



۱) چند تابع $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 4\}$ می‌توان تعریف کرد به طوری که مجموع مقادیر تابع، عددی فرد باشد؟

۲۷ (۴)

۲۸ (۳)

۴۰ (۲)

۴۱ (۱)

۲) از هر یک از ۸ مدرسه علاقه‌مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفری انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود. به طوری که هر دو نفر همیار هم، از یک مدرسه باشند؟

۶۳۰۰ (۴)

۵۶۰۰ (۳)

۵۴۰۰ (۲)

۴۲۰۰ (۱)

۳) با جابه‌جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد، به طوری که رقم‌های ۲ یک در میان قرار گیرند؟

۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)

۴) تعداد جواب‌های صحیح و غیرمنفی، معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ ، با شرط $x_1 > 4$ و $x_3 > 4$ ، کدام است؟

۲۸ (۴)

۲۵ (۳)

۲۴ (۲)

۲۲ (۱)

۵) از بین ۴ شاخه گل قرمز و ۵ شاخه گل زرد و ۸ شاخه گل سفید، به چند طریق می‌توان ۶ شاخه‌ی متمایز، انتخاب کرد؟

۲۸ (۴)

۲۴ (۳)

۲۲ (۲)

۲۰ (۱)

۶) تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

۹۷۲ (۴)

۹۶۸ (۳)

۹۵۲ (۲)

۹۴۸ (۱)

۷) تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{10}{x_4}$ ، کدام است؟

۹۶ (۴)

۸۱ (۳)

۷۲ (۲)

۶۰ (۱)

۸) در یک روز هفته برای ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی به چند طریق، می‌توان برنامه‌ی تدریس، تعیین کرد؟

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۶ (۱)

۹) تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه معادلات $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$ ، کدام است؟

۱۶۸ (۴)

۱۴۴ (۳)

۱۳۶ (۲)

۷۲ (۱)

۱۰) به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل ۱۵ شاخه انتخاب کرد، به طوری که از هر نوع آن، حداقل ۲ شاخه انتخاب شود؟

۱۵۰ (۴)

۱۲۵ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۰۵ (۱)

۱۱ یک کودک ۳ مکعب مستطیل یکسان با رنگ‌های مختلف دارد. او به چند طریق می‌تواند با روی هم قرار دادن یک یا چند تا از آنها یک ستون بسازد؟

- ۱۵ (۱) ۷۸ (۲) ۶۶ (۳) ۴۲ (۴)

۱۲ حداقل چند عدد از مجموعه $\{۳, ۴, \dots, ۹, ۱۲, ۱۳, \dots, ۲۰\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل دو عدد از آنها دارای مقسوم‌علیه مشترک غیر یک هستند؟

- ۹ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

۱۳ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + 3x_2 + \sqrt{x_3} + x_4 = 4$ کدام است؟

- ۲۲ (۱) ۲۰ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴)

۱۴ حداقل چند عدد از مجموعه اعداد طبیعی متوالی $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۳۰\}$ انتخاب شود، تا مطمئن باشیم بین آن‌ها حداقل دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از یک، وجود دارد؟

- ۱۳ (۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴)

۱۵ تعداد جملات در بسط عبارت $(a + b + c)^{12}$ ، کدام است؟

- ۷۲ (۱) ۷۸ (۲) ۸۴ (۳) ۹۱ (۴)

۱۶ در جعبه‌ای ۷ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۱۰ کتاب ریاضی موجود است. حداقل چند کتاب از این جعبه برداریم تا مطمئن باشیم، حداقل ۴ کتاب، هم موضوع است؟

- ۱۰ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴)

کدام است؟

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۱۸ از مجموعه اعداد $\{۵, ۸, ۱۱, \dots, ۶۵, ۶۸, ۷۱\}$ که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده است. یک زیرمجموعه‌ی حداقل چند عضوی انتخاب شود تا مطمئن باشیم، حداقل دو عدد در این زیرمجموعه موجود است که جمع آن‌ها، ۸۵ باشد؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

۱۹ به چند طریق می‌توان ۹ توپ یکسان را در ۴ سبد متمایز جای داد به طوری که در هر سبد حداقل یک توپ و حداکثر ۴ توپ، جای گیرد؟

