

فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

■ هندسه و به‌ویژه ترسیم‌های هندسی از دیرباز مورد استفاده بشر بوده‌است.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

ترسیم‌های هندسی

انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و به‌ویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است.
از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی پیشرفته کنونی، همگی نیازمند ترسیم‌های هندسی است.

فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)
۱- نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید و برای رسم کردن از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.

نقاطی را مشخص کنید که فاصله یکسانی از نقطه O دارند. (مثلاً همه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه O برابر ۲ سانتی‌متر است.)

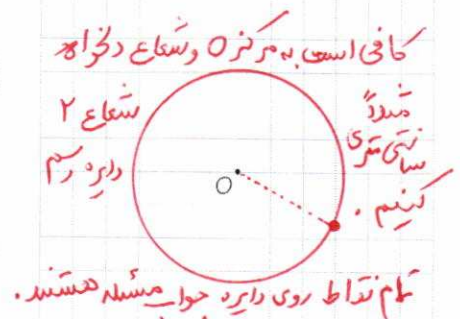
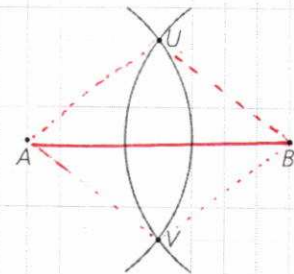
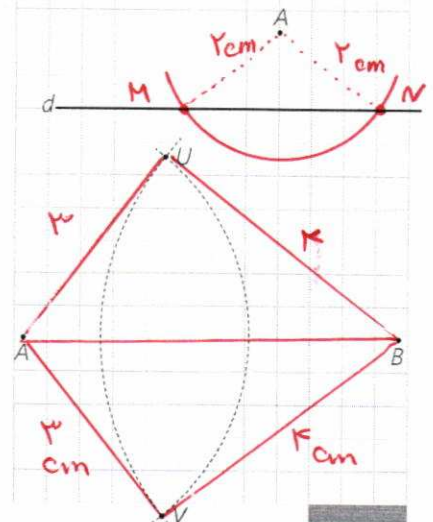
۲- نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره خط AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

از دوسر پاره خط AB به یک فاصله هستند.

۳- نقطه A، مانند شکل مقابل به فاصله ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه A باشند. کافی است به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی‌متری کمانی رسم کنیم خط d را در نقاط M و N قطع کند.

۴- نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه A یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟
همگی تا نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر قرار دارند.



(ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟
به فاصله‌ی ۳ سانتی متری قرار دارند.

(پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه شعاع آنها و فاصله نقاط A و B چه شرطی باید

داشته باشند؟

$$AU = 3 \text{ cm} \quad BU = 4 \text{ cm}$$

$$AV = 3 \text{ cm} \quad BV = 3 \text{ cm} \quad AU + BU > AB$$

(ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

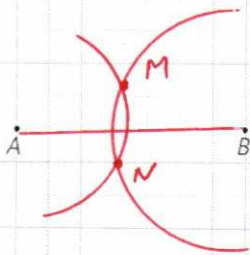
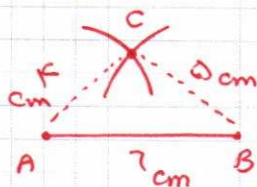
$$AU = 3$$

$$BU = 4$$

$$AB^2 = AU^2 + BU^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow AB = 5 \text{ cm}$$

کاردرکلاس



الف) ۵ و ۶ و ۴
ب) ۳ و ۳ و ۳
پ) ۵ و ۱ و ۲

- دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی متر باشد. کافی است به مرکز A و B به شعاع ۲ و از نقطه B به شعاع ۲/۵ کمانی به شعاع ۲/۵ ترسیم کنیم. نقاط تقاطع دو کمان جواب مسئله هستند.
- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد. ابتدا با خط کش یک پاره خط به اندازه ۶ سانتی متر رسم می‌کنیم. سپس از دو سر این پاره خط یک کمان به شعاع ۴ و از یک کمان به شعاع ۵ ترسیم می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.
- جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر: ABC جواب مسئله

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

نقاط A و B به فاصله از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر و از نقطه B برابر باشد.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

فعالیت

- زاویه xOy و نیم خط Oz را نیمساز آن در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصله نقطه A از دو ضلع زاویه xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطه A عمودهایی بر نیم خط‌های Ox، Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است.)

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad \Rightarrow \quad \triangle OAH \cong \triangle OAK \quad \Rightarrow \quad AH = AK$$

(دو کمان زاویه حاده)

نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، آن نقطه به یک فاصله هستند.

آن زاویه به یک فاصله هستند.

۲- زاویه xOy و نقطه A را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله نقطه A از نیم خط‌های Ox و Oy باهم برابر باشد.

نشان دهید که نقطه A روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد.

(راهنمایی: پاره خط OA ، و دو عمود از نقطه A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره خط OA همان نیمساز xOy است.)

نتیجه

اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

فعالیت

۱- زاویه xOy را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.

— طول پاره خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
 $OA = OB$ چون توسط پرگار به مرکز O و شعاع یکسان رسم شده‌اند.

۲- دهانه پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.

— طول پاره خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
 $AW = BW$ چون شعاع پرگار ثابت مانده است.

— پاره خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
همیشه نسبت به حالت تساوی سه ضلع

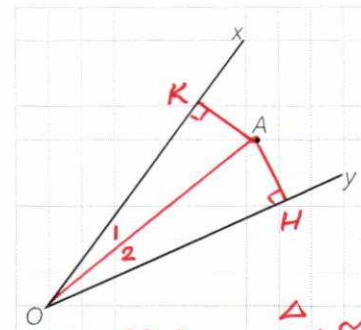
— اندازه زاویه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ مساوی
چون گوشه‌های منطبق هستند.

— پاره خط OW برای زاویه xOy چه نوع پاره خطی است؟
نیمساز زاویه

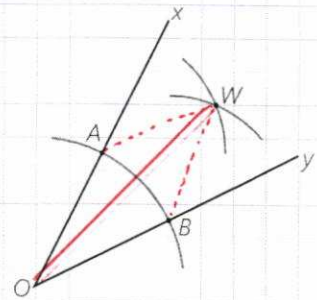
OW است.

کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید. ابتدا این زاویه دلخواه رسم می‌کنیم. از رأس زاویه یک کمان پس از نقاط به دست آمده دو کمان با شعاع‌ها مساوی رسم می‌کنیم طوری که این دو کمان متقاطع باشند. اگر نقطه‌ی تقاطع این دو کمان را به رأس زاویه وصل کنیم، نیمساز زاویه به دست می‌آید.



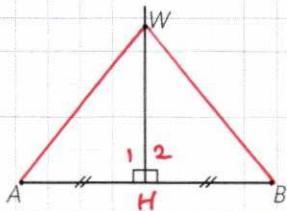
$\Delta OAH \cong \Delta OKA \Rightarrow \begin{cases} AH = AK \\ OA = OA \end{cases}$ (وتر مشترک)
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ یعنی OA نیمساز زاویه xOy است.
توجه: حالت (ض ض ض) را نیز می‌توان بکار برد.



$\begin{cases} OA = OB \\ AW = BW \\ OW = OW \end{cases} \Rightarrow \Delta OAW \cong \Delta OBW$ (ض ض ض)
 $\Rightarrow \hat{AOW} = \hat{BOW}$

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

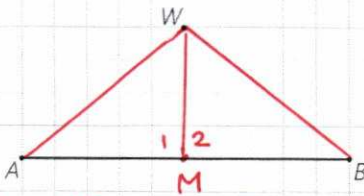
فعالیت



۱- پاره خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطه W از دوسر پاره خط AB به یک فاصله است. $\Rightarrow \triangle AWH \cong \triangle BWH \Rightarrow AW = BW$
 (من من ض) $\left. \begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ WH = WH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AWH \cong \triangle BWH \Rightarrow AW = BW$

نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره خط به یک فاصله است.



۲- پاره خط AB و نقطه W را به گونه‌ای در نظر بگیرید که نقطه W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی $WA = WB$) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(راهنمایی: از نقطه W به A و B به وسط پاره خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.)

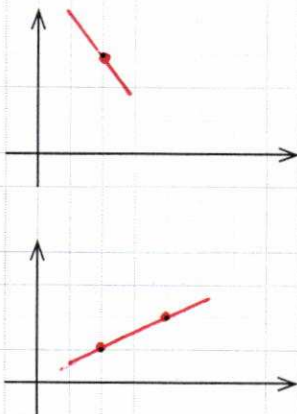
نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف پاره خط قرار دارد.

