



۱ خط $y = -ax - 5$ در نقطه‌ای به طول ۳ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f'(3) - f(3) = 2$ باشد، $f(3)$ چند برابر $f'(3)$ است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

۲ اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^3 - |x^2|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt{2})f'(g(-\sqrt{2}))$ کدام است؟

$$-1 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

۳ در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = -\sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x^2} - 2$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات، خط مماسی بر $g(x)$ رسم می‌شود. فاصله نقطه برخورد این خط با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات، کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$

۴ تابع f مشتق‌پذیر و با دوره تناوب $\frac{\pi}{8}$ است. اگر $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $h(x) = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + f\left(2x - \frac{23\pi}{24}\right)$ باشد، حاصل $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

$$-\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

۵ تابع f مشتق‌پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر $f'(-1) = \frac{3}{2}$ و $g(x) = f(x+1) + f(3x+10)$ باشد، حاصل $g'(-2)$ کدام است؟

$$\frac{13}{2} \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$\frac{7}{2} \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

۶ در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos x$ و $g(x) = \frac{3}{2}\sin x$ در بازه $[0, \pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} - 3 \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{4} - 1 \quad (1)$$

۷ اگر $f(x) = (x - 4)\sqrt[3]{x + 3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(5 - h) - 3f(5 - h) + 2}{h(5 - h)}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{13}{30}$ ۲ $-\frac{5}{12}$ ۳ $\frac{5}{6}$ ۴ $-\frac{13}{15}$

۸ اگر $y = 2x + b$ بر نمودار $y = \frac{x + a}{ax + 1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ ۱

۹ اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x) = f\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، مقدار $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{2}{3}$ ۲ $-\frac{3}{4}$ ۳ $-\frac{4}{3}$ ۴ $-\frac{3}{2}$

۱۰ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5 - 2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

- ۱ $-\frac{2}{3}$ ۲ $-\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $\frac{2}{3}$

۱۱ مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x}\right)^2$ در نقطه‌ی $x = 2$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{3}{4}$ ۲ $-\frac{5}{4}$ ۳ $-\frac{5}{2}$ ۴ $-\frac{15}{4}$

۱۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{2x + 1} + \frac{1}{x + 1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه‌ی $[0, 4]$ از آهنگ تغییر

لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{2}$ ، چه قدر کمتر است؟

- ۱ 0.3 ۲ 0.4 ۳ 0.5 ۴ 0.6

۱۳ خط به معادله‌ی $y = 3x - 5$ در نقطه‌ی $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است.

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(2)$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۱۴ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{-x - 1}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2} + h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۱۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & ; x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 2$ مشتق‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۶ اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(fog)'(1)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۱۷ اگر $f(x) = x |\sin \pi x|$ مقدار $f'(1^+)$ کدام است؟

π (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

$-\pi$ (۱)

۱۸ اگر $f'(\cdot) = g(\cdot) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$ مقدار $f''(\cdot)$ برابر کدام است؟

$5g''(\cdot) + 20$ (۴)

$2g''(\cdot) + 20$ (۳)

$5g''(\cdot)$ (۲)

$2g''(\cdot)$ (۱)

۱۹ مقدار مشتق $x = \frac{3}{\pi}$ به ازای $\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{1}{x}\right)}$ کدام است؟

$\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$ (۴)

$\frac{2\pi^2}{9}$ (۳)

$\frac{-3\pi^2}{9}$ (۲)

$\frac{-2\pi^2\sqrt{3}}{9}$ (۱)

۲۰ اگر $f(x) = \frac{x - |3x|}{2}$ و $g(x) = \sin x$ و $-\pi < x < 0$ باشد، مشتق تابع $f(g(x))$ کدام است؟

$2 \sin x$ (۴)

$2 \cos x$ (۳)

$\cos x$ (۲)

