

به نام خداوند جان و خرد

جزوه فصل ۲ گسسته (گراف)

نکته ۱: گراف ساده

گراف ساده G ، یک زوج مرتب به صورت (V, E) می باشد که در آن:
 V یک مجموعه متناهی و ناتهی از اعضا است که به آن ها «رأس های گراف G » می گویند.
 E مجموعه ای از تمام زیرمجموعه های دو عضوی از مجموعه V است. اعضای مجموعه E را «یال های گراف G » می نامند که با پاره خط هایی، ارتباط بین اعضای V را مشخص می کنند.

نکته ۲: یال های موازی

دو یال را «موازی» می گوئیم هرگاه بین دو رأس یکسان، رسم شده باشند.

نکته ۳: طوقه یا حلقه (لوپ)

طوقه یا حلقه، یالی است که یک رأس را به خودش وصل می کند.

نکته ۴: گراف ساده

یک گراف «ساده» است اگر و تنها اگر ویژگی های زیر را داشته باشد:

الف) طوقه (حلقه) نداشته باشد.

ب) یال موازی نداشته باشد.

ج) بین هر دو رأس آن، حداکثر یک یال وجود داشته باشد.

نکته ۵: رئوس مجاور

در گراف G ، دو رأس a و b را «مجاور» می‌گوییم هرگاه دو سر یک یال باشند؛ یعنی یال ab در مجموعه E (مجموعه یال‌ها) وجود داشته باشد.

نکته ۶: گراف جهت‌دار

گراف جهت‌دار، گرافی است که در آن هر یال به صورت پاره‌خط جهت‌دار نشان داده می‌شود. گراف جهت‌دار G یک زوج مرتب (V, E) است که در آن V مجموعه متناهی و ناتهی از رئوس است و E زیرمجموعه‌ای از تمام زوج‌های مرتب از اعضای V می‌باشد. این گراف دارای دو ویژگی مهم است:

بین هر دو رأس آن، حداکثر ۲ یال وجود دارد (یعنی یک یال از u به v و یک یال از v به u).

هر رأس آن حداکثر می‌تواند یک طوقه داشته باشد.

نکته ۷: تعداد کل گراف‌های جهت‌دار

تعداد کل گراف‌های جهت‌دار با p رأس برابر است با:

$$2^{p^2}$$

نکته ۸: تعداد گراف‌های جهت‌دار بدون طوقه (حلقه)

تعداد گراف‌های جهت‌دار p رأسی که هیچ طوقه‌ای ندارند، برابر است با:

$$2^{p^2-p}$$

نکته ۹: تعداد گراف‌های جهت‌دار با n طوقه

تعداد گراف‌های جهت‌دار p رأسی که دقیقاً دارای n طوقه هستند، برابر است با:

$$\binom{p}{n} \times 2^{p^2-p}$$

نکته ۱۰: گراف چندگانه

گرافی که حداقل یک حلقه (طوقه) یا یک یال موازی داشته باشد، «گراف چندگانه» نامیده می‌شود. در این نوع گراف، بین هر دو رأس، ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد.

نکته ۱۱: درجه یک رأس

درجه‌ی یک رأس مثل V در گراف G (که با $degV$ نمایش می‌دهیم)، برابر با تعداد یال‌هایی است که به آن رأس متصل هستند.

اگر $degV$ یک عدد فرد باشد، به V «رأس فرد» می‌گوییم.

اگر $degV$ یک عدد زوج باشد، به V «رأس زوج» می‌گوییم.

نکته ۱۲: ماکزیمم و مینیمم درجه

بزرگترین عدد در بین درجه‌های تمام رئوس یک گراف را «ماکزیمم درجه» می‌نامیم و با نماد $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

کوچکترین عدد در بین درجه‌های تمام رئوس یک گراف را «مینیمم درجه» می‌نامیم و با نماد $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۱۳: مرتبه و اندازه گراف

در گراف $G(V, E)$:

تعداد اعضای V (رئوس) را «مرتبه» گراف گفته و با p نشان می‌دهیم.

تعداد اعضای E (یال‌ها) را «اندازه» گراف گفته و با q نشان می‌دهیم.

نکته ۱۴: انواع رأس

رأس ایزوله (منزوی/تنها/منفرد): راسی که درجه‌ی آن صفر باشد.

