موسسه : Vip بخون

عنوان آزمون : سوالات تشریحی فصل۲

نام درس : هندسه۳

۱ نشان دهید برای محاسبهٔ فاصلهٔ کانونی یک دیش مخابراتی باید قطر دهانهٔ دیش را در خودش ضرب کرد و حاصلضرب را بر اندازهٔ گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم نمود.

۲ وضعیت نسبی دو دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y = ۸$ و $x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$ را بررسی کنید.

۳ معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحهٔ $R^۲$ را که فاصلهٔ آنها از $A(۱, ۳)$ مساوی $\sqrt{۳}$ برابر فاصلهٔ آنها تا $B(۰, -۲)$ باشد را بیابید.

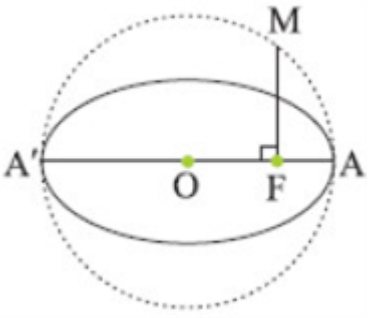
۴ دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است و مرکز آن روی خط $x + y = ۶$ قرار دارد، معادلهٔ دایره را بنویسید.

۵ پاره‌خط AB به طول ۳ مفروض است. مکان هندسی نقطهٔ M از صفحه را که در تساوی $\frac{MA - MB}{MA - ۲} = ۲$ صدق می‌کند به دست آورید.

۶ طول وتری را که دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۸y = ۸$ از خط $۵x + ۱۲y = ۱۴$ جدا می‌کند به دست آورید.

۷ یک آینه مقعر سهمی شکل داریم، (بیرون سهمی جیوه اندود و داخل سهمی آینه است.) که مختصات کانون نقطه $(-۳, ۲)$ و معادله خط هادی آن $x = ۱$ است.
الف) معادله سهمی را بنویسید.
ب) اگر پرتو نوری در داخل سهمی از کانون عبور کند و در نقطه به طول ۳- با سهمی برخورد کند، معادلهٔ پرتوی بازتابش را بنویسید.

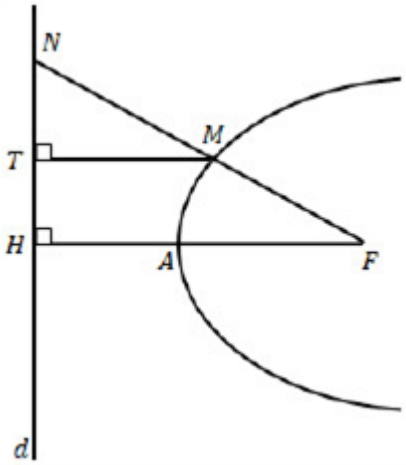
۸ در شکل قطر دایره برابر قطر بیضی است و از کانون F عمودی بر 'AA رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطهٔ M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



۹ یک نقطهٔ دلخواه مانند M درون بیضی در نظر بگیرید نشان دهید مجموع فواصل M از دو کانون بیضی کمتر از $۲a$ است.

۱۰ در شکل مقابل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در نقطه N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.

ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



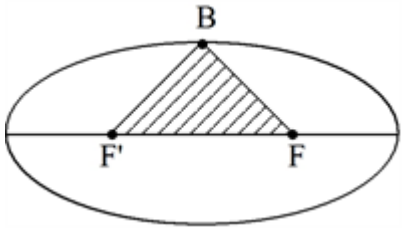
۱۱ مقدار c را چنان بیابید که دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + c = ۰$ بر دایره $(x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲$ مماس بیرون باشد.

۱۲ در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.

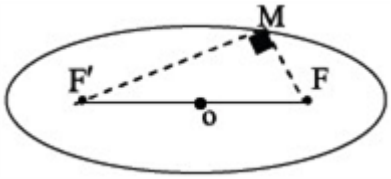
۱۳ نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. بحث کنید.