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد، از دوسر آن پاره خط به یک فاصله است. و هر نقطه که از دوسر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

فعالیت



۱- یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه مورد نظر بگذرد؟ **بی شمار**

۲- دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه مورد نظر بگذرد؟ **فقط یک خط**

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟ **دو نقطه**

تهیه کننده:

فعالیت

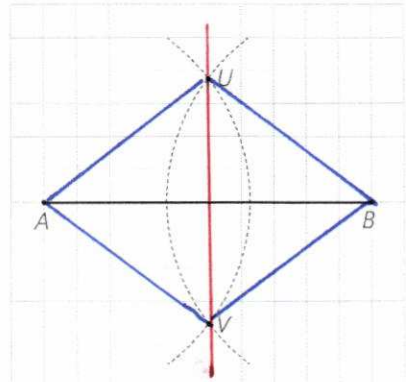
پاره خط AB را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.
۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه A و بار دیگر با همان اندازه از نقطه B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.

۲- طول پاره خط های AU و BU نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟ مساویند، زیرا اندازه شعاع دایره ثابت است.

۳- طول پاره خط های AV و BV نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟ مساویند، زیرا اندازه شعاع دایره ثابت است.

۴- آیا می توان گفت نقاط U و V روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند؟ چرا؟
بله، چون از دوسر پاره خط AB به یک فاصله هستند.

۵- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.



کاردرکلاس

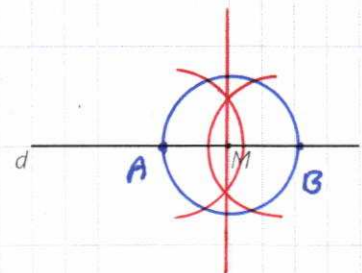
مراحل رسم عمود منصف یک پاره خط را توضیح دهید. پرگار را به اندازه بیش از نصف پاره خط AB باز کرده و از هر طرف یک کمان رسم می کنیم (از نقطه A و B) خط حاصل از اتصال نقاط تقاطع این دو کمان عمود منصف AB است.
■ رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای روی آن
خط d و نقطه M را روی آن، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

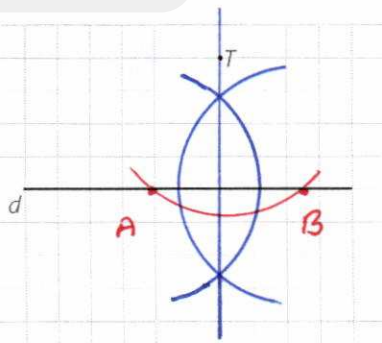
۱- به کمک پرگار چگونه می توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه ای که M وسط پاره خط AB باشد. به شعاع دلخواه کمانی به مرکز M رسم می کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند.

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.
۳- عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود... و از نقطه M بگذرد.



کاردرکلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای روی آن را توضیح دهید. ابتدا نقطه M دلخواه روی خط d را در نظر می گیریم. به شعاع دلخواه کمانی به مرکز M رسم می کنیم. حال عمود منصف پاره خط بدست آمده از محل تقاطع خط مفروض و دایره را رسم می کنیم.



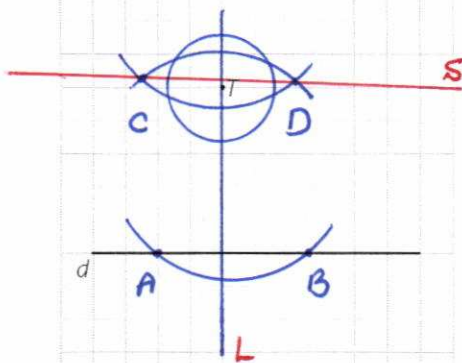
فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن خط d و نقطه T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

- ۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه T به یک فاصله باشند. به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه قطع کند.
- ۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.
- ۳- آیا عمود منصف پاره خط AB از نقطه T می‌گذرد؟ چرا؟ بله، زیرا نقطه T از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است. عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود است و از نقطه T می‌گذرد.

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید. ابتدا از نقطه T کمانی رسم می‌کنیم که خط مورد نظر را در دو نقطه A و B قطع کند. عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود است.

کارد رگلاس



$$L \perp d$$

$$L \perp s \rightarrow d \parallel s$$

فعالیت

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه T بگذرد و با خط d موازی باشد.

- ۱- خط d₁ را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d عمود باشد.
- ۲- خط d₂ را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d₁ عمود باشد.
- ۳- خط d₂ نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d₂ را مورب در نظر بگیرید.)

کارد رگلاس

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید. ابتدا از نقطه T خطی عمود بر خط داده شده رسم می‌کنیم. خط دیگری عمود بر خط عمود بر خط داده شده رسم می‌کنیم.

فعالیت

پاره خط داده شده AB در شکل مقابل را با اندازه ۴ واحد در نظر بگیرید. الف) عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطه برخورد این عمود منصف با پاره خط AB، M باشد.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره ای رسم کنید تا عمود منصف AB را در نقاط C و D قطع کند.

ب) چهارضلعی ACBD چگونه چهارضلعی ای است؟ چرا؟ مربع است

نیز قطرهای این چهارضلعی هم برهم عمودند و هم همدیگر را نصف می کنند.

کاردکلاس

طریقه رسم مربعی را که طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دهید. ابتدا عمود منصف قطر مربع را رسم می کنیم. از نقطه ی تقاطع عمود منصف و قطر (قطب و قطب) دایره ای به مرکز این نقطه و به شعاع نصف قطر رسم می کنیم. نقاط تقاطع دایره با عمود منصف را به نقاط دایره با یک خط راست وصل می کنیم.

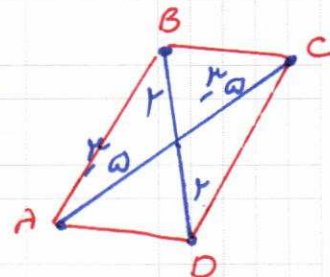


تقریر

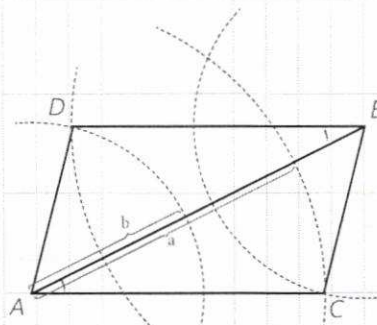
۱- می دانیم چندضلعی ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی الاضلاع است. متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می توان رسم کرد؟ دو باره خط طوری رسم می کنیم

که همدیگر را نصف کنند. با اتصال متوازی دایره ها به خطها چهارضلعی مورد نظر (متوازی الاضلاع) حاصل می شود. بی شمار

۲- می دانیم چندضلعی ای که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی متر باشد.



۳- پاره خط AB داده شده است. دهانه ی پرگار را یک بار به اندازه a و بار دیگر به اندازه b باز می کنیم و از نقطه A دو کمان می زنیم. (به طوری که مجموع a و b از اندازه AB بزرگ تر باشد) سپس کمان هایی با همان اندازه ها، این بار از نقطه B می زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می نامیم. چهارضلعی ACBD چه نوع چندضلعی ای است؟ چرا؟ (راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث های ABC و ABD و زوایای A₁ و B₁ نسبت به هم چگونه اند.)

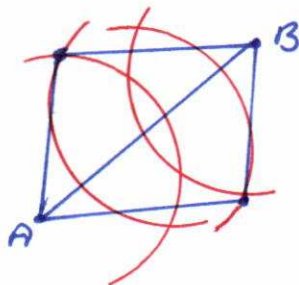


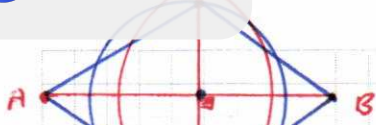
چهارضلعی

$$\left. \begin{array}{l} AC = BD \\ BC = AD \\ AB = AB \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ABD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow AC \parallel BD$$

(ض ض ض)
مستطیل ACBD متوازی است. $AC = BD$ و چون

۴- متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد. مشابه غرض ۳ ابتدا قطر را رسم می کنیم.





۵- می دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمود منصف یکدیگر باشند. ترسیم های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد. دوباره خط عمود بهمین کین به طول ۳ و دیگری به طول ۵ رسم می کنیم. چه وضعیتی بدست می آید.
ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

ما تمهید رسم متوازی الاضلاع ابتدا قطر را رسم می کنیم.

۶- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۲ واحد باشد.

ب) نقطه ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از الف) و ب) نیمساز زاویه مورد نظر را رسم کنید.