رأس آویزان: راسی که درجه‌ی آن یک باشد.

رأس فول (Full): راسی که بیشترین درجه‌ی ممکن یعنی $(p - 1)$ را داشته باشد.

رأس فرد: راسی که درجه‌ی آن فرد باشد.

رأس زوج: راسی که درجه‌ی آن زوج باشد.

نکته ۱۵:

در محاسبه درجه‌ی رئوس، یک طوقه را ۲ درجه حساب می‌کنیم؛ زیرا یک بار از رأس خارج شده و یک بار به آن وارد می‌شود.

نکته ۱۶: محدودیت اندازه و مرتبه

در یک گراف ساده، تعداد یال‌ها (q) با مرتبه (p) رابطه زیر را دارد:

$$0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2}$$

نکته ۱۷: تعداد گراف‌های ساده

تعداد کل گراف‌های ساده‌ای که می‌توان با رأس p (با فرض نام‌گذاری رئوس) ساخت، برابر است با:

$$2^{\binom{p}{2}}$$

نکته ۱۸: گراف‌های ۳ رأسی (بدون نام‌گذاری)

تعداد گراف‌های ساده ۳ رأسی بدون نام‌گذاری رئوس، برابر با ۴ است.

نکته ۱۹: گراف‌های ۴ رأسی (بدون نام‌گذاری)

تعداد گراف‌های ساده ۴ رأسی بدون نام‌گذاری رئوس، برابر با ۱۱ است.

نکته ۲۰: تعداد گراف‌های ساده با رأس p و یال q (با نام‌گذاری)

تعداد گراف‌های ساده با مرتبه p و اندازه q (با فرض نام‌گذاری رئوس)، برابر است با:

$$\binom{\binom{p}{2}}{q}$$

که در آن S مجموعه شامل کلیه‌ی زیرمجموعه‌های دو عضوی از V می‌باشد.

نکته ۲۱: تعداد گراف‌های ساده p رأسی با q یال (شامل k_1 یال به‌خصوص)

تعداد گراف‌های ساده p رأسی در مجموعه $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ که q یالی بوده و شامل k_1 یال به‌خصوص باشد، برابر است با:

$$\binom{\binom{p}{2} - k_1}{q - k_1}$$

نکته ۲۲: تعداد گراف‌های ساده p رأسی با q یال (شامل k_1 یال به‌خصوص و بدون k_2 یال به‌خصوص)

تعداد گراف‌های ساده p رأسی در مجموعه $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ که q یالی بوده و شامل k_1 یال به‌خصوص بوده و k_2 یال به‌خصوص را نداشته باشد، برابر است با:

$$\binom{\binom{p}{2} - k_1 - k_2}{q - k_1}$$

نکته ۲۳: تعداد گراف‌های ساده p رأسی با m رأس منفرد (شامل k_1 یال به‌خصوص)

تعداد گراف‌های ساده p رأسی در مجموعه $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ که شامل k_1 یال به‌خصوص بوده و m رأس منفرد داشته باشد، برابر است با:

$${}_p^{(p-m)-k_1}$$

نکته ۲۴: تعداد گراف‌های ساده p رأسی (شامل k_1 یال به‌خصوص و بدون k_2 یال به‌خصوص)

تعداد گراف‌های ساده p رأسی در مجموعه $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ که شامل k_1 یال به‌خصوص بوده و k_2 یال به‌خصوص را نداشته باشد، برابر است با:

$${}_p^{(p)-k_1-k_2}$$

نکته ۲۵: تعداد گراف ساده مرتبه p شامل:

الف) دو یال، برابر است با:

$$\binom{\binom{p}{2}}{2}$$

ب) دو یال با رأس مشترک، برابر است با:

$$3 \times \binom{p}{3}$$

ج) دو یال بدون رأس مشترک، برابر است با:

$$3 \times \binom{p}{4}$$

نکته ۲۶:

الف) تعداد گراف‌های ساده مرتبه p با رأس منفرد، که در آن درجه رأس v_1 را صفر در نظر گرفته‌ایم، برابر است با:

$$\binom{p-1}{m} \times 2^{\binom{p-m}{2}}$$

ب) تعداد گراف‌های ساده مرتبه p با اندازه q و با وجود m رأس منفرد، برابر است با:

$$\binom{p}{m} \times \binom{\binom{p-m}{2}}{q-m}$$

نکته ۲۷: گراف بازه‌ای

گراف بازه‌ای، گرافی است که رأس‌های آن متناظر با بازه‌هایی از اعداد حقیقی هستند و دو رأس زمانی به هم وصل می‌شوند که بازه‌های متناظر با آن‌ها اشتراک داشته باشند.

