



۱ در تساوی $21^5 = \frac{x^5 \times \sqrt[5]{5^3} \times \sqrt[3]{15^9}}{\sqrt[3]{5^6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}}$ مقدار x کدام است؟

۲۱ (۴)

۵ (۳)

۱۵ (۲)

۷ (۱)

۲ اگر تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۳ را نسبت دهد، حاصل $f(\sqrt[3]{4}) - f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ کدام است؟

۷/۵ (۴)

۲/۵ (۳)

-۲/۵ (۲)

-۷/۵ (۱)

۳ جملات سوم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۷ و ۴۹ هستند. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

۳۴۳ (۴)

$49\sqrt{7}$ (۳)

۳۳۶ (۲)

$343\sqrt{7}$ (۱)

۴ در تساوی $7^3 = \frac{(2x)^5 \times 21^3}{15^3 \times 5^2}$ مقدار x کدام است؟

۵ (۴)

۴/۵ (۳)

۳ (۲)

۲/۵ (۱)

۵ اگر $A = \sqrt[5]{4}\sqrt[3]{8}(18)^{-1/5}$ باشد، حاصل $(10 + A^{-1})^{-1/3}$ کدام است؟

۰/۲۵ (۴)

۰/۵ (۳)

۰/۷۵ (۲)

۱ (۱)

۶ تابع نمایی $f(x) = 5 - 3^{ax+b}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(0) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ باشد، مقدار جزء صحیح $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ کدام است؟

صفر (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۷ در دنباله هندسی $d, e, \dots, \frac{1}{3}, a, b, c, \frac{4}{3}$ مقدار e کدام است؟ ($d > 0$)

$\frac{2}{3\sqrt{2}}$ (۴)

$\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (۳)

$\frac{1}{12}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

۸ اگر $x, y, z, x - \frac{y}{z}$ ، جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار $|x| + |y| + |z|$ ، کدام است؟

۷ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

۹ جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی حسابی با اختلاف مشترک ناصفر، واسطه‌ی هندسی بین جملات سوم و نهم آن دنباله است. اگر جمله‌ی پنجم دنباله ۷ باشد، جمله‌ی صد و یکم دنباله، کدام است؟

۱۲۵ (۴)

۱۵۰ (۳)

۱۷۵ (۲)

۲۰۰ (۱)

۱۰ مقدار عبارت $3^{\frac{1}{256}} \times 3^{\frac{1}{16}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times \dots$ ، کدام است؟

$3^{\frac{255}{512}}$ (۴)

$3^{\frac{63}{256}}$ (۳)

$3^{\frac{127}{512}}$ (۲)

$3^{\frac{127}{256}}$ (۱)

۱۱ مجموع هشت جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی، $16, 32, 64, \dots$ ، کدام است؟

۱۲۷ (۴)

$127/5$ (۳)

۱۲۸ (۲)

$128/5$ (۱)

۱۲ حاصل $2^{-\frac{1}{3}} (\sqrt[3]{16}) \left(\frac{1}{4}\right)^{-0.5}$ ، کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

۱۳ در دنباله هندسی $4, 2, 1, \dots$ ، مجموع چهارده جمله‌ی اول چند برابر مجموع هفت جمله‌ی اول آن است؟

۱۲۹ (۴)

۱۲۷ (۳)

۶۳ (۲)

۶۵ (۱)

۱۴ در یک دنباله‌ی هندسی صعودی به صورت $a, b, 9, a, 4, \dots$ ، مجموع شش جمله اول کدام است؟

$83 \frac{1}{8}$ (۴)

$82 \frac{3}{8}$ (۳)

$81 \frac{7}{8}$ (۲)

$81 \frac{3}{8}$ (۱)

۱۵ در یک دنباله عددی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از دنباله هندسی صعودی‌اند. قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{5}{4}$ (۲)

$\frac{6}{5}$ (۱)

۱۶ اگر $2^A = \left(\frac{4^{\sqrt{32}}}{2^{\sqrt{8}}}\right)^2$ ، عدد A کدام است؟

$12\sqrt{2}$ (۴)

$8\sqrt{2}$ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

۱۷ بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟

$36(\sqrt{2} + 1)$ (۴)

$30(\sqrt{2} + 1)$ (۳)