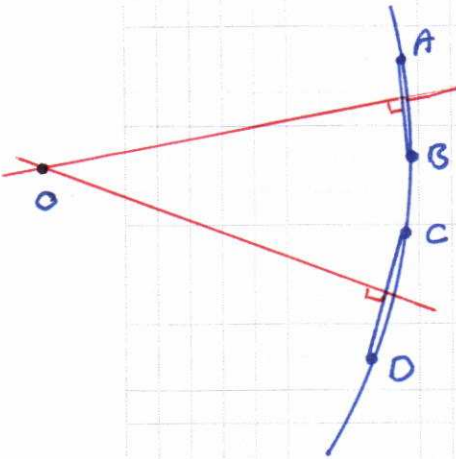
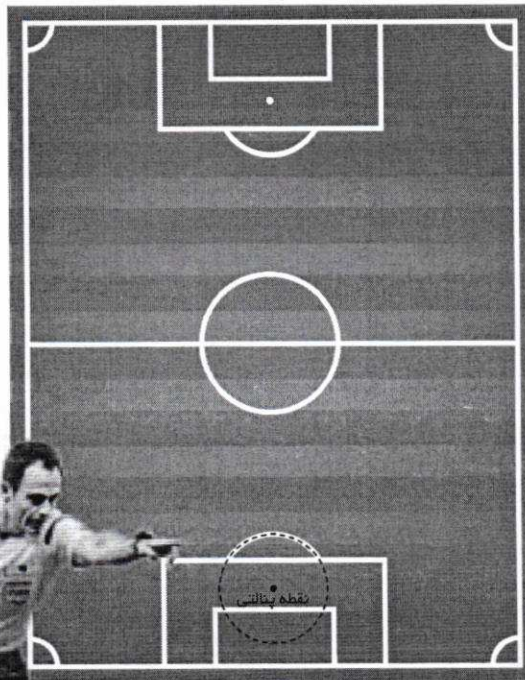
ابتدا از نقطه ای دلخواه روی ضلع OX خطی موازی AB و به فاصله ۲ سانتی متر رسم می کنیم. سپس از نقطه ای دلخواه دیگر روی ضلع OY خطی موازی AB و به فاصله ۲ سانتی متر رسم می کنیم. وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمود منصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

عمود منصف AB از نقطه O می گذرد. چون O از هر دو پاره خط AB می گذرد. مرکز دایره

نقطه پنالتی محل تقاطع دو دایره از قوس جلوی محوطه هجده قدم است.

آیا می دانستید که در زمین فوتبال نقطه پنالتی مرکز دایره ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه ای که اعلام پنالتی می کند، متوجه می شود که نقطه پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه هجده قدم، نقطه پنالتی را مشخص کند.



اگر به همین ترتیب موارد قبل را بر یک ضلع OY انجام دهیم و محل تقاطع خطوط را A و B بنا کنیم. در این صورت نقطه O (به فاصله ۲ سانتی متر از هر ضلع زاویه) و نقطه A (به فاصله ۲ سانتی متر از هر ضلع زاویه) و نقطه B (به فاصله ۲ سانتی متر از هر ضلع زاویه) بدست می آید. طبق ویژگی نیمه از زاویه نقطه A و B از هر ضلع زاویه به یک فاصله اند. پس امتداد پاره خط AB عمود بر آنکه از نقطه O می گذرد، نیمه از زاویه YOX می باشد.

استدلال



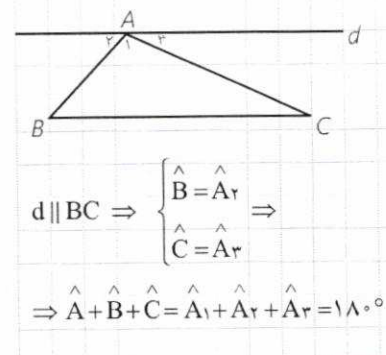
شیوه درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعه انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری مواقع، نتیجه گیری های غلط، تیره شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در پی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد بینجامد. ممکن است فردی با استدلال هایی این گونه، همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند:

- من در اولین امتحانم موفق نشدم، پس در امتحان های بعدی نیز موفق نخواهم شد.
- تیم مورد علاقه من از ابتدای فصل در تمام بازی هایش شکست خورده است، پس در بازی آینده نیز شکست خواهد خورد.

استقرا و استنتاج

در سال های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال، که با آن روبه رو شدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه ای کلی در آن موضوع گرفته می شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می رسیم». البته با چنین استدلالی نمی توان همواره به درستی نتیجه گرفته شده مطمئن بود. به طور مثال اگر فردی با مشاهده اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه گیری کند که همه افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از استدلال استقرایی استفاده کرده است.

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید، براساس نتیجه گیری منطقی بر پایه واقعیت هایی است که درستی آنها را پذیرفته ایم و به آن استدلال استنتاجی گفته می شود. به طور مثال با دانستن رابطه بین خطوط موازی و مورب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه کنید که استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می توان انجام داد.



تهیه کننده:

به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئله زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هریک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پژمان: در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پیمان: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم.

مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث ABD و BCD برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با 360° .

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

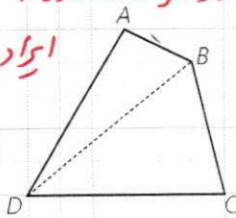
آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئله قبل برابر 360° است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

– نوع استدلال ارائه‌شده توسط هر کدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

مثال: می‌دانیم که هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

حال با کامل کردن استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که سه عمود منصف اضلاع هر مثلث هم‌رسانند (در یک نقطه به هم می‌رسند).

در استدلال پژمان فقط چهارضلعی‌ها خاص در نظر گرفته شده است. بنابراین ایراد دارد.



استدلال پیمان از کل به جزء است و کاملاً درست می‌باشد.

پژمان: استدلال استقرایی (از جزء به کل)
پیمان: استدلال استنتاجی (از کل به جزء)

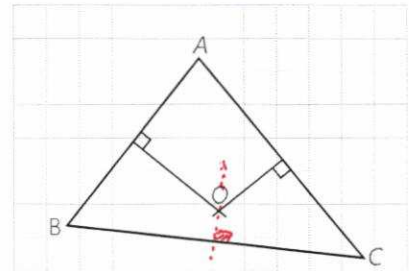
استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می گیریم. چون پاره خط های AB و AC متقاطع اند، عمود منصف های آنها نیز در نقطه ای مانند O متقاطع اند.

۱- نقطه O روی عمود منصف پاره خط AC است؛ بنابراین $OA = OC$

۲- نقطه O روی عمود منصف پاره خط AB است؛ بنابراین $OA = OB$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم : $OB = OC$... بنابراین نقطه O روی عمود منصف پاره خط BC قرار دارد. در نتیجه نقطه O محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث ABC است.

مثال : استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث هم رس اند.



استدلال : مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلی مانند DEF به وجود آید.

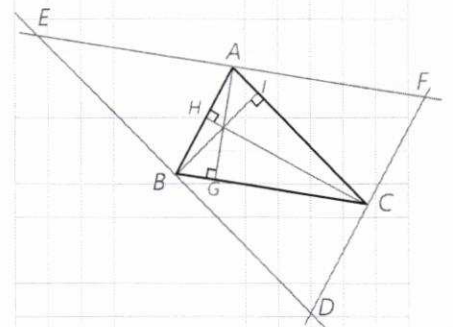
چهار ضلعی ABCF چه نوع چهار ضلعی ای است؟ چرا؟ **موازی الاضلاع، اضلاع مقابل موازی اند.**

بنابراین $BC = AF$

— چهار ضلعی ACBE چه نوع چهار ضلعی ای است؟ چرا؟ **موازی الاضلاع، اضلاع مقابل موازی اند.**

بنابراین $BC = AE$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم : $AF = AE$... بنابراین نقطه A وسط پاره خط EF است.



$$\left. \begin{array}{l} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{array} \right\} \Rightarrow AG \perp EF$$

لذا خط AG **عمود منصف** پاره خط EF است.

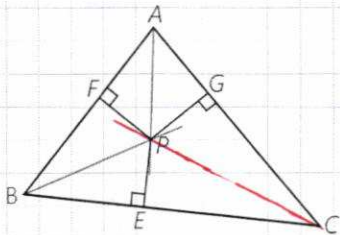
به طور مشابه می توان نشان داد :

پاره خط BI **عمود منصف** پاره خط DE است.

پاره خط CH **عمود منصف** پاره خط DF است.

بنابراین، ارتفاع های مثلث ABC، روی عمود منصف های اضلاع مثلث DEF هستند و در نتیجه هم رسند.

مثال : می دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه های داخلی هر مثلث هم رس اند.



استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه ای مانند P قطع می کنند. از نقطه P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می کنیم.

