



۱) اگر عدد طبیعی $a > 3$ اعداد $7m + 2$ و $11m + 4$ را عاد کند، کدام مورد نمی‌تواند عدد اول بزرگتر از ۳ باشد؟

- ☐ ۱ $ak + 1$
 ☐ ۲ $ak + 3$
 ☐ ۳ $ak + 5$
 ☐ ۴ $ak + 7$

۲) به ازای کدام مقدار زیر برای a ، معادله سیاله $51x + 85y = 7a - 1$ دارای جواب است؟

- ☐ ۱ ۳۴
 ☐ ۲ ۳۹
 ☐ ۳ ۴۴
 ☐ ۴ ۴۹

۳) عدد صحیح a مضرب ۶ و باقیمانده تقسیم آن بر ۱۷ برابر ۱۱ است. باقیمانده تقسیم $\frac{a}{3}$ بر ۱۷ کدام است؟

- ☐ ۱ ۱۵
 ☐ ۲ ۱۱
 ☐ ۳ ۸
 ☐ ۴ ۶

۴) جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $11x + 15y = 209$ به صورت $x = a - bk$ و $y = c + dk$ و $k \in \mathbb{Z}$ هستند. اگر a, b, c و d مثبت باشند، به ازای چند مقدار صحیح k ، حاصل $x + y$ مثبت است؟

- ☐ ۱ ۴
 ☐ ۲ ۳
 ☐ ۳ ۲
 ☐ ۴ ۱

۵) باقیمانده تقسیم عدد $9 \times (21^{23} - 24^{23})$ بر عدد ۵۶ چقدر است؟

- ☐ ۱ ۷
 ☐ ۲ ۵
 ☐ ۳ ۳
 ☐ ۴ ۱

۶) رقم یکان عدد $(2! + 4! + \dots + 26!)(1! + 3! + 5! + \dots + 25!)$ کدام است؟

- ☐ ۱ ۲
 ☐ ۲ ۳
 ☐ ۳ ۵
 ☐ ۴ ۸

۷) در مجموعه‌ی اعداد طبیعی اگر $(3n^2 - 2n + 6, 3n + 5) = d$ و $d \neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟

- ☐ ۱ ۴۱
 ☐ ۲ ۴۳
 ☐ ۳ ۴۷
 ☐ ۴ ۵۳

۸) پنج برابر عدد دو رقمی $\overline{aa}$ را در سمت چپ $\overline{aa}$ قرار داده و آن را m می‌نامیم. m همنهشت کدام عدد زیر، به پیمانه‌ی ۱۸۳۷ است؟

- ☐ ۱ صفر
 ☐ ۲ ۱
 ☐ ۳ ۲
 ☐ ۴ ۳

۹) به ازای بعضی از مقادیر، $n \in \mathbb{N}$ اگر $11n + 3$ و $5n + 4$ و 1 و $\alpha \neq 1$ ، آن‌گاه تعداد اعداد دورقمی n در این حالت، کدام است؟

- ☐ ۱ ۲
 ☐ ۲ ۳
 ☐ ۳ ۴
 ☐ ۴ ۵

۱۰) اگر باقیمانده‌ی تقسیم عددی بر ۹ و ۱۳ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم این عدد بر ۳۹ کدام است؟

- ☐ ۱ ۱۲
 ☐ ۲ ۲۰
 ☐ ۳ ۲۱
 ☐ ۴ ۲۴

۱۱) معادله‌ی سیاله‌ی $3x + 6y = a + 5$ ، به ازای کدام مقدار a جواب دارد؟

- ۱۲ (۱) ۱۷ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

۱۲) اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۹۹ برابر ۲۵ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۹ چه قدر است؟

- ۷ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

۱۳) چند عدد مضرب ۴ به صورت $73a + b$ وجود دارد؟

- ۱۳ (۱) ۲۷ (۲) ۳۰ (۳) ۱۲ (۴)

۱۴) معادله‌ی سیاله‌ی $25x + 12y = 1110$ بر روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی (N) چند زوج جواب دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۱۵) عدد طبیعی N در پایه‌ی ۷ به صورت $(a51b)$ نوشته شده. اگر N مضرب ۹ باشد، چند جواب برای مقادیر a وجود دارد؟ ($a \neq 0$)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۶) معادله‌ی همنهشتی (پیمانه ۳۱) $72x \equiv 1$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی چند جواب دارد؟

