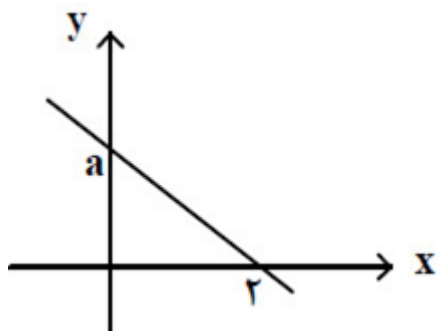


۱) نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل داده شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ باشد، مقدار

غیرصحیح a کدام است؟



$2\sqrt{2} \quad (4)$

$-1 + \sqrt{2} \quad (3)$

$1 + \sqrt{2} \quad (2)$

$\sqrt{2} \quad (1)$

۲) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{k[x] - 2}{x^2 - 4} = +\infty$ باشد، نقاط $(k\pi, \sin k\pi)$ در کدام ناحیهٔ محورهای مختصات قرار دارند؟

چهارم (4)

سوم (3)

دوم (2)

اول (1)

۳) اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - k[x]}{x^2 - 1} = -\infty$ باشد، نقاط $(k\pi, \cos k\pi)$ در کدام ناحیهٔ محورهای مختصات قرار دارند؟

چهارم (4)

سوم (3)

دوم (2)

اول (1)

۴) اگر $\lim_{x \rightarrow -2\pi} \frac{2 + k\left[\frac{x}{\pi}\right]}{\sin x} = +\infty$ باشد، مقدار $[-k]$ کدام است؟

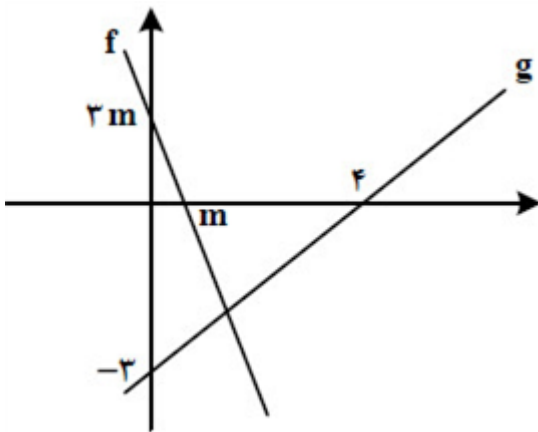
$-2 \quad (4)$

$-3 \quad (3)$

$-4 \quad (2)$

$-1 \quad (1)$

۵ شکل مقابل، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



۴ (۴)

-۴ (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

۶ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{x^2 + 12}}{x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ باشد، حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -2$ کدام است؟

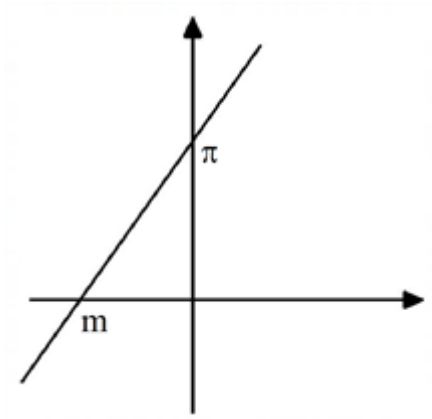
۲ (۴)

۱/۵ (۳)

۱ (۲)

۰/۵ (۱)

۷ شکل مقابل، نمودار تابع f^{-1} را نشان می‌دهد. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \pi$ باشد، مقدار m کدام است؟



$-\pi\sqrt{\pi}$ (۴)

$-\frac{1}{\pi}$ (۳)

$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (۲)

$-\sqrt{\pi}$ (۱)

۸ تابع $f(x) = \frac{|ax + 1| + 2x}{|x| + b}$ دارای دو جانب افقی و دو جانب قائم است. اگر هر ریشه مخرج با یکی از حدهای تابع در بی‌نهایت برابر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

۱ (۲)

-۳ (۱)

۹ اگر $f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+2} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x} \right] f(x)$ چقدر است؟

- ۱ $-\frac{1}{2}$ ۲ ۱ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ -۱

۱۰ مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴ $\sqrt{2}$

۱۱ در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{1+2\cos x}$ ، کدام بیان، درست است؟

