

به نام خداوند جان و خرد

جزوه فصل ۱ گسسته (نظریه اعداد)

اثبات مستقیم: اثبات‌هایی که در آن‌ها به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به حکم برسیم، اثبات‌های مستقیم نامیده می‌شوند. مثال‌های زیر نمونه‌هایی از اثبات‌های مستقیم هستند.

• اعداد طبیعی:

$$2k \text{ عدد زوج طبیعی } (k \in \mathbb{N}) = \circ$$

$$2k - 1 \text{ عدد فرد طبیعی } (k \in \mathbb{N}) = \circ$$

• اعداد صحیح:

$$2k \text{ نمایش اعداد زوج صحیح } (k \in \mathbb{Z}) = \circ$$

$$2k + 1 \text{ نمایش اعداد فرد صحیح } (k \in \mathbb{Z}) = \circ$$

○

(۱) ثابت کنید اگر ۳ واحد به سه برابر عددی فرد اضافه کنیم حاصل مضرب ۶ می‌باشد.

$$\text{• عدد فرد: } x = 2k + 1 \text{ } (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{• مضرب ۶: } 3x + 3 = 3(2k + 1) + 3 = 6k + 3 + 3 = 6k + 6 = 6(k + 1) = 6k' \text{ } (k' \in \mathbb{Z})$$

$$\text{• } (k' \in \mathbb{Z})$$

(۲) ثابت کنید مربع هر عدد صحیح فرد به‌صورت $(8q + 1)$ است.

$$\text{• عدد فرد: } x = 2k + 1 \text{ } (k \in \mathbb{Z})$$

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{4k(k + 1)}_{2q} + 1 = 4(2q) + 1 = 8q + 1 \text{ } \bullet$$

• نکته: ضرب دو عدد متوالی $(k + 1)$ عددی زوج مانند $2q$ است.

(۳) ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد فرد همواره عددی فرد است.

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 2k' + 1 \end{cases} \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$$

$$x \cdot y = (2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2 \underbrace{(2kk' + k + k')}_{k''} + 1 =$$

عدد فرد $2k'' + 1$

(۴) ثابت کنید مجموع دو عدد فرد همواره زوج است.

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 2k' + 1 \end{cases} \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$$

$$x + y = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 2 = 2 \underbrace{(k + k' + 1)}_{k''} = 2k''$$

زوج $2k''$

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی غلط است، «مثال نقض» می گویند.

تمرین: عبارت های زیر را در نظر بگیرید. دلیل درستی یا نادرستی هر کدام را نوشته و برای احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید.

الف) اگر x گنگ و y گنگ باشد، آنگاه xy گنگ است.

نادرست؛ زیرا:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{8} \end{cases} \Rightarrow xy = \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

مثال نقض: ۴

ب) برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 > 0$

نادرست؛ زیرا:

$$x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$$

مثال نقض: ۰

ج) اعداد اول همگی فرد هستند.

نادرست؛ زیرا: عدد ۲ اول است و فرد نیست.

د) اگر $x > 1$ آنگاه داریم: $4 - x^2 < 3$

درست؛ زیرا:

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow 4 - x^2 < -1 + 4 \Rightarrow 4 - x^2 < 3$$

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها (روش اشباع):

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. این نوع اثبات را **اثبات به روش اشباع** می‌گویند.

مثال ۱: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

حل: دو حالت را در نظر می‌گیریم:

الف) n زوج است:

$$n = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} n^2 - 5n + 7 &= (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 \\ &= 2k' + 1 = \text{فرد} \end{aligned}$$

ب) n فرد است:

$$n = 2k - 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} n^2 - 5n + 7 &= (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 7 = 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 7 \\ &= 4k^2 - 14k + 13 = 4k^2 - 14k + 12 + 1 = 2(2k^2 - 7k + 6) + 1 = 2k' + 1 = \text{فرد} \end{aligned}$$

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف):

گاهی برای اثبات یک گزاره، فرض می‌کنیم حکم نادرست است و به یک نتیجه غیرممکن یا یک نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم؛ پس فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی حکم ثابت می‌شود. این نوع اثبات را **اثبات به روش برهان خلف** یا **غیرمستقیم** می‌گوییم.

مثال ۱: با استدلال برهان خلف ثابت کنید برای هر عدد صحیح n ، اگر n^2 زوج باشد، n نیز زوج است.

اثبات: فرض کنیم n زوج نباشد (فرض خلف)، پس فرد است. در این صورت:

$$n = 2k + 1$$

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{k'} + 1 = 2k' + 1 = \text{فرد}$$

و این تناقض است؛ زیرا طبق فرض n^2 زوج است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز):

گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها از حکم استفاده می‌کنیم و به یک نتیجه منطقی درست می‌رسیم و برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند. این نوع اثبات را **اثبات بازگشتی** می‌گوییم.

