



۱ تابع $y = |f(x)|$ که در آن $f(x) = x(|x| + 3)$ است، چند نقطه بحرانی دارد؟

- ۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

۲ نقطه A، نقطه برخورد تابع $y = \sqrt{x+2}$ با محور عرض‌ها است. کمترین فاصله نقطه A از منحنی $y = x + |x|$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{10}\sqrt{10}$ ۲) $\frac{1}{1}\sqrt{5}$ ۳) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

۳ ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} |x - a|$ روی بازه $[0, a]$ برابر $\frac{1}{5}$ است. مقدار a کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{5}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) ۱

۴ تابع $y = (x-1)|x|$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۵ یک سازنده جعبه‌های مقوایی می‌خواهد از مقواهای مربع شکل به ضلع ۱۲ cm، با بریدن مربع‌های مساوی از چهار گوشه و بالا بردن اضلاع جعبه‌های باز بسازد. طول ضلع مربعی را که باید بُرید چند سانتی‌متر باشد تا جعبه بیش‌ترین حجم را داشته باشد؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۶ تابع $f(x) = \frac{x}{1 - x|x|}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷ نقطه $A(-1, 2)$ ، نقطه ماکزیمم نسبی تابع $y = ax^2 + b|x|$ است. مقدار ab کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\frac{8}{9}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) -۸

۸ نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4$ در نقاطی به طول صفر و ۲ دارای اکسترمم نسبی است. فاصله بین نقاط اکسترمم نسبی این تابع، چقدر است؟

- ۱) $2\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{11}$ ۳) $2\sqrt{15}$ ۴) $2\sqrt{101}$

۹ نقاط $A(0, 0)$ و $B(1, 1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هستند. حاصل ab کدام است؟

- ۱) -۳ ۲) -۶ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۰ کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{2x + 7}$ ، کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) $4/5$ ۳) ۵ ۴) $3\sqrt{2}$

۱۱ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x| - 2x$ ، فاصله‌ی دو نقطه‌ی ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) ۴

۱۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x - 4|$ ، فاصله‌ی دو نقطه ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

- ۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۱۳ طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y = (x - 1)^2 \sqrt{x^2}$ ، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۴ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x^2 - 3|$ ، در چند نقطه، اکسترمم نسبی دارد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 1 \\ -x + 2 & ; 0 < x < 1 \\ x^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$

۱) ماکزیمم نسبی دارد. ۲) می‌نیمم نسبی دارد اما مطلق ندارد.

۳) می‌نیمم نسبی و مطلق ندارد. ۴) می‌نیمم نسبی و مطلق دارد.

۱۶ طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ ، کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ۱

۱۷ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

- ۱) می‌نیمم نسبی ۲) ماکسیمم نسبی
۳) می‌نیمم نسبی و ماکسیمم نسبی ۴) فاقد اکسترمم نسبی

۱۸ بیش‌ترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

- ۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

۱۹ اگر $x + y = 18$ باشد، بیشترین مقدار x^2y کدام است؟ ($x, y > 0$)

