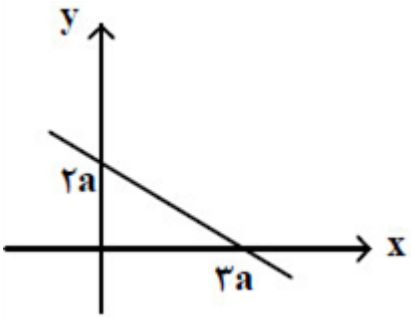




۱) اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x)}{x |f^{-1}(x)|}$ کدام است؟



$-\frac{2}{27}$ (۴)

$-\frac{8}{9}$ (۳)

$-\frac{8}{27}$ (۲)

$-\frac{2}{9}$ (۱)

۲) اگر $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty$ باشد، مقدار $\left[\frac{b}{a}\right]$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

۳) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{k[x] - 2}{x^2 - 4} = +\infty$ باشد، نقاط $(k\pi, \sin k\pi)$ در کدام ناحیهٔ محورهای مختصات قرار دارند؟

چهارم (۴)

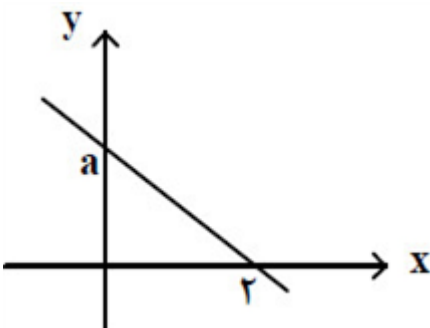
سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

۴) نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل داده شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ باشد، مقدار

غیرصحیح a کدام است؟



$2\sqrt{2}$ (۴)

$-1 + \sqrt{2}$ (۳)

$1 + \sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

۵ مقدار غیرصفر حد $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{b\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2b}{ax - b}$ کدام است؟

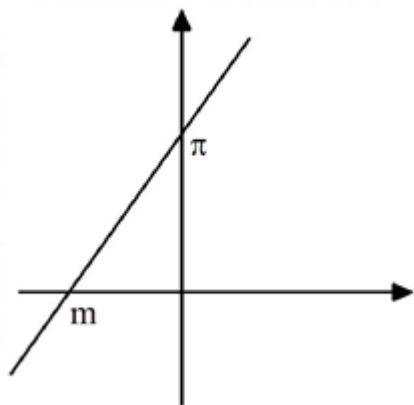
$\frac{1}{24}$ (۴)

$\frac{1}{48}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{1}{12}$ (۱)

۶ شکل مقابل، نمودار تابع f^{-1} را نشان می‌دهد. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \pi$ باشد، مقدار m کدام است؟



$-\pi\sqrt{\pi}$ (۴)

$-\frac{1}{\pi}$ (۳)

$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (۲)

$-\sqrt{\pi}$ (۱)

۷ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور x ها کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ و ۳ (۴)

-1 و $\frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ و ۱ (۲)

-1 و $\frac{1}{2}$ (۱)

۸ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x) = x^2 + 4x + 5$ برابر $x + 2$ است. اگر $f(1) = 13$ و $f(-1) = 11$ باشد، خارج‌قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟

$-2x + 3$ (۴)

$2x - 2$ (۳)

$2x - 1$ (۲)

$-x + 2$ (۱)

۹ حد عبارت $\frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16}$ وقتی $x \rightarrow 2$ ، کدام است؟

$-\frac{1}{8}$ (۴)

$-\frac{1}{6}$ (۳)

$-\frac{1}{4}$ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

۱۰ در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$ ، کدام بیان، درست است؟

$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f(x) = +\infty$ (۲)

$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$ (۱)

$\lim_{x \rightarrow \frac{4\pi}{3}} f(x) = +\infty$ (۴)

$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} f(x) = -\infty$ (۳)

۱۱) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^2 + 7x^2 - 2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{7}} f(x)$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{4}{17}$ ۲) $-\frac{6}{17}$ ۳) $-\frac{5}{12}$ ۴) $-\frac{6}{11}$

۱۲) فرض کنید باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌مانده‌ی تقسیم $4p(-x) + p(x^2)$ بر $x - 2$ کدام است؟

- ۱) ۷ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) -۱

۱۳) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) -۱

۱۴) حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow -8$ کدام است؟

- ۱) -۲۴ ۲) -۱۸ ۳) -۱۲ ۴) -۶

۱۵) در تقسیم عبارت $4x^3 - 19x + 12$ بر دو جمله‌ای $2x - 3$ ، مجموع ضرایب چند جمله‌ای خارج‌قسمت، کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶) اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی $x = -2$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۷) در تقسیم $(4x^3 + 8x^2 - 11x) \div (2x - 1)$ ، مقدار چند جمله‌ای خارج قسمت به ازای $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

- ۱) -۳ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

۱۸) در تابع $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۹) در تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) صفر ۳) $-\infty$ ۴) موجود نیست.