مثال ۱: اگر $a > 0$ ثابت کنید: $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (همانگ دی ماه ۹۸)

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} \geq 2 &\Leftrightarrow a \left(a + \frac{1}{a} \right) \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

ویژگی ۱: اگر عددی بر عدد دیگر بخش‌پذیر باشد، هر مضرب آن نیز بر همان عدد بخش‌پذیر است.

اگر $a \mid b$ ، آنگاه $a \mid mb$ می‌باشد؛ زیرا اگر

$$a \mid b \Rightarrow b = aq$$

آنگاه

$$mb = maq = a(mq)$$

پس $a \mid mb$

ویژگی ۲: اگر عددی بر عدد دیگر بخش پذیر باشد، هر مقسوم علیه آن عدد نیز بر همان عدد اول بخش پذیر است.

ویژگی ۳: هرگاه عددی دو عدد را عاد کند، آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز عاد می کند.

ویژگی ۴: اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ باشد، آنگاه $|a| \leq |b|$

خواص بخش پذیری (عاد کردن) به طور کلی:

$$a \mid b \implies -a \mid b, \quad a \mid -b, \quad -a \mid -b \quad (۱)$$

$$a \mid b \implies a \mid kb, \quad ka \mid kb \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (۲)$$

$$a \mid b \implies a \mid b^n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad a^n \mid b^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (۳)$$

$$a \mid b \implies |a| \leq |b| \quad (b \neq 0) \quad (۴)$$

$$a \mid b \implies a \mid mb \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (۵)$$

$$a \mid b, b \mid a \implies a = \pm b \quad (۶)$$

$$a \mid b, a \mid c \implies a \mid b \pm c, \quad a \mid mb \pm nc \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \quad (۷)$$

$$a \mid b, b \mid c \implies a \mid c \quad (\text{خاصیت تعدی}) \quad (۸)$$

$$a \mid b, c \mid d \implies ac \mid bd \quad (۹)$$

$$a \mid p, a \in \mathbb{N}, p \in \text{اعداد اول} \implies a = 1 \text{ یا } a = p \quad (۱۰)$$

$$\downarrow$$

$$\forall k < n \implies k \mid n! \quad (\text{مثال: } 4 \mid 10!, 7 \mid 10!, 13 \mid 10!) \quad (۱۱)$$

چند نکته مهم ریاضی:

نکته ۱: $a - 1 \mid a^n - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

• علت: $(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1) = a^n - 1$

• مثال: $8 = 9 - 1 \mid 9^n - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

• مثال: $4 = 5 - 1 \mid 5^n - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

نکته ۲: $a - b \mid a^n - b^n \quad (n \in \mathbb{N})$

• علت: $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n$

• مثال: $4 = 12 - 8 \mid 12^n - 8^n$

• مثال: $4 = 7 - 3 \mid 7^n - 3^n$

نکته ۳: اگر k, n دو عدد طبیعی باشند و $\frac{n}{k} \in \mathbb{N}$ ، آنگاه $a^k - b^k \mid a^n - b^n$

• مثال: $a^4 - b^4 \mid a^{12} - b^{12}$ (چون $\frac{12}{4} = 3 \in \mathbb{N}$)

• مثال: $a^3 - b^3 \nmid a^8 - b^8$ (چون $\frac{8}{3} \notin \mathbb{N}$)

قضیه تقسیم:

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، با تقسیم a بر b ، اعداد صحیح و منحصر به فردی مانند q و r وجود دارند به طوری که:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

• در این رابطه a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را خارج قسمت و r را باقی مانده می گویند.

• باقی مانده هیچ گاه منفی نبوده و از مقسم علیه کوچک تر است.

نکته ریاضی: خارج قسمت a بر b برابر است با:

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

افراز اعداد صحیح:

عدد صحیح n را در نظر می گیریم؛ به عنوان مثال اگر آن را بر ۴ تقسیم کنیم، باقی مانده صفر یا ۱ یا ۲ یا ۳ می شود. پس هر عدد صحیح را می توان به یکی از صورت های $4k$ یا $4k + 1$ یا $4k + 2$ یا $4k + 3$ نوشت. به عبارت دیگر، اعداد صحیح

به ۴ زیرمجموعه افراز می‌شوند. اگر آن را بر ۵ تقسیم کنیم، به زیرمجموعه‌های به صورت‌های $5k + 1$ یا $5k + 2$ یا $5k + 3$ یا $5k + 4$ افراز می‌شود. اینکه از کدام افراز استفاده کنیم، بستگی به صورت مسئله دارد.

