

۱ مساحت متوازی الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار $\vec{a} = (-2, 1, 0)$ و $\vec{b} = (1, -3, 2)$ را محاسبه کنید.

۲ دو بردار $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{w} = (3, 2)$ مفروضند. کسینوس زاویه بین بردارهای $\vec{i} - \vec{v}$ و $\vec{j} + \vec{w}$ را به دست آورید.

۳ نقاط $(0, -2, 3)$ ، $(4, a, 5)$ و $(b, -3, 1)$ روی یک خط راست واقع اند. حاصل $2a - b$ را بیابید.

۴ حجم متوازی السطوح ساخته شده روی سه بردار $\vec{a} = (2, 3m, -1)$ ، $\vec{b} = (-1, m, 0)$ و $\vec{c} = (1, -3, 2)$ برابر ۱۹ است. مقدار m را به دست آورید.

۵ دو مجموعه $S_1 = \{(x, y) | y \geq x^2\}$ و $S_2 = \{(x, y) | x \geq y^2\}$ را در نظر بگیرید. شکل مربوط به مجموعه $S_1 \cap S_2$ را رسم کنید.

۶ دو بردار $\vec{a} = 2i - j - k$ و $\vec{b} = i + k$ مفروض اند. حاصل $|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$ را به دست آورید.

۷ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه های ۵ و ۴ مفروض اند. اگر زاویه بین این دو بردار $\frac{\pi}{4}$ باشد آنگاه مساحت مثلثی که با دو بردار $2\vec{a} + \vec{b}$ و $4\vec{a} - 3\vec{b}$ ساخته می شود را به دست آورید.

۸ دو بردار $\vec{a} = (4, 3, m)$ و $\vec{b} = (2, -4, m+1)$ مفروض اند. اگر بردار $\vec{a} + \vec{b}$ در راستای نیمساز زاویه داخلی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، مقدار m را بیابید.

۹ نقاط $A(1, 2, -1)$ و $B(3, -2, 4)$ در رابطه $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{MB}$ صدق می کنند. مجموع مختصات نقطه M را بیابید.

۱۰ نقاط $A(2, -1, 0)$ ، $B(-1, 3, 1)$ ، $C(2, 1, 2)$ و $D(5, -3, 1)$ مفروض اند.

- اولاً ثابت کنید چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است.
- ثانیاً فاصله مرکز ثقل مثلث ABC از مرکز متوازی الاضلاع ABCD را به دست آورید.
- آیا این دو نقطه بر هم منطبق هستند؟

۱۱ چهار نقطه $A(2, 1, 3)$ ، $B(-1, 1, 3)$ ، $C(2, -1, 3)$ و $D(-1, -1, 3)$ در دستگاه R^3 مفروض اند. معادلات مشخص کننده سطح محدود به چهارضلعی ABCD را بنویسید.

۱۲ فرض کنید $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی دلخواه و $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یک‌محوره‌ای مختصات باشند، عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

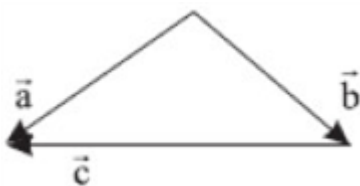
ب) $2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 5\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) - 4\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$

پ) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$

ت) $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{a} - \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} - \vec{b})$

۱۳ در فضای دو بعدی R^2 شکل کلی مربوط به هر رابطه را رسم کنید.
الف) $y \geq x^2$ و $0 \leq x \leq 3$ ب) $x^2 \leq y \leq 3$

۱۴ در شکل مقابل اندازه بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب ۳، ۵ و ۶ است. حاصل $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را به دست آورید.



۱۵ اندازه بردار $j \times (i - 3j - k) + 2i \times (i - j + 2k) - (i - 2j - k) \times k$ را بیابید.

۱۶ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (2, -1, n)$ و $\vec{b} = (1, 0, -1)$ برابر با 135° باشد، مقدار n را بیابید.