$-2 \cos x$ (۱)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱

مماس یعنی هم مقدار و هم مشتق برابر دارند

$$f(3) = -3a - 5$$

$$f'(3) = -a$$

$$\Rightarrow -a + 3a + 5 = 2 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{-3 \times \frac{-3}{2} - 5}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲

$$g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2})) \Rightarrow (\text{fog})'(-\sqrt[3]{2})$$

$$D_g = (-\infty, \cdot) : g(x) = \frac{1}{2x^2} \xrightarrow{g^{-1}} f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}}} = \sqrt[3]{x} = x$$

$$\Rightarrow (\text{fog})'(x) = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} - 2 = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ناحیه چهارم} \\ \sqrt[3]{x} = -2 \Rightarrow x = -8 \text{ ناحیه دوم} \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow m = g'(-8) = \frac{2}{3}(-8)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}, y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 8) \xrightarrow{x=0}$$

$$y = -\frac{2}{3} \Rightarrow |y| = \frac{2}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴

$$h'(x) = f'\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2f'\left(2x - \frac{23\pi}{24}\right) \Rightarrow h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2f'\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$\stackrel{\otimes}{\rightarrow} h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{24}\right) = f'\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{8}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \otimes$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵

$$g(x) = f(x + 1) + f(3x + 1) \Rightarrow g'(x) = f'(x + 1) + 3f'(3x + 1)$$

$$g'(-2) = f'(-1) + 3f'(2)$$

چون دوره تناوب ۵ است پس:

$$f(x + 5) = f(x) \Rightarrow f'(x + 5) = f'(x) \xrightarrow{x=-1} f'(2) = f'(-1)$$

$$g'(-2) = \frac{2}{3} + 3\left(\frac{2}{3}\right) = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون خط مماس بر هر دو رسم شده پس:

$$\frac{3}{2} \sin x = \sin x + \frac{1}{2} \cos x \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{4} \sqrt{2}$$

پس نقطه تماس: $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4} \sqrt{2}\right)$ و شیب خط مماس:

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} m = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{3}{4} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{y=0} x = \frac{\pi}{4} - 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مشتق را بدست آورید:

$$f(x) = (x - 4) \sqrt[3]{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x + 3} + (x - 4) \times \frac{1}{3(\sqrt[3]{x + 3})^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(5-h) - 1}{5-h} \right) \times \left(-\frac{f(5-h) - 2}{-h} \right) \\ &= \left(\frac{f(5) - 1}{5} \right) (-f'(5)) = \frac{1}{5} \times \frac{-25}{12} = \frac{-5}{12} \end{aligned}$$

تذکر: این مسأله با قاعده‌ی هویتال نیز قابل حل است.

$$\left. \begin{aligned} x=1 &\Rightarrow y=b+2 \\ x=1 &\Rightarrow y=\frac{a+1}{a+1}=1 \end{aligned} \right\} b+2=1 \Rightarrow b=-1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y'_{(1)} = 2 \Rightarrow \frac{1-a^2}{(a+1)^2} = 2 \Rightarrow \frac{1-a}{1+a} = 2 \Rightarrow a = \frac{-1}{3} \Rightarrow a-b = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن جواب از مشتق تابع مرکب استفاده می‌کنیم:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

$$g'(x) = \left(\frac{-\cos x(1 + \sin x) - \cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2} \right) f'\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{-2 \cos \frac{\pi}{2}}{(1 + \sin \frac{\pi}{2})^2} \right) f'\left(\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}\right) \Rightarrow \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{-\cancel{2}}{\frac{9}{2}} f'\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا پیوستگی آن را بررسی می‌کنیم و سپس مشتق‌پذیری را حساب می‌کنیم. ۱۰

$$\Rightarrow \sqrt{5 - 2(-2)} = -\frac{1}{2}(-2)^2 - 2b + c \Rightarrow 3 = -2 - 2b + c$$

$$\Rightarrow -2b + c = 5$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} = -x + b \xrightarrow{x=-2} \frac{-2}{6} = 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$$

$$-2b + c = 5 \Rightarrow \frac{14}{3} + c = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ساده می‌کنیم. ۱۱

