



۱ اگر $f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 3 \\ -2x+1 & x \leq 3 \end{cases}$ و $f(-x) > 0$ $g(x) = \begin{cases} x+3 & f(-x) > 0 \\ x-3 & f(-x) \leq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $\log\left(-\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) $\frac{13}{2}$ ۳) $-\frac{7}{2}$ ۴) -۴

۲ تابع $f(x) = \begin{cases} |x+2|+1 & x \leq -2 \\ 5m-mx & x > -2 \end{cases}$ روی R نزولی است. اگر بازه $[a, b]$ ، حدود مقادیر m باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{7}$

۳ تابع $y = (x-1)|x|$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۴ اگر $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = f([x - f(x)])$ باشد، $\log\left(-\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

۵ اگر $f(x) = (x + \log x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(f \circ f)(x) < f(x^5)$ کدام است؟

- ۱) $(0, 5)$ ۲) $(0, 1)$ ۳) $(5, +\infty)$ ۴) $(1, +\infty)$

۶ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}$ ، مقدار $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

- ۱) $\log \frac{1}{2}$ ۲) $\log \frac{3}{2}$ ۳) $\log \sqrt{\frac{3}{2}}$ ۴) $\log \frac{1}{\sqrt{2}}$

۷ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$ ، $x \geq 1$ باشد، $(g \circ g)(1)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) صفر

۸) باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x) = x^2 + 4x + 5$ برابر $x + 2$ است. اگر $f(1) = 13$ و $f(-1) = 11$ باشد، خارج قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟

- ۱) $-x + 2$ ۲) $2x - 1$ ۳) $3x - 2$ ۴) $-2x + 3$

۹) تابع با ضابطه $y = \sqrt{(x+1)^2} - |3x - 6|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{2}x - 7, x \geq 2$ ۲) $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}, x \leq 3$
۳) $-2x + 14, x \leq 3$ ۴) $-2x + \frac{14}{3}, x \geq 2$

۱۰) فرض کنید M نقطه‌ی تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+3} - 1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی M از مبدأ مختصات، کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۳ ۴) $2\sqrt{2}$

۱۱) ابتدا قرینه‌ی نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

- ۱) ۰، ۲ ۲) ۱، ۱ ۳) ۱، ۲ ۴) ۱، ۲

۱۲) در بازه‌ی (a, b) ، نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^2$ است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۳) نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x; (x > 1)$ ، مفروض است. قرینه‌ی نمودار آن نسبت به محور x ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- ۱) $4\sqrt{5}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۱۴) اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، برد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- ۱) $[-1, 1)$ ۲) $(-1, 1]$ ۳) $[1, +\infty)$ ۴) $(-\infty, 1]$

۱۵) با فرض $f(x) = x^2 - 4x + 9; x \geq 2$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$ ، حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ ، کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۶ تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه‌ی $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه‌ی چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- ۱ $\frac{3}{4}$ ۲ ۱ ۳ $\frac{3}{2}$ ۴ ۲

۱۷ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $f - (g^{-1} \text{ of } f)$ کدام است؟

- ۱ $\{-1, 4\}$ ۲ $\{2, 3\}$ ۳ $\{3, 4\}$ ۴ $\{2, -1\}$

۱۸ اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^2 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \text{ of } f^{-1})(8)$ ، کدام است؟

- ۱ $1/5$ ۲ ۲ ۳ $2/5$ ۴ ۳

۱۹ گزینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱ -۲ ۲ $5/0$ ۳ ۱ ۴ $5/1$

۲۰ اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{1-x^2}$ ۲ $\frac{2x}{x^2-1}$ ۳ $\frac{2x+1}{1-x^2}$ ۴ $\frac{2x-1}{x^2-1}$

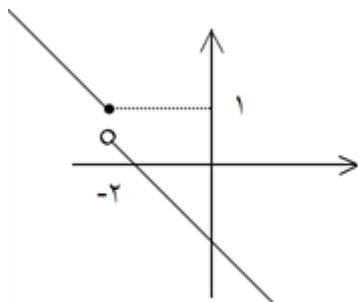
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای محاسبه $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ ابتدا $f\left(\frac{1}{2}\right)$ را حساب می‌کنیم که می‌شود:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0.$$

