



۱) اگر $A = (-1, 2, 0)$ ، $B = (1, 0, -1)$ و $C = (0, -1, 1)$ ، سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

۲) اگر $\vec{e}_1$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{e}_2$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $3\vec{a}$ و $2\vec{b}$ باشد، طول یکی از قطرهای متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ تولید می شود، کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

۳) اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، 60° باشد، اندازه تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

۴) مساحت مثلثی برابر ۶۴ و مختصات وسط اضلاع آن نقاط $A(3, a, b)$ ، $B(-1, -a, b)$ و $C(5, -4, b)$ هستند. طول ضلع AB کدام می تواند باشد؟ (با اندکی تغییر)

$$10\sqrt{2} \quad (4)$$

$$8\sqrt{2} \quad (3)$$

$$4\sqrt{10} \quad (2)$$

$$2\sqrt{10} \quad (1)$$

۵) یک متوازی السطوح توسط بردارهای $\vec{a} = (2, -3, 4)$ ، $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ و $\vec{c} = (3, -2, 1)$ تولید شده و صفحه P شامل بردارهای b و c است. اندازه ارتفاع این متوازی السطوح عمود بر صفحه P، کدام است؟

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (3)$$

$$5\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{5} \quad (1)$$

۶) فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای ناصفری هستند که ضرب داخلی آنها، $-\frac{3}{5}$ حاصل ضرب اندازه های دو بردار است.

مساحت مثلثی را که توسط بردارهای $\left(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ و $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ ساخته می شود، کدام است؟

$$1/6 \quad (4)$$

$$3/2 \quad (3)$$

$$4/8 \quad (2)$$

$$6/4 \quad (1)$$

۷ اندازه تصویر قائم بردار $(2, -a, 3)$ بر امتداد بردار $(1, 0, a)$ برابر $\frac{5}{\sqrt{2}}$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۷ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{10}{7}$

۸ به ازای کدام مقدار m ، بردار $a = (-3, 10, m)$ برابر مجموع دو بردار هم‌راستا با بردارهای $(3, 1, 2)$ و $(1, 4, -2)$ است؟

- ۱) -۱۰ ۲) -۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۹ دو بردار a و b با معلومات $|a| = 5$ و $|b| = 7$ و $a - b = 2i + j - 3k$ مفروض‌اند. تصویر قائم بردار b بر روی بردار a ، چند برابر بردار a است؟

- ۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۰ نقطه‌ی O مبدأ مختصات و $\vec{OA} = 3i + j$ و $\vec{OB} = -i + 5j + 2k$ مفروض هستند. اگر $\vec{AM} = -\frac{3}{4}\vec{AB}$

باشد، کسینوس زاویه‌ی برار $\vec{OM}$ با محور z ها کدام است؟

- ۱) $-\frac{2}{5}$ ۲) $-\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۱۱ چهار بردار a, b, c و d در دو رابطه $a \times c = d \times b$ و $a \times d = c \times b$ صدق می‌کنند، الزاماً دو بردار غیر صفر $a + b$ و $c + d$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

- ۱) مساوی ۲) قرینه ۳) عمود ۴) موازی

۱۲ اگر $\vec{AB} + \vec{BC} + 3\vec{MP} + 3\vec{PN} = 0$ ، آنگاه زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{AC}$ و $\vec{MN}$ چند درجه است؟

- ۱) صفر ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۸۰

۱۳ اگر $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 2$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ، آنگاه $|\vec{a} + \vec{b}| - |\vec{a} - \vec{b}|$ کدام است؟

- ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{5}$

۱۴ سه بردار a و b و c با اندازه‌ی ۳ و ۴ و ۷ واحد در رابطه‌ی $a + b + c = 0$ صدق می‌کنند، مقدار $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ کدام است؟

- ۱) -۳۷ ۲) -۱۹ ۳) ۱۹ ۴) ۳۷

۱۵ بردار $a = i + 2j - 4k$ به صورت ترکیبی از بردارهای واحد محورهای مختصات داده شده است. مساحت متوازی‌الاضلاعی که بر روی دو بردار a و $a \times k$ ساخته شود، کدام است؟

- ۱) $\sqrt{14}$ ۲) $\sqrt{96}$ ۳) $\sqrt{102}$ ۴) $\sqrt{105}$

۱۶ اگر a, b, c و d چهار بردار دلخواه باشند، آنگاه سه بردار $a \times d, b \times d$ و $c \times d$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

- ۱) موازی یک صفحه‌اند ۲) موازی هم‌اند ۳) دو به دو عمود بر هم‌اند ۴) مجموع آن‌ها برابر صفر است.