۱۴ دو دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۱۰y + ۱۸ = ۰$ و $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y + ۸ = ۰$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

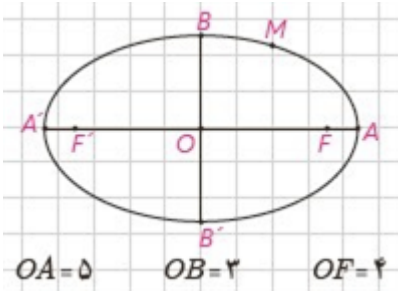
۱۵ در بیضی زیر اگر طول قطرهای آن ۱۲ و $۴\sqrt{۲}$ باشد، مساحت مثلث هاشور زده شده را حساب کنید.



۱۶ نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' قائم‌الزاویه است، طول MF را به دست آورید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند).



۱۷ نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.
الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$
ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.
ج) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.



۱۸ دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است.
اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:
الف) در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یک‌دیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.
ب) در حالتی که AF و BF' یک‌دیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

۱۹ نقطه‌ی A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

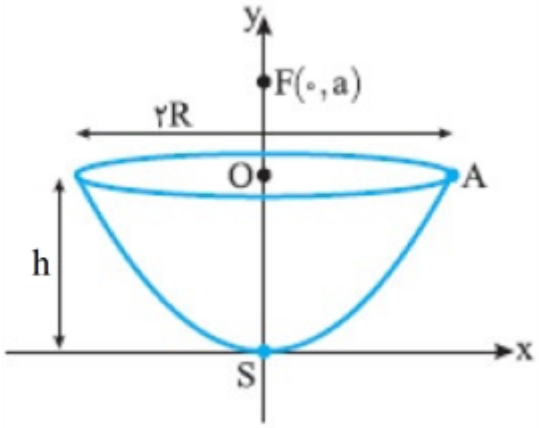
۲۰ مکان هندسی را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید.
مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در یک نقطه‌ی مشخص بر یک خط داده شده مماس باشد.

پاسخنامه تشریحی

۱ فرض کنید شکل مقابل یک دیش مخابراتی با قطر دهانهٔ $۲R$ و عمق h باشد. با توجه به شکل سهمی با رأس $S(۰,۰)$ است و دهانهٔ آن رو به بالا است و فاصلهٔ کانونی آن را $SF = a$ در نظر می‌گیریم پس معادلهٔ این سهمی به صورت $x^۲ = ۴ay$ است. نقطهٔ A به طول R و عرض h روی این سهمی قرار دارد. بنابراین:

$$A(R,h) \in \text{سهمی} \Rightarrow R^۲ = ۴ah \Rightarrow a = \frac{R^۲}{۴h}$$

پس فاصلهٔ کانونی این دیش برابر $\frac{R^۲}{۴h}$ است که مساوی $\frac{۴R^۲}{۱۶h}$ یعنی مساوی مربع قطر دهانهٔ دیش تقسیم بر گودی آن و تقسیم بر ۱۶ است.



۲ مرکز و شعاع‌های هر دو دایره را به دست می‌آوریم: $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y - ۸ = ۰$

$$\begin{cases} O\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = (۱,-۳) \\ R = \frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲} = \frac{\sqrt{۴+۳۶+۳۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۷۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$$

$$\begin{cases} O'\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = (-۴,۲) \\ R' = \frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲} = \frac{\sqrt{۶۴+۱۶-۴۸}}{۲} = \frac{\sqrt{۳۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

از طرف دیگر طول خط‌المرکزین برابر است با: $d = OO' = \sqrt{۲۵+۲۵} = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$

توجه کنید که $d = R + R'$ $(۵\sqrt{۲} = ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲})$، بنابراین دو دایره مماس خارجی هستند.

۳ فرض می‌کنیم $M(x,y)$ نقطه‌ای از مکان موردنظر باشد. بنابر فرض مسئله: $MA = \sqrt{۳}MB$

$$\sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۳)^۲} = \sqrt{۳}\sqrt{(x-۰)^۲ + (y+۲)^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲ + ۱ - ۲x + y^۲ + ۹ - ۶y$$
$$= ۳(x^۲ + y^۲ + ۴ + ۴y)$$

$$۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲x + ۱۸y + ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} x^۲ + y^۲ + x + ۹y + ۱ = ۰$$

در این معادله ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ با هم برابر است و $a^۲ + b^۲ - ۴c = ۱ + ۸۱ - ۴ > ۰$، بنابراین مکان مورد نظر یک دایره است.