۱۷ بردارهای $\vec{a} = (-2, 0, 2)$ و $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

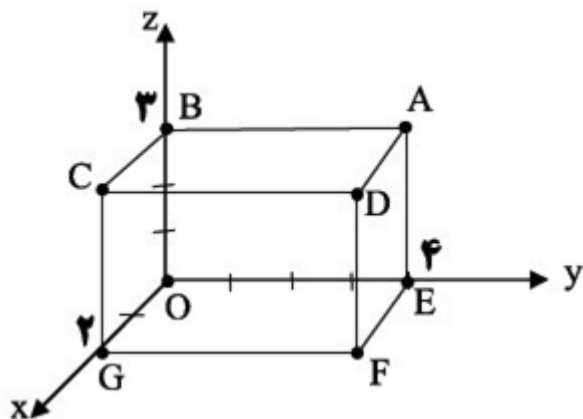
الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

۱۸ وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل مقابل، قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x = 0$ ، $x = 2$ و $y = 0$ ، $y = 4$ و $z = 0$ ، $z = 3$ هستند.

الف) مختصات نقطه A را مشخص کنید.

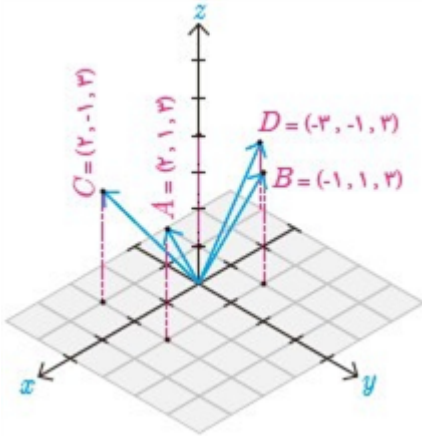
ب) معادلات مربوط به یال AD و وجه CDFG را بنویسید.



۱۹ اگر $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ و $\vec{b} = (3, -4, 2)$ و $\vec{a} = (1, -3, 4)$ باشند آن‌گاه تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.



چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.
 الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهارضلعی ABCD را بنویسید.
 ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح ABCD هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & . \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} = (2, 4, 5)$$

$$S = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45} = (3\sqrt{5})$$

۱

ابتدا مختصات دو بردار $\vec{a} = \vec{i} - \vec{v}$ و $\vec{b} = 2\vec{j} + \vec{w}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{v} = \vec{i} - (2\vec{i} - \vec{k}) = -\vec{i} + \vec{k}$$

$$\vec{b} = 2\vec{j} + \vec{w} = 2\vec{j} + (3\vec{i} + 2\vec{j}) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

اگر θ زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آنگاه:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{(-\vec{i} + \vec{k}) \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j})}{\sqrt{1+1} \sqrt{9+16}} = \frac{-3+4}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

سه نقطه $A(0, -2, 3)$ ، $B(4, a, 5)$ و $C(b, -3, 1)$ روی یک خط قرار دارند هرگاه $\vec{AB}$ موازی $\vec{AC}$ باشند، پس باید

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (4, a+2, 2) \quad \text{مختصات } \vec{AB} \text{ و } \vec{AC} \text{ متناسب باشند:}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (b, -1, -2)$$

$$\frac{4}{b} = \frac{a+2}{-1} = \frac{2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{b} = \frac{2}{-2} \Rightarrow b = -4 \\ \frac{a+2}{-1} = \frac{2}{-2} \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

پس:

$$2a - b = 2(-1) - (-4) = 2$$

حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ است. پس ابتدا بردار $\vec{b} \times \vec{c}$ را به

دست می‌آوریم:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & m & . \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & . \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & . \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & m \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} = (2m, 2, 3-m)$$

بنابراین:

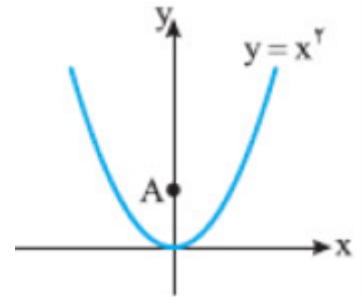
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (2, 2m, -1) \cdot (2m, 2, 3-m) = 4m + 6m - 3 + m = 11m - 3$$

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 19 \Rightarrow |11m - 3| = 19$$

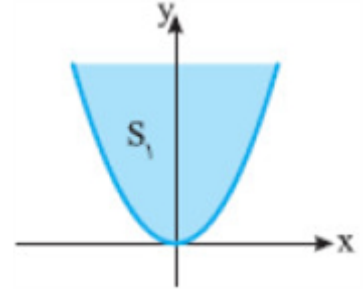
چون حجم متوازی‌السطوح برابر ۱۹ است، پس:

$$\begin{cases} 11m - 3 = 19 \Rightarrow 11m = 22 \Rightarrow m = 2 \\ 11m - 3 = -19 \Rightarrow 11m = -16 \Rightarrow m = -\frac{16}{11} \end{cases}$$

