۱) برای ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$، اگر $C=A\times B$ و $D=B\times C\times A$ باشد، $|D|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲) اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $AB=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس $A\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۶ & -۱\end{bmatrix}B-\frac{۳}{۲}A\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۴ & \frac{۴}{۳}\end{bmatrix}B$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۹ ۴) -۹

۳) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & y\\ ۰ & x & ۰\\ ۱ & ۰ & z\end{bmatrix}$ و $A^۲$ ماتریس اسکالر باشد، حاصل $x^۲-y+z$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۲ ۳) -۶ ۴) صفر

۴) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & -۲ & -۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & x-۱\\ ۱ & ۱ & x\\ x & ۱ & -۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $D=ABC$ باشد، به ازای کدام مقدار x، مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس D برابر هستند؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۵) اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۰\\ ۴ & ۲ & -۵\\ -۲ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$ و ماتریس X در رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{|A|} & ۰\\ ۰ & -\sqrt{|A|}\end{bmatrix}$ صدق کند، کوچک‌ترین درایه ماتریس X کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

۶) اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۳$ کدام است؟

۱) $[۰\ -۱\ ۱]$ ۲) $[۹\ ۱۲\ ۱۶]$ ۳) $[۱\ ۰\ -۲]$ ۴) $[۹\ ۵\ -۷]$

۷) ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۴ & -۳\end{bmatrix}$، ا ماتریس همانی و α و β دو عدد حقیقی هستند که $\alpha \mathrm{A}+\beta \mathrm{I}=A^{-۱}$. مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) ۲

۸) اگر $A=\begin{bmatrix}x & -۱ & -x\\ ۰ & ۰ & ۴\\ y & z & z\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲z & \frac{۱}{۲} & ۲\\ ۲z & ۰ & -۴y\\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}$ و ماتریس AB به ازای $y\in \mathrm{Z}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار xy کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۹) فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$. اگر $\mathrm{BA}^{T}A=۵۳I$ باشد، ماکزیمم مقدار درایه‌های ماتریس B، کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۱۰) فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۸ & ۴\\ ۳ & ۲ & ۵\\ ۶ & ۹ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$. مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۱۱) اگر ماتریس ناصفر $b=\begin{bmatrix}b_۱\\ b_۲\end{bmatrix}$ چنان باشد که $\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ ۴ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_۱\\ b_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴b_۱\\ ۴b_۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه مقدار a، کدام است؟

۱) -۴ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۱۲

۱۲) از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}$، ماتریس X، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۷ & ۹\\ ۴ & ۴\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۷ & ۹\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۹ & ۷\\ -۴ & -۴\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۹ & -۷\\ ۴ & ۴\end{bmatrix}$

۱۳) فرض کنید $A=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲}\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و ماتریس X، جواب معادله‌ی $\mathrm{AX}=A^{-۱}$، باشد. ماتریس X، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۳۲ & ۱۴\\ ۴۸ & -۲۵\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۳۲ & -۱۴\\ -۵۶ & ۲۵\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱۶ & -۷\\ -۲۸ & ۲۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱۶ & -۷\\ -۲۵ & ۱۴\end{bmatrix}$

۱۴) اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۵\\ -۳ & ۰ & ۴\\ ۱ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$، کدام است؟

۱) $[۳۰\ ۶\ ۶۴]$ ۲) $[۳۰\ ۶\ ۷۸]$ ۳) $[۲۴\ ۸\ ۸۶]$ ۴) $[۳۰\ ۶\ ۸۶]$

۱۵) اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۴$، کدام است؟

۱) $[۰\ ۱\ ۰]$ ۲) $[۱\ ۰\ ۰]$ ۳) $[۰\ ۰\ ۱]$ ۴) $[۱\ ۰\ ۱]$

۱۶) اگر $a+b+c=۵$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{bmatrix} ۴+a & b & c \\ a & ۴+b & c \\ a & b & ۴+c \end{bmatrix}$، کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۴ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۴۴

۱۷) اگر دترمینان $D = \begin{vmatrix} ۶ & ۳x & ۲x \\ ۳x & ۲x & ۶ \\ ۲x & ۶ & ۳x \end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} x^۲ & x^۲ & ۶ \\ ۹ & ۲x & ۹ \\ ۳x & ۴ & ۴ \end{vmatrix}$، کدام است؟

۱) $-۲D$ ۲) $-D$ ۳) $\frac{۱}{۲}D$ ۴) D

۱۸) در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - ۳y = ۷ \\ bx + ۴y = ۲ \end{cases}$ اگر دترمینان ماتریس ضرایب برابر ۱۷ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۹) اگر $A = \begin{bmatrix} ۵+a & b & c \\ a & ۵+b & c \\ a & b & ۵+c \end{bmatrix}$ با شرط $a+b+c=۷$، دترمینان ماتریس $(۵A^{-۱})$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۷}$

