

به نام خداوند جان و خرد

جزوه فصل ۳ گسسته (ترکیبات)

اصل ضرب: اگر کاری در مرحله اول به m روش و در مرحله دوم به n روش و در مرحله سوم به p روش و ... انجام شود، کل کار به $m \times n \times p \times \dots$ روش انجام می‌شود.

جایگشت: تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را «جایگشت n شیء متمایز» نامیده و برابر است با: $n!$

n نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند به‌طوری که:

الف) k نفر مشخص همواره کنار هم باشند:

$$\text{جواب} = k! \times (n - k + 1)!$$

ب) k نفر مشخص همواره کنار هم نباشند:

$$\text{جواب} = n! - [k! \times (n - k + 1)!]$$

جایگشت k شیء از n شیء متمایز:

تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن k شیء از n شیء متمایز را با علامت $P(n, k)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

ترکیب k شیء از n شیء متمایز:

اگر از بین n شیء متمایز بخواهیم k شیء ($k \leq n$) را انتخاب کنیم و حالت‌های کنار هم قرار گرفتن آن‌ها اهمیتی نداشته باشد، آن را یک ترکیب k شیء از n شیء می‌گوییم و با علامت $C(n, k)$ یا $\binom{n}{k}$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k! \times (n - k)!}$$

جایگشت‌های با تکرار:

اگر n شیء داشته باشیم به طوری که p تای آنها از نوع اول، q تای آنها از نوع دوم و r تای آنها از نوع سوم و ... باشد، تعداد کل جایگشت‌های اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{p! \times q! \times r! \times \dots}$$

اگر یک شبکه $n \times m$ داشته باشیم و فقط به راست یا بالا حرکت کنیم، تعداد مسیرها از A به B برابر است با:

$$\text{تعداد مسیرها} = \frac{(n+m)!}{n! \times m!}$$

حل معادله سیاله خطی با ضرایب واحده:

قضیه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با:

$$\text{جواب} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

که همان تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل است.

نکته ریاضی:

تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با:

$$\text{جواب} = \binom{n-1}{k-1}$$

حل معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ به روش تغییر متغیر

اگر در معادله سیاله شرط‌هایی به صورت $x_1 \geq a$ و $x_2 \geq b$ و ... داشته باشیم، در این صورت متغیر را تغییر داده و معادله را طبق شرایط زیر حل می‌کنیم:

$$x_1 \geq a \Rightarrow x_1 - a \geq 0 \xrightarrow{x_1 - a = y_1} x_1 = y_1 + a, y_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq b \Rightarrow x_2 - b \geq 0 \xrightarrow{x_2 - b = y_2} x_2 = y_2 + b, y_2 \geq 0$$

مربع‌های لاتین (Latin Squares)**تعریف:**

یک جدول مربعی $n \times n$ شامل اعداد ۱ و ۲ و ... و n را که به گونه‌ای پر شده باشد که در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن، عدد تکراری وجود نداشته باشد، **مربع لاتین** می‌نامیم. به هر یک از اعداد درون این جدول، یک «درایه» گفته می‌شود.

مثال‌هایی از مربع‌های لاتین:

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

مربع لاتین چرخه‌ای:

در حالت کلی، شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن **مربع لاتین چرخه‌ای** می‌گوییم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & \dots & n-۱ & n \\ n & ۱ & ۲ & \dots & n-۲ & n-۱ \\ n-۱ & n & ۱ & \dots & n-۳ & n-۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۲ & ۳ & ۴ & \dots & n & ۱ \end{bmatrix}$$

تذکر مهم:

- مربع لاتین از هر مرتبه‌ای وجود دارد.

- کوچکترین مربع لاتین، مربع 1×1 است که تنها شامل عدد [۱] می باشد.

ساخت مربع لاتین

- روش چرخشی:** در سطر اول اعداد ۱، ۲، ۳، ...، n را می گذاریم. آخرین عدد سطر اول را که n است در ابتدای سطر دوم نوشته و بقیه عددها را در سطر دوم یکی یکی به راست می بریم و این کار را تکرار می کنیم.

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

تذکر مهم:

- کل مربع های لاتین مرتبه ۳ دو نوع هستند:

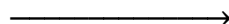
a	b	c
c	a	b
b	c	a
		(روی قطر اعداد مساویند)

a	c	b
c	b	a
b	a	c
		(روی قطر اعداد غیر تکراری اند)

روش جابجایی سطر و ستون: با تعویض جای هر دو سطر یا هر دو ستون یک مربع لاتین می توان مربع لاتین جدیدی ساخت.

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

تعویض ستون ۱ با ستون ۳



۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

تعویض سطر ۱ با سطر ۲



۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

دو مربع لاتین متعامد:

فرض کنیم A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند بطوری که از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که رقم های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. اگر در هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه های مربع جدید تکراری نباشد، می گوئیم دو مربع لاتین A و B متعامدند.

مثال اول:

A:

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

B:

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

⇒

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

(متعامدند، چون عدد تکراری ندارد)

مثال دوم:

A:

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

B:

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

⇒

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

(متعامد نیست، چون عدد تکراری دارد)

تذکر مهم:

دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود ندارد.

اصل شمول (شامل بودن) و عدم شمول

الف) برای دو مجموعه:

تعداد عضوهایی که به مجموعه A یا به مجموعه B تعلق دارند برابر است با:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

واضح است که تعداد عضوهایی که به هیچ یک از مجموعه‌های A و B تعلق ندارد برابر است با:

$$|A \bar{\cup} B| = |\bar{A} \cap \bar{B}| = |(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B|$$

تذکر مهم:

تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n که بر k بخش پذیرند، برابر است با:

$$= \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

ب) برای سه مجموعه:

تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از سه مجموعه A یا B یا C تعلق دارد برابر است با:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

واضح است که:

$$|(A \cup B \cup C)'| = |A' \cap B' \cap C'| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

تابع شماری

نکته ۱: اگر A و B دو مجموعه باشند، تعداد توابع از A به B برابر است با:

$$|B|^{|A|}$$

نکته ۲: اگر $|A| = m$ و $|B| = k$ ، با شرط $m \leq k$ ، تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به

مجموعه B برابر است با:

$$(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$$

نکته ۳: تابع پوشا (Surjective Function)

تابع f از مجموعه A به مجموعه B را پوشا می نامند هرگاه برد تابع f ، شامل کل اعضای B باشد. به عبارت دیگر، به هر عضو B یک پیکان رسم شود.

نمایش:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$R_f = B$$

(این تابع پوشا است)

شماری توابع پوشا

برای پیدا کردن تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضو A به مجموعه m عضو B ، از فرمول های زیر

استفاده می کنیم که همان **اصل شمول و عدم شمول** است:

تعریف مجموعه A_j :

$$A_j = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

فرمول نهایی (تعداد توابع پوشا):

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_m| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$$

نکته‌ی کنکوری:

تعداد تابع‌های پوشا از مجموعه‌ی m عضوی A به مجموعه‌ی 3 عضوی B ، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|A| = m$$

$$|B| = 3$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$R_f = B$$

فرمول نهایی:

$$\text{جواب} = 3^m - (3 \times 2^m - 3)$$

اصل لانه کبوتری (Pigeonhole Principle)

اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ ، و همه‌ی کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

تعمیم اصل لانه کبوتری:

هرگاه $(kn + 1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k + 1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.