$48\sqrt{2}$ (۲)

$30(2 + \sqrt{2})$ (۱)

۱۸ حاصل عبارت $\sqrt[6]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{6}$ کدام است؟

۱ $6\sqrt[6]{2}$

۲ $3\sqrt[6]{32}$

۳ $2\sqrt[3]{9}$

۴ ۶

۱۹ حاصل $\frac{25}{90} \times \left(\frac{3}{2}\right)^5 \times (0.75)^{-2}$ کدام است؟

۱ $2/5$

۲ $\frac{10}{3}$

۳ ۵

۴ $7/5$

۲۰ ساده شده‌ی عبارت $(12)^{-2} (32)^3 (0.75)^5$ کدام است؟

۱ ۱۸

۲ ۲۷

۳ ۳۶

۴ ۵۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱

$$\frac{x^0 \times 5^{\frac{r}{2}} \times 15^{\frac{9}{2}}}{5^{\frac{r}{2}} \times \left(\frac{5}{r}\right)^r} = r^0 \times v^0 \Rightarrow \frac{x^0 \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^r \times r^r}{5^{\frac{r}{2}} \times 5^r \times r^{-r}} = r^0 \times v^0 \Rightarrow \frac{x^0 \times \cancel{5^{\frac{1}{2}}} \times \cancel{5^r}}{\cancel{5^{\frac{r}{2}}} \times \cancel{5^r} \times r^{-r}} = \cancel{r^0} \times v^0$$

$$\Rightarrow x^0 = v^0 \Rightarrow x = v$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲

$$f(x) = 2x^r - r$$

$$f(\sqrt[r]{4}) = 2(\sqrt[r]{4})^r - r = 2(4) - r = 8$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[r]{4}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt[r]{4}}\right)^r - r = 2\left(\frac{1}{4}\right) - r = \frac{1}{2} - r = \frac{1-6}{2} = \frac{-5}{2}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt[r]{4}) - f\left(\frac{1}{\sqrt[r]{4}}\right) = 8 - \left(-\frac{5}{2}\right) = 8 + \frac{5}{2} = 8 + 2.5 = 10.5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۳

$$\begin{cases} a_r = v \\ a_v = 49 \end{cases} \Rightarrow a_{11} = ?$$

$$r = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}} \Rightarrow r = \sqrt[49-r]{\frac{49}{v}} = \sqrt[49-r]{v} \quad (1)$$

$$a_{11} = a_v \times r^{(1)} \Rightarrow a_{11} = 49 \times v = 49v$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴

$$(rx)^0 \times (r \times v)^r = v^r \times (5 \times r)^r \times 5^r \Rightarrow (rx)^0 \times \cancel{r^r} \times \cancel{v^r} = \cancel{r^r} \times 5^r \times \cancel{v^r} \times 5^r$$

$$\Rightarrow (rx)^0 = 5^r \times 5^r = 5^{2r}$$

$$rx = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{r} = 2.5$$

توان‌های طرفین تساوی با هم برابرند، پس پایه‌ها باید برابر باشند:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۵

$$A = \sqrt[r]{r^r} \sqrt[r]{r^r} \times (r \times r^r)^{-\frac{r}{r}} = \sqrt[r]{r^r \times r^r} \times r^{-\frac{r}{r}} \times r^{-r} = \sqrt[r]{r^{\frac{v}{r}} \times r^{-\frac{r}{r}}} \times r^{-r}$$

$$= r^{\frac{1}{r}} \times r^{-\frac{r}{r}} \times r^{-r} = r^{-1} \times r^{-r} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{rv} = \frac{1}{54} \Rightarrow A^{-1} = 54$$

$$(1 + A^{-1})^{-\frac{1}{r}} = (1 + 54)^{-\frac{1}{r}} = (4^r)^{-\frac{1}{r}} = 4^{-1} = \frac{1}{4} = 0.25$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶

$$f(\cdot) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(\cdot) = 2 \Rightarrow 5 - 3^b = 2 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow 5 - 3^{\frac{a}{2}+b} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5 - 3^b = 2 \Rightarrow 3^b = 3 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 5 - 3^{\frac{a}{2}+1} = 2 \Rightarrow 3^{\frac{a}{2}+1} = 3 \Rightarrow \frac{a}{2} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = 5 - 3^{-2x+1}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 - 3^{-2 \times (-\frac{1}{2})+1} = 5 - 3^{\frac{2}{2}} = 5 - \sqrt{3^2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 - \sqrt{27}$$