- ۱) ۲۱۶ ۲) ۷۲۹ ۳) ۸۶۴ ۴) ۶۴۸

۲۰ اگر $2x + y = 6$ ، آنگاه بیشترین مقدار xy کدام است؟

$\frac{9}{2}$ ۱

$\frac{9}{4}$ ۲

۹ ۳

$\frac{3}{2}$ ۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱

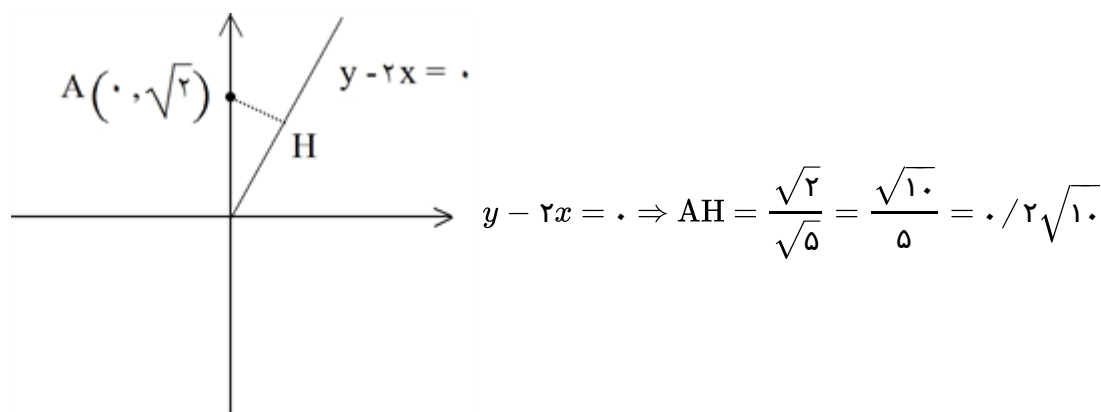
$$y = |f(x)| = |x| (|x| + 3) = \begin{cases} x(x+3) & ; x \geq 0 \\ -x(-x+3) & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 3x & ; x \geq 0 \\ x^2 - 3x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & ; x > 0 \\ 2x - 3 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = |f(x)| \text{ تابع در } R \text{ پیوسته است}$$

و $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ ، لذا تنها نقطه بحرانی این تابع $x = 0$ می‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲



$$f(0) = f(a) = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در ابتدا و انتهای بازه مقدار تابع صفر می‌شود.

۳

پس در نقطه بحرانی درون بازه ماکزیمم می‌شود بنابراین:

$$f(x) = \pm \sqrt[3]{x^2}(x-a) \Rightarrow f'(x) = \pm \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-a) + \sqrt[3]{x^2}(1)$$

$$= \pm \frac{2x - 2a + 3x}{3\sqrt[3]{x}} = \pm \frac{5x - 2a}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 5x = 2a \Rightarrow x = \frac{2a}{5}$$

$$f\left(\frac{2a}{5}\right) = 1/5$$

$$a = \frac{5}{2} \Rightarrow f\left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\right) = 1/5 \Rightarrow f(1) = 1/5 \checkmark$$

پس $a = \frac{5}{2} = 2.5$ می‌باشد.

$$f(x) = (x-1)|x| = \begin{cases} x(x-1) & x \geq 0 \\ x(1-x) & x < 0 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

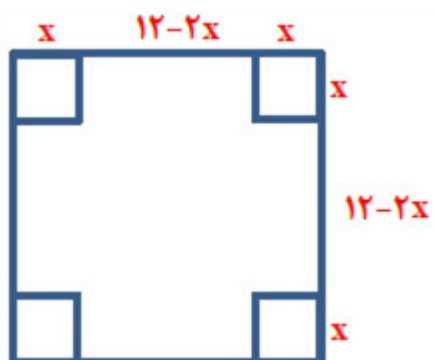
۴

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 0 \\ 1-2x & x < 0 \end{cases}$$

$$a+b = \frac{1}{2} \leftarrow a=0, b=\frac{1}{2}$$

تابع f در بازه $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵



$$V(x) = x(12 - 2x)^2$$

$$\Rightarrow V'(x) = (12 - 2x)^2 - 2 \times 2x(12 - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow (12 - 2x)(12 - 2x - 4x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

$x = 6$ حجم را صفر (می‌نیمم) می‌کند پس $x = 2$.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع روی دامنه‌اش یعنی $R - \{1\}$ پیوسته است: ۶

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & ; x < 0 \\ \frac{x}{1-x^2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & ; x < 0 \\ \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

تابع در $x = 0$ مشتق دارد و برابر یک است. $(f'(0) = 1)$

و با توجه به دامنه هر ضابطه فقط در $x = -1$ مشتق برابر صفر دارد:

$$f'(-1) = 0$$

پس تابع فقط یک نقطه بحرانی دارد.

دقت کنید که $x = 1$ عضو دامنه تابع نیست و نباید لحاظ شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷

$$x < 0 \Rightarrow y = ax^2 - bx \Rightarrow y' = 2ax - b \xrightarrow{y'(-1)=0} -2a - b = 0 \quad \otimes$$

$$A(-1, 2) \in y \Rightarrow 2 = a + b \xrightarrow{\otimes} a = -2, b = 4 \Rightarrow ab = -8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸

$$\left. \begin{aligned} y' &= 2x^2 + 2ax - 2b \\ x = 0 &\Rightarrow b = 0 \end{aligned} \right\} y' = 2x^2 + 2ax \Rightarrow x = -2 \Rightarrow 12 - 4a = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow y = x^2 + 3x^2 - 4 \Rightarrow \left. \begin{aligned} (0, -4) \\ (-2, 0) \end{aligned} \right\} \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه $A(0, 0)$ نقطه اکسترمم نمودار تابع است $(f'(0) = 0)$ و $f(0) = 0$ پس تابع باید