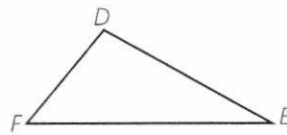
۱- نقطه P روی نیمساز زاویه A است؛ بنابراین $PF = PG$...

۲- نقطه P روی نیمساز زاویه B است؛ بنابراین $PF = PE$...

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم: $PG = PE$. بنابراین نقطه P روی نیمساز زاویه C است. در نتیجه نقطه P محل برخورد نیمسازهای زاویه ها مثلث ABC است.

فعالیت

به مثلث های زیر دقت کنید. در سطر اول جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع	EF	DE	DF
زاویه ها	D	F	E

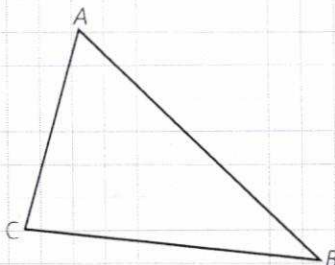


اضلاع	GH	HI	GI
زاویه ها	I	G	H

چه رابطه ای بین هر ضلع و زاویه زیر آن وجود دارد؟
با توجه به این رابطه درباره یک مثلث دلخواه چه حدسی می توان زد؟
برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟
آیا با این استدلال می توان مطمئن بود که حدس مورد نظر درست است؟
خیر، نمی توان از نتیجه بدست آمده مطمئن بود.
زاویه ی بزرگتر روبرو به ضلع بزرگتر است.
در هر مثلث زاویه بزرگتر، روبرو به ضلع بزرگتر است.

مسئله: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،

زاویه روبرو به ضلع بزرگتر، بزرگ تر است از زاویه روبرو به ضلع کوچک تر.



استدلال: برای واضح شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می کنیم. آیا می توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثلثی می کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.

فرض: $AB > AC$
حکم: $\hat{C} > \hat{B}$

یاد آوری

۱- در مثلث متساوی الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

۲- اندازه هر زاویه خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

می‌دانیم طبق فرض $AB > AC$ است؛ لذا می‌توانیم نقطه D را روی AB جایی انتخاب کنیم که $AC = AD$

★ اندازه زاویه‌های C و C_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C} \boxed{=} \hat{C}_1$

مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟ **متساوی الساقین**

★ ★ اندازه زاویه‌های C_1 و D_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1 \boxed{=} \hat{D}_1$

زاویه D_1 چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟ **خارجی**

★ ★ ★ اندازه زاویه‌های D_1 و B نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{D}_1 \boxed{>} \hat{B}$

از ★ و ★ و ★ و ★ چه نتیجه‌ای درباره اندازه زاویه‌های B و C می‌توان گرفت؟

$\hat{C} \boxed{>} \hat{B}$

همان‌طور که مشاهده کردید در مثلثی مانند $\triangle ABC$ فرض کردیم که ضلع $AB > AC$ است و نشان دادیم: زاویه روبه‌رو به $AC >$ زاویه روبه‌رو به AB است.

چرا می‌توان این موضوع را درباره تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟

زیر این اثبات مبتنی بر واقعیت‌هایی است که درستی آنها را قبول داریم، و باید به این واقعیت (استدلال استنتاجی) به دست می‌آید، برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئله قبل با استدلال استنتاجی به دست می‌آید، قضیه نامیده می‌شود.

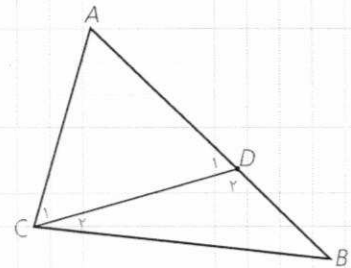
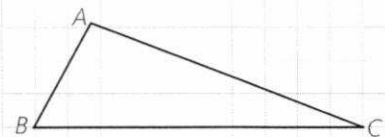
قضیه ۱: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،

زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

فرض: $AB < AC$

حکم: $\hat{C} < \hat{B}$

– بار دیگر به آنچه انجام شد، دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان این اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.



بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحل توسط علاقه‌مندان به ریاضی به دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

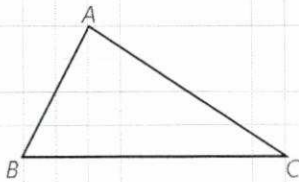
اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

به طور مثال عکس قضیه ۱ به صورت زیر است:

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

فرض: $\hat{C} < \hat{B}$
حکم: $AB < AC$

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده است.



مثال:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرهای یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB = AC$

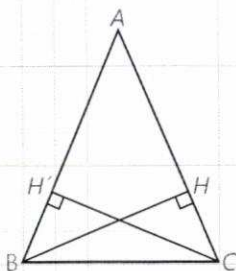
حکم: $BH = CH'$

عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

در واقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC و ارتفاع بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.



گزاره یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزاره ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزاره مرکب است.

جمله‌های زیر مثال‌هایی از گزاره است :
- مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه است.
- $3 < 2$

جمله‌های زیر گزاره نیست :
- آیا فردا هوا بارانی است؟
- چه هوای خوبی!
- کتابت را مطالعه کن.



نقیض یک گزاره : همان‌طور که گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»

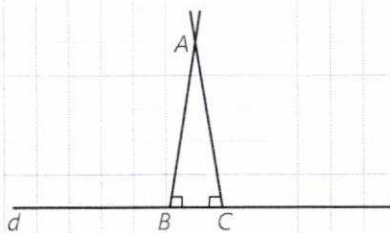
نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»
ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»

نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.»
نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی اش 360° است.»

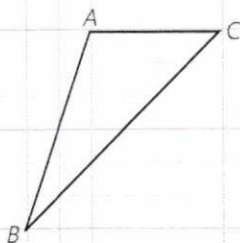
در برخی گزاره‌ها به جای اینکه درباره چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران بیارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، گزاره‌های شرطی می‌گویند.

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. بدین صورت که به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.



مثال: از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.
فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.
حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.
استدلال: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.
حال می‌خواهیم عکس قضیه ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.



برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.

فرض: $\hat{A} > \hat{B}$
حکم: $BC > AC$

اثبات: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم باشد. بنابراین باید $BC < AC$ یا $BC = AC$.

هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اول: اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیه ۱ باید $\hat{A} < \hat{B}$ ، که با فرض در تناقض است.

حالت دوم: اگر $BC = AC$ باشد، $\triangle ABC$ یک مثلث متساوی‌الساقین خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیرممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.

قضیه‌های دوشرطی

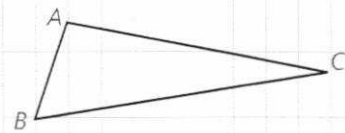
همان گونه که دیدیم، قضیه ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که :

اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر، و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.
قضیه‌های دوشرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :
فرض کنیم $\triangle ABC$ یک مثلث باشد

$$BC > AB \Leftrightarrow \hat{A} < \hat{C}$$

مثال : در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.



مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به‌صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است :

(الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

(ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد

تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

(پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد

تمام چهارضلعی‌های محدب)

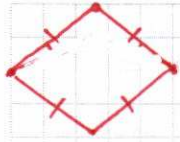
(ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی

در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که (۲-) یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائه

تهیه کننده :



همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. درباره درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟ **نادرست. چهارضلعی ممکن است لزومی نداشته باشد.**

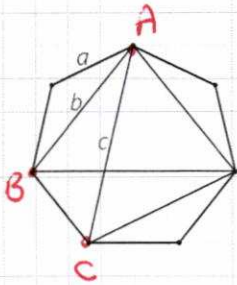
اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیابیم، درباره درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در موارد (پ) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟ **ممکن است درست باشد. خیر.**

آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستی آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (پ) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش حکم کلی (پ) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم». درباره گزینه (ت) چه می‌توان گفت؟ **مثال نقض دارد. اگر $n=61$ ارتفاع ۲**

عدد اول نیست $61 \times 63 = 61(61+1+1) = 61 + 61 + 61 = 61$

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان درباره درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

کاردکلاس



۱- در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصله هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی الساقین، به دست می‌آید».

خیر: مثلث ABC متساوی الساقین نیست.

۲- آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

$A = \{1, 2\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

$A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq A$

الف) برای هر دو مجموعه A و B ، یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ **خیر**

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

خیر
مثبت اول $a=8, h=3 \Rightarrow S_1 = \frac{3 \times 8}{2} = 12$
مثبت دوم $a=12, h=2 \Rightarrow S_2 = \frac{2 \times 12}{2} = 12$

ولی دو مثلث هم‌نهشت نیستند.