$$-1 < 5 - \sqrt{27} < 0 \Rightarrow \left[5 - \sqrt{27}\right] = -1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷

$$\frac{2}{3}, a, b, c, \frac{1}{3}, d, e, \dots$$

$$a_1 = \frac{2}{3}, a_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow r^{0-1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow r^1 = \frac{1}{2} \xrightarrow{r>0} r = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$e = a_v \Rightarrow e = a_1 r^6 = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^6 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$$

$$r^2 = \frac{a_0}{a_r} = \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow r = 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸

$$x = ry, z = rx \Rightarrow z = 2x, y = \frac{x}{2}$$

متغیر y واسطه‌ی هندسی x و $x - \frac{3}{2}$ است:

$$y^2 = x \left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{x^2}{2} = x^2 - \frac{3x}{2} \xrightarrow{\times 2} x^2 = 2x^2 - 3x \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow 3x(x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ق.م.م} \\ x = 1 \Rightarrow y = 1, z = 2 \Rightarrow |x| + |y| + |z| = 2 + 1 + 2 = 5 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. روش اول: ۹

$$a + 2d, a + 4d, a + 8d \Rightarrow (a + 4d)^2 = (a + 2d)(a + 8d) \Rightarrow a^2 + 8ad + 16d^2$$

$$= a^2 + 10ad + 16d^2 \Rightarrow 2ad = 0 \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = 0, a_0 = 5$$

$$d = \frac{5 - 0}{0 - 1} = \frac{5}{-1} \Rightarrow a_{1,1} = a_1 + 1 \cdot d = 5 \times (-1) = -5$$

$$r = \frac{9 - 5}{0 - 3} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}, a_r, a_0, a_q \Rightarrow a_q = ra_0 = -\frac{4}{3} \times 5 = -\frac{20}{3}$$

روش دوم:

$$\Rightarrow d = \frac{14 - 5}{9 - 0} = \frac{9}{9} = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۱۰)

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times 3^{\frac{1}{16}} \times \dots \times 3^{\frac{1}{256}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}} = A$$

از طرفی مجموع $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}$ ، مجموع n جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی با $a_1 = \frac{1}{4}$ و $r = \frac{1}{2}$ است:

$$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{256} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{256} = \frac{127}{256} \Rightarrow A = 3^{\frac{127}{256}}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۱)

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \Rightarrow S_8 = \frac{64 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^8 \right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{64 \left(1 - \frac{1}{256} \right)}{\frac{1}{2}} = 128 \left(1 - \frac{1}{256} \right)$$

$$= 128 - \frac{128}{256} = 128 - \frac{1}{2} = 127.5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۲)

$$2^{-\frac{1}{2}} \times (\sqrt[2]{16}) \left(\frac{1}{2} \right)^{-0.5} = 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{4}{2}} \times 2^1 = 2^2 = 4$$

$\sqrt[2]{16} = \sqrt{2^4}$ $\left(\frac{1}{2} \right)^{-0.5}$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در دنباله هندسی ...، ۴، ۲، ۱ داریم: $q = \frac{a_2}{a_1} = 2$ (۱۳)

در دنباله هندسی مجموع n جمله‌ی اول دنباله از رابطه‌ی $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ به دست می‌آید داریم:

$$\frac{S_{14}}{S_7} = \frac{\frac{a_1(1 - q^{14})}{1 - q}}{\frac{a_1(1 - q^7)}{1 - q}} = \frac{1 - q^{14}}{1 - q^7} = \frac{(1 - q^7)(1 + q^7)}{1 - q^7} = 1 + q^7 = 129$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. جمله‌ی اول تصاعد $t_1 = 4$ و جمله‌ی سوم آن $t_3 = 9$ است. اگر قدر نسبت دنباله را q بنامیم، طبق روابط دنباله‌ی هندسی (تذکره ۴): (۱۴)

$$t_3 = t_1 q^2 \Rightarrow 9 = 4q^2 \Rightarrow q = \pm \frac{3}{2}$$

اگر q منفی باشد، جملات دنباله یکی در میان مثبت و منفی می‌شود و دنباله غیریکنواست. پس جواب قابل قبول