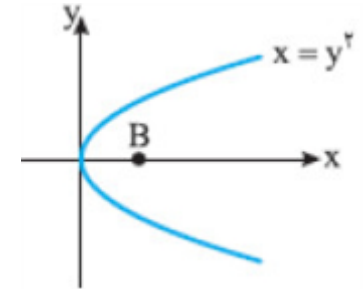
ابتدا سهمی $y = x^2$ را رسم می‌کنیم.



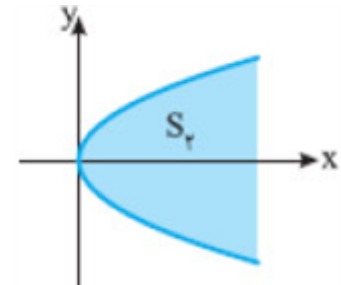
مختصات نقطه $A(0, 1)$ در نامعادله $y \geq x^2$ صدق می‌کنند، پس ناحیه رنگ شده در شکل زیر مجموعه S_1 است.



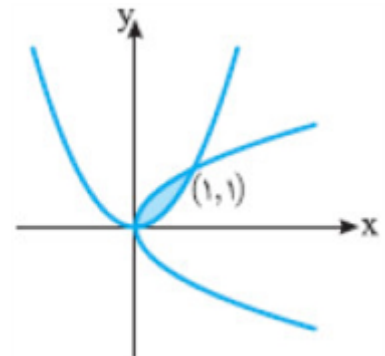
از طرف دیگر نمودار سهمی $x = y^2$ به صورت زیر است.



مختصات نقطه $B(1, 0)$ در نامعادله $x \geq y^2$ صدق می‌کنند، پس ناحیه رنگ شده در شکل مجموعه S_2 است.



بنابراین اشتراک دو مجموعه S_1 و S_2 شکل زیر است.



$$(\vec{r}\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \underbrace{\vec{r}\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}} - \underbrace{\vec{r}\vec{a} \times \vec{b}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{b} \times \vec{a}}_{\vec{0}} - \underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{\vec{0}} = -\vec{r}\vec{a} \times \vec{b} \quad (1)$$

۶

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j + k \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow |(\vec{r}\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b})| = |-\vec{r}\vec{a} \times \vec{b}| = r |\vec{a} \times \vec{b}| = r\sqrt{1+9+1} = r\sqrt{11}$$

نصف اندازه حاصل ضرب خارجی دو ضلع مثلث برابر مساحت آن مثلث است.

۷

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} |(\vec{r}\vec{a} - \vec{r}\vec{b}) \times (\vec{r}\vec{a} + \vec{r}\vec{b})| = \frac{1}{2} |\underbrace{\vec{r}\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{r}\vec{a} \times \vec{b}}_{\vec{r}\vec{a} \times \vec{b}} - \underbrace{\vec{r}\vec{b} \times \vec{a}}_{-\vec{r}\vec{a} \times \vec{b}} - \underbrace{\vec{r}\vec{b} \times \vec{b}}_{\vec{0}}|$$

$$= \frac{1}{2} |1 \cdot \vec{a} \times \vec{b}| = 5 |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \frac{\pi}{4} = 5 \times 5 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}$$

بردار $\vec{a} + \vec{b}$ قطر متوازی الاضلاعی است که بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن هستند. چون $\vec{a} + \vec{b}$ نیمساز است، پس این متوازی الاضلاع لوزی است. در نتیجه $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. بنابراین:

۸

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{16+9+m^2} = \sqrt{4+16+(m+1)^2} \Rightarrow 25+m^2 = 20+m^2+2m+1 \Rightarrow 2m=4 \Rightarrow m=2$$

می‌دانیم مختصات $\vec{AB}$ برابر $B - A$ است، داریم:

۹

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{MB} \Rightarrow M - A = \frac{1}{2} (B - M) \Rightarrow 2M - 2A = B - M \Rightarrow 3M = 2A + B$$

$$\Rightarrow 3M = 2(1, 2, -1) + (3, -2, 4) \Rightarrow 3M = (5, 2, 2) \Rightarrow M \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$x_M + y_M + z_M = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{بنابراین:}$$

چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است اگر و فقط اگر $A + C = B + D$. بنابراین:

۱۰

$$A + C = (2, -1, 0) + (2, 1, 2) = (4, 0, 2)$$

$$B + D = (-1, 3, 1) + (5, -3, 1) = (4, 0, 2)$$

پس $A + C = B + D$ ، در نتیجه ABCD متوازی الاضلاع است. در ضمن اگر مرکز ثقل مثلث ABC نقطه G و مرکز متوازی الاضلاع ABCD نقطه O باشد، آنگاه:

$$G = \frac{A + B + C}{3} = \frac{(3, 3, 3)}{3} = (1, 1, 1)$$

$$O = \frac{A + C}{2} = \frac{(4, 0, 2)}{2} = (2, 0, 1)$$

$$OG = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2} \quad \text{بنابراین:}$$

در ضمن $O \neq G$ ، پس مرکز ثقل مثلث و مرکز متوازی الاضلاع بر هم منطبق نیستند.

نقطه‌های A, B, C و D دارای ارتفاع برابر ۳ هستند. پس این نقاط روی صفحه $z = 3$ قرار دارند. از طرف دیگر دو نقطه A و B در صفحه $y = 1$ و دو نقطه C و D در صفحه $y = -1$ قرار دارند و نقاط A و C در صفحه $x = 2$ و نقاط B و D در صفحه $x = -1$ واقع‌اند، در نتیجه معادلات مشخص‌کننده سطح محدود به چهارضلعی $ABCD$ به صورت مقابل

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{است:}$$

الف) با استفاده از نمودار چرخشی زیر حاصل ضرب خارجی بردارهای $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & \vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ & \quad \begin{matrix} \vec{k} & -\vec{j} & -\vec{k} & \vec{i} & \vec{j} & -\vec{i} & \vec{0} \end{matrix} \\ & = \vec{i} \times \vec{j} + \vec{i} \times \vec{k} - \vec{j} \times \vec{i} - \vec{j} \times \vec{k} + \vec{k} \times \vec{i} + \vec{k} \times \vec{j} + \vec{k} \times \vec{k} \end{aligned}$$

$$= \vec{k} - \vec{j} + \vec{k} - \vec{i} + \vec{j} - \vec{i} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$$



ب) ابتدا حاصل هر یک از پرانتزها را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + \vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) - \vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \cdot \vec{i} - \vec{j} \cdot \vec{j} - \vec{k} \cdot \vec{k} \\ & = 2|\vec{i}|^2 - 5|\vec{j}|^2 - 4|\vec{k}|^2 = 2 - 5 - 4 = -7 \end{aligned}$$

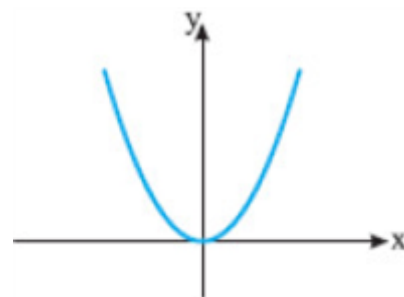
پ) از خاصیت پخشی ضرب خارجی روی جمع و تفریق بردارها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a} \\ & \quad \begin{matrix} \vec{0} & \vec{0} \end{matrix} \\ & = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{a} \\ & = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = 2\vec{a} \times \vec{c} \end{aligned}$$

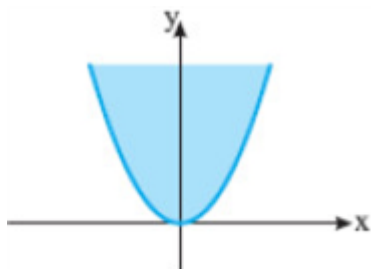
ت) همانند قسمت قبل عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{a} - \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{b} \\ & = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} = -2\vec{a} \times \vec{c} \end{aligned}$$

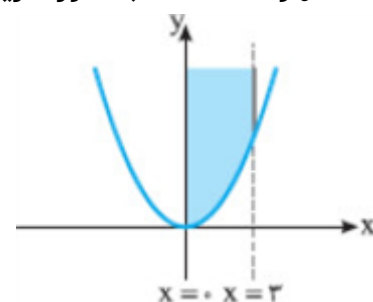
الف) نمودار $y = x^2$ سهمی شکل زیر است.



