

به نام خداوند جان و خرد

جزوه فصل دوم آمار و احتمال یازدهم ریاضی

اصل متمم: اغلب در مواردی که تعداد حالت‌های یک پیشامد زیاد است، می‌توان احتمال پیشامد متمم را به دست آورد و به طریق زیر عمل کرد:

$$P(\text{پیشامد نامطلوب}) - 1 = P(\text{پیشامد مطلوب})$$

سؤال‌های احتمال، غالباً به صورت ترکیب دو پیشامد A و B بیان می‌شود که مهم‌ترین آن‌ها را در جدول زیر است:

پیشامد مطلوب	بیان به صورت جبر مجموعه‌ها	محاسبه احتمال
هم پیشامد A و هم پیشامد B	$A \cap B$	$P(A \cap B)$
پیشامد A یا پیشامد B	$A \cup B$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
فقط پیشامد A	$A - B$	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
حداکثر یکی از پیشامدهای A و B	$S - (A \cap B)$	$1 - P(A \cap B)$
هیچ یک از دو پیشامد A یا B	$A' \cap B'$	$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

مجموع دو تاس در احتمال: یکی از تیپ‌های پرتکرار در سؤالات احتمال، مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس (و یا پرتاب دو بار یک تاس) می‌باشد که در جدول زیر، تعداد حالات برای مجموع‌های ممکن در دو تاس آمده است:

۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	مجموع دو تاس
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱	تعداد حالات

نکته: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس، برابر است با $6 \times 6 = 36$

فضای غیرهم‌شانس: در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ که از n برآمد (پیشامد ساده) تشکیل شده است، مجموع احتمال تمامی برآمدها برابر ۱ است، یعنی:

$$P(a_1) + \dots + P(a_n) = 1$$

احتمال شرطی ◀ اگر در یک آزمایش تصادفی، پیشامد A به وقوع پیوسته باشد (شرط)، آنگاه احتمال پیشامد B (به شرط وقوع A) به صورت $P(B|A)$ بیان می‌شود که برابر است با:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

نکته: در احتمال شرطی $P(B|A)$ ، فضای نمونه‌ای معادل پیشامد A است. در این صورت می‌توانیم فضای نمونه‌ای اولیه S را به فضای نمونه جدید A کاهش دهیم و براساس فضای نمونه کاهش یافته، احتمال مورد نظر را به دست آوریم.

نکته: روابط احتمال شرطی زیر پرکاربرد هستند:

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A-B)}{1-P(B)} = \frac{P(A)-P(A \cap B)}{1-P(B)} \quad (1)$$

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{1-P(A \cup B)}{1-P(B)} \quad (2)$$

قانون ضرب احتمال ◀ از رابطه احتمال شرطی، تساوی $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ به دست می‌آید که به آن «قانون ضرب احتمال» می‌گوییم و از این قانون برای یافتن احتمال همزمان وقوع دو پیشامد استفاده می‌کنیم.

نکته: برای سه پیشامد ناتهی A_1, A_2, A_3 داریم:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

قانون احتمال کل ◀ اگر فضای نمونه S توسط پیشامدهای ناتهی $A_1, A_2, \dots, A_n$ افراز شده باشد، احتمال پیشامد B ، طبق قانون احتمال کل، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + \dots + P(B \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

حالت خاص ◀ در یک سری از سوالات مربوط به قانون احتمال کل، m مهره از جعبه اول و n مهره از جعبه دوم انتخاب کرده و آن‌ها را در جعبه جدید می‌گذاریم و سپس مهره‌ای دلخواه از جعبه جدید برمی‌داریم. در این صورت احتمال پیشامد A در مورد مهره برداشته شده، به صورت زیر است:

$$P(A) = \frac{m}{m+n} P(A \text{ در جعبه اول}) + \frac{n}{m+n} P(A \text{ در جعبه دوم})$$

نکته: در سوال‌های انتخاب مهره از یک کیسه، در حالت بدون جای‌گذاری، اگر رنگ مهره‌های خارج شده قبلی را مشاهده نکرده باشیم، مانند آن است که مهره مورد نظر از کیسه خارج نشده است و پیشامدها را مانند حالت با جای‌گذاری در نظر می‌گیریم.

قانون بیز ◀ در حالتی که فضای نمونه S توسط پیشامدهای A_1 تا A_n افراز شده است و پیشامد B اتفاق افتاده است، آن‌گاه احتمال وقوع پیشامد A_i به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{P(B)}$$

توجه: مقدار $P(B)$ را از قاعده ضرب احتمال به دست می‌آوریم.

پیشامدهای مستقل A و B : دو پیشامد A و B در فضای نمونه S را مستقل می‌گوییم، هرگاه وقوع یا عدم وقوع یکی بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد، یعنی $P(A|B) = P(A)$ و $P(B|A) = P(B)$ که در آن صورت:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

نکته: اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آن‌گاه جفت پیشامدهای $\{A, B\}$ ، $\{A, B'\}$ ، $\{A', B\}$ و $\{A', B'\}$ نیز مستقل‌اند.

توجه: نمونه‌ای از پیشامدهای مستقل، به صورت زیر هستند:

(۱) پرتاب‌های متوالی تاس یا سکه.

(۲) پرتاب‌های چند سکه و چند تاس با هم.

(۳) موفقیت دو فرد A و B در یک آزمون با جامعه آماری بالا.

(۴) موفقیت عمل جراحی دو بیمار A و B .

(۵) اصابت تیرهای دو تیرانداز به هدف.