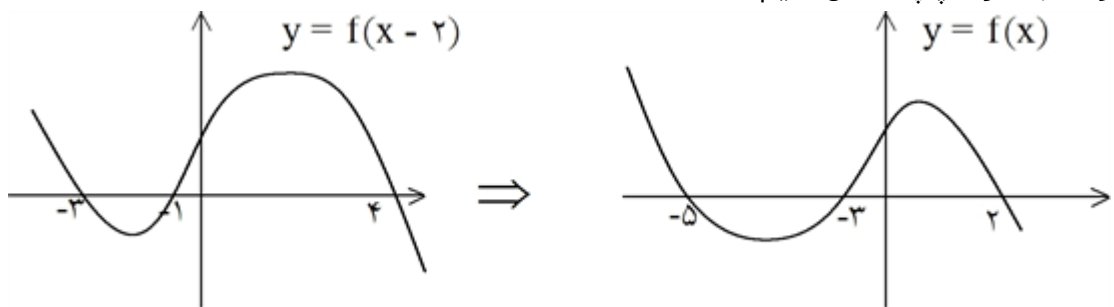
ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد. $m = -\gamma \Rightarrow \gamma x^2 - \gamma x + \gamma = 0 \Rightarrow x^2 - \gamma x + 1 = 0$.

پس $m = -4$ صحیح است. نمودار بر نیم‌ساز ربع اول مماس است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 18x^2 + 7x + 3 \\ -3x^2 + 2x^2 \\ \hline -6x^2 + 7x \\ +6x^2 - 4x \\ \hline 3x + 3 \\ -3x + 2 \\ \hline 5 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 3x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 \end{array} \right. \xrightarrow{x = -1} 1 + 2 + 1 = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که نمودار $y = f(x - 2)$ داریم برای رسم $y = f(x)$ باید نمودار را دو واحد به طرف چپ منتقل کنیم. ۱۹



$$\sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geq 0 \begin{cases} x \geq 0 \text{ و } f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2] \\ x \leq 0 \text{ و } f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, -3] \end{cases}$$

هم علامت باشند

$$\Rightarrow D = [-5, -3] \cup [0, 2]$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰

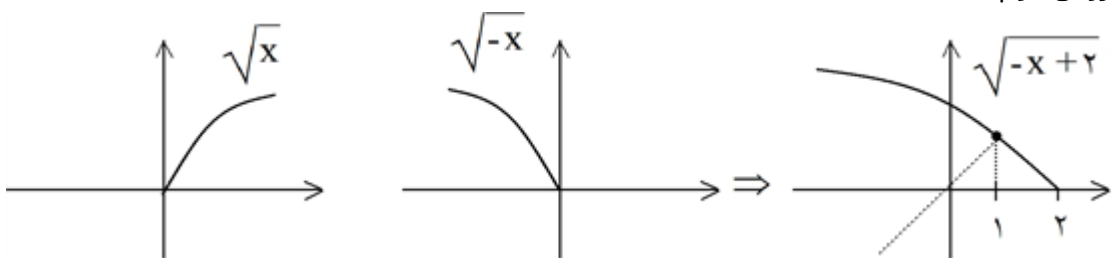
$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{انتقال}} f(2-x) = \sqrt{-x+2}$$

$$y = x \text{ محل برخورد با } \sqrt{-x+2} = x \Rightarrow x^2 = -x+2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+2) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow \sqrt{-1+2} = 1 \checkmark \quad x = -2 \Rightarrow \sqrt{-(-2)+2} = -2 \times$$

روش دوم:



۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