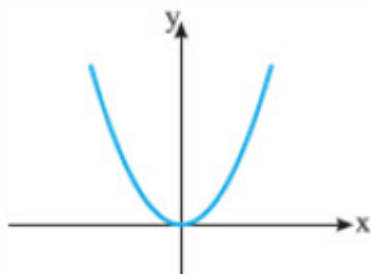
پس رابطه $y \geq x^2$ قسمت رنگ شده شکل مقابل است.



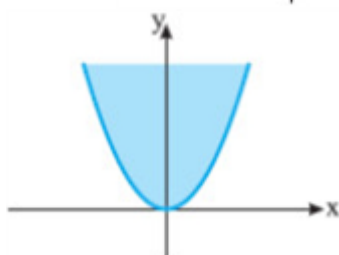
در ضمن شکل مربوط به نامعادله $0 \leq x \leq 3$ ناحیه بین دو خط $x = 0$ و $x = 3$ است. بنابراین شکل مربوط به رابطه $y \geq x^2$ و $0 \leq x \leq 3$ به صورت زیر است.



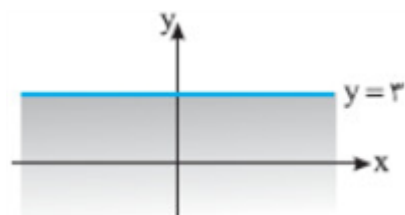
ب) نمودار $y = x^2$ سهمی شکل مقابل است.



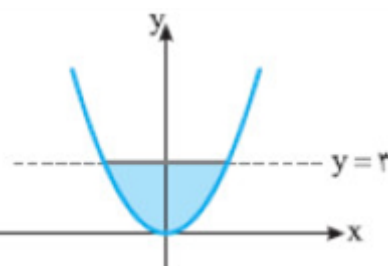
پس رابطه $y \geq x^2$ قسمت رنگ شده در شکل مقابل است.



از طرف دیگر خط $y = 3$ را رسم می‌کنیم، پس $y \leq 3$ نیم‌صفحه پایین این خط است.



بنابراین اشتراک دو شکل فوق شکل مربوط به رابطه $x^2 \leq y \leq 3$ است که در شکل زیر آن را با رنگ مشخص کرده‌ایم.



۱۴ با توجه به شکل $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ است، داریم:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{c}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 \Rightarrow 3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 5^2 = 6^2 \Rightarrow -2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$$

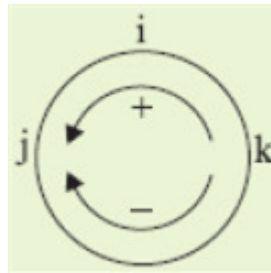
۱۵ ابتدا با استفاده از خاصیت پخش ضرب خارجی روی جمع بردارها، بردار داده شده را ساده می‌کنیم.

$$j \times (i - 2j - k) + 2i \times (i - j + 2k) - (i - 2j - k) \times k$$

$$= \underbrace{j \times i}_{\cdot} - \underbrace{2j \times j}_{\cdot} - \underbrace{j \times k}_{\cdot} + \underbrace{2i \times i}_{\cdot} - \underbrace{2i \times j}_{\cdot} + \underbrace{4i \times k}_{\cdot} - \underbrace{i \times k}_{\cdot} + \underbrace{2j \times k}_{\cdot} + \underbrace{k \times k}_{\cdot}$$

$$\underline{j \times i} - \underline{j \times k} - \underline{2i \times j} + \underline{2i \times k} - \underline{i \times k} + \underline{2j \times k} = j \times k + 2i \times k - 2i \times j \quad (1)$$

