

به نام خداوند جان و خرد

جزوه فصل اول آمار و احتمال یازدهم ریاضی

تعریف گزاره: گزاره جمله ای خبری است به طوری که بتوان دقیق و بدون ابهام ارزش درستی یا نادرستی آن را مشخص کرد، هرچند در حال حاضر نتوان ارزش آن را تعیین کرد.

جملاتی که کامل نیستند و جمله های پرسشی، امری و عاطفی و بیان کننده احساسات گزاره محسوب نمیشوند.

تعریف حدس یا انگاره: گزاره ای است که ارزش درستی یا نادرستی آن در حال حاضر معلوم نیست و تاکنون کسی نه این گزاره را ثابت کرده و نه رد کرده است (به عبارت دیگر مثال نقضی برای آن پیدا نشده است)

تعریف گزاره نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چندمتغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره نما نامیده می شود. گزاره نماها را بر حسب تعداد متغیرهای به کاررفته در آن ها، یک متغیره، دومتغیره و ... می نامند.

دامنه متغیر گزاره نما: در هر گزاره نما به مجموعه مقادیری که میتوان آن ها را به جای متغیر(های) آن قرار داد تا این گزاره نما تبدیل به گزاره شود؛ دامنه متغیر گزاره نما می گویند و آن را با حرف D نمایش می دهند.

مجموعه جواب گزاره نما: در هر گزاره نما به مجموعه عضوهایی از دامنه که به ازای آنها گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره نما می گویند و آن را با حرف S نمایش میدهند. بدیهی است که $S \subseteq D$

نقیض یک گزاره: عبارت است از ساختن یک گزاره جدیدی که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره اصلی باشد

نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می دهند.

دو گزاره نما هستند؛ دو گزاره p و q را هم از منطوق (هم (ارزش)) می گوئیم هرگاه سته مربوط به هر کدام از این دو گزاره در جدول ارزش درستی یکسان باشد.

گزاره های مرکب:

1) **ترکیب عطفی:** برای دو گزاره دلخواه p و q ، گزاره مرکب $(p \text{ و } q)$ را ترکیب عطفی میگوئیم و با نماد $p \wedge q$ نمایش میدهم. ارزش آن فقط و فقط وقتی درست است که هر دو درست باشند.

$p \wedge q$	q	p
د	د	د
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	ن

(۲) **ترکیب فصلی:** برای دو گزاره دلخواه p و q ، گزاره مرکب (p یا q) را ترکیب فصلی میگوئیم و با نماد $p \vee q$ نمایش میدهیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی نادرست است که هر دو نادرست باشند.

$p \vee q$	q	p
د	د	د
د	ن	د
د	د	ن
ن	ن	ن

(۳) **ترکیب شرطی:** برای دو گزاره دلخواه p و q ، گزاره مرکب (اگر p آنگاه q) را ترکیب شرطی میگوئیم و با نماد $p \Rightarrow q$ و q را **مقدم** و p را **تالی** میگوئیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

نکته: اگر مقدم نادرست باشد ($\Leftrightarrow$ ارزش) این ترکیب شرطی همواره درست است. در این حالت میگوئیم به استناد مقدم درست است.

$p \Rightarrow q$	q	p
د	د	د
ن	ن	د
د	د	ن
د	ن	ن

* **نکته ۲:** اگر تالی درست باشد ارزش ترکیب شرطی همواره درست است. یعنی $p \Rightarrow q$ همواره درست است.

* تبدیل یک گزاره شرطی به ترکیب فصلی

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

مثال: با جدول نشان دهید $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

۱/۳- **عکس یک ترکیب شرطی:** گزاره $q \Rightarrow p$ را عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ می گوئیم. یعنی برای عکس ترکیب شرطی کافی است جای مقدم و تالی را عوض کنیم.

* ارزش عکس یک ترکیب شرطی ربطی به ارزش ترکیب شرطی ندارد.