حال با توجه به ضابطه دوم g داریم:

$$\text{fog}\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2} - 2\right) = f\left(-\frac{5}{2}\right) = -2\left(-\frac{5}{2}\right) + 1 = 6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$m \geq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} (5m - mx) = 5m + 2m \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{1}{7}$$

$$f(x) = (x - 1)|x| = \begin{cases} x(x - 1) & x \geq 0 \\ x(1 - x) & x < 0 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 0 \\ 1 - 2x & x < 0 \end{cases}$$

$$a + b = \frac{1}{2} \leftarrow a = 0, b = \frac{1}{2}$$

تابع f در بازه $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

$$\text{fog}\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = f(2) = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} - f\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right]\right) = f(1) = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع f اکیداً صعودی است.

$$f(f(x)) < f(x^0) \Rightarrow f(x) < x^0 \Rightarrow (x + \text{Log } x)^0 < x^0 \Rightarrow x + \text{Log } x < x$$

$$\Rightarrow \text{Log } x < 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{(2^x)^2 - 1}{2^x}}{\frac{(2^x)^2 + 1}{2^x}} \Rightarrow 2(2^x)^2 - 2 = (2^x)^2 + 1$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 = 2 \Rightarrow 2^x = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{Log}} \text{Log } 2^x = \text{Log } \sqrt{2} \Rightarrow x = \text{Log } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷

$$y = (\sqrt{x} - 1)^2 \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y} = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1$$

$$g(x) = f^{-1}(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$$

$$g(g(1)) = g(4) = 9$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به گزینه‌ها، خارج قسمت را باید درجه یک بگیریم. خارج قسمت $\alpha x + \beta$ را در نظر می‌گیریم و داریم: ۸

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)(\alpha x + \beta) + x + 2$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1 \cdot (\alpha + \beta) + 3 = 13 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \\ f(-1) &= 2(-\alpha + \beta) + 1 = 11 \Rightarrow -\alpha + \beta = 5 \end{aligned} \right\} \beta = 3, \alpha = -2$$

خارج قسمت $-2x + 3$ است.

$$y = |x + 1| - 3|x - 2| \Rightarrow \begin{cases} 2x - 7 & ; x < -1 \\ 4x - 5 & ; -1 \leq x < 2 \\ -2x + 7 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹

تابع روی بازه $[2, +\infty)$ نزولی است:

$$f(x) = -2x + 7; x \geq 2 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}(x - 7) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}; x \leq 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع اکیداً صعودی است، پس وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می‌کند. ۱۰

$$\sqrt{x + 3} - 1 = x \Rightarrow \sqrt{x + 3} = x + 1$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{\text{به توان میرسانیم}} x^2 + 2x + 1 = x + 3 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = 1 \\ \text{غ ق ق } x = -2 \end{cases}$$

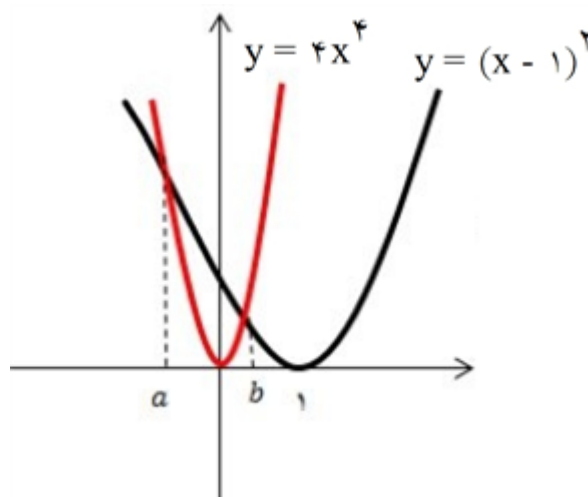
$$M(1, 1) \Rightarrow MO = \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} \Rightarrow MO = \sqrt{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با کمک ترسیم قرینه نسبت به مبدأ مختصات و انتقال روی محور عرض‌ها داریم: ۱۱

$$y = (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y = -(-x - 1)^2 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = -(-x - 1)^2 + 4$$

$$-(-x - 1)^2 + 4 = (x - 1)^2 \Rightarrow -x^2 - 2x - 1 + 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow -2x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲



$$(x - 1)^2 > 4x^2 \Rightarrow |x - 1| > 2x^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} a = 2 & \Rightarrow \text{عبارت همواره مثبت است} \\ \text{و نمی تواند منفی باشد} & \Rightarrow \emptyset \\ \Delta = 1 - 8 = -7 < 0 & \end{aligned} \right.$$

$$x \leq 1 \Rightarrow 2x^2 < -x + 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow b - a = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳

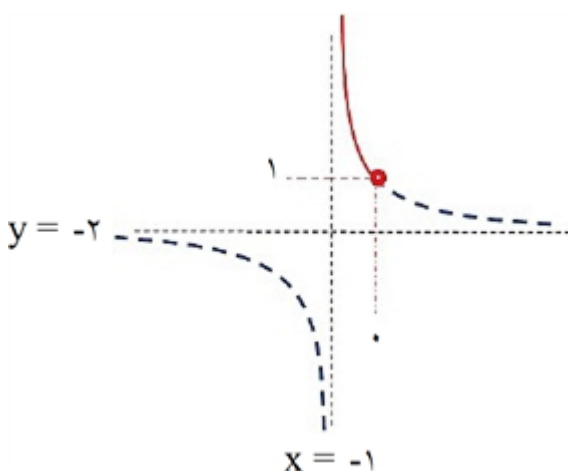
$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{قرینه محور } x \text{ ها}} f(x) = -x^2 + 2x \xrightarrow{+16 \text{ محور } y \text{ ها}}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 16 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 18 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ ق ق} \\ x = 4 \text{ ق ق } (x > 1) \end{cases} \Rightarrow A \Big|_8^4$$

$$OA = \sqrt{4^2 + 18^2} = \sqrt{16 + 324} = \sqrt{340} = 2\sqrt{85}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴



$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 < [x] - x \leq 0$$

$$R \xrightarrow{f} (-1, 0], \quad x \neq -1 \xrightarrow{g} R - \{-2\}$$

$$\text{اشتراک } (-1, 0] \xrightarrow{g} [1, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به ترکیب توابع و مفهوم وارون یک تابع داریم: ۱۵

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9))$$

$$g^{-1}(-9) = b \Rightarrow g(b) = -9 \Rightarrow \frac{3-b}{2} = -9 \Rightarrow b = 21$$

$$f^{-1}(21) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 21 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 9 = 21 \xrightarrow{x \geq 2} \alpha = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$

نیمساز ناحیه چهارم $y = -x$ است.

$$-x + \frac{2}{x} = x \Rightarrow \frac{2}{x} = 2x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

دامنه $x < 0$ است پس $x = -1$ قابل قبول است.

$$(-1, 1) \in f \Rightarrow (1, -1) \in f^{-1}$$

پس طول تقاطع $x = 1$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۷

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\} \quad g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\} \Rightarrow (g^{-1} \circ f) - f = \{(1, 4-2), (4, 5-6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

$$R = \{2, -1\}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(8) = g^{-1}(f^{-1}(8))$$

$$f(x) = 8 \Rightarrow \frac{2}{5}x - 2 = 8 \Rightarrow \frac{2}{5}x = 10 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow f^{-1}(8) = 25 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(8)) = g^{-1}(25)$$

$$g(x) = 25 \Rightarrow x^2 + x = 25 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow g^{-1}(25) = 5$$

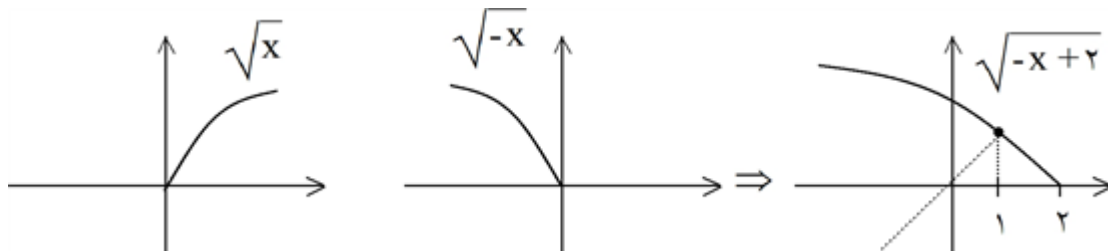
$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{انتقال}} f(2-x) = \sqrt{-x+2}$$

$$y = x \text{ محل برخورد با } \sqrt{-x+2} = x \Rightarrow x^2 = -x+2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+2) = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$x=1 \Rightarrow \sqrt{-1+2} = 1 \checkmark \quad x=-2 \Rightarrow \sqrt{-(-2)+2} = -2 \times$$

روش دوم:



$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{x^2 - 2x(x+1) + x^2 - 1}{x^2-1}$$

$$\frac{x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 - 1}{x^2-1} = \frac{-2x-1}{x^2-1} = \frac{2x+1}{1-x^2}$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