نکته ۲۸: حفره

هر چهارضلعی بدون قطر را یک **حفره** می‌گوییم.

هر گرافی که دارای حفره نباشد، **گراف بدون حفره** نامیده می‌شود؛ یعنی هیچ مجموعه‌ای از چهار رأس در آن وجود ندارد که چهار یال یک دور چهاررأسی را تشکیل دهند، اما یال‌های قطری بین آن‌ها وجود نداشته باشند.

نکته ۲۹:

مثلث با یک شاخه و مثلث با دو شاخه، **بازه‌ای** است؛ ولی مثلث با سه شاخه و مختصات R^3 با سه شاخه، **بازه‌ای نیست**.

نکته ۳۰:

اگر قسمتی از گراف، بازه‌ای نباشد، کل آن گراف **بازه‌ای نیست**.

نکته ۳۱: گراف چندبخشی

در بعضی از گراف‌ها، بین قسمت‌هایی از گراف هیچ ارتباطی از طریق یال‌ها برقرار نیست. در این حالت می‌گوییم گراف شامل **بخش‌های جدا از هم** است.

نکته ۳۲:

اگر گراف ساده G دارای k بخش جدا از هم باشد، در این صورت رابطه زیر برای اندازه گراف (q) برقرار است:

$$p - k \leq q \leq \binom{p - k + 1}{2}$$

نکته ۳۳: مجموع درجات رئوس یک گراف ساده برابر با $2q$ است.

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$$

نکته ۳۴: تعداد رئوس فرد هر گراف، همواره **زوج** است. همچنین تعداد رئوس زوج بستگی به مرتبه گراف (p) دارد؛ یعنی:

اگر $p =$ فرد $\rightarrow$ تعداد رئوس زوج، **فرد** است.

اگر $\rightarrow$ زوج $p =$ تعداد رئوس زوج، زوج است.

نکته ۳۵: رابطه بین مینیمم درجه (δ)، ماکزیمم درجه (Δ) و درجه هر رأس دلخواه ($deg v_i$) در یک گراف ساده به صورت زیر است:

$$0 \leq \delta \leq \deg v_i \leq \Delta \leq p - 1$$

نکته ۳۶: میانگین درجات رئوس گراف

میانگین درجات رئوس یک گراف (که معمولاً با $\bar{d}$ یا $\bar{V}$ نشان داده می‌شود) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{V} = \frac{2q}{p}$$

نکته ۳۷: محدودیت درجه

چون میانگین درجه‌ی رئوس یک گراف، بین کمترین درجه (δ) و بیشترین درجه (Δ) می‌باشد، خواهیم داشت:

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$$

نکته ۳۸:

اگر در یک سؤال δ و Δ با هم داده شده باشند، دیگر نمی‌توان از رابطه‌ی $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$ برای به دست آوردن بیشترین یا کمترین مقدار q استفاده کرد؛ بلکه باید درجه رئوس گراف را در بالاترین و پایین‌ترین حالت نوشت.

نکته ۳۹:

در هر گراف ساده مرتبه p ، اگر بزرگترین درجه رئوس Δ باشد، آنگاه حداکثر تعداد یال‌های موجود در گراف برابر است با:

$$q_{\max} = \left\lfloor \frac{p\Delta}{2} \right\rfloor$$

(نماد $[]$ یا همان براکت، نشان دهنده‌ی جزء صحیح است.)

نکته ۴۰: دنباله گراف

دنباله‌ای است که در آن درجات رئوس گراف ساده به ترتیب نزولی مرتب شده‌اند.

نکته ۴۱: ویژگی‌های دنباله گرافی

- تعداد اعداد دنباله برابر مرتبه گراف (p) است.
- جمع اعداد دنباله برابر مجموع درجات یعنی $2q$ است.
- تعداد اعداد فرد دنباله زوج است. (لم دست دادن)
- اگر تعداد رئوس فول برابر k باشد: $\delta \geq k$.
- درجه رئوس از تعداد رئوس کوچکتر است.
- حداقل یکی از اعداد در دنباله تکرار شده باشد.