۲/۳- **نقیض یک ترکیب شرطی:** برای هر دو گزاره دلخواه p, q نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ عبارت است از $p \wedge \sim q$

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

مثال: با جدول نشان دهید: $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

۳/۳- **عکس نقیض یک ترکیب شرطی:** گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ میگوئیم. در واقع میتوان نشان داد که هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم ارز است.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

مثال: با جدول نشان دهید: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

۴- **ترکیب دو شرطی:** برای هر دو گزاره دلخواه p, q ترکیب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را ترکیب دو شرطی می نامیم و با نماد $p \Leftrightarrow q$ نشان میدهیم.

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

* ارزش آن وقتی درست است که هر دو طرف $\Leftrightarrow$ دارای ارزش یکسان باشند. یعنی اگر دو طرف $\Leftrightarrow$ ارزش متفاوت داشته باشند نادرست است.

* برای اثبات درستی گزاره $p \Leftrightarrow q$ کافی است نشان دهیم $p \equiv q$. در این صورت گزاره درست دوشروطی $p \Leftrightarrow q$ را قضیه دوشروطی مینامیم.

مثال: با جدول نشان دهید: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

* صورت های مختلف بیان شرطی درست.

در صورتی که گزاره دشرطی $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، آن را به صورت های زیر بیان میکنند:

- اگر p آنگاه q و برعکس $*$ اگر q آنگاه p و برعکس
- p اگر و تنها اگر q $*$ q اگر و تنها اگر p
- p یک شرط لازم و کافی برای q است. $*$ q یک شرط لازم و کافی برای p است.
- یک شرط لازم و کافی برای q عبارت است از p $*$ یک شرط لازم و کافی برای p عبارت است از q

۱/۴-نقیض ترکیب دو شرطی:

برای دو گزاره دلخواه p, q داریم:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

سورها

۱- **سور عمومی:** گزاره ای که خاصیتی را در مورد همه عضوهای یک مجموعه بیان میکند را “گزاره کلی” یا “گزاره با سور عمومی” می گویند.

$*$ اگر $p(x)$ گزاره نمایی باشد که خاصیتی را در مورد عضوهای دامنه متغیر گزاره نمای بیان میکند. گزاره ای که این خاصیت را به همه عضوهای دامنه نسبت می دهد سور عمومی نامیده می شود و به صورت زیر نمایش داده میشود.

$$\forall x: p(x)$$

و اینگونه خوانده می شود: $*$ همه x هایی که در خاصیت $p(x)$ صدق میکنند.

$*$ به ازای هر x ای، عبارت $p(x)$ برقرار است.

۲- **سور وجودی:** گزاره ای که خاصیتی را در مورد بعضی از عضوهای یک مجموعه بیان میکند را “گزاره با سور وجودی” می گویند.

$*$ اگر $p(x)$ گزاره نمایی باشد که خاصیتی را در مورد عضوهای دامنه متغیر گزاره نمای بیان میکند. گزاره ای که این خاصیت را به برخی از عضوهای دامنه نسبت می دهد سور وجودی نامیده می شود و به صورت زیر نمایش داده میشود.

$$\exists x: p(x)$$

و اینگونه خوانده می شود: * وجود دارد x ای که در خاصیت $p(x)$ صدق میکند.

* به ازای بعضی مقادیر x ای، عبارت $p(x)$ برقرار است.

نقیض گزاره های سوری

۱- **نقیض سور عمومی:** $\sim (\forall; xp(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$

نقیض "همه x ها در خاصیت $p(x)$ صدق میکنند" عبارت است از "وجود دارد x که در خاصیت $p(x)$ صدق نمیکند."

۲- **نقیض سور وجودی:** $\sim (\exists; xp(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$

نقیض گزاره "به ازای بعضی مقادیر x عبارت $p(x)$ برقرار است." عبارت است از "به ازای هر x ای عبارت $p(x)$ برقرار نیست."

* گزاره با سور عمومی وقتی درست است که نتوان مثال نقضی برایش پیدا کرد به عبارتی $S = D$

* گزاره با سور وجودی وقتی درست است که بتوانیم حداقل یک عضو از دامنه یافت که به ازای آن گزاره نما به گزاره درست تبدیل شود.