۱۷ به ازای کدام مقدار m ، بردار $a = (1, 2, m)$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار در راستاهای $(0, -1, 2)$ و $(2, 3, -1)$ نوشت؟

$\frac{-3}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{-2}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۱۸ در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۸ حاصل $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ چقدر است؟

-۱۲ (۴)

-۲۴ (۳)

۳۶ (۲)

۳۲ (۱)

۱۹ تصویر نقطه ی $A(-2, 1, 3)$ روی محور یها کدام است؟

$(0, -1, 0)$ (۴)

$(0, 1, 0)$ (۳)

$(-2, 0, 3)$ (۲)

$(-2, -1, 3)$ (۱)

۲۰ اگر $\vec{a} = (1, 1, 2)$ ، $\vec{b} = (-1, 2, 1)$ باشد، حاصل ضرب داخلی $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ کدام است؟

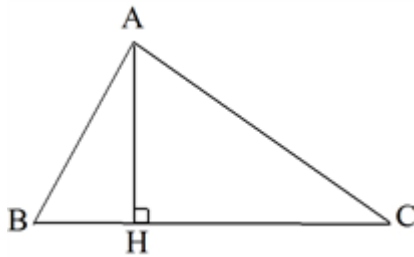
صفر (۴)

-۱ (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه حل اول: BH اندازه‌ی تصویر بردار $\vec{BA}$ روی بردار $\vec{B}$ است.



$$\vec{BA} = A - B = (-2, 2, 1)$$

$$\vec{BC} = C - B = (-1, -1, 2)$$

$$|\vec{BH}| = \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{BC}|}{|\vec{BC}|} = \frac{2-2+2}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$, = |\vec{AB}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

بنابراین:

$$\triangle ABH : AH^2 = AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH^2 = 9 - \frac{4}{6} = \frac{25}{3} \Rightarrow AH = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

راه حل دوم: مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم.

$$\vec{BA} = AB - (-2, 2, 1) \Rightarrow \vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5i + 3j + 4k$$

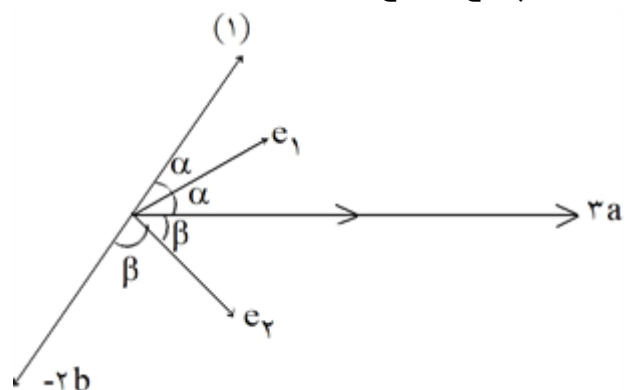
$$\vec{BC} = C - B = (-1, -1, 2)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{BA} \times \vec{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 9 + 16} = \frac{5\sqrt{2}}{2}, |\vec{BC}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} AH \times \sqrt{6} \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



e_1 در راستای نیمساز داخلی زاویه بین بردارهای a و b و e_2 در راستای نیمساز خارجی این دو بردار است. پس: $e_1 \perp e_2$. بنابراین متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای واحد e_1 و e_2 مربع به ضلع ۱ می‌باشد. در نتیجه طول قطر این مربع $\sqrt{2}$ است.