نکته ۴۲:

هر دنباله به صورت $1, 1, \dots, 1, k-1, k-1, \dots, k-1, k, k, \dots, k, S$ یک دنباله گرافی است.

نکته ۴۳: الگوریتم هاول - حکیمی

شرط لازم و کافی برای آنکه دنباله نزولی $d_1, d_2, \dots, d_{\Delta+1}$ گرافی باشد آن است که دنباله $d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_{\Delta} - 1$ گرافی باشد.

به زبان ساده: یعنی اینکه عدد دنباله (Δ) را حذف کرده و از Δ جمله بعدی یک واحد کم می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم تا به عبارت منطقی برسیم.

تذکر مهم: برای کشیدن شکل گراف، ابتدا الگوریتم هاول-حکیمی را عمل کرده سپس دنباله منطقی به دست آمده را رسم نموده و با بازگشت مرحله به مرحله، رأس‌هایی را که در هر مرحله حذف نموده‌ایم به شکل قبلی اضافه می‌کنیم تا به گراف اولیه برسیم.

نکته ۴۴: گراف منتظم

گرافی است که درجه تمام رئوس آن با هم برابر باشد. پس گراف r -منتظم گرافی است که درجه‌ی تمام رئوس آن برابر r باشد و دارای ویژگی‌های زیر است:

$$q = \frac{1}{p} pr, r < p, (r, p, q) \in \mathbb{W}$$

- طبق لم دست دادن حداقل یکی از دو عدد p و r زوج است و اگر یکی از آن‌ها فرد باشد q بر آن بخش‌پذیر است.
- تعداد گراف‌های فرد-منتظم از مرتبه‌ی فرد صفر است، زیرا تعداد رئوس فرد زوج می‌باشد.
- اگر درجه راس‌های یک گراف تشکیل تصاعد عددی یا هندسی دهند گراف منتظم است.
- اگر در یک گراف $\delta = \Delta$ باشند، آنگاه گراف منتظم است.

نکته ۴۵ (مهم):

تعداد گراف‌های ۲-منتظم یا $(p-3)$ -منتظم از مرتبه p برابر است با تعداد حالت‌هایی که می‌توان عدد p را به صورت مجموع چند عدد بزرگتر از ۲ نوشت. همچنین تمام p ضلعی‌ها، ۲-منتظم است.

نکته ۴۶: گراف کامل

گرافی است $(p-1)$ -منتظم از مرتبه‌ی p که آن را با نماد K_p نمایش می‌دهند و دارای ویژگی‌های زیر است:

$$q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$\delta = \Delta = p-1$$

$8q + 1$ باید مربع کامل باشد.

در یک گراف کامل p راس می‌توان $1 - 2^p$ گراف کامل یافت.

نکته ۴۷:

برای حل تست‌های درجه ماکزیمم، گراف داده شده را با گراف کامل هم‌مرتبه آن مقایسه می‌کنیم.

به زبان ساده: هرگاه در یک سوال یا راس کم یا یال زیاد دیدید، به یاد گراف کامل هم‌مرتبه با آن بیافتید.

نکته ۴۸:

برای تعیین حداکثر تعداد رئوس از درجه $p-1$ در گراف مرتبه p با اندازه q ، از رابطه‌ی $\binom{p}{2} - q \leq n_{\min}$ را به دست می‌آوریم؛ سپس در رابطه‌ی $x = p - n_{\min}$ قرار داده و مقدار x (حداکثر تعداد رئوس از درجه $p-1$) را محاسبه می‌کنیم.

به بیان دیگر:

$$\text{اختلاف} = q_{k_p} - q_G \Rightarrow x = p - (1 + \text{اختلاف})$$

تذکره ۱: اگر $q = \frac{p(p-1)}{2} - 1$ در این صورت ۲ رأس آن درجه $p-2$ بوده و $p-2$ رأس آن از درجه $p-1$ هستند.

تذکره ۲: اگر $q = \frac{p(p-1)}{2} - 2$ در این صورت:

اگر ۲ یال مجاور از k_p حذف شوند، آنگاه $p-3$ رأس از درجه $p-1$ هستند.