۲۰ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱

$$f(x) = mx + 2a, f(2a) = 0 \Rightarrow 2ma + 2a = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + 2a \Rightarrow f^{-1} : \frac{2}{3}x = -y + 2a \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y + 3a \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{3}{2}x + 3a$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}x + 3a\right)^2}{x \left|-\frac{3}{2}x + 3a\right|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{9}{4}x^2}{x \left|-\frac{3}{2}a\right|} \xrightarrow{x < 0} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{9}{4}x^2}{-\frac{3}{2}x^2} = -\frac{3}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲

جواب $= +\infty \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{4}}{\cdot} = +\infty \Rightarrow \sqrt[3]{4}$ ریشه مخرج بوده $\Rightarrow x^2 + ax + b = (x - \sqrt[3]{4})^2$

$$x^2 - 2\sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16}$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $a = -2\sqrt[3]{4} \quad b = \sqrt[3]{16}$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-2\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-\sqrt[3]{32}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = -\sqrt[3]{0.5} \Rightarrow \left[-\sqrt[3]{0.5}\right] = -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{k[2^+] - 2}{2^+ - 2} = \frac{2k - 2}{\cdot^+} = +\infty \Rightarrow 2k - 2 > 0 \Rightarrow k > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{k[2^-] - 2}{2^- - 2} = \frac{k - 2}{\cdot^-} = +\infty \Rightarrow k - 2 < 0 \Rightarrow k < 2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$1 < k < 2 \Rightarrow \pi < k\pi < 2\pi \Rightarrow \sin k\pi < 0$$

پس نقاطی به فرم $(k\pi, \sin k\pi)$ دارای طول مثبت و عرض منفی هستند، یعنی در ناحیه چهارم قرار دارند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۴

$$\text{عرض از مبدا} = a \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow m = -\frac{\text{ضرب } x}{\text{ضرب } y} = -\frac{a}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{a}{2}x + a$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + a \Rightarrow \frac{a}{2}x = -y + a \Rightarrow x = -\frac{2}{a}y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2}{a}x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{a}x + 2}{\left| 2\left(-\frac{a}{2}x + a\right) - a\left(-\frac{2}{a}x + 2\right) \right|} = 2$$

$$\text{مخرج} = \left| -ax + \cancel{2a} + 2x - \cancel{2a} \right| = |2x - ax| = |x| \times |2 - a| = -x|2 - a|$$

$$\text{ضرب بالاترین درجه صورت} = -\frac{2}{a}$$

$$\text{ضرب بالاترین درجه در مخرج} = -|2 - a|$$

$$\text{جواب حد} = \frac{-\frac{2}{a}}{-2|2 - a|} = 2 \Rightarrow |2 - a| = \frac{1}{a} \Rightarrow a|2 - a| = 1$$

$$\begin{aligned} a \geq 2 & \rightarrow a(-2 + a) = 1 : a^2 - 2a - 1 = 0 \\ \Delta &= 8 \\ a &= 1 \pm \sqrt{2} \\ a \geq 2 & \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2} \\ a \leq 2 & \rightarrow a(2 - a) = 1 \\ -a^2 + 2a - 1 &= 0 \\ a^2 - 2a + 1 &= 0 \Rightarrow a = 1 \\ \text{غ ق ق چون گفته مقدار غیر صحیح } a \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۵

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x}} - 2}{\frac{x}{\lambda} - 1} \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x}} + 2}{2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 2}{\frac{x}{\lambda} - 2} \times \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 2^2}{2 + 2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4}{6x - 4\lambda} = \frac{1}{6}$$

تذکر: سؤال با قاعده هوییتال نیز قابل حل است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶

$$f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi \Rightarrow f(x) = -\frac{m}{\pi}x + m$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x + \pi}{-\frac{m}{\pi}x + m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x} = \frac{\pi^2}{m^2} = \pi$$

$$\Rightarrow m^2 = \pi \xrightarrow{m < 0} m = -\sqrt{\pi}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق فرض نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ ، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. پس:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 16 - 20 - 2 + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$$