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م):

عدد طبیعی d را «ب.م.م» دو عدد a و b (که هر دو باهم صفر نیستند) می‌گوییم و می‌نویسیم $(a, b) = d$ ، هرگاه:

(۱) d مقسوم‌علیه هر دو عدد باشد؛ یعنی $d \mid a$ و $d \mid b$.

(۲) d از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگ‌تر باشد (یعنی m کوچک‌تر یا مساوی d باشد)؛ یعنی:

$$\forall m > 0, m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d$$

مثال: ب.م.م ۱۲ و ۱۸ برابر ۶ است؛ زیرا:

مجموعه مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۲ = $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۸ = $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های مشترک ۱۲ و ۱۸ = $\{1, 2, 3, 6\}$

پس ب.م.م ۱۲ و ۱۸ = $6 = (12, 18)$

مثال‌های دیگر:

$$(2, 4) = 2, (35, 14) = 7, (2, dd) = d$$

(۱) علامت در ب.م.م بی تأثیر است؛ یعنی:

$$(a, b) = (-, ab) = (a, -b) = (-, a - b)$$

$$\text{مثال: } (3, 4) = (-, 3 - 4) = (-, 34) = (3, -4) = 3$$

(۲) اگر $b \mid a$ باشد، آنگاه $(a, b) = b$

اثبات: باید نشان دهیم $a \mid a$ ب.م.م است:

• شرط اول مقبول است: $a \mid a$ و $a \mid b$ (چون $a \mid a$)

• شرط دوم را بررسی می‌کنیم: اگر $b \mid a$ و $m > 0$ باشد، آنگاه:

$$m \mid a \Rightarrow m \leq |a| \text{ چون } m > 0 \text{ و } |m| \leq |a| \text{ پس } m = |m|$$

پس شرط دوم هم برقرار است.

$$(a, a) = (a, -a) = \dots = |a| \text{ نتیجه:}$$

$$((2, a^4 a) = |2a| \text{ مانند:})$$

(۳) اگر P عددی اول باشد و $a \nmid P$ (آنگاه $a \in \mathbb{Z}$)، آنگاه $(P, a) = 1$

اثبات: فرض کنیم $(P, a) = d$ ؛ پس:

$$\begin{cases} d \mid P \\ d \mid a \end{cases} \xrightarrow{\text{اول } P} d = 1 \text{ یا } d = P$$

اگر $d = P$ باشد، آنگاه $P \mid a \Rightarrow d \mid a$ (تناقض است، زیرا طبق فرض $P \nmid a$)

پس $d = 1$ قابل قبول است.

(۴) اگر دو عدد عامل مشترکی داشته باشند، می‌توانیم با فاکتورگیری، آن عامل مشترک را بیرون بیاوریم:

$$(k, akb) = k \mid (a, b)$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م):

دو عدد ناصفر a و b را در نظر بگیرید. عدد طبیعی c را «ک.م.م» دو عدد a و b می‌گوییم و می‌نویسیم $[a, b] = c$ ، هرگاه:

(۱) عدد c مضرب هر دو عدد a و b باشد؛ یعنی: $a \mid c$ و $b \mid c$

(۲) c از هر مضرب مشترک دلخواهی مانند m کوچک‌تر یا مساوی c باشد:

$$\forall m > 0, a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m$$

مثال: ک.م.م دو عدد ۳ و ۴ برابر ۱۲ است، زیرا:

$$\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \dots\} = 3 \text{ مجموعه مضرب‌های مثبت } 3$$

مجموعه مضرب‌های مثبت $4 = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$

مجموعه مضرب‌های مشترک مثبت $= \{12, 24, \dots\}$

پس کمم ۳ و $4 = 12 = [3, 4]$

فرض می‌کنیم $m > 0$ و $a \mid m$ و $b \mid m$ ، داریم:

$$b \mid m \Rightarrow |b| \leq |m| \xrightarrow{m>0} |b| \leq m$$

پس $|b|$ کمم است.