اکنون حاصل ضرب خارجی بردارهای i و j و k را با نمودار چرخشی زیر به دست می‌آوریم:



$$j \times k = i, i \times k = -j, i \times j = k$$

$$(1) \Rightarrow \text{ساده شده بردار} = i - 2j - 2k$$

$$\Rightarrow \text{اندازه بردار} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - n}{\sqrt{2} \times \sqrt{4 + 1 + n^2}} \Rightarrow \frac{n - 2}{\sqrt{n^2 + 5}} = 1$$

$$n^2 + 5 = n^2 - 4n + 4 \Rightarrow n = -\frac{1}{4} \quad (\text{ص ۷۸})$$

$$\text{الف) } \vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 0, 2) \cdot (0, 2, 2) = 4 \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-2, 0, 2) + (0, 2, 2) = (-2, 2, 4)$$

$$\text{ب) } (\vec{a} + \vec{b})' = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{12}{8} (0, 2, 2) = (0, 3, 3)$$

$$\text{الف) } A(0, 4, 3)$$

$$\text{ب) } AD : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{CDFG : } \begin{cases} x = 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

۱۶

۱۷

۱۸



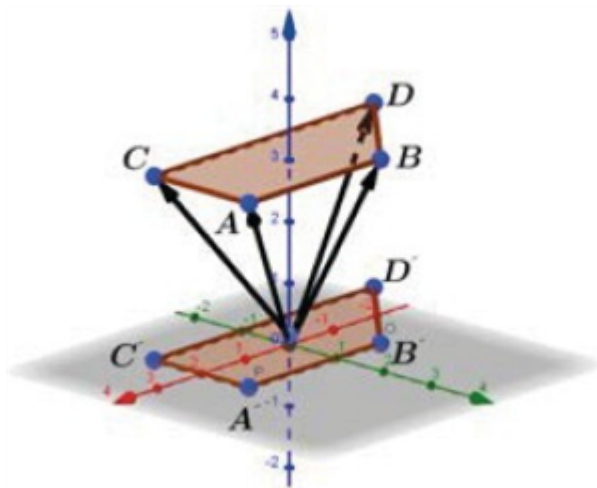
$$\vec{m} = \vec{b} + \vec{c} = (3 - 1, -3 + 1, 2 + 3) = (2, -2, 5)$$

$$\vec{m} \cdot \vec{a} = (1)(2) + (-2)(-2) + (3)(5) = 2 + 4 + 15 = 21$$

$$|\vec{m}|^2 = 2^2 + (-2)^2 + 5^2 = 4 + 4 + 25 = 33$$

$$P_{\vec{b} + \vec{c}} \vec{a} = P_{\vec{m}} \vec{a} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{a}}{|\vec{m}|^2} \vec{m} = \frac{21}{33} (2, -2, 5) = \frac{7}{11} (2, -2, 5) = \left(\frac{14}{11}, -\frac{14}{11}, \frac{35}{11} \right)$$





الف) $A = (2, 1, 3)$ $B = (-1, 1, 3)$

$C = (2, -1, 3)$ $D = (-3, -1, 3)$

$$AB = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad BD = \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ y = x + 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

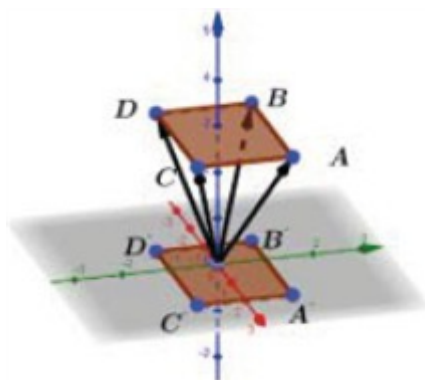
$$DC = \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \quad CA = \begin{cases} x = 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$A' = (2, 1, 0)$ $B' = (-1, 1, 0)$ $C' = (2, -1, 0)$ $D' = (-3, -1, 0)$

$$A'B' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad B'D' = \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ y = x + 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$D'C' = \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \quad C'A' = \begin{cases} x = 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

پاسخ سوال اگر مختصات نقطه‌ی D را تغییر دهیم یعنی به صورت $D = (-1, -1, 3)$ باشد.



$A = (2, 1, 3)$ $B = (-1, 1, 3)$

$C = (2, -1, 3)$ $D = (-1, -1, 3)$

$$AB = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad BD = \begin{cases} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow ABCD = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$CD = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \quad AC = \begin{cases} x = 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases}$

$A' = (2, 1, 0)$ $B' = (-1, 1, 0)$ $C' = (2, -1, 0)$ $D' = (-1, -1, 0)$

$$A'B' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad B'D' = \begin{cases} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A'B'C'D' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$C'D' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \quad A'C' = \begin{cases} x = 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$



