

۱) ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ . & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 1 \\ . & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ماتریس BAB را به دست آورید.

۲) اگر $A^2 + 3A + 2I = \bar{O}$ ، آنگاه نشان دهید: $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A + 3I)$.

۳) ماتریس $2A = \begin{bmatrix} |A| & -1 \\ 3 & |A| \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر و $|A| > 1$ است. حاصل $3A^{-1}$ را به دست آورید.

۴) اگر $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{146} - A^{139}$ را بیابید.

۵) ماتریس $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ در تساوی $A^2 - \alpha A + \beta I_r = \bar{O}$ صدق می‌کند. حاصل $\alpha + \beta$ را به دست آورید.

۶) وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۷) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید درایه‌های روی قطر فرعی ماتریس A^{1398} مساوی‌اند.

۸) ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 4 \\ 9 & m \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نیست. دترمینان وارون ماتریس $2A - 3I$ را بیابید. ($m > 0$)

۹) اگر دترمینان ماتریس $A_{3 \times 3}$ برابر ۲ باشد، حاصل $\left| -\frac{1}{2} |2A| A^2 \right|$ را به دست آورید.

۱۰) در تساوی ماتریسی $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ . & -1 \end{bmatrix}$ ماتریس A را به دست آورید.

۱۱) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، آنگاه معادله $AX = B$ را به روش ماتریس وارون حل کنید.

۱۲) ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ a+۲ & -۱ \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $|۲A^{-۱}| = -\frac{۱}{۲}$ ، مقدار a را به دست آورید.

۱۳) در دستگاه ماتریسی زیر درایه‌های ماتریس A را به دست آورید.

$$\begin{cases} ۲A + ۳B = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} \\ ۳A - ۲B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix} \end{cases}$$

۱۴) اگر A و B ماتریس‌های $m \times n$ و r یک عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $r(A \pm B) = rA \pm rB$.

۱۵) دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با $A^{-۱}$ بیابید.

۱۶) اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۳۸}$ را به دست آورید.

۱۷) به ازای چه مقادیری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} -۴x + (m-۳)y = ۳ \\ ۲x - \frac{m-۳}{۲}y = ۱ \end{cases}$ یک جواب منحصر به فرد دارد؟

۱۸) اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند ($A \times B = B \times A$) ثابت کنید.

الف) $(A + B)^T = A^T + ۲AB + B^T$

ب) $(A - B)(A + B) = A^T - B^T$

۱۹) اگر $A = \begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A \times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲۰) اگر A و B دو ماتریس متقارن از مرتبه‌ی ۳ باشند و AB نیز متقارن باشد، ثابت کنید: $AB = BA$

۱ برای به دست آوردن درایه سطر سوم و ستون دوم ماتریس BAB باید سطر سوم B را در ماتریس A ضرب و سپس حاصل را در ستون دوم ماتریس B ضرب کنیم (به سایر درایه‌های ماتریس BAB احتیاجی نداریم):

ستون دوم $B \times$ ماتریس $A \times$ سطر سوم $B =$ درایه سطر سوم و ستون دوم BAB

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 4 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 + 16 + 16 - 24 = 8$$

۲ ماتریس $-2I$ را به طرف راست می‌بریم و از ماتریس A در طرف چپ فاکتور می‌گیریم.

$$A^2 + 3A + 2I = \bar{0} \Rightarrow A(A + 3I) = -2I \xrightarrow{\text{تقسیم بر } -2} A \left(\frac{A + 3I}{-2} \right) = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}(A + 3I)$$

$$|2A| = |A|^2 + 3 \Rightarrow |A| = 1, |A| = 3 \xrightarrow{|A| > 1} |A| = 3$$

$$3A^{-1} = 3 \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

۴ با محاسبه ماتریس A^2 ماتریس‌های A^{146} و A^{139} را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{146} = (A^2)^{73} = I^{73} = I \quad \text{پس:}$$

$$A^{139} = A^{138} \times A = (A^2)^{69} \times A = I^{69} \times A = I \times A = A$$

$$A^{146} - A^{139} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین:}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های این ماتریس $4 = 8 + 8 - 6 - 6$ است.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 4 \\ 12 & 27 \end{bmatrix}$$

۵ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

اکنون ماتریس‌های A^2 ، A و I را در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$A^2 - \alpha A + \beta I_r = \bar{O}$$

$$\begin{bmatrix} 21 & 4 \\ 12 & 27 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\begin{bmatrix} 21 + 3\alpha + \beta & 4 - 2\alpha \\ 12 - 6\alpha & 27 - 5\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4 - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \\ 21 + 3\alpha + \beta = 0 \Rightarrow 21 + 6 + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -27 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\text{پس } \alpha + \beta = 2 - 27 = -25$$

۶ ابتدا درایه‌های ماتریس A را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{93} \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{93} & -\frac{2}{93} \\ \frac{1}{93} & \frac{7}{93} \end{bmatrix}$$

۷ برای محاسبه ماتریس A^{1398} ابتدا ماتریس A^2 را تعیین می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{1398} = (A^2)^{699} = I^{699} = I$$

پس:

بنابراین ماتریس A^{1398} همانی است پس درایه‌های روی قطر فرعی آن هر دو مساوی صفر هستند.