- ۳۵ (۱) ۳۶ (۲) ۴۰ (۳) ۵۶ (۴)

۲۰ چند عضو از مجموعه‌ی $\{n \in \mathbb{N} : ۱۵۰ < n < ۵۰۰\}$ نه بر ۷ تقسیم پذیرند و نه بر ۱۱؟

- ۲۷۱ (۱) ۲۷۲ (۲) ۲۷۳ (۳) ۲۷۴ (۴)

۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون در برد تنها یک عدد فرد داریم (عدد ۱) یا باید یکبار ظاهر شود یا سه بار.

$$f = \{(1,), (2,), (3,), (4,)\}$$

$$\text{حل: } \underbrace{\binom{4}{1} \times \left(\binom{2}{1}\right)^3 + \binom{4}{3} \times \left(\binom{2}{1}\right)^1}_{\text{یکی از اعداد ۲ یا ۴ باید برای سه جایگاه دیگر بیایند}} = 4 \times 8 + 4 \times 2 = 4 \times 10 = 40$$

یکی از اعداد ۲ یا ۴ باید
برای سه جایگاه دیگر بیایند

۲

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تنیس چهار نفره یعنی دو تیم دو نفره بنابراین برای انجام یک بازی باید دو تیم

(مدرسه) انتخاب شود که این عمل به $\binom{8}{2}$ طریق امکان‌پذیر است. چون در هر تیم دو بازیکن وجود دارد و این دو

بازیکن از ۶ نفر هر مدرسه انتخاب شده است. پس داریم:

$$\text{حالاتی ممکن انجام بازی} = \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{6}{2} = 28 \times 15 \times 15 = 6300$$

۳

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌خواهیم ۲ ها یک در میان باشند، بنابراین عدد یا باید با ۲ شروع شود، به این صورت:

$$2 \circ 2 \circ 2 \circ 2 \text{ مثل عدد } 2527262 \text{ و یا با دو پایان پذیرد، به این صورت: } 2 \circ 2 \circ 2 \circ 2 \text{ مثل عدد } 527262$$

خُب در هر کدام از دو حالت، جای ۲ها ثابت است، اما رقم‌های دیگر می‌توانند با هم جابه‌جا شوند که می‌دانیم که

$$\text{جای گشت ۳ رقم برابر است با } 3! \text{ یا } 6 \text{ بنابراین } 6 \times 2 = 12$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۴

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_3 \leq 4 \text{ و } x_1 > 4 \Rightarrow x_1 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' + x_2 + x_3 = 6 \xrightarrow{\text{کل حسابی}} \binom{8}{2} = 28 \\ x_3 \leq 4 \end{cases}$$

غ ق ق: $x_3 \geq 5$

$$\Rightarrow x_1' + x_2 + x_3' = 1 : \binom{3}{2} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{جواب}} \text{کل} - \text{ق} - \text{غ} = 28 - 3 = 25$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۵

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 5, 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$$

محدودیت x هم نیست زیرا حداکثر ۶ شاخه می‌خواهیم

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \xrightarrow{\text{تعداد جواب حسابی}} \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28 \\ y \leq 5, z \leq 4 \xrightarrow{\text{غ ق ق}} y \geq 6 \text{ یا } z \geq 5 \end{cases}$$

$$n(A' \cup B') = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} - 0 = 4$$

$$\xrightarrow{\text{جواب}} \text{کل} - \text{ق} - \text{غ} = 28 - 4 = 24$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد کل برابر است با: ۶

$$\begin{cases} 9U \cup 8U \cup 7U \textcircled{0} = 504 \\ 8U \cup 8U \cup 7U \textcircled{5} = 448 \end{cases} \xrightarrow{+} 952$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای این که معادله دارای جواب های صحیح و نامنفی باشد، x_4 باید یکی از مقسوم علیه های مثبت عدد ۱۰ باشد که در نتیجه داریم: ۷

$$x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{12}{2} = 66$$

$$x_4 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{7}{2} = 21$$

$$x_4 = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{4}{2} = 6$$

$$x_4 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{3}{2} = 3$$

$$\text{تعداد کل جواب ها} = 66 + 21 + 6 + 3 = 96$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

فرض کنید کلاس‌ها A و B و C و مدرسه‌ها a و b و c باشند. یکی از حالت‌های قابل قبول در مربع لاتین آمده است: اما به چند طریق می‌توان این مربع را پر کرد. c و b و a در سطر اول به ۳! طریق جایگشت دارند. فرض کنید این

جایگشت

a	b	c
---	---	---

 باشد. در این صورت اولین درایه سطر دوم از سمت چپ نمی‌تواند a باشد و دو حالت زیر به وجود می‌آید:

a	b	c
b		

a	b	c
c		

که هرکدام از این مربع‌ها به صورت منحصر به فرد کامل می‌شوند.