- ۲۹ (۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴)

۱۷) باقی‌مانده تقسیم عددی بر اعداد ۱۱ و ۱۴ و ۱۵ به ترتیب ۵ و ۸ و ۹ می‌باشد. کوچک‌ترین این اعداد مضرب کدام است؟

- ۳۶ (۱) ۳۸ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴)

۱۸) اگر $[a, b] = (a, b) + 1$ ، آن گاه حاصل $a^2 + b^2$ چقدر است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۹) چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۷۳ که نسبت به ۲۷۳ اول باشد، وجود دارد؟

- ۱۴۴ (۱) ۱۴۸ (۲) ۱۵۲ (۳) ۱۶۴ (۴)

۲۰) باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی A بر اعداد ۵ و ۷ و ۱۱ به ترتیب ۲ و ۴ و ۸ می‌باشند. باقی‌مانده‌ی تقسیم بزرگ‌ترین عدد سه رقمی A بر عدد ۲۳، کدام است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۱ (۴)

$$a|(11m+4)$$

و

$$a|(7m+2)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

۱

بنابراین:

$$a|(7(11m+4) - 11(7m+2)) \Rightarrow a|6 \Rightarrow a = 1, 2, 3, 6 \xrightarrow{a>2} a = 6$$

$$6k+3 = 3(2k+1)$$

چون:

پس $6k+3$ هیچگاه عدد اول بزرگتر از ۳ نمی‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲

$$(51, 85)|7a-1 \Rightarrow (3 \times 17, 17 \times 5) = 17|7a-1 \Rightarrow 7a \equiv 1 \Rightarrow 35a \equiv 5 \Rightarrow a \equiv 5$$

$$\Rightarrow a = 17k + 5 \Rightarrow a \in \{5, 22, 39, 56, \dots\}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳

$$a \equiv 11 \Rightarrow 6k \equiv 11 \Rightarrow 6k \equiv 11 + 2 \times 17 \Rightarrow 6k \equiv 45 \Rightarrow 2k \equiv 15 \Rightarrow \frac{a}{3} \equiv 15$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴

$$11x + 15y = 209 \Rightarrow 11x \equiv 209 \xrightarrow{\div 11} x \equiv 19 \Rightarrow x \equiv 4 \Rightarrow x = 4 - 15k$$

$$11(4 - 15k) + 15y = 209 \Rightarrow 15y = 165 + 165k \Rightarrow y = 11 + 11k$$

$$x + y = 15 - 4k \xrightarrow{x+y \geq 0} k \leq 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا باقی مانده تقسیم عبارت داده شده را بر ۷ و ۸ به دست می‌آوریم:

۵

$$24 \equiv 3, 21 \equiv 0.$$

$$3^3 \equiv 27 \equiv -1 \xrightarrow{\text{به توان ۷}} 3^{21} \equiv -1 \xrightarrow{\times 3^2} 3^{23} \equiv -9 \equiv 5$$

$$\Rightarrow 24^{23} - 21^{23} \equiv 5 \xrightarrow{\times 9} (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv 45 \equiv 3$$

$$24 \equiv 0, 21 \equiv 5$$

$$5^2 \equiv 1 \xrightarrow{\text{به توان ۱۱}} 5^{22} \equiv 1 \xrightarrow{\times 5} 5^{23} \equiv 5 \Rightarrow 24^{23} - 21^{23} \equiv -5 \equiv 3$$

$$\xrightarrow{\times 9} (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv 27 \equiv 3$$

$$\left. \begin{aligned} (24^{23} - 21^{23}) \times 9 &\equiv 3 \\ (24^{23} - 21^{23}) \times 9 &\equiv 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم رقم یکان از ۵! به بعد برابر صفر است. پس داریم:

۶

$$(1! + 3! + 5! + \dots)(2! + 4! + \dots) \equiv (1 + 6)(2 + 4) \equiv 7 \times 6 \equiv 42 \equiv 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به مفهوم ب. ب. م می‌توان جواب را یافت:

$$(3n^2 - 2n + 6, 3n + 5) = d, d \in \mathbb{N} - \{1\}$$

$$\begin{cases} d | 3n^2 - 2n + 5 \\ d | (3n + 5)n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | 3n^2 - 2n + 5 \\ d | 3n^2 + 5n \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases} d | 7n - 6 \\ d | 3n + 5 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \times 3 \\ \times (-7) \end{matrix}} \begin{cases} d | -53 \\ d | -53 \end{cases} \xrightarrow{d \neq 1} d = 53$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به ارزش مکانی و بسط اعداد داده شده می‌توان به جواب رسید:

$$\overline{aa} = a + 10a = 11a \xrightarrow{\times 5} m = \overline{aa} = 55a$$

$$m = 5\overline{aa} = 55a \Rightarrow \overline{(5aa)aa} = \overline{(55a)aa} = 10 \cdot (55a) + 10a + a = 5511a \\ = 1837 \times 3a \equiv 0 \pmod{1837}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم سمت راست رابطه عاد کردن را در هر عدد صحیحی می‌توان ضرب کرد. داریم:

$$\begin{array}{l} \alpha \left| \begin{array}{l} 5n + 4 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 11} 55n + 44 \\ 11n + 3 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 5} 55n + 15 \end{array} \right. \xrightarrow{(-)} \alpha \left| \begin{array}{l} 29 \\ 29 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 1 \\ 29 \end{cases} \text{ غ ق ق } \Rightarrow \alpha = 29 \end{array}$$

یعنی هر دو عدد بر ۲۹ بخش‌پذیرند. بنابراین:

$$5n + 4 \equiv 0 \pmod{29} \Rightarrow 5n \equiv -4 \equiv 25 \pmod{29} \xrightarrow{\div 5} n \equiv 5 \pmod{29} \Rightarrow n = 29k + 5$$

می‌خواهیم n عددی طبیعی و دورقمی باشد:

$$10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 29k + 5 \leq 99 \Rightarrow k = 1, 2, 3$$

یعنی به ازای سه عدد طبیعی رابطه برقرار است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a \equiv 5 \pmod{9} \\ a \equiv 7 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 5 + (9 \times 5) = 50 \\ a \equiv 7 + (13 \times 4) = 59 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 50 \pmod{9} \\ a \equiv 59 \pmod{13} \end{cases} \\ \xrightarrow{3|9} \begin{cases} a \equiv 50 \pmod{3} \\ a \equiv 59 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow a \equiv 59 \pmod{39} \Rightarrow a \equiv 20$$

راه حل دوم:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv_m b \\ a \equiv_n b \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv_{[m,n]} b$$

توجه:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv_9 50 \\ a \equiv_{13} 59 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv_{[9,13]} 59 \Rightarrow a \equiv_{3 \times 13} 59 : a \equiv_{39} 59 \equiv_{39} 20$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شرط لازم و کافی برای این که معادله سیاله‌ی $az + by = c$ در Z دارای جواب باشد

آن است که $c \mid (a, b)$. بنابراین معادله‌ی $3x + 6y = a + 5$ در صورتی در Z جواب دارد که:

$$(3, 6) \mid (a + 5) \Rightarrow 3 \mid (a + 5) \Rightarrow (a + 5) \equiv_3 0 : a \equiv_3 -5 \equiv_3 1$$

تنها گزینه‌ی ۳ در این شرط صدق می‌کند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. روش اول: به جای a می‌توان عدد ۲۵ را قرار داد، زیرا باقی‌مانده‌ی عدد ۲۵ بر ۹۹ برابر است با ۲۵. حال باقی‌مانده‌ی عدد ۲۵ بر ۹ را می‌یابیم که برابر است با ۷.

$$a \equiv_{mk} b \Rightarrow a \equiv_m b \Rightarrow a \equiv_{25} b : a \equiv_9 25 \equiv_9 7$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای آن‌که عددی بر ۴ بخش‌پذیر باشد باید دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد، بنابراین b یکی از ارقام ۰ و ۴ و ۸ است. یعنی ۳ انتخاب برای b وجود دارد، اما a هر یک از ارقام

۰ تا ۹ می‌تواند باشد یعنی ۱۰ انتخاب برای a وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالات طبق اصل ضرب برابر است با: $3 \times 10 = 30$.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$25x + 12y = 1110 \Rightarrow x = 12k + 6 \Rightarrow x = 12k + 6$$

$$25x + 12y = 1110 \Rightarrow 25(12k + 6) + 12y = 1110 \Rightarrow 12y = 960 - 25 \times 12k$$

$$\Rightarrow y = 80 - 25k$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow 12k + 6 > 0 \Rightarrow k > -0.5 \\ y > 0 \Rightarrow 80 - 25k > 0 \Rightarrow 25k < 80 \Rightarrow k < 3.2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} -0.5 < k < 3.2 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \text{جواب ۴}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(a51b)_v \equiv_9 0 \rightarrow b + 7 + 5 \times 7^2 + a \times 7^3 \equiv_9 0 \rightarrow b + (-2) + 5 \times (-2)^2 + a(-2)^3 \equiv_9 0$$

$$\rightarrow 18a - b \equiv_9 0 \rightarrow 18a \equiv_9 b \rightarrow -a \equiv_9 b \rightarrow a + b \equiv_9 0 \rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$$