اگر ۲ یال غیرمجاور از گراف k_p حذف شوند، آنگاه $p-4$ رأس از درجه $p-1$ هستند.

نکته ۴۹:

الف) اگر از گراف کامل k_p ، تعداد m یال ($1 \leq m \leq p-2$) حذف کنیم، حداکثر مقدار $\Delta - \delta$ در گراف به دست آمده برابر m است.

ب) در یک گراف ساده:

اگر $q \leq \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ باشد، حداکثر $\Delta - \delta$ برابر $p-1$ است.

اگر $q > \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ باشد، حداکثر $\Delta - \delta$ برابر $\binom{p}{2} - \binom{p-1}{2}$ است.

نکته ۵۰: گراف تهی

گراف $G(V, E)$ را تهی گویند و آن را با $\bar{k}$ نشان می‌دهند هرگاه: $E = \emptyset$.

نکته ۵۱: گراف مکمل

مکمل گراف G را با نماد $\bar{G}$ نشان می‌دهند. و گرافی است که از وصل کردن رئوسی که در گراف G به هم وصل نشده‌اند حاصل می‌شود؛ داریم: $G \cup \bar{G} = K_p$.

نکته ۵۲:

تعداد یال‌های گراف $\bar{G}$ برابر است با: $q(G) - \binom{p}{2}$ یعنی:

$$q + q' = \frac{p(p-1)}{2}$$

نکته ۵۳:

$$\deg_G^{V_i} + \deg_{\bar{G}}^{V_i} = p - 1$$

نکته ۵۴:

اگر دو رأس در گراف G مجاور باشند، در $\bar{G}$ مجاور نیستند.

نکته ۵۵:

اگر گراف G ، r -منتظم از مرتبه p باشد، مکمل آن $\bar{G}$ ، $(p - r - 1)$ -منتظم از مرتبه p است.

نکته ۵۶:

اگر دنباله درجات یک گراف از مرتبه p به صورت $d_1, \dots, d_p$ باشد، دنباله درجات گراف مکمل آن به صورت $p - d_1, \dots, p - d_p$ خواهد بود.

نکته ۵۷: مسیر

نحوه اتصال بین دو رأس را مسیر و تعداد یال‌های این اتصال را طول مسیر می‌گویند و دنباله متشکل از تنها یک رأس یک مسیر به طول صفر می‌باشد. بنابراین مسیر به طول m شامل $m + 1$ رأس مختلف است.

نکته ۵۸: تعریف فاصله بین دو رأس

فاصله بین دو رأس u و v در گراف ساده که با نماد $d(u, v)$ نشان داده می‌شود، برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v .

نکته ۵۹: نکات فاصله بین دو رأس

$$u, v \in V: u = v \Leftrightarrow d(u, v) = 0$$

$$d(u, v) = d(v, u)$$

$$u, v, w \in V: d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$$

نکته ۶۰:

وجود مسیر بین دو رأس، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؛ پس رئوسی که بین آن‌ها مسیر وجود دارد در یک کلاس هم‌ارزی قرار می‌گیرند.

نکته ۶۱:

تعداد کل مسیرها در گراف کامل از مرتبه p ($p \geq 3$) برابر است با:

$$\binom{p}{2} \times [(p-2)! \cdot e]$$

که در آن $e \approx 2.71$ است.

نکته ۶۲:

الف) تعداد مسیر در گراف k_p بین دو رأس u و v برابر است با:

$$[(p-2)! \cdot e]$$

ب) تعداد مسیرها در گراف کامل k_p که به طول m بوده و شامل یال خاصی از آن باشند برابر است با:

$$\binom{p-2}{m-1} \times m!$$

نکته ۶۳:

تعداد مسیرها به طول k بین دو رأس u و v از گراف کامل K_p بدین ترتیب به دست می‌آید که به تعداد $k + 1$ رأس خط می‌کشیم. در ابتدا رأس u را قرار می‌دهیم و در انتها رأس v را. از p دو واحد کم کرده، به‌طور متوالی روی خطها قرار داده و آنها را بنا به اصل شمارش در هم ضرب می‌کنیم.