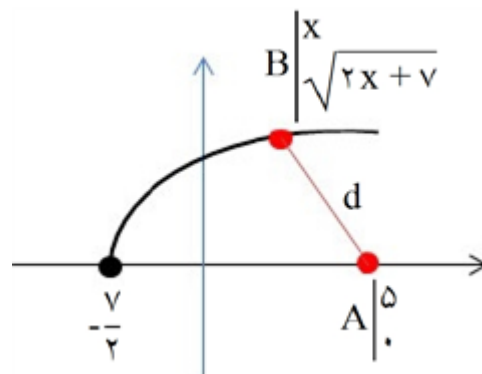
عامل x^2 را داشته باشد، در نتیجه $c = d = 0$ و $f(x) = ax^2 + bx^2$ است.

$$B \in f \Rightarrow f(1) = a + b = 1 \quad (I)$$

$$f'(x) = 2ax^2 + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} 2a + 2b = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} a = -2, b = 3 \Rightarrow ab = -6$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰



$$\begin{cases} A(5, 0) \\ B(x, \sqrt{2x+v}) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+v}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + v} \\ \Rightarrow AB = \sqrt{x^2 - 8x + 25 + v} \Rightarrow AB' = \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + 25 + v}} = 0 \Rightarrow x = 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱

$$f(x) = x|x| - 2x = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 0 \\ -2x - 2 & x < 0 \end{cases} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ min} \\ -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ max} \end{cases} \\ A(1, -1) \Rightarrow AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ B(-1, 1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 2 \\ -2x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

x	2	2
f'	+	-
f	max	min

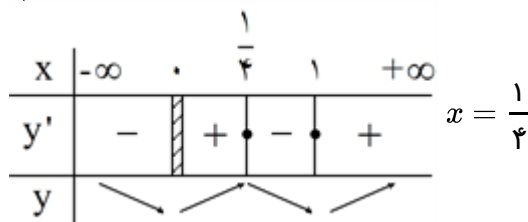
$f' = 0 \Rightarrow x = 2$
 f' وجود ندارد $\Rightarrow x = 2$

$$\begin{aligned} \max(2, 2) \Rightarrow d &= \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \min(2, 0) \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳

$$y' = 2(x-1)\sqrt[3]{x^2} + (x-1)^2 \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2x(x-1) + 2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = \frac{2x^2 - 2x + 2x^2 - 4x + 2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع $y = x|x^2 - 3|$ را ساده می‌کنیم. داریم: ۱۴

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 3) & |x| \geq \sqrt{3} \\ x(3 - x^2) & |x| < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & |x| \geq \sqrt{3} \\ 3x - x^3 & |x| < \sqrt{3} \end{cases}$$

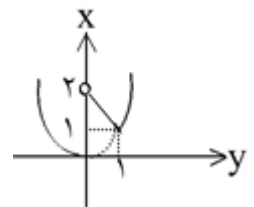
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & |x| > \sqrt{3} \\ 3 - 3x^2 & |x| < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 & \text{غ ق ق} \\ 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

با توجه به این که $x = \pm 1$ ، ریشه‌های ساده‌ی $f'(x)$ هستند، بنابراین هر دو اکسترمم نسبی هستند و همچنین با توجه به این که $f'_+(\sqrt{3}) = 6$ و $f'_-(\sqrt{3}) = -6$ (چرا؟) و $f'_-(-\sqrt{3}) = 6$ و $f'_+(-\sqrt{3}) = -6$ (چرا؟) است، لذا دو نقطه‌ی $x = \pm\sqrt{3}$ نیز اکسترمم‌های نسبی تابع f هستند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای بررسی نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 1 \\ -x + 2 & ; 0 < x < 1 \\ x^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$ ۱۵

از نمودار بهره می‌گیریم:

همان‌طور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنید این تابع ماکزیمم نسبی و مطلق ندارد اما در $x = 0$ و $x = 1$ دارای مینیمم نسبی و در $x = 0$ دارای مینیمم مطلق می‌باشد.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای تعیین طول‌های نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ ۱۶

کافی است ابتدا از ضابطه‌ی تابع مشتق گرفته و سپس ریشه‌های ساده‌ی مشتق را مشخص کنیم:

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 4x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{ریشه ی ساده } x = 0 \\ \text{ریشه ی ساده } x = 1 \\ \text{ریشه ی ساده } x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع شامل اکسترمم نسبی است}$$

حال با استفاده از جدول تغییرات تابع (آزمون مشتق اول) طول ماکزیمم نسبی این تابع به دست می‌آید.