$q = \frac{3}{2}$ است. به این ترتیب مجموع شش جمله‌ی اول تصاعد برابر است با:

$$S_6 = \frac{t_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{4 \left(1 - \left(\frac{3}{2} \right)^6 \right)}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{4 \left(1 - \frac{729}{64} \right)}{-\frac{1}{2}} = -8 + \frac{729}{8} = \frac{665}{8} = 83 + \frac{1}{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵

$$t_0^r = t_1 t_{11} \Rightarrow (t_1 + rd)^r = t_1 (t_1 + 10d) \Rightarrow \cancel{t_1^r} + 10t_1 d + 10d^r = \cancel{t_1^r} + 10t_1 d$$

$$rd(10d - t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = 10d \Rightarrow t_1 = 10d, t_0 = 12d, t_{11} = 10d$$

$$\Rightarrow q = \frac{12d}{10d} = \frac{6}{5}$$

روش دوم: اگر t_m, t_n, t_p جملات یک دنباله حسابی باشند که با یکدیگر تشکیل دنباله هندسی می دهند آن گاه

$$q = \frac{p - n}{n - m} \text{ است.}$$

$$t_1, t_0, t_{11} \Rightarrow q = \frac{11 - 0}{0 - 1} = \frac{11}{-1} = -11$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون حاصل عبارت سمت چپ تساوی به صورت 2^A نوشته شده است. لذا صورت و ۱۶

مخرج کسر سمت چپ تساوی را تجزیه کرده و به صورت 2^2 تبدیل می کنیم تا مقدار A مشخص شود. داریم:

$$\left(\frac{2^{\sqrt{22}}}{2^{\sqrt{11}}} \right)^2 = \left(\frac{(2^2)^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} \right)^2 = \left(\frac{2^{2\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} \right)^2 = (2^{\sqrt{2}})^2 = 2^{2\sqrt{2}} = 2^A \Rightarrow A = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر بین دو عدد a و b و k عدد را طوری قرار دهیم که این $k + 2$ عدد، تشکیل دنباله ۱۷

هندسی دهند، قدرنسبت این دنباله از رابطه $q^{k+1} = \frac{a}{b}$ یا $q^{k+1} = \frac{b}{a}$ به دست می آید.

اگر جمله اول ۲ و جمله هشتم $16\sqrt{2}$ باشد، در این صورت داریم:

$$q^{6+1} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = \frac{2^{\frac{9}{2}}}{2^1} = 2^{\frac{7}{2}} = (\sqrt{2})^7 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

می دانیم مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q از رابطه $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ به

$$S_8 = \frac{2(1 - (\sqrt{2})^8)}{1 - \sqrt{2}} \Rightarrow S_8 = \frac{2(16 - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \frac{30}{\sqrt{2} - 1}$$

با ضرب کردن مخرج و صورت در $(\sqrt{2} + 1)$ و گویا کردن مخرج، داریم:

$$S_8 = \frac{30}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{30(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = 30(\sqrt{2} + 1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$\sqrt[12]{12^2} \times \sqrt[12]{54^2} \times \sqrt[12]{2^2 \times 6} = \sqrt[12]{(2^2 \times 3)^2} \times \sqrt[12]{(3^3 \times 2)^2} \times \sqrt[12]{2^2 \times 2 \times 3}$$

$$\sqrt[12]{2^4 \times 3^4} \times \sqrt[12]{3^6 \times 2^4} \times \sqrt[12]{2^3 \times 3} = \sqrt[12]{2^{12} \times 3^{12}} = 2 \times 3 = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$\frac{5}{18} \times \frac{3^5}{2^5} \times \frac{2^3}{3^3} = \frac{5 \times 3^5 \times 2^3}{2^5 \times 3^5} = 5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times (2^5)^3 \times (3 \times 4)^{-2} &= \frac{3^5 \times 2^{15}}{4^5} \times \frac{1}{3^2 \times 4^2} = \frac{3^5 \times 2^{15}}{(2^2)^5 \times (2^2)^2 \times 3^2} \\ &= 3^2 \times \frac{2^{15}}{2^{10} \times 2^4} = 3^2 \times 2 = 54 \end{aligned}$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