۸ شرط اینکه ماتریس A وارون‌پذیر نباشد این است که $|A| = 0$. پس:

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & 4 \\ 9 & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 - 36 = 0 \Rightarrow m^2 = 36 \Rightarrow m = \pm 6$$

چون $m > 0$ ، پس $m = 6$ قابل قبول است. در نتیجه $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ بنابراین:

$$2A - 3I = 2 \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|2A - 3I| = \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 18 & 9 \end{vmatrix} = 81 - 144 = -63$$

در نتیجه:

$$|(2A - 3I)^{-1}| = \frac{1}{|2A - 3I|} = \frac{1}{-63}$$

$$\text{از طرف دیگر } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \text{، پس:}$$

$$|2A| = 2^2 |A| = 2^2 \times 2 = 2^3 = 16$$

۹ می‌دانیم $|kA| = k^2 |A|$ زیرا A ماتریس 3×3 است. بنابراین:

پس:

$$\underbrace{\left| -\frac{1}{2} |2A| A^2 \right|}_{16} = \left| -\frac{1}{2} \times 16 A^2 \right| = |-8 A^2| = (-8)^3 |A^2| = (-8)^3 |A|^2 = (-8)^3 (2)^2$$

$$= -2^9 \times 2^2 = -2^{11}$$

۱۰ طرفین تساوی را از چپ در وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B^{-1} \times} A = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$



جوابهای دستگاه $AX = B$ به صورت $X = A^{-1}B$ به دست می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2-9} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -13 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

می‌دانیم $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ و $|kA| = k^n |A|$ چون A ماتریس 2×2 است. پس:

$$|2A^{-1}| = 2^n |A^{-1}| = \frac{4}{|A|} \xrightarrow{|2A^{-1}| = -\frac{1}{7}} \frac{4}{|A|} = -\frac{1}{7} \Rightarrow |A| = -8$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a+2 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2a - 4 = -7 - 2a$$

از طرف دیگر:

$$-7 - 2a = -8 \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

تساوی اول را در ۲ و تساوی دوم را در ۳ ضرب می‌کنیم. سپس طرفین آنها را با هم جمع می‌کنیم تا ماتریس A به دست آید:

$$\begin{cases} 4A + 6B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ 9A - 6B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{+} 13A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$13A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$$

فرض کنیم $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ و $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ داریم:

$$r(A \pm B) = r([a_{ij}]_{m \times n} \pm [b_{ij}]_{m \times n}) = r[a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n} = [r(a_{ij} \pm b_{ij})]_{m \times n}$$

$$= [ra_{ij} \pm rb_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n} \pm [rb_{ij}]_{m \times n} = r[a_{ij}]_{m \times n} \pm r[b_{ij}]_{m \times n} = rA \pm rB$$

در صورتی که $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ متغیرهای این دستگاه باشد، داریم:

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

برای به دست آوردن جوابهای دستگاه به روش A^{-1} به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6+20} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 52 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$



۱۶ ابتدا ماتریس A^r را پیدا می‌کنیم:

$$A^r = A \times A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{r}}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{\sqrt{r}}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{r}}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{\sqrt{r}}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

اکنون ماتریس $A^{r\wedge}$ را بر حسب ماتریس A^r می‌نویسیم:

$$A^{r\wedge} = (A^r)^{1^q} = I^{1^q} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $A^{r\wedge}$ برابر ۲ است.

۱۷ روش اول: به ازای هیچ مقدار m

$$\frac{-r}{r} \neq \frac{m-r}{-\frac{(m-r)}{r}} \Rightarrow -r \neq -r$$

روش دوم: به ازای هیچ m ی دترمینان زیر مخالف صفر نمی‌شود.

$$\begin{vmatrix} -r & m-r \\ r & -\frac{m-r}{r} \end{vmatrix} = -r \left(-\frac{m-r}{r} \right) - r(m-r) = 0$$

$$(A+B)^r = (A+B)(A+B) = A^r + AB + BA + B^r \xrightarrow[A, B]{\text{تعویض پذیرند}} A^r + rAB + B^r$$

$$(A-B)(A+B) = A^r - AB + BA + B^r \xrightarrow[A, B]{\text{تعویض پذیرند}} A^r - B^r$$

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_1 b_{12} & r_1 b_{13} \\ r_2 b_{21} & r_2 b_{22} & r_2 b_{23} \\ r_3 b_{31} & r_3 b_{32} & r_3 b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{سطر اول } B \text{ در } r_1 \text{ ضرب می شود} \\ \text{سطر دوم } B \text{ در } r_2 \text{ ضرب می شود} \\ \text{سطر سوم } B \text{ در } r_3 \text{ ضرب می شود} \end{array}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_2 b_{12} & r_3 b_{13} \\ r_1 b_{21} & r_2 b_{22} & r_3 b_{23} \\ r_1 b_{31} & r_2 b_{32} & r_3 b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{سطر اول } B \text{ در } r_1 \text{ ضرب می شود} \\ \text{سطر دوم } B \text{ در } r_2 \text{ ضرب می شود} \\ \text{سطر سوم } B \text{ در } r_3 \text{ ضرب می شود} \end{array}$$

۲۰ چون ماتریس AB متقارن است پس $(AB)^t = AB$ در نتیجه $B^t A^t = AB$ و چون ماتریس‌های A و B هر دو متقارن هستند پس: $BA = AB$.