X	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		min نسبی	max نسبی	min نسبی	

$\Rightarrow x = 0$ طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f است

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آزمون مشتق اول برای حل استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + \frac{8}{3} = 0 \quad (*)$$

مجموع ضرایب صفر است پس یک جواب $x = 1$ است و با تقسیم عبارت $x^2 - 4x + \frac{8}{3}$ بر $x - 1$ بقیه‌ی جواب‌ها را می‌یابیم:

$$x^2 - 4x + \frac{8}{3} \Big| \frac{x-1}{x^2+x-2} = (x-1)(x+2) \Rightarrow x^2 - 4x + \frac{8}{3} = (x-1)^2(x+2)$$

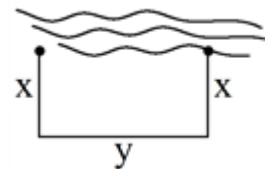
$$\xrightarrow{(*)} (x-1)^2(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه ی مضاعف } x = 1 \\ \text{ریشه ی ساده } x = -2 \end{cases}$$

پس تابع تنها یک می‌نیمم نسبی دارد. دقت کنید چون $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف f' است، f' در این نقطه تغییر علامت نمی‌دهد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$\left. \begin{aligned} S &= xy \\ 2x + y &= 18 \Rightarrow y = 18 - 2x \end{aligned} \right\} S = x(18 - 2x) \Rightarrow S = -2x^2 + 18x$$

$$x_{\text{راس}} = \frac{-18}{-4} = 4.5 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow S = 4.5 \times 9 = 40.5 = 8 \times 5.0625 = 40.5$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$P = x^2 y \xrightarrow{y=18-x} P(x) = x^2(18-x) = 18x^2 - x^3$$

حال از مشتق‌گیری و تعیین نقاط بحرانی، اقدام به محاسبه‌ی بیش‌ترین مقدار P کنیم:

x	۰	۱۲	۱۸
P'	—	+	—
P		Max	

$$P'(x) = 36x - 3x^2 \xrightarrow{P'=0} 3x(12-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 12 \end{cases}$$

این تابع در $x = 12$ به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد و مقدار این ماکزیمم برابر است با:

$$\xrightarrow{x=12} P_{\max} = (12)^2(18-12) = 144 \times 6 = 864$$

روش دوم: هرگاه مجموع دو عامل مثبت، مقداری ثابت باشد، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار حاصل‌ضرب توان‌های مختلف آن‌ها به شرطی حاصل می‌شود که مقدار ثابت، بین آن‌دو متغیر به نسبت توان‌هایشان توزیع شود، به زبان ریاضی داریم:

$$(if \ u, v > 0) : u + v = k \xrightarrow{\text{برای آن که ماکزیمم شود}} \frac{u}{\alpha} = \frac{v}{\beta} = \text{باید}$$

در نتیجه با آگاهی از قضیه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$x > 0, y > 0, x + y = 18 \xrightarrow{\text{برای آن که عبارت ماکزیمم شود}} \frac{x}{2} = \frac{y}{1} \rightarrow x = 12 \xrightarrow{\text{جایگذاری در } x+y=18}$$

$$2y + y = 18 \rightarrow y = 6, x = 12 \rightarrow \text{Max}(x^2 y) = 12^2 \times 6 = 864$$

$$2x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - 2x \Rightarrow S = xy = x(6 - 2x) = 6x - 2x^2$$

$$S'x = 6 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{\max} = \frac{3}{2} \left(6 - 2 \times \frac{3}{2} \right) = \frac{9}{2}$$

اگر $ax + by = c$ باشد، مقدار xy زمانی ماکسیمم است که $ax = by$ باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x = y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = 3 \Rightarrow \text{MAX} \{xy\} = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