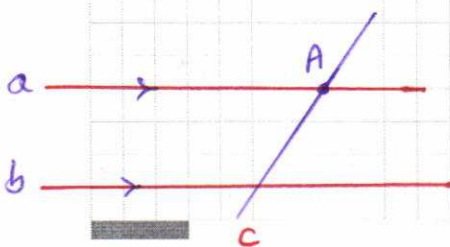


تمرین

۱- می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند. **فرض کنیم که خط c خط b را قطع نکند.**

پس $c \parallel b$ و این به این معنی است که هر نقطه‌ای از A دو خط موازی b رسم شده است و این ممکن نیست. لذا خط c به b

خط b را قطع کند.



فرض کنیم $\hat{B} = \hat{C}$ لذا باید

$AB = AC$ باشد و این مخالف فرضی است.

۲- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $B \neq C$.

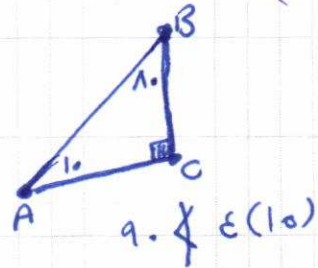
۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $180^\circ \times (n-2)$.

(۲) الف)



۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع نیست.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع است.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.

مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° نیست.

۶- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهاش عمود منصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

(۳) الف) n ضلعی محدب اگر n راس

معنی را A بنامیم از این

راس $n-3$ قطر

می‌گذرد (چرا؟) ولذا

$(n-3) + 1 = n-2$ مثلث

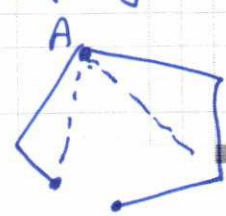
متناظر ای را می‌سازد. مجموع زاویه

های داخلی این مثلث‌ها

معنی $(n-2) \times 180^\circ$

برابر مجموع زاویه‌های داخلی

n ضلعی محدب است.



قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن



قضیه تالس و تشابه شکل‌های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول‌ها و فاصله‌های غیر قابل دسترس دارد. محاسبه ارتفاع بلندی‌ها به کمک سایه آنها نمونه‌ای از این کاربردهاست.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

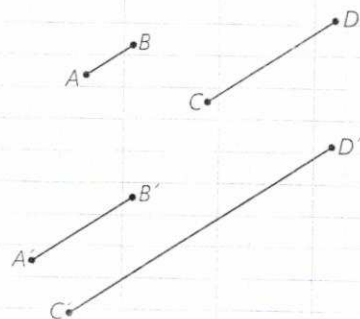
نسبت و تناسب در هندسه

نسبت و تناسب در هندسه

با نسبت و تناسب آشنایی دارید و ویژگی اصلی آن، یعنی برابری حاصل ضرب طرفین و وسطین را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانید که اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (ب، د $\neq 0$) آنگاه $ad = bc$ و برعکس؛ از تساوی $xy = zt$ با شرط $t, y \neq 0$ تناسب $\frac{x}{t} = \frac{z}{y}$ نتیجه می‌شود. نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه هم به همین صورت تعریف می‌شود به شرطی که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری بیان شده باشند؛ مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول ۲cm و CD پاره‌خطی به طول ۵cm باشد، $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{5}$. حال فرض کنید $A'B' = 4cm$ و $C'D' = 10cm$ در این صورت

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

و بنابراین یک تناسب به صورت $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ درست می‌شود. بدیهی است که اگر نسبت AB به CD، $\frac{2}{5}$ باشد، نسبت CD به AB، $\frac{5}{2}$ است.

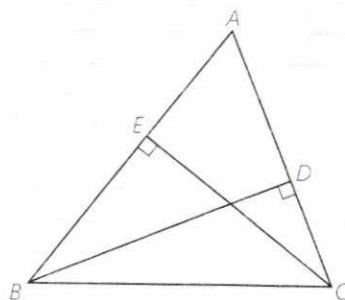


۱ فعالیت

مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با در نظر گرفتن قاعده AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظر گرفتن قاعده AB بنویسید.

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AC \times BD$$

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AB \times CE$$



عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

بنابراین $AC \times BD = AB \times CE$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

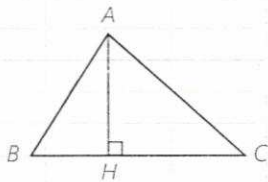
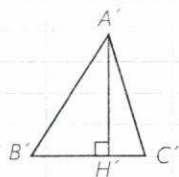
پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اید؟

تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD} \quad \text{و} \quad \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

با توجه به فعالیت بالا، جای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه های هر دو ضلع، با عکس نسبت ^ع ~~آن~~ ... وارد
بر آنها برابر است.



۲ فعالیت

در شکل مقابل ارتفاع های AH و A'H' در دو مثلث ABC و A'B'C' هم اندازه اند (AH = A'H')
با پرکردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجه زیر را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} \times AH \times BC$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \times A'H' \times B'C'$$

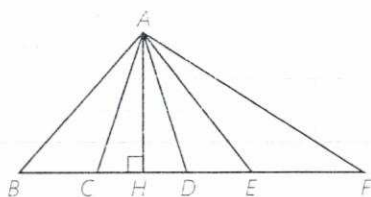
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \times AH \times BC}{\frac{1}{2} \times A'H' \times B'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۱ نتیجه

هرگاه اندازه ارتفاع های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده هایی است که این ارتفاع ها بر آنها وارد شده است.

کاردکلاس

در شکل مقابل مثلث های ABC، ACD، ADE، AEF را که در رأس A مشترک اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A همه این مثلث ها کدام پاره خط است؟



با توجه به نتیجه فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{BC}{CD}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \frac{CD}{EF}$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{CE}{BF}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \times AH \times BC}{\frac{1}{2} \times AH \times CD} = \frac{BC}{CD}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \times AH \times CD}{\frac{1}{2} \times AH \times EF} = \frac{CD}{EF}$$

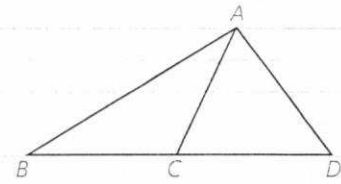
$$\frac{\frac{1}{2} \times AH \times CE}{\frac{1}{2} \times AH \times BF} = \frac{CE}{BF}$$

$$\frac{BC}{CD}, \frac{CD}{EF}, \frac{CE}{BF}$$

نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

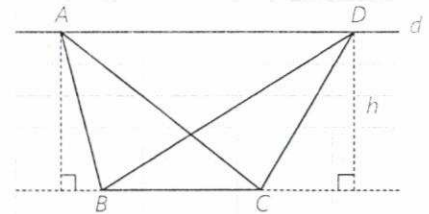
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD} = \frac{BC}{CD}$$



کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعده BC در مثلث‌های ABC و DBC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟

$$\frac{1}{2} h \times a$$



نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعده مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آنها، روی یک خط موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC ، DBC هم‌مساحت‌اند.

ویژگی‌های تناسب

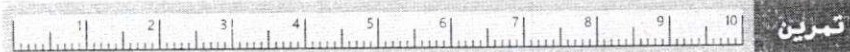
به کمک اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است (اثبات درستی این ویژگی‌ها را در مجله ریاضی انتهای فصل می‌توانید ببینید)

۱	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow 3 \times 10 = 5 \times 6$	b و $d \neq 0$	(طرفین وسطین کردن)
۲	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$	a و $b \neq 0$ و c و $d \neq 0$	(معکوس کردن طرفین تناسب)
۳	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$	a و $b \neq 0$ و c و $d \neq 0$	(تعویض جای طرفین یا وسطین)
۴	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$	b و $d \neq 0$	(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)
۵	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$	$\frac{30}{21} = \frac{20}{14} \Rightarrow \frac{9}{21} = \frac{6}{14}$	b و $d \neq 0$	(تفصیل نسبت در صورت یا مخرج)
۶	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{4}{6} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}$	b و $d \neq 0$	

تهیه کننده:

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$		
$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2+4+6+8}{3+6+9+12} = \frac{20}{30}$	$b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, \dots, b_n \neq 0$	(تعمیم ویژگی ۶)

تعریف واسطه (میانگین) هندسی: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ با طرفین وسطین کردن تناسب، نتیجه می‌شود: $b^2 = ac$. در این صورت b را واسطه هندسی a و c می‌نامیم. مثلاً اگر دو پاره خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطه هندسی بین آنهاست (چرا؟)



$$\frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{r}{5} \rightarrow x+y+z = \frac{r \cdot 9}{5}$$

۱- اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{r}{5}$ حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

$$x^2 = 10 \times 1 \rightarrow x^2 = 10$$

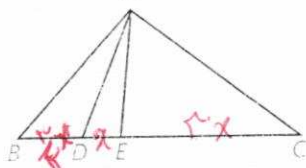
۲- طول پاره خطی را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی متر است.

$$\frac{2\sqrt{10} \times 4}{4} = 2\sqrt{10} = 5$$

$$4 \times h = 2\sqrt{10} \rightarrow h = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$8 \times h' = 2\sqrt{10} \rightarrow h' = \frac{1}{4}\sqrt{10}$$

۳- طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ سانتی متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.



