



۱ حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G برابر ۴۳۲ است. اگر گراف G با حداقل تعداد یال رسم شود، حاصل $q(\overline{G}) + q(G)$ کدام است؟

- ۳۱ (۱) ۲۹ (۲) ۲۱ (۳) ۲۳ (۴)

۲ حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G ، ۴۸ است. اگر تعداد رأس‌ها با درجه رأس یک حداقل باشد، حاصل $\Delta(\overline{G}) + q(\overline{G})$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۱۷ (۱) ۱۱ (۲) ۱۹ (۳) ۱۳ (۴)

۳ در گراف G ، $|V(G)| = ۸$ و $|E(G)| = ۲۴$ است. کمترین مقدار ممکن برای (G) کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴ در گراف G ، مجموعه همسایگی باز هر رأس دارای ۲ عضو است. اگر $q(\overline{G}) = ۳q(G)$ باشد، مقدار $p(G)$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۵ در یک گراف ۵ رأسی $K -$ منتظم با بیش‌ترین مقدار ممکن K ، تعداد دورها با طول ۴، کدام است؟

- ۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴)

۶ گراف ساده‌ای با اندازه‌ی ۱۳، $q =$ ، حداقل چند رأس دارد؟

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

۷ گراف شکل مقابل، چند دور با طول ۵ دارد؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴)

۸ در گراف G با درجه رأس‌های ۳، ۳، ۴، ۵، ۶، x ، y ، کمترین مقدار $x + y$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴)

۹ در گرافی با دنباله‌ی درجه رأس‌ها به صورت ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۴ و ۴، تعداد دورها با طول ۵، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۱۰ در گراف زیر، تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر مینیمال، کدام است؟

- ۸ (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

۱۱) اگر درجه‌ی رأس‌های یک گراف ۴، ۴، ۲، ۲، ۲ و ۲ باشد، تعداد تمام دورهای موجود، کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲) درجه‌ی رأس‌های یک گراف ۵، ۴، ۴، ۳، ۳ و ۱ است. چند دور با طول ۴، موجود است؟

- ۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۳) در یک گراف کامل حاصل ضرب اندازه و مرتبه‌ی آن ۵۰ می‌باشد، در این گراف چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

- ۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱۴) در یک گراف با درجه‌ی رأس‌های ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، تعداد دورها با طول ۳، کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵) در گراف کامل از مرتبه‌ی ۵، یال ab حذف شده است. چند دور با طول ۴ در این گراف موجود است؟

- ۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۶) در گراف G ، مجموعه همسایگی بسته هر رأس دارای ۴ عضو است. اگر $p(G) = ۶$ باشد، مقدار $q(G)$ چقدر است؟

- ۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۱۷) در گراف G ، مجموعه همسایگی باز هر رأس دارای ۳ عضو است. اگر $q(\overline{G}) = ۶q(G)$ باشد، مقدار $p(G)$ کدام است؟

- ۱) ۲۴ ۲) ۲۲ ۳) ۲۰ ۴) ۱۸

۱۸) در گراف $G(V, E)$ اگر P و q مرتبه و اندازه گراف و $p^2 = ۲۱ + q^2$ باشد، آنگاه گراف G چگونه است؟

- ۱) همبند است. ۲) منتظم است. ۳) ناهمبند است. ۴) دارای دور است.

۱۹) اگر در گراف ساده G ، $|V(G)| = ۱۸$ ، $\Delta(G) = ۸$ و $\delta(G) = ۳$ باشند، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار ممکن برای اندازه گراف G کدام است؟

- ۱) ۴۰ ۲) ۳۸ ۳) ۳۹ ۴) ۳۷

۲۰) گراف ناهمبند ۳- منتظم دارای ۱۲ یال است. این گراف چند دور با طول ۴ دارد؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن که حداقل یال را داشته باشیم، درجه رأس‌ها باید کمترین باشد پس:

$$G: 432 = 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1$$

$$2q = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \Rightarrow q(G) = 9$$

$$P = 8 \Rightarrow q_{k_8} = \binom{8}{2} = 28 \Rightarrow q(\bar{G}) = 19$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta(G) = 3 \\ (\bar{G}) + \Delta(G) = P - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (\bar{G}) = 4 \Rightarrow q(\bar{G}) + (\bar{G}) = 23$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \text{از گراف } k_8 \text{ باید ۴ تا یال جدا کنیم} \Rightarrow \frac{8 \times 7}{2} = 28 \Rightarrow q = \binom{8}{2} = 28 : \text{ اگر } G \text{ کامل می‌بود}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تعداد اعضای همسایه‌های باز همان درجه رؤوس است پس درجه رؤوس گراف

$$r.p = 2q \xrightarrow{r=2} 2p = 2q$$

همگی ۲ می‌باشد یعنی ۲- منتظم پس:

می‌دانیم:

$$q(G) + q(\bar{G}) = q_{kp} \xrightarrow[p=q]{q(\bar{G})=3q_G} 4q = \frac{q(q-1)}{2} \Rightarrow q-1 = 8 \Rightarrow q = 9 \Rightarrow p = 9$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$p = \text{فرد} \xrightarrow{\text{منتظم}} \begin{cases} r = \text{زوج} \\ 0 \leq r \leq 4 \end{cases} \Rightarrow r_{\text{Max}} = 4 \Rightarrow 54 = K_0 = \text{منتظم مرتبه ۵۴}$$

$$\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2} : K_p \text{ در } m \text{ طول به تعداد}$$

$$\xrightarrow{K_0} \text{ دور به طول ۴} \rightarrow \binom{5}{4} \times \frac{3!}{2} = 5 \times 3 = 15$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در یک گراف ساده از مرتبه‌ی p داریم $q \leq \binom{p}{2}$. بنابراین:

$$13 \leq \binom{p}{2} \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} \geq 13 \Rightarrow p \geq 6$$