- ۱ $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi^+}{3}} f(x) = -\infty$ ۲ $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi^+}{3}} f(x) = +\infty$
۳ $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi^-}{3}} f(x) = -\infty$ ۴ $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi^-}{3}} f(x) = +\infty$

۱۲ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x^n - 6x^2 + 1}{ax^2 + 7x^2 - 2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{4}{17}$ ۲ $-\frac{6}{17}$ ۳ $-\frac{5}{12}$ ۴ $-\frac{6}{11}$

۱۳ نمودار تابع $y = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}$ ، نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت کدام وضع را دارد؟

- ۱  ۲ 
۳  ۴ 

۱۴ در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$ ، کدام بیان، درست است؟

- ۱ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ ۲ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
۳ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ۴ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

۱۵ در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{6}$ ۲ $-\frac{1}{8}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{3}$

۱۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 8})$ کدام است؟

- ۱) -۸ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ∞

۱۷ حد تابع $y = \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - 4x}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۸ حد عبارت $\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + 9x}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۵ ۴) -۵

۱۹ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی $x = -2$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۰ در تابع $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، کدام است؟

- ۱) صفر ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱

$$a = \text{عرض از مبدا} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{a}{2}x + a$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + a \Rightarrow \frac{a}{2}x = -y + a \Rightarrow x = -\frac{2}{a}y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2}{a}x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{a}x + 2}{\left| 2\left(-\frac{a}{2}x + a\right) - a\left(-\frac{2}{a}x + 2\right) \right|} = 2$$

$$\text{مخرج} = \left| -ax + \cancel{2a} + 2x - \cancel{2a} \right| = |2x - ax| = |x| \times |2 - a| = -x|2 - a|$$

$$\text{ضریب بالاترین درجه صورت} = -\frac{2}{a}$$

$$\text{ضریب بالاترین درجه در مخرج} = -|2 - a|$$

$$\text{جواب حد} = \frac{-\frac{2}{a}}{-2|2 - a|} = 2 \Rightarrow |2 - a| = \frac{1}{a} \Rightarrow a|2 - a| = 1$$

$$\begin{aligned} a \geq 2 & \rightarrow a(-2 + a) = 1 : a^2 - 2a - 1 = 0 \\ \Delta &= 8 \\ a &= 1 \pm \sqrt{2} \\ a \geq 2 & \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2} \\ a \leq 2 & \rightarrow a(2 - a) = 1 \\ -a^2 + 2a - 1 &= 0 \\ a^2 - 2a + 1 &= 0 \Rightarrow a = 1 \\ \text{غ ق ق چون گفته مقدار غیر صحیح } a & \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{k[2^+] - 2}{2^+ - 2} = \frac{2k - 2}{0^+} = +\infty \Rightarrow 2k - 2 > 0 \Rightarrow k > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{k[2^-] - 2}{2^- - 2} = \frac{k - 2}{0^-} = +\infty \Rightarrow k - 2 < 0 \Rightarrow k < 2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$1 < k < 2 \Rightarrow \pi < k\pi < 2\pi \Rightarrow \sin k\pi < 0$$

پس نقاطی به فرم $(k\pi, \sin k\pi)$ دارای طول مثبت و عرض منفی هستند، یعنی در ناحیه چهارم قرار دارند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow (-1)^+ : \frac{1 - k[(-1)^+]}{0^+} = -\infty \rightarrow \frac{1 + k}{0^+} = -\infty \rightarrow 1 + k > 0 \Rightarrow k > -1 \\ x \rightarrow (-1)^- : \frac{1 - k[(-1)^-]}{0^-} = -\infty \rightarrow \frac{1 + 2k}{0^-} = -\infty \rightarrow 1 + 2k < 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} -1 < k < -\frac{1}{2} \Rightarrow -\pi < k\pi < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(k\pi) < 0 \\ k\pi < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{نقطه در ناحیه سوم قرار دارد.}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴

$$x \rightarrow (-2\pi)^+ : \frac{2 - 2k}{+} = +\infty \Rightarrow k < 2$$

$$x \rightarrow (-2\pi)^- : \frac{2 - 2k}{-} = +\infty \Rightarrow \frac{2}{2} < k$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2} < k < 2 \Rightarrow -2 < -k < -\frac{2}{2} \Rightarrow [-k] = -2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-2x|}{\frac{2}{2}x} = \frac{-2x}{\frac{2}{2}x} = -2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + |x|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - x}{x} = a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{x + 2} \times \frac{2x - \sqrt{x^2 + 12}}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x^2 - 4)}{(2x - \sqrt{x^2 + 12})(x + 2)} \times \frac{1}{-4 - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x + 2)(x - 2)}{x + 2} \times \frac{1}{-6} = \frac{2}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷

$$f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi \Rightarrow f(x) = -\frac{m}{\pi}x + m$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x + \pi}{-\frac{m}{\pi}x + m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x} = \frac{\pi^2}{m^2} = \pi$$

$$\Rightarrow m^2 = \pi \xrightarrow{m < 0} m = -\sqrt{\pi}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بدون شک $b < 0$ حال حدهای تابع در بینهایت: ۸