نکته ۶۴:

تعداد مسیر به طول m در گراف کامل K_p :

$$\binom{p}{2} \cdot \frac{(p-2)!}{(p-m-1)!}$$

نکته ۶۵: دور

به مسیری که رئوس ابتدا و انتهای آن یکسان باشد، دور می‌گویند.

نکته ۶۶:

الف) اگر در یک گراف همبند $p = q$ آنگاه گراف فقط ۱ دور دارد.

ب) گراف پترسن دارای دوره‌های به طول ۵، ۶، ۸ و ۹ می‌باشد.

گراف مشاغل: گرافی است که تعدادی متقاضی و تعدادی شغل وجود دارد و هر کدام از متقاضی‌ها خواهان یک یا چند شغل می‌باشند.

گرافی می‌تواند بیان‌کننده‌ی یک گراف شغل و متقاضی باشد که بتوان به بعضی از رأس‌های آن متقاضی نسبت داد و به بعضی از رأس‌های آن شغل نسبت داد؛ (رأس مربوط به متقاضی نباید به رأس مربوط به متقاضی وصل باشد و همچنین رأس مربوط به شغل نباید به رأس مربوط به شغل وصل شود).

نکته ۶۷:

در گراف مشاغل، دور به طول فرد وجود ندارد.

نکته ۶۸: در گراف کامل k_p

الف) تعداد دور به طول m :

$$\binom{p}{m} \cdot \frac{(m-1)!}{2}$$

ب) تعداد کل دورهای گراف:

$$\sum_{m=3}^p \binom{p}{m} \cdot \frac{(m-1)!}{2}$$

نکته ۶۹: گراف همبند

گرافی است که بین هر دو رأس آن حداقل ۱ مسیر وجود داشته باشد و در غیر این صورت گراف ناهمبند است.

نکته ۷۰:

هر گراف ساده از مرتبه p و اندازه q اگر $q \leq p-2$ ، ناهمبند است.

نکته ۷۱:

الف) هر گراف از مرتبه p و اندازه $\frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$ یا بیشتر، الزاماً همبند است.

ب) در گرافهای r -منتظم از مرتبه p ، هرگاه $r \geq \frac{p-1}{2}$ باشد، گراف همواره همبند است.

ج) اگر در گراف ساده G از مرتبه p داشته باشیم $\delta \geq \frac{p-1}{2}$ ، گراف همبند است.

د) در یک گراف ساده p رأسی همبند، اگر $\delta = m$ باشد، آنگاه حداکثر اندازه‌ی گراف از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$q_{\max} = \frac{(p-1)(p-2)}{2} + m$$

ه) در یک گراف ساده p رأسی ناهمبند، اگر $\delta = m$ باشد، آنگاه حداکثر اندازه‌ی گراف از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$q_{\max} = q_{k_m} + q_{k_{p-m}}$$

(توضیح: یعنی مجموع یال‌های دو گراف کامل با مرتبه‌های m و $p-m$)

نکته ۷۲: گراف همیلتنی

اگر در گراف G از مرتبه‌ی p ($p \geq 3$)، دوری به طول p داشته باشد، آنگاه G را **گراف همیلتنی** می‌نامیم.

(به بیان دیگر اگر در گرافی از مرتبه $p \geq 3$ بتوان از رأسی دلخواه شروع کرده و طی یک دور از تمام رئوس گراف عبور کرد، آن گراف را همیلتنی می‌نامیم.)

نکته ۷۳: نتایج حاصل از تعریف

اگر G همیلتنی باشد، آنگاه به ازای هر $v \in V(G)$ داریم: $\deg v \geq 2$

هر گراف کامل K_p ($p \geq 3$) همیلتنی است.

هر گراف همیلتنی همبند است. (حتی اگر یک یال دلخواه از هر گراف همیلتنی را حذف کنیم، باز هم گراف حاصل همبند خواهد بود.)

بین هر دو رأس متمایز گراف همیلتنی حداقل دو مسیر وجود دارد.

در هر گراف همیلتنی از مرتبه p و اندازه q همواره داریم: $3 \leq p \leq q$

تعداد دورهای همیلتنی در یک گراف کامل برابر است با:

$$\frac{(p-1)!}{2}$$

اگر در گرافی $\frac{p}{q} \geq \delta$ باشد، آنگاه گراف حتماً همیلتنی است. (قضیه دیراک)

نکته ۷۴: گراف اویلری

گرافی است که بتوان از یکی از رئوس آن شروع کرد و از همه یال‌ها دقیقاً یک بار گذشت و به رأس اولیه بازگشت. به بیان دیگر: گراف G اویلری است هرگاه:

همبند باشد.