توجه کنید که $a, b \leq 6$ می‌باشند (چون عدد در مبنای ۷ نوشته شده است) و در ضمن $a \neq 0$ است. (وگرنه

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 9 \end{array} \right. \text{ هم یک جواب بود.}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$72x \equiv_{31} 1 \Rightarrow 216x \equiv_{31} 3 \xrightarrow{(216=7 \times 31)} -x \equiv_{31} 3 \Rightarrow x \equiv_{31} -3$$

$$x = 31K - 3 \quad 99 < 31K - 3 \leq 999 \Rightarrow 102 < 31K \leq 1002$$

$$\Rightarrow 3 < K \leq 32 \Rightarrow \text{جواب صحیح برای } K \text{ وجود دارد.}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. عدد را x می‌نامیم. داریم:

$$x \equiv_{11} 5 \quad x \equiv_{14} 8 \quad x \equiv_{15} 9$$

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv_m b \\ a \equiv_n b \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv_{[m,n]} b$$

* توجه:

حاصل ۳ عدد را در ۳ پیمانه برحسب ۱ عدد می‌نویسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv_{11} -6 \\ x \equiv_{14} -6 \\ x \equiv_{15} -6 \end{array} \right. \Rightarrow x \equiv_{11,14,15} -6$$

اما $11, 14, 15 = 11, 2 \times 7, 3 \times 5 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$ بنابراین:

$$x \equiv_{2310} -6 \Rightarrow x = 2310 \cdot q - 6$$

کم‌ترین مقدار x زمانی است که q برابر یک باشد. بنابراین:

$$x_{\min} = 2304$$

حالا 2304 را تجزیه می‌کنیم تا ببینیم مضرب کدام گزینه است:

$$2304 = 2^8 \times 3^2$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر $(a, b) = d$ باشد $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ است. $\frac{a}{b}$ را برابر a' و $\frac{b}{a}$ را برابر b' فرض می‌کنیم. دقت کنید که $(a', b') = 1$ ، در این صورت داریم:

$$[a, b] = a'b'd$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} a'b'd &= d + 1 \Rightarrow a'b'd - d = 1 \Rightarrow d(a'b' - 1) = 1 \Rightarrow d = 1 \\ \Rightarrow a'b' - 1 &= 1 \Rightarrow a'b' = 2 \Rightarrow \begin{cases} a' = 2 \\ b' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5 \end{aligned}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n که نسبت به n اول هستند برابر است با $\phi(n)$ بنابراین باید $\phi(273)$ را بیابیم:

$$273 = 3 \times 7 \times 13 \rightarrow \phi(273) = \phi(3) \cdot \phi(7) \cdot \phi(13) = 2 \times 6 \times 12 = 144$$

توجه: اگر عوامل اول عدد طبیعی n ، عبارت از $p_1, p_2, \dots, p_k$ باشند، آن‌گاه:

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \xrightarrow[\text{عدد اول } p]{\text{حالت خاص}} \phi(p) = p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1$$

مثلاً:

$$\begin{aligned} \phi(273) &= \phi(3 \times 7 \times 13) = 3 \times 7 \times 13 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{13}\right) = \\ &= \underbrace{3 \left(\frac{3-1}{3}\right)}_{\phi(3)} \times \underbrace{7 \left(\frac{7-1}{7}\right)}_{\phi(7)} \times \underbrace{13 \left(\frac{13-1}{13}\right)}_{\phi(13)} = 2 \times 6 \times 12 = 144 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A &\equiv 2 \equiv -3 \\ A &\equiv 4 \equiv -3 \\ A &\equiv 8 \equiv -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \equiv_{[5,7,11]} -3 \Rightarrow A \equiv_{385} -3$$

$$A = 385q - 3 \xrightarrow[q=2]{\text{بزرگترین رقمی ۳}} A = 767 \equiv 8$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