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|ax| + 2x}{|x|} = |a| - 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|ax| + 2x}{|x|} = |a| + 2$$

$$b < 0 \rightarrow \begin{cases} |a| + 2 = -b \\ |a| - 2 = b \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + 2x}{|x| - 2} = -2 \quad \text{پس: } f(x) = \frac{1 + 2x}{|x| - 2} \text{ لذا:}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + x + 1}}{x + 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -1^+ \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = -1$$

$$-f(-1) = -1 \times \sqrt{\frac{1}{4}(1) - 1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید $\sqrt{x}$ را در کل رادیکال‌ها ضرب کنیم. (۱۰)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}} = \sqrt{1+1} - \sqrt{0-0} = \sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۱۱)

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^-} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^-} = -\infty$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۲)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^n - 6x^2 + 1}{ax^2 + 5x^2 - 2} = 2 \Rightarrow n = 2, a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 6x^2 + 1}{2x^2 + 5x^2 - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 12x} = \frac{2-6}{\frac{2}{2}+6} = \frac{-4}{\frac{14}{2}} = \frac{-8}{14}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۱۳)

$$\frac{2x^2 - x - 2}{-2x^2 - 4x} \Big| \frac{x^2 + 2x}{2} \Rightarrow y = 2 + \frac{(-5x - 2)}{x^2 + 2x}$$

$$x \rightarrow +\infty : y = 2 + 0^- < 2$$

$$x \rightarrow -\infty : y = 2 + 0^+ > 2$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۴)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{2x} & x > 0 \\ \text{تعریف نشده} & x \leq 0 \end{cases}$$

تابع به ازای $x \leq 0$ تعریف نمی‌شود بنابراین گزینه‌ی ۱ و ۲ نادرست می‌باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۵)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + |x|}{ax^n} \xrightarrow{n=1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{ax} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{3}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{-6} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{-6} = \frac{\frac{2}{2}}{-6} = -\frac{1}{6}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۶)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 8}) \times \frac{x - \sqrt{x^2 - 8}}{x - \sqrt{x^2 - 8}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2 - x^2 + 8)}{x - \sqrt{x^2 - 8}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{2x} = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو هم‌ارزی مهم حد در بی‌نهایت به صورت زیر است:

$$\sqrt{ax^r + bx + c} \cong \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{ra} \right|, x \rightarrow \pm\infty \text{ I}$$

$$\sqrt[r]{ax^r + bx^r + c + d} \cong \sqrt[r]{a} \left(x + \frac{b}{ra} \right), x \rightarrow \pm\infty \text{ II}$$

با توجه به رابطه‌ی I داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^r - 2x} - \sqrt{x^r - 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x - 1| - |x - 2| = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x - (2 - x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 = -1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^r + 4x} + \sqrt[r]{x^r + 9x^r}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left| x + \frac{4}{r} \right| + \left(x + \frac{9}{r} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\cancel{x} - 2 + \cancel{x} + 3) = 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، عبارت داخل قدرمطلق به $+\infty$ میل می‌کند بنابراین:

$$|x^r - 4| = x^r - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^r - 4|}{ax^r - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r - 4}{ax^r - x + 2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

و در نتیجه:

حال حد راست عبارت را در $x = -2$ می‌بایم.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^r - 4|}{-x^r - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x - 2| |x + 2|}{-(x^r + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{-(x + 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{4}{3}$$

دقت کنید که:

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2)$$

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow |x + 2| = x + 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^r + 6x}}{ax - 2} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{ax} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + x}{ax} = 2 \Rightarrow \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4x^r - x^r - 6x)}{(x - 2)(2x + \sqrt{x^r + 6x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x \cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)} (2x + \sqrt{x^r + 6x})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