بنابراین حداقل تعداد رؤوس گراف برابر است با ۶.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. یک نمونه از دوره‌های به طول ۵، در شکل هاشورخورده است: aegfha، که ۶ دور به طول

۵ هم به این صورت وجود دارد abcdea. پس در مجموع ۱۲ دور به طول ۵ وجود دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. کافی است رسم شکل تابع را انجام دهیم:

$$x = 2, y = 1 \Rightarrow x + y = 2 + 1 = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید شکل گراف را رسم کنیم:

دوره
 $\rightarrow abcdea / abdcea /$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا رئوسی را می‌یابیم که احاطه‌گر باشند و سپس تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر مینیمال را شمار می‌کنیم:

سه مجموعه $\{a, d\}$, $\{g, e\}$, $\{m, p\}$ را در نظر می‌گیریم، از هر مجموعه یک عضو انتخاب کرده به کمک اصل ضرب جواب یافت می‌شود:

$$\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 8$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. همه دوره‌های این گراف دور به طول ۴ هستند.



کلاً ۶ دور داریم.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رأس f را کنار می‌گذاریم. اگر یال ed را اضافه کنیم، گراف کامل مرتبه ۵ ساخته می‌شود.

$$\binom{5}{4} \times \frac{3!}{2} = 15$$

تعداد دورها در گراف کامل مرتبه ۵ به طول ۴ برابر است با:

حال دوره‌های به طول ۴ که یال ed را دارد حذف می‌کنیم:

ed شامل ۴ طول :

جواب
 $\rightarrow 15 - 6 = 9$ کل

$$p \times q = 50 = 5 \times 10 = 5 \times \binom{5}{2} \Rightarrow P = 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$k_p \text{ در } r \text{ تعداد دور به طول } r = \binom{p}{r} \frac{(r-1)!}{2} \Rightarrow \binom{5}{4} \times \frac{3!}{2} = 15$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شکل ساده شده گراف به صورت روبه‌رو است:



تعداد دوره‌های به طول ۳ در این گراف ۵ تا است: aeda, aeca, adca, decd, afca

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد دورها به طول ۴ در گراف K_5 برابر است با:

$$\binom{5}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} = 5 \times 3 = 15$$

دوره‌هایی به طول ۴ که شامل یال ab هستند، عبارتند از:

abcd, abdca, abcea, abeca, abdea, abeda

یعنی با حذف یال ab، ۶ دور به طول ۴ حذف می‌شود، پس تعداد دوره‌های به طول ۴ در گراف باقیمانده برابر است با:

$$15 - 6 = 9$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مجموعه همسایگی بسته هر رأس شامل خود آن رأس و همسایه‌هایش است. پس به‌جز خودش هر رأس با ۳ رأس دیگر مجاور است و گرافی ۳-منتظم داریم.

$$kp = 2q \Rightarrow 3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. این گراف ۳- منتظم است. اگر گراف دارای n رأس باشد، درجه هر رأس گراف مکمل برابر $(n - 4)$ است. داریم:

$$nr = 2q_G \xrightarrow{r=3} q_G = \frac{3n}{2}, nr = 2q_{\bar{G}} \xrightarrow{r=n-4} q_{\bar{G}} = \frac{(n-4)n}{2}$$

$$q_{\bar{G}} = 6q_G \Rightarrow \frac{(n-4)n}{2} = 6 \times \frac{3n}{2} \Rightarrow n-4 = 18 \Rightarrow n = 22$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. داریم $q^2 = 21 + p^2$ در نتیجه $(p-q)(p+q) = 21$. با توجه به این که ضرب دو عدد برابر $21 = 3 \times 7$ شده است، دو حالت زیر به وجود می آید:

$$\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=11 \\ q=10 \end{cases} \text{ (الف)} \quad \begin{cases} p-q=3 \\ p+q=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=5 \\ q=2 \end{cases} \text{ (ب)}$$

در حالت (الف) گراف می تواند همبند یا ناهمبند باشد، اما در حالت (ب) گراف حتماً ناهمبند است. پس سؤال درست نیست. اما بهترین جواب گزینه ۳ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مرتبه گراف برابر ۱۸ است. برای داشتن بیشترین تعداد یال، رأس های از درجه Δ و برای داشتن کمترین تعداد یال، رأس های از درجه را ماکزیمم می کنیم. چون تعداد رأس های فرد گراف همواره عددی زوج است، بنابراین داریم:



$$q_{\max} - q_{\min} = 69 - 30 = 39$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که مجموع درجات رئوس در این گراف برابر است با: $3p = 2q = 24$ ، پس $p = 8$ و در نتیجه شکل این گراف ناهمبند به صورت مقابل است:

$$\text{تعداد دورها} = 2 \times \left[\binom{4}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} \right] = 6$$

البته با شمارش تعداد دورهای به طول ۴ هم می توانستیم تست را حل کنیم: $abcd a$ و $abdc a$ و $acbd a$ و به همین ترتیب $efghe$ و $efhg e$ و $efgh e$ ، بنابراین در مجموع ۶ دور به طول ۴ وجود دارد.

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