۳) اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند (یعنی ب‌م‌م آن‌ها برابر ۱ باشد)، کمم آن دو عدد برابر حاصل ضرب آن‌هاست؛ یعنی:

$$(a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = |ab|$$

مثال‌ها: $[4, 11] = 44$, $[4, 7] = 28$, $[3, 5] = 15$

۴) از ویژگی ۲ می‌توان نتیجه گرفت:

$$[a, a^n] = |a^n|, [2, a^4a] = |4a|$$

۵) فاکتورگیری در کمم:

$$[k, akb] = |k| [a, b]$$

مثال ۱: $[15, 12] = [3 \times 5, 3 \times 4] = 3[5, 4] = 3 \times 20 = 60$

مثال ۲: $[12, 144] = [12 \times 112 \times 12] = 12[1, 12] = 12 \times 12 = 144$

نکات کنکوری بسیار مهم:

$$(a, b) \mid [a, b] \quad \bullet$$

$$(a, [a, b]) = |a| \quad \bullet$$

$$[a, (a, b)] = |a| \quad \bullet$$

رابطه مهم بین کم و ب م م:

$$[a, b] = \frac{|a \times b|}{(a, b)} \quad (۱)$$

$$[a, b] = (a, b) \Rightarrow |a| = |b| \quad (۲)$$

مثال کاربردی: اگر $(a, b) = |a|$ باشد، $[۳, a^۳b]$ را به دست آورید.

• روش ۱: با فرمول $[۳, a^۳b] = \frac{|۳a \times ۳b|}{(۳, a^۳b)} = \frac{۹|a||b|}{۳(a, b)} = \frac{۳|a||b|}{|a|} = ۳|b|$

• روش ۲: چون $(a, b) = |a|$ ، پس $a | b$ است. در نتیجه: $[۳, a^۳b] = ۳[a, b] = ۳|b|$

تعریف هم‌نهشتی:

• دو عدد صحیح a و b را به سنج (پیمانه) طبیعی m «هم‌نهشت» می‌گویند هرگاه $m | a - b$ باشد و می‌نویسیم: ab

- و می‌خوانیم: " a به سنج (پیمانه) m با b هم‌نهشت است". به عبارت دیگر:
- $\forall a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, ab \Leftrightarrow m | a - b \Leftrightarrow a - b = mq$

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

(۱) بازتابی: aa (مثال: $۳ - ۳ = ۰ \Rightarrow ۸ | ۳ - ۳$)

(۲) تقارنی: $ab \Leftrightarrow ba$ (مثال: $۹ - ۴ = ۵$ و $۴ - ۹ = -۵ \Rightarrow ۵ | ۴ - ۹$)

(۳) تعدی: $\begin{cases} ab \\ bc \end{cases} \Rightarrow ac$ (مثال: $۷۵ \Rightarrow ۷۳ \Rightarrow ۵۳$)

(۴) جمع و تفریق: $ab \Rightarrow \begin{cases} a + cb + c \\ a - cb - c \end{cases}$

(به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان عدد صحیح اضافه یا از آن کم کرد.)

(۵) ضرب: $ab \Rightarrow acbc$ (در عددی صحیح ضرب کرد)

- **نکته مهم:** عکس این ویژگی برقرار نیست؛ یعنی اگر $acbc$ باشد، لزوماً نتیجه نمی‌گیریم ab (قانون حذف در هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست).

• **مثال نقض:** $3 \times 32 \times 14$ اما 42 غلط است

(۶) **توان رسانی:** $ab \Rightarrow a^n b^n$ (برای هر $n \in \mathbb{N}$)

• **اثبات:** با استفاده از اتحاد $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$

$$ab \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid (a - b)(\dots) \Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n b^n$$

• **تذکر:** عکس این ویژگی درست نیست (مثلاً 5^3 درست است اما 5^3 در اینجا برقرار است، اما همیشه این طور نیست).

• **مثال:**

$$7^3 \Rightarrow 7^2 7^2$$

$$3 - 1 \Rightarrow 3^{100}(-1)^{100} \Rightarrow 3^{100} 1$$

(۷) **عملیات روی دو رابطه هم نهشتی با پیمانه ی یکسان:**

اگر $\begin{cases} ab \\ cd \end{cases}$ باشند، آنگاه:

• $(acbd)$ ضرب

• $(a + cb + d)$ جمع

• $(a - cb - d)$ تفریق

(۸) **هم نهشتی با باقی مانده:**

اگر $a = mq + r$ باشد، آنگاه ar (یعنی عدد با باقی مانده ی خودش هم نهشت است).

• **نتیجه ۱:** هرگاه بخواهیم کوچک ترین عدد نامنفی هم نهشت با a به پیمانه m را مشخص کنیم، کافی است a را بر m تقسیم کرده و باقی مانده را به دست آوریم.

• **مثال:** $294?$

تقسیم: $294 \div 11 = 26$ با باقی مانده ۱۰

پس: ۲۹۴۱۰

نتیجه ۲: اگر دو عدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m هم‌باقی‌مانده باشند، در این صورت: ab

• مثال:

۱۳۳ (چون ۱۳ و ۳ هر دو در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده ۳ دارند).