بنابراین با توجه به این‌که یکی از ریشه‌های این تابع $x = 2$ است، بنابراین $f(x)$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر است. با تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ ، خارج قسمت تقسیم $2x^3 - x - 3$ می‌شود. بنابراین:

$$f(x) = (x - 2)(2x^2 - x - 3)$$

به این ترتیب ریشه‌های دیگر f (غیر از $x = 2$) از معادله $2x^2 - x - 3 = 0$ به دست می‌آید:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{3}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به گزینه‌ها، خارج قسمت را باید درجه یک بگیریم. خارج قسمت را $\alpha x + \beta$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$f(x) = (x^2 + 2x + 5)(\alpha x + \beta) + x + 2$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1 \cdot (\alpha + \beta) + 3 = 13 \Rightarrow \alpha + \beta = 10 \\ f(-1) &= 2(-\alpha + \beta) + 1 = 11 \Rightarrow -\alpha + \beta = 5 \end{aligned} \right\} \beta = 3, \alpha = -2$$

خارج قسمت $-2x + 3$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} &\times \frac{2 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}}{2 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{2} - \cancel{\sqrt{3x+2}}}{(x-2)(5x-8)} \times \frac{\cancel{2} + \cancel{2\sqrt{3x+2}} + \sqrt{(3x+2)^2}}{\cancel{2} + \cancel{2\sqrt{3x+2}} + \sqrt{(3x+2)^2}} = \frac{-3}{2(12)} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

روش دوم: در این روش از هوییتال استفاده می‌کنیم.

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}{10x - 18} = \frac{-3}{2 \times 2} = -\frac{1}{8}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^-} = -\infty$$

"

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Upsilon}} \frac{\Upsilon x^\Upsilon - \mathfrak{F} x^\Upsilon + 1}{\Upsilon x^\Upsilon + \mathbb{V} x^\Upsilon - \mathfrak{V}} = \frac{\bullet}{\bullet} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Upsilon}} \frac{1 \Upsilon x^\Upsilon - 1 \Upsilon x}{\mathfrak{F} x^\Upsilon + 1 \mathfrak{F} x} = \frac{\mathfrak{V} - \mathfrak{F}}{\frac{\Upsilon}{\Upsilon} + \mathbb{V}} = \frac{-\mathfrak{V}}{\frac{1 \mathbb{V}}{\Upsilon}} = \frac{-\mathfrak{F}}{1 \mathbb{V}}$$

12

$$\xrightarrow{x=\mathfrak{r}} p(\mathfrak{r}^{\mathfrak{r}}) + \mathfrak{r}p(-\mathfrak{r}) = p(\mathfrak{r}) + \mathfrak{r}p(-\mathfrak{r}) = \mathfrak{r} + \mathfrak{r} = \mathfrak{v}$$

۱۳

14

روش دوم: هوپیتال

15

$۰ = ۵ - ۳ + ۲ =$ مجموع ضرایب چند جمله‌ای خارج قسمت

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، عبارت داخل قدرمطلق به $+\infty$ میل می‌کند بنابراین:

$$|x^2 - 4| = x^2 - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

و در نتیجه:

حال حد راست عبارت را در $x = -2$ می‌بایم.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4|}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x - 2| |x + 2|}{-(x^2 + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{-(x + 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{4}{3}$$

دقت کنید که:

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2)$$

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow |x + 2| = x + 2$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$2x^2 + 8x^2 - 11x$$

$$-(2x^2 - 2x^2)$$

$$1 \cdot x^2 - 11x$$

$$-(1 \cdot x^2 - 0x)$$

$$-6x$$

$$-(-6x + 3)$$

$$-3$$

مقدار $2x^2 + 5x - 3$ را به ازای $x = \frac{1}{2}$ محاسبه می‌کنیم:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x - 1 \\ \hline 2x^2 + 5x - 3 \end{array}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{ax} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + x}{ax} = 2 \Rightarrow \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - x^2 - 6x)}{(x - 2)(2x + \sqrt{x^2 + 6x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x \cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)} (2x + \sqrt{x^2 + 6x})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^-} u = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^r} \right) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \left(\frac{x^r - 1}{x^r} \right) = \frac{-1}{\cdot^-} = +\infty \quad : u = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^r} \text{ با فرض}$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^-} f \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^r} \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (u - \sqrt{u^r + 1}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^r - (u^r + 1)}{(u + \sqrt{u^r + 1})} =$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} -\frac{1}{(u + \sqrt{u^r + 1})} = \cdot$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{r}{r} \Rightarrow n = r, \frac{a}{r} = \frac{r}{r} \Rightarrow a = r \Rightarrow f(x) = \frac{rx^r - rx + 1}{rx^r + x} \Rightarrow f(-1) = \frac{r + r + 1}{r - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