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^2 = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2-x)^3 - 3(x^2-x)^2(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^6} \\ &= \frac{(x^2-x)^2((2x+2)(x^2-x) - 3(x-1)(x^2+2x))}{(x^2-x)^6} = \frac{2(6 \times 2 - 3 \times 3 \times 1)}{2^6} \\ &= \frac{\cancel{6}^1(12-9)}{\cancel{6}^1 \times 2^5} = \frac{-3}{16} = -\frac{3}{16} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\left(3 + \frac{1}{5}\right) - (1+1)}{1} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{17}{50} = 0.34$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.34 - 1.2 = -0.86$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خط به معادله $y = 3x - 5$ در $x = 2$ بر منحنی $g(x)$ مماس است، پس: ۱۳

$$\begin{cases} g(2) = 3(2) - 5 = 1 \\ g'(2) = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{3}$$

$$(f \circ g)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-1)\sqrt{x} - (-x-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \times 1}{\frac{1}{4}}$$

$$= -2 + 5 = 3 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{4} + h\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)}{h} = f'\left(\frac{1}{4}\right) = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توجه کنید: ۱۵

$$x < 2 \Rightarrow x(x-2) < 0 \Rightarrow x^2 - 2x < 0 \Rightarrow |x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x < 2 \\ \frac{1}{x}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{پیوستگی} &: -2^2 + 2(2) = \frac{1}{2}(2^2) + 2a + b \Rightarrow 2a + b = -2 \\ f'(x) &= \begin{cases} -2x + 2 & x < 2 \\ x + a & x > 2 \end{cases} \Rightarrow -2(2) + 2 = 2 + a \Rightarrow a = -4 \\ &\Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b = 2 \end{aligned} \right\}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $f(x) = x |\sin \pi x|$ در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته است. برای محاسبه‌ی $f'(1^+)$ ، ۱۷

کافی است ابتدا در همسایگی راست $x = 1$ علامت عبارت داخل قدرمطلق را مشخص کرده و قدرمطلق را برداریم، سپس از ضابطه‌ی حاصل مشتق گرفته و $x = 1$ را جای‌گذاری کنیم،

$$f(x) = x |\sin \pi x| \Rightarrow f'(1^+) = (x \underbrace{|\sin \pi x|}_{\text{منفی}})' = (-x \cdot \sin(\pi x)) = (-1) \cdot \sin \pi x + \pi \cos \pi x \cdot (-x)$$

$$\xrightarrow{x=1} -\sin \pi + \pi \cos \pi \cdot (-1) = 0 + \pi = \pi$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$f(x) = x + 1 + (g(x))^5 \Rightarrow f'(x) = 1 + 5(g(x))^4 g'(x) \Rightarrow f'(0) = 1 + 5(g(1))^4 g'(0)$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + 5g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$f''(x) = 20(g(x))^3 (g'(x))^2 + 5(g(x))^4 g''(x) \Rightarrow f''(0) = 0 + 5g''(0)$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^r} \right) \left(r \tan \frac{1}{x} \right) \left(1 + \tan^r \left(\frac{1}{x} \right) \right) \cdot \frac{1}{r \sqrt{1 + \tan^r \left(\frac{1}{x} \right)}}$$

$$\Rightarrow f' \left(\frac{r}{\pi} \right) = -\frac{\pi^r}{r} (r \sqrt{r}) (r) \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-r \pi^r \sqrt{r}}{r}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$f(x) = \frac{x - |rx|}{r} = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ rx & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ r & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین:

$$(f(g(x)))' = g'(x) f'(g(x)) = (\cos x) f'(\sin x)$$

$$-\pi < x < 0 \Rightarrow \sin x < 0 \Rightarrow f'(\sin x) = r$$

$$(f'(g(x)))' = (\cos x)(r) = r \cos x$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