۴ روش اول: مرکز دایره روی خط $O=(\alpha,۶-\alpha) : x+y=۶$

فاصلهٔ مرکز از دو خط $x=۰$ و $y=۰$ یکسان و با شعاع دایره مساوی است:

$$\begin{cases} d=\alpha \\ d'=۶-\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha=۳ \Rightarrow \begin{cases} O=(۳,۳) \\ r=۳ \end{cases} \Rightarrow C : (x-۳)^۲+(y-۳)^۲=۹$$

روش دوم: مرکز دایره‌هایی که بر هر دو محور مماس هستند، روی خطوط $y=\pm x$ قرار دارد. همچنین مرکز دایره روی خط $x+y=۶$ است. بنابراین مرکز دایره روی خط $y=+x$ و $x+y=۶$ قرار دارد. بنابراین مرکز دایره $(۳,۳)$ و شعاع ۳ است. معادله دایره برابر با $C : (x-۳)^۲+(y-۳)^۲=۹$

۵ از تساوی داده شده در مسئله نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{MA-MB}{MA-۲}=۲ \Rightarrow MA-MB=۲MA-۴ \Rightarrow MA+MB=۴$$

بنابراین مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت ۴ است و این مقدار از فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B بیشتر است $(AB=۳)$.

پس مکان هندسی نقطهٔ M بیضی با کانون‌های A و B و مقدار ثابت ۴ است.

۶ فرض کنید خط $۵x+۱۲y=۱۴$ دایره را در نقاط A و B قطع کند، برای پیدا کردن اندازهٔ وتر AB فاصلهٔ OH و شعاع R را به دست آورده در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH طول AH را تعیین و آن را دو برابر می‌کنیم، زیرا نقطهٔ H وسط وتر AB است.

$$x^۲+y^۲-۲x-۸y=۸ \Rightarrow O\left(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}\right)=(۱,۴)$$

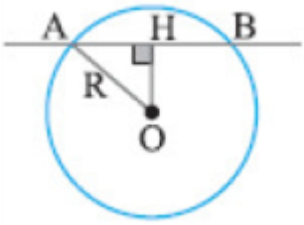
$$R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۶۴+۳۲}}{۲}=۵$$

پس:

$$OH=\frac{|۵+۴۸-۱۴|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\frac{۳۹}{\sqrt{۱۶۹}}=\frac{۳۹}{۱۳}=۳$$

بنابراین:

$$\Delta OAH : AH^۲=OA^۲-OH^۲=۵^۲-۳^۲=۱۶ \Rightarrow AH=۴$$



در نتیجه $AB=۲AH=۸$.

۷ الف) $\begin{cases} A(-۱,۲) \\ a=۲ \end{cases} \Rightarrow (y-۲)^۲=-۸(x+۱)$

ب) پرتویی که در داخل سهمی از کانون عبور کند، به موازات محور کانونی سهمی $y=۲$ بازتاب می‌کند. بنابراین پرتوهای بازتابش موازی این خط هستند.

$$(y-۲)^۲=-۸(x+۱) \xrightarrow{x=-۳} \begin{cases} P : (-۳,۲) \\ P' : (-۳,۶) \end{cases} \Rightarrow y=۶, y=-۲$$

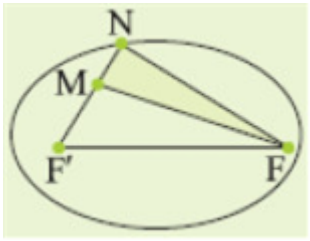
۸ چون قطر دایره برابر قطر بیضی است، پس شعاع دایره مساوی $\frac{AA'}{۲} = \frac{۲a}{۲} = a$ است. از O به M وصل می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\overset{\triangle}{OMF} : OM^۲ = MF^۲ + OF^۲ \xrightarrow{OM=a\ ,\ OF=c} a^۲ = MF^۲ + c^۲$$

$$MF^۲ = a^۲ - c^۲ \xrightarrow{a^۲-c^۲=b^۲} MF^۲ = b^۲ \Rightarrow MF = b$$

پس MF مساوی نصف قطر کوچک بیضی است.