۴- در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر

مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{BC}{DE}$ و $\frac{BD}{DE}$ را به دست آورید.

$$S_{ACE} = 3S_{ADE} \rightarrow \frac{1}{2}AH \times CE = 3 \times \frac{1}{2}AH \times DE \rightarrow CE = 3DE$$

$$S_{ACE} = 2S_{ADB} \rightarrow \frac{1}{2}AH \times CE = 2 \times \frac{1}{2}AH \times BD \rightarrow CE = 2BD$$

۵- در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، 16 cm^2 است. اگر $BD = 6 \text{ cm}$

باشد، فاصله نقطه C از BD را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \times BC = 16$$

$$S_{BDC} = \frac{1}{2}AH \times BD = 16 \rightarrow \frac{1}{2}AH \times 6 = 16$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{\frac{16}{\frac{1}{2}AH}}{\frac{16}{\frac{1}{2}AH}} = \frac{16}{16} = 1$$

$$\frac{DE}{BD} = \frac{\frac{16}{\frac{1}{2}AH}}{\frac{16}{\frac{1}{2}AH}} = \frac{16}{16} = 1$$

از سه ضلع

قضیه تالس

در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند. قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟ با توجه به نتیجه ۱ از درس اول، تناسب‌های زیر را کامل کنید:

$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}} = \frac{AE}{EC}, \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}} = \frac{AD}{DB}$$

مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحت‌اند (چرا؟) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا تناسب زیر را نتیجه‌گیری کنید:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

بنابراین قضیه زیر را اثبات کردیم:

قضیه تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه‌رو داشته باشیم $DE \parallel BC$ ، آنگاه:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

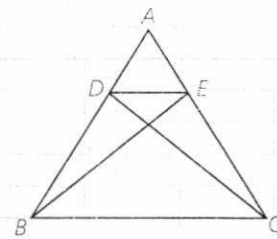
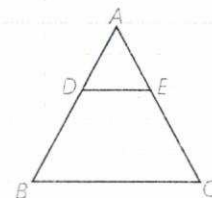
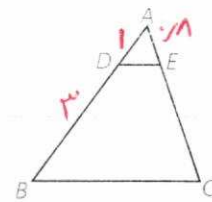
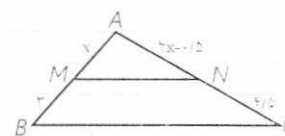
کاردرکلاس

۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $AD=1$ و $DB=3$ و $AE=8$. به کمک قضیه

$$\frac{1}{3} = \frac{8}{EC} \rightarrow EC = 24, AC = 25$$

۲- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ؛ به کمک قضیه تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به دست آورید.

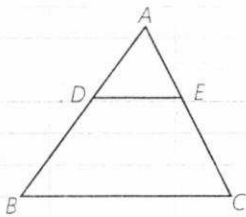
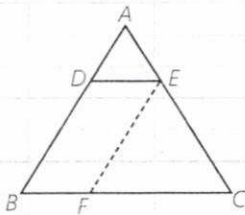
$$\frac{x}{15} = \frac{2x-10}{15} \rightarrow 15x = 2x-10 \rightarrow 13x = 150 \rightarrow x = \frac{150}{13}$$



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



۳- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ تناسب قضیه تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطه $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ و با تفذیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطه $\frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

فعالیت ۱

در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ، از نقطه E، پاره خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم. چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟
با توجه به این موضوع داریم:

$$DE = BF, \quad DB = EF$$

در مثلث ABC و با در نظر گرفتن $DE \parallel BC$ ، قضیه تالس را بنویسید.

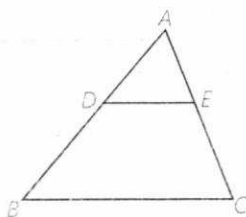
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (۱)$$

در مثلث CAB با توجه به $EF \parallel AB$ ، قضیه تالس را بنویسید.

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و جای گذاری DE به جای BF خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



تعمیم قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

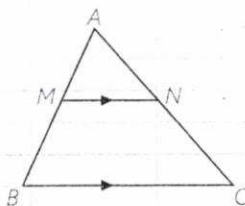
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

کار در کلاس

در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$ ، طبق قضیه تالس داریم: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیه تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \parallel BC$$

تهیه کننده:



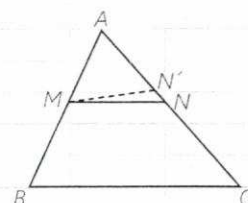
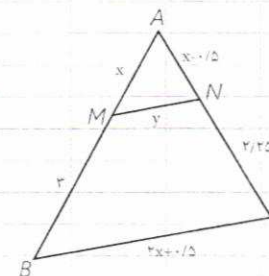
عکس قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظراً متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

اثبات با پرهان خلف است. در شکل می‌دانیم:

فرض کنیم بر خلاف حکم $MN \parallel BC$ ، پس از نقطه M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم. حال با توجه به قضیه تالس داریم:

$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

از مقایسه این تناسب، با فرض مسئله نتیجه می‌شود $\frac{AN'}{AC} = \frac{AN}{AC}$ و در نتیجه: $AN' = AN$ و بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.



مثال: در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است، مقادیر x و y را به دست آورید.

حل: با توجه به قضیه تالس و تعمیم آن داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{x-0.5}{2/25} \Rightarrow$$

$$2/25x = 3x - 1/5 \Rightarrow 0.08x = 1/5 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{y}{4/5} \Rightarrow y = 1/8$$



تمرین

۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$: با توجه به اندازه پاره‌خط‌ها، طول‌های AB و DE را به دست آورید.

$$\frac{2}{DB} = \frac{1}{10} \rightarrow DB = 20$$

$$\frac{2}{20} = \frac{1}{10} = \frac{DB}{AB} \rightarrow DB = \frac{AB}{5} \rightarrow AB = 4 + 20 = 24$$

۲- در شکل مقابل، اگر $MN \parallel BC$: مقدار x را به دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+2} \rightarrow x+2=2x \rightarrow x=2$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2/5}{BC} \rightarrow BC = 1/5$$

۳- در شکل مقابل $MN \parallel BC$: مقادیر x و y را به دست آورید.

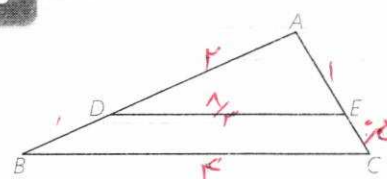
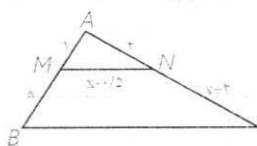
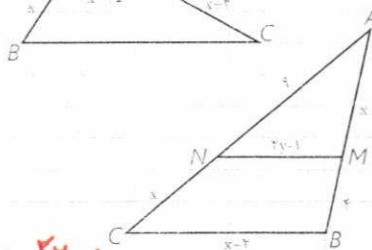
$$\frac{9}{x} = \frac{x}{4} \rightarrow x = 6$$

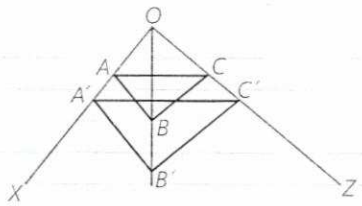
$$\frac{9}{10} = \frac{2y-1}{8}$$

$$72 = 20y - 10$$

$$82 = 20y$$

$$y = \frac{41}{10} = 4.1$$

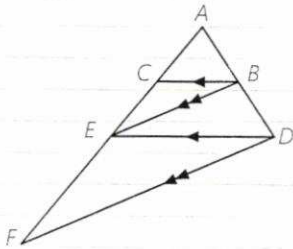




۴- در شکل مقابل می دانیم $BC \parallel B'C'$ و $AB \parallel A'B'$ با استفاده از قضیه تالس و

عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OC}{OC'} \rightarrow AC \parallel A'C'$$



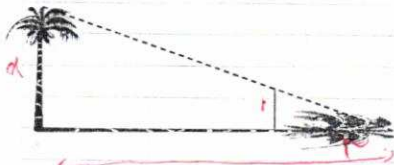
۵- در شکل مقابل می دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ ، به کمک قضیه تالس در مثلث های

ADF و ADE و مقایسه تناسب ها با یکدیگر، ثابت کنید: $AE^2 = AC \cdot AF$ (به عبارت

دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \rightarrow AE^2 = AC \cdot AF$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF}$$



$$\frac{3}{4} = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{4}{3} = 1.33$$

۶- یکی از کاربردهای قضیه تالس از زمان های دور تاکنون، محاسبه فاصله های

غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع

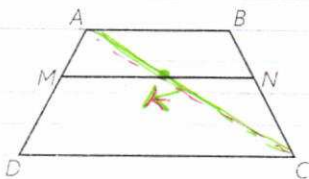
یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایه درخت را روی زمین اندازه می گیریم؛ سپس

یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می گویند، طوری به صورت عمودی جابه جا

می کنیم که سایه آن روی امتداد سایه درخت قرار گیرد و نوک سایه شاخص نیز بر نوک

سایه درخت منطبق شود؛ به طور مثال اگر طول سایه درخت ۶ متر، طول سایه شاخص

۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟



۷- در دوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید:

(قضیه تالس در دوزنقه)

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

(راهنمایی: یکی از قطر ها را رسم کنید.)