۲ - ۸ (چون ۸ در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده ۳ دارد و ۲ - ۸ در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده ۳ دارد).

۹) اگر $acbc = d$ و $(c, m) = d$ باشد، آنگاه ab

(به زبان ساده: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم‌نهشتی را بر ب‌م‌م آن عدد و پیمانه، تقسیم کنیم).

کلاس (دسته‌های) هم‌نهشتی:

مجموعه همه‌ی اعداد صحیحی که در تقسیم بر m ، باقی‌مانده‌ای برابر r دارند را «کلاس» یا «دسته هم‌نهشتی r به پیمانه m » می‌گوییم و آن را با $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

به عبارت دیگر:

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + rk \in \mathbb{Z}\}$$

افراز اعداد صحیح:

در تقسیم اعداد صحیح بر m ، دقیقاً m باقی‌مانده به وجود می‌آید؛ پس مجموعه اعداد صحیح به m کلاس یا دسته هم‌نهشتی افراز می‌شود.

• **به عنوان مثال:** می‌دانیم هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $4k$ ، $4k + 1$ ، $4k + 2$ و $4k + 3$ است.

(افراز اعداد صحیح بر اساس باقی‌مانده تقسیم بر ۴).

به دست آوردن باقیمانده تقسیم بر اعداد خاص:

نکته ۱: باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳؛ یعنی:

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

مثال: باقیمانده تقسیم عدد $598348 = A$ را بر ۳ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$598348 + 9 + 8 + 3 + 4 + 8 = 371 \Rightarrow \boxed{r=1}$$

نکته ۲: باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹؛ یعنی:

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

مثال: باقیمانده تقسیم عدد ۲۷۱۳۹۱ را بر ۹ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$271391 + 7 + 1 + 3 + 9 + 1 = 235 \Rightarrow \boxed{r=5}$$

نکته ۳: برای به دست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۱، بین ارقام از سمت راست یک در میان + و - قرار می دهیم.

محاسبه روز هفته بر حسب تاریخ:

یکی از کاربردهای هم نهشتی این است که پیدا کنیم فلان تاریخ، چندشنبه است. می دانیم هر روز از روزهای هفته مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می شود. به عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد، در این صورت $19=12+7$ فروردین و $26=19+7$ فروردین نیز یکشنبه می باشد. همچنین می دانیم شش ماه اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال (غیر از اسفند که به جز سال کبیسه، ۲۹ روزه است) همگی ۳۰ روزه می باشند.

حل معادله سیاله

هر معادله به صورت $ax + by = c$ را که در آن همه ضرایب و مجهولات عدد صحیح هستند $(a, b, c, x, y \in \mathbb{Z})$ ، معادله سیاله خطی درجه اول می گوئیم.

تذکر مهم: شرط لازم و کافی برای اینکه معادله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که $(a, b) \mid c$ باشد.

برای حل معادله سیاله، می توان آن را به صورت زیر به معادله هم نهشتی تبدیل و حل کرد:

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = (-b)y \Rightarrow -b \mid ax - c \Rightarrow b \mid ax - c \Rightarrow \boxed{axc}$$

$$ax + by = c \Rightarrow by - c = (-a)x \Rightarrow -a \mid by - c \Rightarrow a \mid by - c \Rightarrow \boxed{byc}$$

بعد از اینکه یکی از معادلات هم نهشتی را حل و متغیر را پیدا کردیم، باید آن را در معادله سیاله قرار دهیم تا مجهول دیگر به دست آید.

مثال: معادلات سیاله زیر را حل کنید:

$$(الف) \quad 4x + 5y = 9$$

$$4x9 \Rightarrow 4x4 \xrightarrow{(4,5)=1} x1 \Rightarrow x-1 = 5k \Rightarrow \boxed{x = 5k + 1}$$

$$4(5k + 1) + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 4 + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 5y = 5 \Rightarrow 4k + y = 1 \\ \Rightarrow \boxed{y = -4k + 1}$$

$$(ب) \quad 3x + 7y = 5$$

$$3x5 \Rightarrow 3x15 \xrightarrow{(3,7)=1} x5 \Rightarrow x-5 = 7k \Rightarrow x = 7k + 5$$

(نکته: در حل معادله بالا، $x = 7k + 5$ یا ساده‌تر با $x = 7k - 2$ هم جواب می‌دهد)

$$3(7k + 5) + 7y = 5 \dots$$

(ادامه محاسبات در تصویر:)

$$3(7k + 5) + 7y = 5 \Rightarrow 21k + 15 + 7y = 5 \Rightarrow 7y = -21k + 10 \Rightarrow \boxed{y = -3k + 1}$$