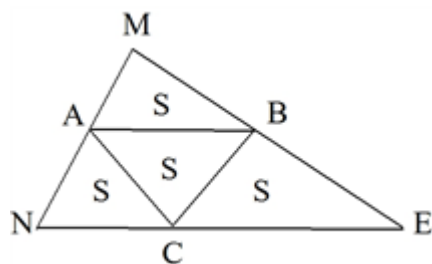
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ برابر $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ است. پس اندازه تصویر

بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ روی بردار $\vec{a}$ برابر است با:

$$\frac{\left| \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \cdot \vec{a} \right|}{|\vec{a}|} = \frac{\left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right|}{|\vec{a}|} = \frac{\left| \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|} + \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi}{|\vec{b}|} \right|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}| + |\vec{a}| \left(\frac{1}{2} \right)}{|\vec{a}|}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط A و B و C وسط اضلاع مثلث MNE به مساحت ۶۴ است. چون $\triangle ABC$ با $\triangle MNE$ متشابه با نسبت $\frac{1}{2}$ است داریم:



$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{S_{MNE}=64} S_{ABC} = 16$$

اکنون با استفاده از ضرب خارجی مساحت مثلث ABC می‌کنیم.

$$\vec{AB} = B - A = (-2, -2a, 0)$$

$$\vec{AC} = C - A = (2, -2 - a, 0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2a & 0 \\ 2 & -2-a & 0 \end{vmatrix} = (16 + 2a + 2a)k = (16 + 4a)k$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \Rightarrow 16 = \frac{1}{2} \sqrt{(16 + 4a)^2} \Rightarrow |16 + 4a| = 32$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 + 4a = 32 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \vec{AB} = (-2, -2, 0) \Rightarrow |\vec{AB}| = 2\sqrt{2} \\ 16 + 4a = -32 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow \vec{AB} = (-2, 12, 0) \Rightarrow |\vec{AB}| = 2\sqrt{13} \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حجم متوازی السطوح و مساحت قاعده متوازی السطوح که متوازی الاضلاع به ضلع‌های $\vec{b}$ و $\vec{c}$ است را پیدا می‌کنیم.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1i + 10j - 4k$$

$$S = |\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{1^2 + 10^2 + 4^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

$$a \cdot (b \times c) = (2, -3, 4) \cdot (1, 10, -4) = 2 - 30 - 16 = -44$$

$$V = |a \cdot (b \times c)| = 44$$

$$V = Sh \Rightarrow 44 = 3\sqrt{13}h \Rightarrow h = \frac{44}{3\sqrt{13}}$$

بنابراین:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم θ زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد بنابر فرض سؤال می‌نویسیم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{5}|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = -\frac{3}{5}|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \times \left(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|} \right) \right|$$

بنابراین:

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{3\vec{a} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} + \frac{2\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} - \frac{6\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b}||\vec{a}|} - \frac{2\vec{b} \times \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{6\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right|$$

$$= \frac{3}{|\vec{a}||\vec{b}|} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{3}{|\vec{a}||\vec{b}|} |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta = 3 \sin \theta = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ از رابطه $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ به دست

می‌آید، بنابراین با فرض $\vec{b} = (1, 0, a)$, $\vec{a} = (2, -a, 3)$ داریم:

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{1+a^2}} \Rightarrow \frac{|2+0+3a|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{5}{\sqrt{1+a^2}} \Rightarrow \frac{|2+3a|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{5}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\frac{(2+3a)^2}{1+a^2} = \frac{25}{1+a^2} \Rightarrow 2(4+12a+9a^2) = 25(1+a^2) \Rightarrow 7a^2 - 24a + 17 = 0$$

$$\text{جمع ضرایب} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=\frac{17}{7} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف مقادیر } a = \frac{17}{7} - 1 = \frac{10}{7}$$

۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر بردار a به صورت مجموع دو بردار در راستاهای دو بردار b و c نوشته شود، آن‌گاه سه بردار a ، b و c قطعاً هم‌صفحه‌اند، یعنی $(b \times c) = 0$ است. داریم:

$$\begin{vmatrix} -3 & 10 & m \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (6 + 20 + 12m) - (m - 24 - 60) = 0 \Rightarrow 11m + 110 = 0 \\ \Rightarrow 11m = -110 \Rightarrow m = -10$$

۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر b' تصویر قائم b روی a باشد آن‌گاه $b' = \frac{a \cdot b}{|a|^2} a$ بنابراین $\frac{a \cdot b}{|a|^2}$ را باید به دست آوریم.