درجه تمامی رئوس آن زوج باشد.

(و برعکس)

نکته طلایی: گراف پترسن نه همیلتنی است و نه اویلری!

نکته ۷۵: گراف نیمه‌اویلری

گرافی است که بتوان از یکی از رئوس آن شروع کرد و از همه یال‌ها یک‌بار گذشت و به رأس دیگری رسید.

نکته ۷۶:

گراف نیمه‌اویلری است هرگاه:

دقیقاً دو رأس فرد داشته باشد.

(رئوس ابتدا و انتهای مسیر نیمه‌اویلری، همان دو رأس فرد هستند.)

نکته ۷۷:

اگر گراف کامل از مرتبه $3 \leq p$ ، مرتبه‌اش فرد باشد، هم اویلری، هم بازه‌ای و هم همیلتنی است.

نکته ۷۸: تعریف گراف کامل دو بخشی

فرض کنیم رئوس گراف G را بتوان به دو مجموعه A و B افراز کرد به طوری که رئوس A مجاور نباشند و اگر مجموع درجات رئوس A برابر مجموع درجات رئوس B باشد، آنگاه G را یک **گراف دو بخشی** می‌نامیم. اگر تعداد رئوس مجموعه A را m و تعداد رئوس مجموعه B را n نشان دهیم، در این صورت گراف کامل دو بخشی را با نماد $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

نکته ۷۹: خواص گراف کامل دو بخشی $K_{m,n}$

- از مرتبه $m + n$ است.
- اندازه mn است.
- دور به طول فرد ندارد؛ پس طول دورهای آن اعداد زوج است و چون دور به طول ۲ نداریم، طول کوچک‌ترین دور آن ۴ یا بیشتر است.
- برای آنکه دور داشته باشد، باید $m, n \geq 2$ باشد.
- با شرط $m, n \geq 2$ ، کم‌ترین طول دور ۴ و بیش‌ترین طول دور آن برابر $\min\{m, n\} \times 2$ است.
- تعداد دورهای به طول $2k$ برابر $\frac{(k-1)!}{2} \binom{m}{k} \binom{n}{k}$ است. $(m, n \geq k)$
- اویلری است اگر و تنها اگر m و n زوج باشند.
- همیلتنی است اگر و تنها اگر $m = n$ باشد. $(m, n \geq 2)$
- نیمه‌اویلری است هرگاه دقیقاً یکی از m و n برابر ۲ و دیگری فرد بزرگ‌تر از ۱ باشد.

نکته ۸۰: درخت

گراف همبند و بدون دور را **درخت** می‌نامیم. درخت از مرتبه p را با T_p نشان می‌دهیم.

نکته ۸۱:

در هر درخت بین هر دو رأس متمایز، فقط یک مسیر منحصر به فرد وجود دارد.

نکته ۸۲:

الف) هر درختی که بیش از یک رأس داشته باشد، حداقل دو رأس از درجه ۱ دارد.

ب) اگر در یک درخت $\Delta = m$ باشد، درخت حداقل m رأس درجه یک دارد.

نکته ۸۳:

در هر درخت از مرتبه p و اندازه q داریم:

$$p = q + 1$$

نکته ۸۴:

تعداد کل مسیرهای متفاوت موجود در یک درخت از مرتبه p برابر است با $\binom{p}{2}$ که $p - 1$ مسیر از آنها دقیقاً ۱ و طول سایر مسیرها که تعدادشان $\binom{p-1}{2}$ است، اقل از ۲ است.

(در تمام درخت‌ها به ازای $p \geq 2$):

- تعداد مسیرها به طول بزرگ‌تر یا مساوی صفر: $\binom{p}{2}$
- تعداد مسیرها به طول بزرگ‌تر یا مساوی یک: $\binom{p}{2}$
- تعداد مسیرها به طول بزرگ‌تر یا مساوی دو: $\binom{p-1}{2} - q$

نکته ۸۵:

تعداد درخت‌ها از مرتبه p برابر است با:

$$(p - 4) + 2^{p-4} \quad (p \geq 5)$$

نکته ۸۶: طریقه به دست آوردن تعداد رأس درجه ۱ در درخت‌ها

از درجات بزرگ‌تر از ۲، هر کدام ۲ واحد کم می‌کنیم.