۹ فرض کنیم M درون بیضی با کانون‌های F و F' باشد. MF' را امتداد می‌دهیم تا بیضی را در N قطع کند، چون N روی بیضی است، پس $NF + NF' = ۲a$. داریم:



$$\overset{\triangle}{MNF} : MF < NF + MN \xrightarrow[\text{را اضافه می کنیم}]{\text{به طرفین } MF'}$$

$$MF + MF' < NF + MN + MF'$$

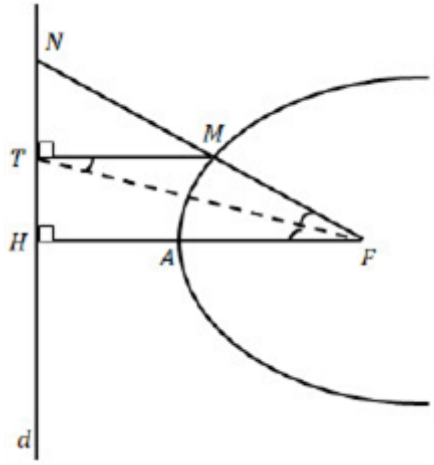
$$\xrightarrow{MN+MF'=NF'}$$

$$MF + MF' < NF + NF' \Rightarrow MF + MF' < ۲a$$

۱۰ بنا به تعریف سهمی $MT = MF$ و لذا مثلث MFT متساوی‌الساقین است پس $\widehat{MFT} = \widehat{MFT}$ از طرفی $FH \parallel MT$ و FT خط مورب می‌باشد پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\widehat{MTF} = \widehat{TFH}$ از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که TF نیمساز زاویهٔ $\widehat{NFH}$ می‌باشد.

با استفاده از قضیهٔ نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NH}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$



۱۱

$$(x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲ \Rightarrow O'(-۱,۱), r' = \sqrt{۲}$$

$$(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲ - c \Rightarrow O(۱,-۱), r = \sqrt{۲-c}$$

$$OO' = ۲\sqrt{۲}$$

$$OO' = r + r' \Rightarrow ۲\sqrt{۲} = \sqrt{۲} + \sqrt{۲-c} \Rightarrow c = ۰$$ (ص ۴۳)

۱۲ اگر قطر دهانه دیش را با $۲r$ و گودی را با h نمایش دهیم. فاصله کانونی برابر $a = \frac{۴r^۲}{۱۶h}$ است.

$۲r = ۶۰, h = ۹$ با جایگذاری در رابطه فوق داریم: $a = \frac{(۲r)(۲r)}{۱۶h} = \frac{۶۰\times۶۰}{۱۶(۹)} = ۲۵$

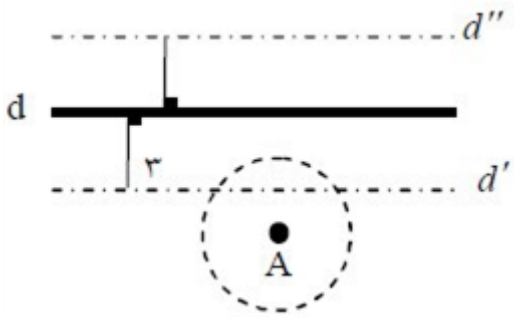
(اگر رابطه فوق به صورت $a = \frac{r^۲}{۴h} = \frac{(۳۰)^۲}{۴(۹)} = ۲۵$ نوشته شود درست است.)

۱۳ مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است این دایره را رسم می‌کنیم. نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد دو خط d', d'' در طرفین خط d و به موازات d است این دو خط را رسم می‌کنیم محل برخورد دو خط d', d'' با دایره مطابق شکل جواب مسأله است.

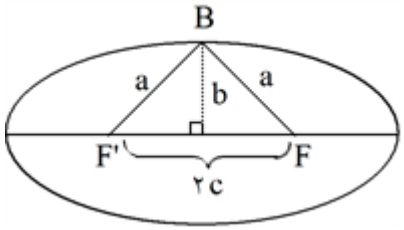
اگر یکی از دو خط d' یا d'' دایره را قطع کند مساله ۲ جواب دارد.