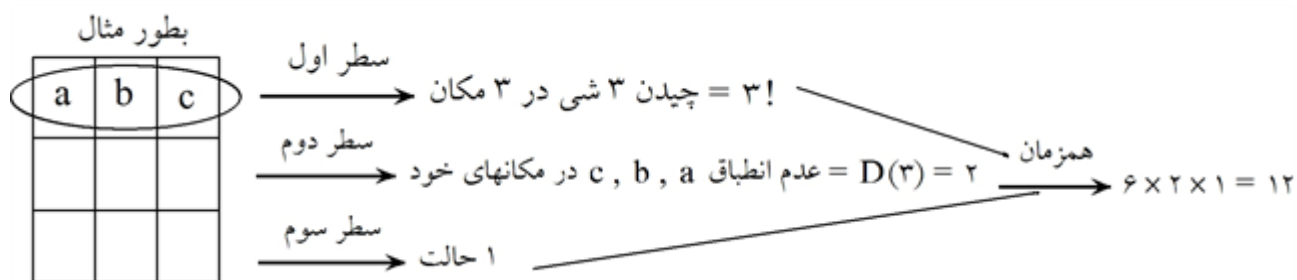
a	b	c
c	b	a
c	a	b

a	b	c
c	b	a
b	a	c

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$6 \times 2 = 12$$

روش دوم:



توجه: تعداد حالت عدم انطباق n شی در n جای مربوط به خود برابر است با:

$$D(n) = n! \times \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

کلاس اول	کلاس دوم	کلاس سوم
a	b	c
c	b	a
b	a	c

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

$$x_4 + x_5 = 7 \rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{7-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6$$

$$28 \times 6 = 168$$

بنابراین تعداد کل جواب‌های طبیعی، این دستگاه معادلات برابر است با:

۱۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد شاخه گل‌هایی که از گل‌های نوع اول تا چهارم برمی‌داریم را به ترتیب x_1 تا x_4 می‌نامیم. با توجه به این که می‌خواهیم ۱۵ شاخه گل انتخاب کنیم. بنابراین $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ ، اما با توجه به این که می‌خواهیم از هر نوع گل دست‌کم ۲ شاخه داشته باشیم، از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + x_1' \\ x_2 &= 2 + x_2' \\ x_3 &= 2 + x_3' \\ x_4 &= 2 + x_4' \end{aligned} \Rightarrow x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 7$$

می‌دانیم تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$.

بنابراین: $k=4, n=7 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{10}{3} = 120$.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $\Rightarrow$ ستون ۳ تایی $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} \times = 6$

ستون ۲ تایی $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} \times = 6$

ستون تکی $3 = 3$

مجموعاً: $6 + 6 + 3 = 15$

۱۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۸ تا $\Rightarrow$ بعدی $+ \{4\} + \{3, 5, 7, 13, 17, 19\} =$ اعداد اول درون مجموعه A

عدد ۲ وجود ندارد!

۱۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم وجود $\sqrt[n]{x_i}$ هیچ تأثیری در شرایط ندارد و آن را t_i در نظر می‌گیریم و فقط

$$x_1 + 2x_2 + t_3 + x_4 = 4$$

کافی است x_2 را عددگذاری کنیم:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_2 = 0 : x_1 + t_3 + x_4 = 4 &\rightarrow \binom{4}{2} = 15 \\ x_2 = 1 : x_1 + t_3 + x_4 = 2 &\rightarrow \binom{4}{2} = 6 \\ x_2 = 2 : x_1 + t_3 + x_4 = 0 &\rightarrow \binom{2}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} = 22$$