نکته ۹۰: در هر درخت:

$$p + q = \text{فرد}$$

$$p \cdot q = \text{زوج}$$

$$p^2 + q^2 = 4k + 1 = \text{فرد}$$

$$p^2 + q^2 = 4k + 1 = \text{فرد}$$

$$p^n \pm q^m = \text{فرد}$$

نکته ۹۱:

تعداد درخت‌های متمایز به ازای تعداد رأس‌های مختلف در جدول زیر آمده است:

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	تعداد رأس
۲۳	۱۱	۶	۳	۲	۱	۱	۱	تعداد درخت

نکته ۹۲:

میانگین درجه رئوس درخت برابر $\bar{d} = \frac{2q}{p} = \frac{2p-2}{p}$ می‌باشد که دنباله‌ای است اکیداً صعودی.

نکته ۹۳:

به هر گراف بدون دور، **جنگل** می‌گویند (متشکل از تعدادی گراف همبند و بدون دور یا همان درخت).

نکته ۹۴: ماتریس مجاورت

ارتباط بین رأس‌های گراف ساده را نشان می‌دهد. ماتریس مجاورت گراف G از مرتبه p ، یک ماتریس $p \times p$ متشکل از درایه‌های صفر و یک است که سطرها و ستون‌های ماتریس به ترتیب با رئوس $v_1, v_2, \dots, v_p$ نام‌گذاری می‌شوند.

نکته ۹۵: ویژگی‌های ماتریس مجاورت گراف ساده:

- تمام درایه‌های آن ۰ و ۱ می‌باشد و قطر آن همواره صفر است.
- مرتبه آن $p \times p$ یعنی همان مرتبه گراف می‌باشد.
- ماتریسی متقارن و مربعی است؛ یعنی سطر n ام با ستون n ام برابر است.
- اگر اعداد روی سطر یا ستون نظیر هر رأس را در ماتریس M با هم جمع کنیم، درجه آن رأس بدست می‌آید.
- درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M^2 برابر درجه رئوس گراف می‌باشد.
- تعداد درایه ۱ در ماتریس مجاورت یک گراف ساده برابر مجموع درجات رئوس آن گراف یعنی $2q$ می‌باشد.
- تعداد صفرهای ماتریس مجاورت برابر است با: $n(\cdot) = p^2 - 2q$

نکته ۹۶:

الف) اگر گراف r -منتظم باشد، آنگاه تعداد صفرهای ماتریس مجاورت برابر است با: $n(\cdot) = p(p-1-r)$

ب) اگر گراف درخت باشد، آنگاه تعداد صفرهای ماتریس مجاورت برابر است با: $n(\cdot) = q^2 + 1$

توضیح: در درخت $p = q + 1$ پس $n(\cdot) = (q + 1)^2 - 2q = q^2 + 2q + 1 - 2q = q^2 + 1$

نکته ۹۷:

اگر مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M^3 را در یک گراف ساده بر ۶ تقسیم نماییم، تعداد دور به طول ۳ (تعداد مثلث) بدست می‌آید.

نکته ۹۸:

در یک گراف کامل، درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M^2 برابر $p - 1$ و درایه‌های خارج قطر اصلی M^2 برابر $p - 2$ می‌باشد.

نکته ۹۹:

دترمینان ماتریس M در گراف K_p برابر است با:

$$|M| = (-1)^{p-1} \cdot (p - 1)$$

دترمینان ماتریس M^2 در گراف K_p برابر است با:

$$|M^2| = (p - 1)^2$$

نکته ۱۰۰: تعریف گراف‌های یکسان یا ایزومورف:

دو گراف $G_1(V_1, E_1)$ و $G_2(V_2, E_2)$ را یکسان یا ایزومورف گوئیم هرگاه $|V_1| = |V_2|$ و با اسامی رئوس یکی بتوان رئوس دیگری را به گونه‌ای نام‌گذاری کرد که داشته باشیم: $E_1 = E_2$.

توجه: اگر دنباله درجات دو گراف متفاوت باشد، آن دو گراف یکسان نیستند.