اگر یکی از دو خط d' یا d'' بر دایره مماس باشد مساله ۱ جواب دارد.

اگر هیچ‌یک از دو خط d' یا d'' دایره را قطع نکند مساله جواب ندارد.



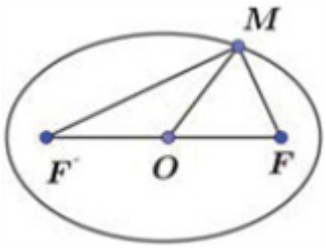
۱۴
$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۱۰y + ۱۸ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ ۲y - ۱۰ = ۰ \Rightarrow y = ۵ \end{cases} \Rightarrow O\left|\begin{matrix} h = ۱ \\ k = ۵ \end{matrix}\right.$$
$$R = \sqrt{h^۲ + k^۲ - F} = \sqrt{۱ + ۲۵ - ۱۸} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$
$$x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y + ۸ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۳ \\ ۲y - ۲ = ۰ \Rightarrow y = ۱ \end{cases} \Rightarrow O'\left|\begin{matrix} h' = -۳ \\ k' = ۱ \end{matrix}\right.$$
$$R' = \sqrt{h'^۲ + k'^۲ - F'} = \sqrt{۹ + ۱ - ۸} = \sqrt{۲}$$
$$OO' = \sqrt{(۱ + ۳)^۲ + (۵ - ۱)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۱۶} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$
$OO' > R + R' \Rightarrow$ دو دایره متخارج هستند

۱۵


$$۲a = ۱۲ \Rightarrow a = ۶$$
$$۲b = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۲}$$
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۳۶ = ۸ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۲۸ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۷}$$
$$S_{\underset{BFF'}{\triangle}} = \frac{b\times۲c}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}\times۴\sqrt{۷}}{۲} = ۴\sqrt{۱۴}$$

۱۶
$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \rightarrow c = ۴$$
$$MF + MF' = ۲a = ۱۰ \rightarrow MF' = ۱۰ - MF$$
$$(MF)^۲ + (MF')^۲ = (FF')^۲ \rightarrow (MF)^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = ۸^۲ \rightarrow MF = ۵ \pm \sqrt{۷}$$

۱۷



الف) $OM = OF = OF'$

$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow c = ۴ = OF = OF'$

ب) در مثلثی که میانه نظیر یک ضلع آن نصف آن ضلع باشد قائم‌الزاویه است در رأس روبه‌رو به ضلع نصف شده است.

ج) $x + y = ۲a = ۱۰ \Rightarrow y = ۱۰ - x$

$x^۲ + y^۲ = FF'^۲ = ۸^۲ \Rightarrow x^۲ + (۱۰ - x)^۲ = ۶۴ \Rightarrow ۲x^۲ - ۲۰x + ۳۶ = ۰$

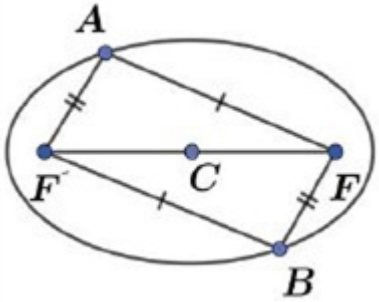
$\Rightarrow x^۲ - ۱۰x + ۱۸ = ۰$

$x_۱, x_۲ = ۵ \pm \sqrt{۷}$

$x = ۵ + \sqrt{۷} \Rightarrow y = ۵ - \sqrt{۷}$

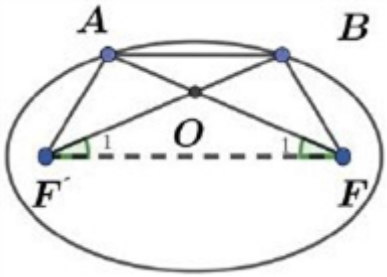
$x = ۵ - \sqrt{۷} \Rightarrow y = ۵ + \sqrt{۷}$ $\Rightarrow MF' = ۵ + \sqrt{۷}, MF = ۵ - \sqrt{۷}$

۱۸



الف) $\left.\begin{array}{l} AF' + AF = ۲a \\ BF' + BF = ۲a \\ BF = AF' \end{array}\right\} \Rightarrow AF = BF'$