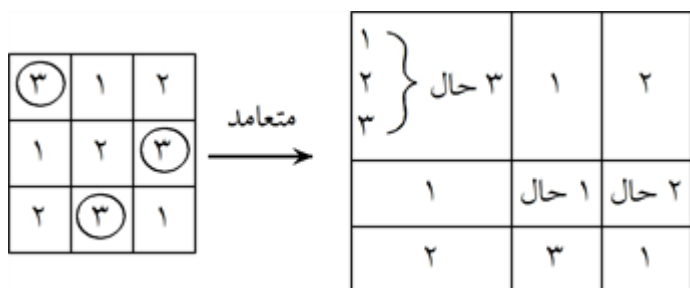
۱۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در بدترین حالت ابتدا ۱ و تمام اعداد اول شامل ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ۱۹ و ۲۳ و ۲۹ را برمی‌داریم. یعنی ۱۱ عدد برداشته‌ایم که دو به دو نسبت به هم اول هستند. حال اگر عدد دوازدهم را برداریم، مرکب است و با یکی از اعداد اول ب.م.م.م. غیر از ۱ دارد.

۱۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
تعداد جملات یعنی محاسبه کنیم چند جمله به صورت $ax^yb^yc^z$ داریم که $x + y + z = ۱۲$.
(در هر بسطی مجموع توانهای هر جمله برابر با توان بسط)

$$\text{تعداد} = \binom{۱۲+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۱۴}{۲} = ۹۱$$

۱۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق اصل لانه کبوتر باید تعداد $۱ + (۲ + ۳ + ۳)$ کتاب برداریم چون کتاب‌های هنر دوتا است هر دو را برمی‌داریم و از هر کدام از بقیه موضوعات هم ۳ کتاب برمی‌داریم. این بدترین حالت ممکن است که هیچ ۴ کتابی هم موضوع نیستند. اکنون اگر یک کتاب دیگر برداریم حتماً با یکی از قبلی‌ها تشکیل ۴ کتاب هم موضوع می‌دهد.

۱۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



می‌دانیم با مربع متعامد باید اعداد ۲؟؟ ۲۱، ۲۲، ۲۳ ساخته شود به همین خاطر یکی از اعداد را مبنا بگیریم
 $\begin{cases} ۱۱, ۱۲, ۱۳ \\ ۲۱, ۲۲, ۲۳ \\ ۳۱, ۳۲, ۳۳ \end{cases}$
 سایرین تعیین می‌شود. $۱ = ۶ \text{ حال } ۱ \times \text{حال } ۲ \times \text{حال } ۳$

۱۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زوج‌هایی که مجموع ۸۵ دارند تعیین می‌کنیم:
 $۵/۸/۱۱, ۷۱/۱۴, ۶۸/۱۷, ۶۵/۲۰, ۶۲/۲۳, ۵۹/۲۶, ۵۶/۲۹, ۵۳/۳۲, ۵۰/۳۵, ۴۷/۳۸, ۴۴/۴۱$
 ابتدا اعضای تنها یعنی ۵ و ۸ و ۴۱ را برمی‌داریم سپس از هر دسته یکی برمی‌داریم تا کنون ۱۳ عدد برداشته‌ایم و هیچ‌کدام مجموع ۸۲ ندارند، عدد چهاردهم را که برداریم به خواسته‌ی مسئله می‌رسیم.

۱۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید تعداد جواب‌های معادله‌ی زیر را بدست آوریم.

$$(۱) (۱) (۱) (۱) (۵)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ۹ \\ ۱ \leq i \leq ۴ \\ i = ۱, ۲, ۳, ۴ \end{cases}$$

تعداد جواب‌های این معادله با تعداد جواب‌های معادله‌ی زیر برابر است.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ۵ \\ ۰ \leq x_i \leq ۳ < ۴ \\ ۱ \leq i \leq ۴ \end{cases} \quad \binom{۸}{۳} - ۴ \binom{۸-۴}{۳} = ۵۶ - ۴(۴) = ۴۰$$

$$\begin{aligned} n(\bar{V} \cap \bar{V}) &= n((V \cup V)') = n(\text{کل} - n(V \cup V)) = n(\text{کل}) - [n(V) + n(V) - n(V \cap V)] \\ &= ۳۴۸ - [۴۹ + ۳۱ - ۴] = ۲۷۲ \end{aligned}$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