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b \Rightarrow 4 + 1 + 9 = 25 + 49 - 2a \cdot b \Rightarrow a \cdot b = 30$$

$$\frac{a \cdot b}{|a|^2} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

۱۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$ و $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ داریم:

$$\vec{AM} = -\frac{3}{4}\vec{AB} \Rightarrow 4(\vec{OM} - \vec{OA}) = -3(\vec{OB} - \vec{OA}) \Rightarrow \\ 4\vec{OM} - 4\vec{OA} = -3\vec{OB} + 3\vec{OA} \Rightarrow 4\vec{OM} = -3\vec{OB} + 7\vec{OA} \Rightarrow \\ 4\vec{OM} = -3(-i + 5j + 4k) + 7(3i + j) = 34i - 13j - 12k \Rightarrow \vec{OM} = 8.5i - 3.25j - 3k \\ \cos \theta = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{j}}{|\vec{OM}| |\vec{j}|} = \frac{-3.25}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = -\frac{3}{7}$$

۱۱

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} a \times d &= c \times b \\ a \times c &= d \times b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \times d - d \times b = c \times b - a \times c \Rightarrow a \times d + b \times d = c \times b + c \times a \\ \Rightarrow (a + b) \times d = c \times (b + a) \Rightarrow (a + b) \times d - c \times (b + a) = 0 \\ \Rightarrow (a + b) \times d + (a + b) \times c = 0 \Rightarrow (a + b) \times (d + c) = 0 \Rightarrow a + b \parallel d + c$$

پس دو بردار موازیند و گزینه‌ی ۴ درست است.

۱۲

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + 3\vec{MP} + 3\vec{PN} = 0 \Rightarrow (\vec{AB} + \vec{BC}) + 3(\vec{MP} + \vec{PN}) = 0 \Rightarrow \vec{AC} + 3\vec{MN} = 0$$

می‌دانیم اگر $\vec{a} + \vec{b} = 0$ باشد، دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قرینه‌ی هم بوده و زاویه‌ی بین آن‌ها 180° درجه است. با توجه به

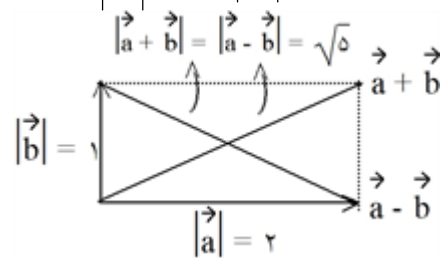
این توضیحات چون $\vec{AC} + 3\vec{MN} = 0$ است، لذا دو بردار $\vec{AC}$ و $3\vec{MN}$ قرینه‌ی هم بوده و زاویه‌ی بین آن‌ها 180° درجه است. از طرفی چون دو بردار $\vec{MN}$ و $3\vec{MN}$ موازی و هم‌جهت هم می‌باشند، بنابراین زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{AC}$ و $\vec{MN}$ نیز همان 180° درجه خواهد بود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 2$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ است. چون ضرب داخلی دو برابر $\vec{a}$ و $\vec{b}$

برابر صفر است، نتیجه می‌گیریم که این دو بردار بر هم عمود می‌باشند. حال اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را عمود برهم در نظر بگیریم، طبق روش متوازی الاضلاع دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ ، اقطار مستطیلی به اضلاع ۲ و ۱ می‌باشند و چون در هر مستطیل طول دو قطر با هم برابرند، نتیجه می‌گیریم که:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| - |\vec{a} - \vec{b}| = 0$$

(در واقع $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 1$ داده‌های اضافی‌اند).