چهارضلعی که اضلاع آن دوبه‌دو مساوی باشند متوازی‌الاضلاع است پس $AF \parallel BF'$

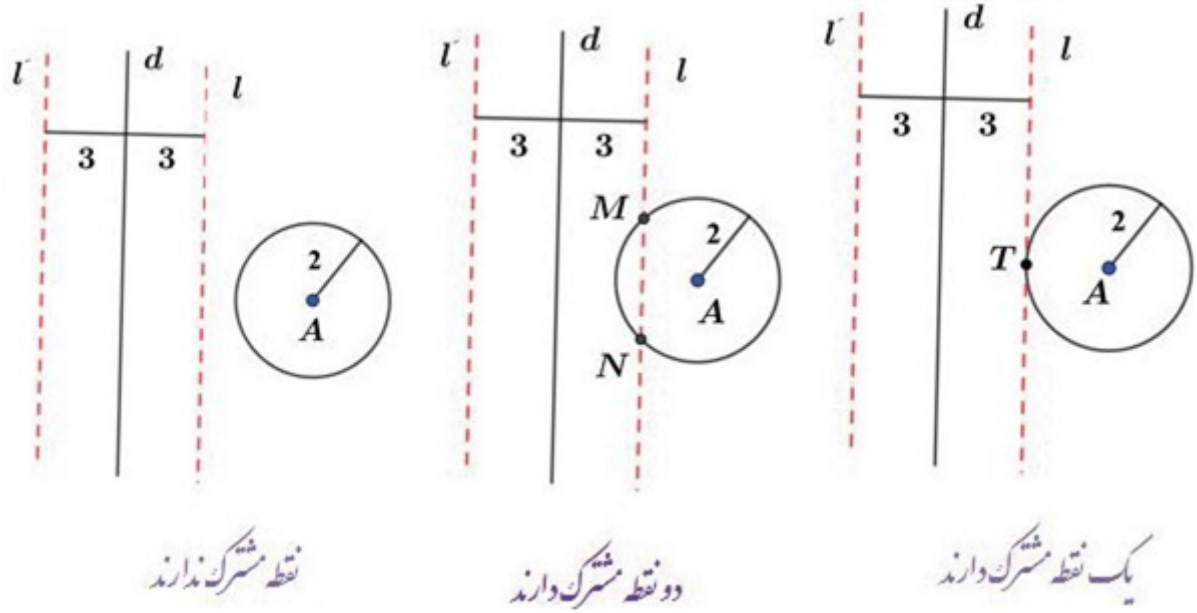


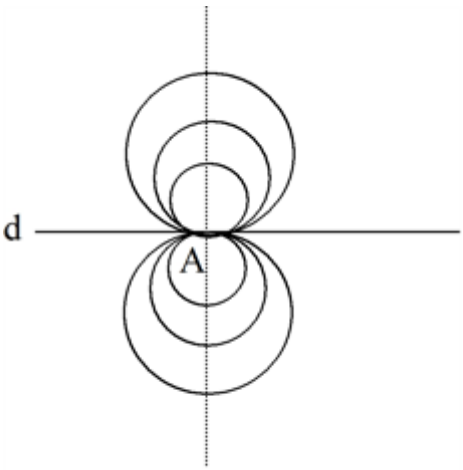
ب) $\left.\begin{array}{l} AF' + AF = ۲a \\ BF' + BF = ۲a \\ BF = AF' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AFF'} \cong \overset{\triangle}{BFF'}$

$\Rightarrow AF = BF', \angle F_۱ = \angle F'_۱$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{OFF'}$ متساوی الساقین است

۱۹ دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم و دو خط موازی d به فاصله ۳ سانتی‌متر در دو طرف آن رسم می‌کنیم محل تقاطع (در صورت وجود) جواب مسئله است که ممکن است دو نقطه، یا یک نقطه و یا نقطه‌ای نباشد.



نقطه مشترک ندارند　　دو نقطه مشترک دارند　　یک نقطه مشترک دارند

۲۰ مرکز چنین دایره‌هایی که در نقطه‌ی A به خط d مماس هستند یک خط می‌باشد که در نقطه‌ی A بر d عمود می‌باشد.