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KE} \rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AK}{KE}$$



۸- ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو

مربع ۹×۹ تفکیک می شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصب

شده است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد ۱۸ سانتی متر و در فاصله دو متری تور،

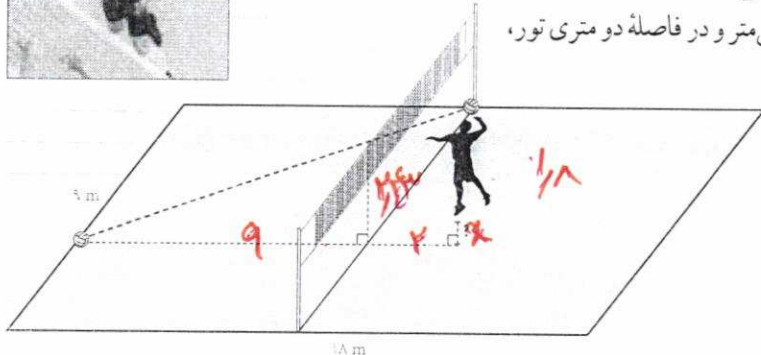
به هوا می پرد و توبی را که در ارتفاع ۳ سانتی متری

بالای سرش است با ضربه آتش مماس بر تور وسط

روانه زمین حریف می کند و توب روی خط انتهای

زمین حریف می نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن

چقدر به هوا پریده است؟



$$\frac{9}{11} = \frac{2.43}{1.8 + x} \rightarrow 14.22 + 9x = 24.173$$

$$9x = 10.053 \rightarrow x = 1.117$$

تشابه مثلث‌ها

در سال گذشته با مفهوم تشابه و چندضلعی‌های متشابه آشنا شدید. در اینجا می‌خواهیم درباره تشابه مثلث‌ها، بیشتر بدانیم. با توجه به تعریف تشابه چندضلعی‌ها، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ اگر و فقط اگر زوایای آنها هم‌اندازه و اندازه‌های اضلاع آنها متناسب باشند:

$$\angle A = \angle A'$$

$$\angle B = \angle B', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Leftrightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

$$\angle C = \angle C'$$

نسبت اندازه‌های اضلاع نظیر هم در دو مثلث را نسبت تشابه می‌گوییم. مثلاً اگر $\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$ باشد و اندازه اضلاع مثلث $A'B'C'$ نظیر به نظیر نصف اضلاع مثلث ABC باشند، گوییم مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ ، متشابه است.

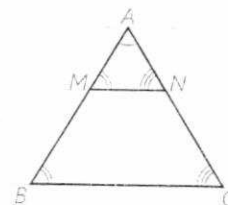
سؤال: مثلث ABC با چه نسبت تشابهی، با مثلث $A'B'C'$ متشابه است؟

۲

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$



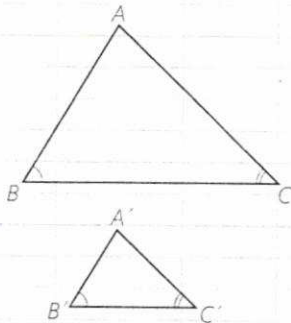
- ۱- زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟
- ۲- با توجه به تعمیم قضیه تالس تناسب زیر را کامل کنید:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

- ۳- از (۱) و (۲) در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC$$

حال با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، می‌توانیم سه قضیه اصلی را که حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان می‌کند (مانند حالت‌های هم‌نهستی مثلث‌ها) اثبات کنیم. راهبرد کلی ما برای اثبات این سه قضیه، این است که روی اضلاع AB و AC از مثلث بزرگ‌تر، AM و AN را هم‌اندازه دو ضلع نظیر A'B' و A'C' جدا، و ثابت کنیم MN موازی BC است.



قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با A'B' و A'C' جدا می‌کنیم.

$$1- \angle B = \angle B' \text{ و } \angle A + \angle B + \angle C = \angle A' + \angle B' + \angle C' = 180^\circ$$

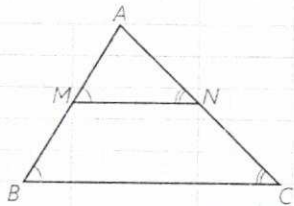
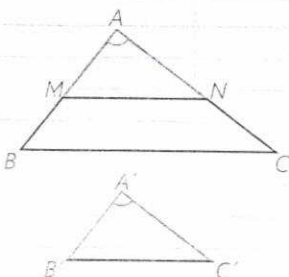
$$\text{و } \angle A = \angle A' \text{ بنابراین } \angle C = \angle C'$$

$$2- AM = A'B' \text{ و } AN = A'C' \text{ و } \angle A = \angle A' \Rightarrow \Delta AMN \cong \Delta A'B'C' \text{ (ض.ض.)}$$

$$\Rightarrow MN = B'C' \text{ و } \angle M = \angle B' \text{ و } \angle N = \angle C'$$

$$3- \angle M = \angle B' \text{ و } \angle B = \angle B' \Rightarrow \angle M = \angle B \Rightarrow MN \parallel BC$$

$$4- \text{طبق قضیه اساسی تشابه، } \Delta AMN \sim \Delta ABC \text{ و در نتیجه: } \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$



قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\angle A = \angle A', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با A'B' و A'C' جدا می‌کنیم.

۱- مثلث‌های AMN و A'B'C' به چه حالتی هم‌نهست‌اند؟ اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

۲- در فرض مسئله به جای A'B' و A'C'، پاره‌خط‌های هم‌اندازه با آنها را قرار دهید. حال بگویید چرا $MN \parallel BC$ ؟

۳- با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها و نتیجه قسمت (۱) درستی حکم را ثابت کنید.

چون $B \parallel MN$ پس $\Delta AMN \sim \Delta A'B'C'$ و چون $\Delta AMN \sim \Delta A'B'C'$ پس $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه A'B' و A'C' جدا کنید.

۱- در فرض به جای A'B' و A'C' مساوی‌های آنها را جایگزین کنید و سپس

بگویید چرا $MN \parallel BC$ ؟
 $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \parallel BC$

۲- از قضیه اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟
 $\Delta AMN \sim \Delta ABC$

۳- تعمیم قضیه تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسه این تناسب‌ها با

تناسب‌های فرض، نتیجه بگیرید:
 $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{MN}{BC}$
 $MN = B'C'$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

۴- مثلث‌های A'B'C' و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از اینجا درستی حکم را ثابت کنید.

$$\Delta AMN \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

مثال: مطابق شکل روبه‌رو، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می‌خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر، عمود بر آن، آن را به‌طور موقت سرپا نگه داریم. پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله‌ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟
حل: اگر تیر برق را با یک پاره‌خط و تیر فلزی نگه‌دارنده را نیز با پاره‌خطی دیگر مشخص کنیم، شکل روبه‌رو را دوباره رسم می‌کنیم.
حال در دو مثلث ABC و BDE داریم:

$$\angle B = \angle B, \angle C = \angle E = 90^\circ \Rightarrow$$

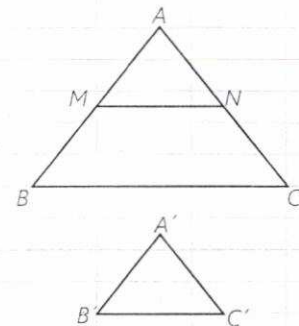
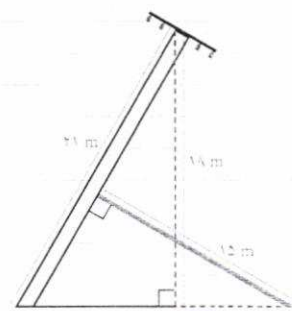
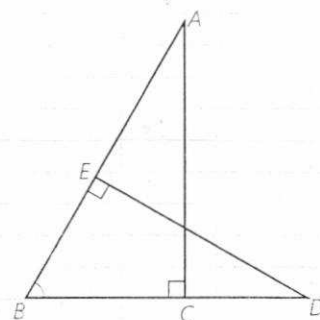
$$\Delta ABC \sim \Delta BDE \Rightarrow$$

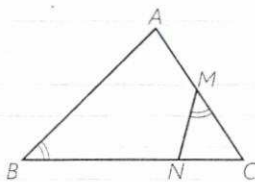
(در نوشتن نسبت تشابه، توجه کنید که اضلاع روبه‌رو به زوایای مساوی در دو مثلث را در یک نسبت بر هم تقسیم کنید.)