۲۰) اگر به هر درایه در سطر دوّم دترمینان $\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۴ & -۲ & ۷ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix}$ یک واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان ۶ واحد اضافه می‌شود. a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس D را پیدا می‌کنیم. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم:

$$D = B\times C\times A = B\times A\times B\times A = (\mathrm{BA})(\mathrm{BA}) = (\mathrm{BA})^{۲} \quad (۱)$$

اکنون ماتریس BA را به دست می‌آوریم.

$$\mathrm{BA} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathrm{BA}| = ۲$$

بنابراین: $(۱)\ \text{از} \Rightarrow |D| = \left|(\mathrm{BA})^{۲}\right| = |\mathrm{BA}|^{۲} = ۲^{۲} = ۴$

۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از ماتریس A از چپ و از ماتریس B از راست فاکتور می‌گیریم.

$$A\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix}B - \frac{۳}{۲}A\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۴ & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix}B = A\left(\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix} - \frac{۳}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۴ & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix}\right)B$$

$$= A\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}B = A(-۳I)B = -۳\mathrm{AB} = -۳\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۹ & -۶ \\ \frac{-۳}{۲} & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین حاصلضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی این ماتریس برابر ۹ است.

۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & y \\ ۰ & x & ۰ \\ ۱ & ۰ & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & y \\ ۰ & x & ۰ \\ ۱ & ۰ & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+y & ۰ & y+\mathrm{yz} \\ ۰ & x^{۲} & ۰ \\ ۱+z & ۰ & y+z^{۲} \end{bmatrix}$$

در ماتریس اسکالر، درایه‌های روی قطر اصلی برابرند و درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند. پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱+z = ۰ \Rightarrow z = -۱ \\ x^{۲} = ۱+y \Rightarrow x^{۲} - y = ۱ \end{cases} \xrightarrow{+} x^{۲} - y + z = ۰$$

۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$D = \mathrm{ABC} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x-۱ \\ ۱ & ۱ & x \\ x & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & x+۱ & x-۱ \\ x & -x+۲ & x \\ -x-۲ & -۳ & -۲x+۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+۵ & \bigcirc & x+۱ \\ \bigcirc & ۰ & \bigcirc \\ -۲x-۷ & \bigcirc & -۳ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر فرعی = مجموع درایه‌های قطر اصلی $\Rightarrow x+۲ = -x-۶ \Rightarrow ۲x = -۸ \Rightarrow x = -۴$

۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان A را نسبت به ستون سوم به دست می‌آوریم.

$$|A| = -(-۵)(-۱+۶) = ۲۵$$

از طرف دیگر اگر $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ آنگاه رابطه ماتریس داده شده به صورت $\mathrm{BXC} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ درمی‌آید. بنابراین $X = B^{-۱}\begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}C^{-۱}$ داریم:

$$X = \frac{۱}{-۸+۳}\begin{bmatrix} -۴ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix} \times \frac{۱}{۲-۴}\begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} = \frac{۵}{۱۰}\begin{bmatrix} -۴ & -۱ \\ -۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۴/۵ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$$

۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا درایه‌های ماتریس $A^{۲}$ را به دست آورید:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۳&-۳&۴\\۲&-۳&۴\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۳&۴\\۲&-۳&۴\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$ را به دست می‌آوریم:

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}۳&-۴&۴\\۰&-۱&۰\\-۲&۲&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۳&۴\\۲&-۳&۴\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۱&۰\\&&\\&&\end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$ به صورت $[۰\ -۱\ \ ۱]$ است.

۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱&۲\\۴&-۳\end{bmatrix}$ برابر $A^{-۱}=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix}-۳&-۲\\-۴&-۱\end{bmatrix}$ است. پس:

$$\alpha A+\beta I=A^{-۱}\Rightarrow\alpha\begin{bmatrix}-۱&۲\\۴&-۳\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix}-۳&-۲\\-۴&-۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-\alpha+\beta&۲\alpha\\۴\alpha&-۳\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵}&\frac{۲}{۵}\\\frac{۴}{۵}&\frac{۱}{۵}\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases}-\alpha+\beta=\frac{۳}{۵}\Rightarrow-\frac{۱}{۵}+\beta=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\beta=\frac{۴}{۵}\\۲\alpha=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۵}\end{cases}$$

در نتیجه $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۱}{۵}}=۴$.

۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم.

$$AB=\begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2xz-2z & 0 & 2x+4y \\ 0 & 2 & 0 \\ 2yz+2z^2 & \frac{y}{2}+\frac{z}{2} & 2y-4yz \end{bmatrix}$$

ماتریس AB ماتریس اسکار است پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یکدیگرند. بنابراین:

$$\begin{cases} 2xz-2z=2\Rightarrow xz+z=1 \xrightarrow{\text{از }(1)} -xy+y=1 \\ 2y-4yz=2\Rightarrow y-2yz=1 \xrightarrow{\text{از }(1)} y+2y^2=1 \\ 2x+4y=0\Rightarrow x=-2y \\ 2yz+2z^2=0 \xrightarrow{z\neq 0} y=-z\ (1) \\ \frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0\Rightarrow y=-z \end{cases}$$

در نتیجه:

$$2y^2+y-1=0\Rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}\Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=\frac{1}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین: $-xy+y=1 \xrightarrow{y=-1} -xy-1=1\Rightarrow xy=-2$

دقت کنید $z\neq 0$ زیرا در غیر این صورت مقدار $2xz-2z$ برابر صفر است و با اسکالر بودن ماتریس AB در تناقض است.

۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: ماتریس A^T (ترانهادهٔ ماتریس A)، ماتریسی است که از تعویض جای سطرها و ستون‌های ماتریس A حاصل می‌شود. (این تعریف در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد.)

$$A^TA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA^TA=52I\Rightarrow B\times\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}=52I\Rightarrow B\times\frac{1}{52}\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}=I$$

بنابراین ماتریس B، وارون ماتریس $\frac{1}{52}\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ است و در نتیجه داریم:

$$B=52\times\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 28 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیمم درایه‌های ماتریس B، برابر ۲۸ است.

تذکر: وارون ماتریس kA به صورت $\frac{1}{k}A^{-1}$ است.

۱۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فقط درایه‌های قطر اصلی A را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & ? & ? \\ ? & 7 & ? \\ ? & ? & 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر $9+7+5=21$ است.

۱۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از تساوی ماتریسی داده شده یک دستگاه می‌سازیم و آن‌را حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۴ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵b_۱ - ۲b_۲ \\ ۴b_۱ + ab_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۵b_۱ - ۲b_۲ = ۴b_۱ \\ ۴b_۱ + ab_۲ = ۴b_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_۱ = ۲b_۲ \\ ۴b_۱ + ab_۲ = ۴b_۲ \end{cases} \xrightarrow{b_۱ = ۲b_۲} ۸b_۲ + ab_۲ = ۴b_۲ \Rightarrow a = -۴$$

۱۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم $B^{-۱} = \frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$ و با فرض $C = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم $C^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$.

حال طرفین رابطه‌ی ماتریسی داده شده را از چپ در $B^{-۱}$ و از راست در $C^{-۱}$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow X = B^{-۱}\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix} C^{-۱}$$

$$\Rightarrow X = \frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = -\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۲۰ & -۲۴ \\ -۱۶ & ۱۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & ۶ \\ ۴ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۷ \\ -۴ & -۴ \end{bmatrix}$$

۱۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین تساوی $AX = A^{-۱}$ را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به دست آید.

$$AX = A^{-۱} \Rightarrow X = (A^{-۱})^{۲} \quad (۱)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{\frac{۳}{۴} - ۱}\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۲} \\ -۲ & \frac{۳}{۴} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = -۴\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۲} \\ -۲ & \frac{۳}{۴} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۸ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$(A^{-۱})^{۲} = \begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۸ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۸ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۲ & -۱۴ \\ -۵۶ & ۲۵ \end{bmatrix}$$

۱۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا سطر اول ماتریس $A^{۲}$ و سپس سطر اول $A^{۳}$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۲۴ \\ U & & \\ U & & \end{bmatrix}$$

$$A^{۳} = A^{۲} \times A = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۲۴ \\ U & & \\ U & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۰ & ۶ & ۸۶ \\ U & & \\ U & & \end{bmatrix}$$

۱۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به دست می‌آوریم.

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

حال فقط درایه‌های سطر اول $A^{۴}$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^{۴} = A^{۲} \times A^{۲} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

۱۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر ستون اول ماتریس را هم‌زمان با دو ستون دیگر ماتریس جمع کنیم، آن‌گاه داریم:

$$\begin{vmatrix} a+b+c+۴ & b & c \\ a+b+c+۴ & b+۴ & c \\ a+b+c+۴ & b & c+۴ \end{vmatrix} = (a+b+c+۴)\begin{vmatrix} ۱ & b & c \\ ۱ & b+۴ & c \\ ۱ & b & c+۴ \end{vmatrix}$$

حال اگر سطرهای دوم و سوم را منهای سطر اول کنیم، خواهیم داشت:

۱۷ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. روش اول:

$$\text{فرض:} \begin{vmatrix} ۶ & ۳x & ۲x \\ ۳x & ۲x & ۶x \\ ۲x & ۶ & ۳x \end{vmatrix} = D \xrightarrow[x=۱]{\text{عددگذاری}} \begin{vmatrix} + & - & + \\ ۶ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۶ \\ ۲ & ۶ & ۳ \end{vmatrix} = ۶(-۳۰) - ۳(-۳) + ۲(۱۴) = ۱۸۰ + ۹ + ۲۸ = -۱۴۳$$

$$\text{کم:} \begin{vmatrix} x^۲ & x^۲ & ۶ \\ ۹ & ۲x & ۹ \\ ۳x & ۴ & ۴ \end{vmatrix} \overset{x=۱}{\rightleftarrows} \begin{vmatrix} + & - & + \\ ۱ & ۱ & ۶ \\ ۹ & ۲ & ۹ \\ ۳ & ۴ & ۴ \end{vmatrix} = ۱\times(-۲۸) - ۱\times(-۹) + ۶\times(۳۰) = -۲۸ - ۹ + ۱۸۰ = +۱۴۳$$

روش دوم: با انتخاب $x = ۰$ نتیجه می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix} ۶ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۶ & ۰ \end{vmatrix} = D \Rightarrow ۶(-۶^۲) = D \Rightarrow D = -۶^۳$$

حالا مقدار دترمینان خواسته شده را به‌ازای $x = ۰$ به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۶ \\ ۹ & ۰ & ۹ \\ ۰ & ۴ & ۴ \end{vmatrix} = ۶(۳۶) = ۶^۳$$

بنابراین این دترمینان برابر $-D$ می‌باشد.

۱۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - ۳y = ۷ \\ bx + ۴y = ۲ \end{cases}$ اگر دترمینان ماتریس ضرایب ۱۷ باشد، مقدار x از روش کرامر برابر است با:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} ۷ & -۳ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -۳ \\ b & ۴ \end{vmatrix}} = \frac{۷\times۴ - ۲\times(-۳)}{\text{دترمینان ماتریس ضرایب}} = \frac{۲۸ + ۶}{۱۷} = ۲$$

توجه: یادآوری می‌شود که طبق دستور کرامر داریم:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

۱۹ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ستون دوم و سوم را به ستون اول اضافه کرده و از $b+c+۵$ فاکتور می‌گیریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+b+c+۵ & b & c \\ a+b+c+۵ & b+۵ & c \\ a+b+c+۵ & b & c+۵ \end{vmatrix}=(a+b+c+۵)\begin{vmatrix} ۱ & b & c \\ ۱ & b+۵ & c \\ ۱ & b & c+۵ \end{vmatrix}$$

قرینه‌ی سطر اول را به دو سطر بعدی اضافه می‌کنیم.

$$|A|=۱۲\begin{vmatrix} ۱ & b & c \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{vmatrix}=۱۲\times ۵^{۲}$$

$$(\left|۵A^{-۱}\right|)=۵^{۳}\left|A^{-۱}\right|=۵^{۳}\frac{۱}{|A|}=\frac{۵^{۳}}{۱۲\times ۵^{۲}}=\frac{۵}{۱۲}$$

۲۰ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۴ & -۲ & ۷ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix}=۲۰a-۱۸۹ \right\} \xrightarrow[\text{فرض سوال}]{\text{باتوجه به}} (۲۰a-۱۸۹)+۶=۲۵a-۱۹۸\Rightarrow ۵a=۱۵\Rightarrow a=۳$$
$$\left.\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۵ & -۱ & ۸ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix}=۲۵a-۱۹۸ \right\}$$

روش دوم:

می‌دانیم $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix}=۶\xrightarrow{\text{سطر سوم}}۰-۵\times(۳-a)+۶(۳-۲)=۶\ \rightarrow ۰-۵\times(۳-a)=۰\Rightarrow a=۳$$

پاسخنامه کلیدی

۱	**۱**	۲	۳	۴
۲	۱	۲	**۳**	۴
۳	۱	۲	۳	**۴**
۴	**۱**	۲	۳	۴
۵	**۱**	۲	۳	۴
۶	**۱**	۲	۳	۴
۷	۱	**۲**	۳	۴
۸	۱	**۲**	۳	۴
۹	۱	۲	۳	**۴**
۱۰	۱	۲	۳	**۴**
۱۱	**۱**	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	**۳**	۴
۱۳	۱	**۲**	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	**۴**
۱۵	۱	**۲**	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	**۴**
۱۷	۱	**۲**	۳	۴
۱۸	۱	۲	**۳**	۴
۱۹	**۱**	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	**۳**	۴