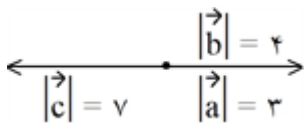


گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \rightarrow$$

$$0 = 3^2 + 4^2 + 7^2 + 2x \rightarrow x = -37$$

روش دوم: از آنجا که $3 + 4 = 7$ ، بنابراین این سه بردار به شکل زیر هستند و داریم:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 3 \times 4 \times \cos 0^\circ + 4 \times 7 \times \cos 180^\circ + 7 \times 3 \times \cos 180^\circ = 12 - 28 - 21 = -37$$

$$\vec{a} = (1, 2, -4) \rightarrow \vec{a} \times \vec{k} = (2, -1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

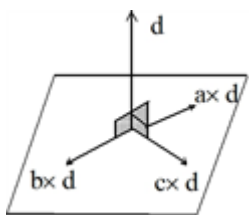
حال مساحت متوازی الاضلاعی که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a} \times \vec{k}$ ساخته می‌شود برابر است با اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی این دو بردار:

$$\vec{a} = (1, 2, -4) \rightarrow \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{k}) = (-4, -8, -5) \rightarrow S = |\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{k})| =$$

$$|\vec{a} \times \vec{k}| = (2, -1, 0)$$

$$= \sqrt{16 + 4 + 0} = \sqrt{20}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بردارهای $\vec{a} \times \vec{d}$ و $\vec{b} \times \vec{d}$ و $\vec{c} \times \vec{d}$ همگی عمود بر $\vec{d}$ هستند و در نتیجه در



صفحه‌ای عمود بر $\vec{d}$ (یا به عبارت دیگر در صفحه‌ای که بردار نرمالش $\vec{d}$ باشد) قرار می‌گیرند.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تمام بردارهای هم‌راستا با بردار $\vec{V}$ به صورت $\alpha \vec{V}$ می‌باشند، بنابراین طبق صورت تست داریم:

$$(1, 2, m) = \underbrace{\alpha(2, 3, -1)}_{\text{هم‌راستا با } (2, 3, -1)} + \underbrace{\beta(0, -1, 2)}_{\text{هم‌راستا با } (0, -1, 2)} \rightarrow (1, 2, m) = (2\alpha, 3\alpha - \beta, -\alpha + 2\beta)$$

حال مولفه‌ها را نظیر به نظیر برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 3\alpha - \beta = 2 \\ -\alpha + 2\beta = m \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{-1}{2} \rightarrow m = \frac{-3}{2}$$

روش دوم: بردار c را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از دو بردار a و b نوشت (یعنی $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$)، اگر و

فقط اگر سه بردار در یک صفحه باشند یا به عبارت دیگر $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 0 + 1(2m + 1) + 2(4 - 3) = 0 \rightarrow 2m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{-3}{2}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. توجه کنید زاویه‌ی بین $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ برابر 120° درجه و زاویه‌ی بین $\vec{BC}$ و $\vec{AC}$ برابر 60° درجه و زاویه‌ی بین $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ برابر 60° درجه است.

$$\begin{aligned} & \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ &= |\vec{AB}| |\vec{BC}| \cos 120^\circ + |\vec{BC}| |\vec{AC}| \cos 60^\circ + |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos 60^\circ \\ &= 8 \times 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 8 \times 8 \times \frac{1}{2} + 8 \times 8 \times \frac{1}{2} = 32 \end{aligned}$$



گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تصویر هر نقطه مانند $A(x, y, z)$ روی محور x ها به صورت $A'(x, 0, 0)$ ، روی محور y ها به صورت $A(0, y, 0)$ و روی محور z ها به صورت $A(0, 0, z)$ است. لذا تصویر نقطه‌ی $A(-2, 1, 3)$ روی محور y ها به صورت $(0, 1, 0)$ است.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (1, 1, 2) \text{ و } \vec{b} = (-1, 2, 1) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (0, 3, 3), \vec{a} - \vec{b} = (2, -1, 1) \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= (0, 3, 3) \cdot (2, -1, 1) = 0 \times 2 + 3 \times (-1) + 3 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = (\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2})^2 - (\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2})^2 = 6 - 6 = 0$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