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{15}{18} = \frac{BD}{21} \Rightarrow BD = \frac{21 \times 15}{18} = 17.5 \text{ m}$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصله ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.

با استفاده از این سه قضیه (به خصوص قضیه ۱) می‌توانیم تشابه مثلث‌های متشابه را اثبات کنیم و از آن طریق مسئله‌های زیادی را حل کنیم.





مثال: در مثلث ABC، از نقطه M وسط AC، زاویه NMC را مساوی زاویه B جدا کرده ایم. اگر $NC=2$ و $NB=4$ ، طول AC را به دست آورید.

حل: با کمی دقت مشاهده می کنید که مثلث های MNC و ABC دو زاویه هم اندازه دارند و در نتیجه متشابه اند.

$$\angle M = \angle B, \angle C = \angle C \Rightarrow \triangle MNC \sim \triangle ABC$$

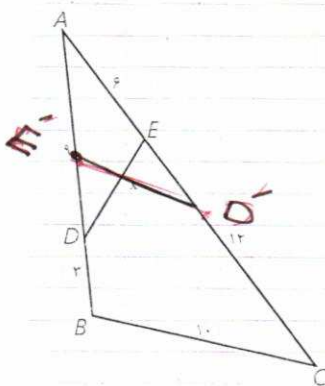
از آنجا با نوشتن نسبت تشابه داریم:

$$\frac{MC}{BC} = \frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AC}$$

و به جای MC، $\frac{AC}{4}$ را قرار می دهیم:

$$\frac{AC}{4BC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow AC^2 = 4NC \cdot BC = 4NC(NC + NB) \Rightarrow AC^2 =$$

$$4 \times 2(2 + 4) = 24 \Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$$



مثال: در شکل مقابل اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است. اندازه x را به دست آورید.

حل: به کمک عددهای داده شده، بدیهی است که:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

و با توجه به زاویه مشترک A مثلث های ADE و ABC متشابه اند. نسبت تشابه را بنویسید و x را به دست آورید.

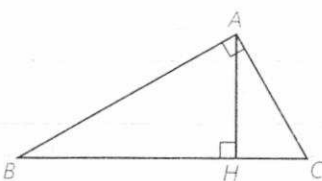
$$\frac{9}{12} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 7.5$$

سؤال: در شکل، روی AC، AD' را هم اندازه AD و روی AB، AE' را هم اندازه AE جدا کنید. چرا $D'E' \parallel BC$ ؟

$$\frac{AD'}{AC} = \frac{AE'}{AB} \Rightarrow D'E' \parallel BC$$

اثبات قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه

فعالیت ۱



۱- در مثلث قائم الزاویه ABC ($A=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می کنیم. آیا می توانید دو زاویه هم اندازه را در دو مثلث ABC و ABH نام ببرید؟ $\hat{H} = \hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{B} = \hat{B}$ به همین ترتیب دو زاویه هم اندازه از دو مثلث ABC و ACH نام ببرید. $\hat{C} = \hat{C}$ و $\hat{A} = \hat{H}$ می توانیم بگوییم:

$$\triangle ABH \sim \triangle ABC, \triangle ACH \sim \triangle ABC$$

چرا مثلث های ABH و ACH، خودشان با هم متشابه اند؟ دو مثلث متشابه با یکدیگر مثلث خود را هم متشابه اند

نتیجه

در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۲- نسبت تشابه دو مثلث ABH و ABC را بنویسید :

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AB} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow AB^2 = BH \times BC$$

۳- نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABC را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AC واسطه هندسی BC و CH است.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{AH}{AB} \rightarrow AC^2 = BC \times CH$$

۴- نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AH واسطه هندسی بین BH و CH است.

$$\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH} = \frac{AB}{AC} \rightarrow AH^2 = BH \times CH$$

۵- از روابط ۲ و ۳ داریم :

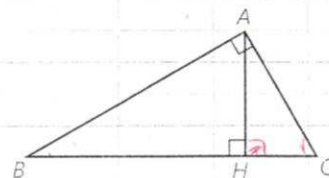
(قضیه فیثاغورس)

$$AB^2 + AC^2 = BC \times BH + BC \times CH = BC(\dots + \dots) = BC \cdot BC = BC^2$$

نتیجه

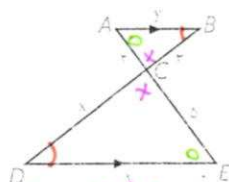
در مثلث قائم الزاویه ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

- ۱) $AB^2 = BC \cdot BH$
- ۲) $AC^2 = BC \cdot CH$
- ۳) $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- ۴) $AH^2 = BH \cdot CH$
- ۵) $AH \times BC = AB \times AC$



تمرین

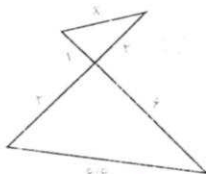
۱- در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x ، y را مشخص کنید :



برابری دوازده

$$\frac{2}{5} = \frac{3}{x}$$

$$x = 7,5$$

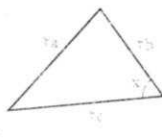
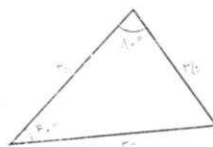


برابری یک دوازده
تناسب اضلاع
همان دوازده

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{4} = \frac{x}{7,4}$$

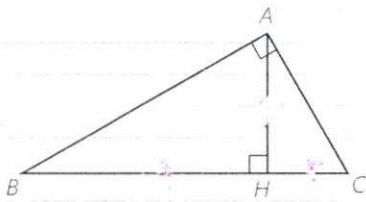
$$3x = 7,4$$

$$x = 2,4$$



تناسب اضلاع

۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ($A=90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده،

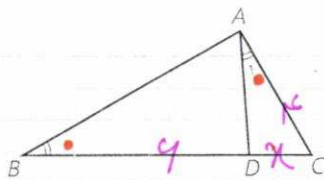


مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

۱) $BH=9$, $CH=4$, $AH=?$, $AB=?$, $AC=?$
 $AB^2 = 9^2 + 4^2 = 95$
 $AB = \sqrt{95}$
 $AC^2 = 4^2 + 9^2 = 95$
 $AC = \sqrt{95}$
 $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH \cdot 13 = \sqrt{95} \cdot \sqrt{95} \Rightarrow AH = \frac{95}{13}$

۲) $AB=10$, $BC=12$, $AC=?$, $AH=?$
 $BC=10 \leftarrow$ ۳) $AB=8$, $AC=6$, $BH=?$, $CH=?$

۴) $AB=8$, $AH=4$, $BC=?$, $AC=?$

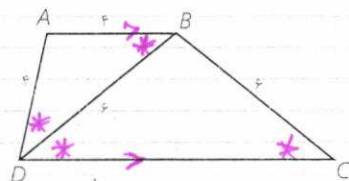
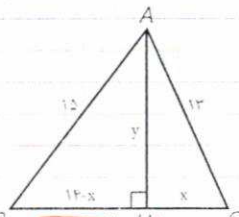


$4^2 - 12^2 = 28$
 $BH = 2\sqrt{7}$
 $CH = 2\sqrt{7}$

۳- در شکل روبه‌رو $\angle A = \angle B$ و $AC=4$ و $BD=6$ ، طول BC را به دست آورید.

$\triangle ADC \sim \triangle ABC$ $\begin{cases} \angle A = \angle B \\ \angle C = \angle C \end{cases} \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AC^2 = DC \cdot BC$
 $4^2 = 6(x+6) \Rightarrow 16 = 6x + 36 \Rightarrow 6x = -20 \Rightarrow x = -\frac{10}{3}$

۴- در شکل روبه‌رو $ABCD$ دوزنقه است. طول قاعده CD را به دست آورید.
 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{4}{4} = \frac{4}{x} \Rightarrow x=4$



۵- در شکل مقابل، مثلی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH ، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت

مثلی را محاسبه کنید.

$225 = (14-x)^2 + y^2$
 $149 = 2x^2 + y^2 \rightarrow 225 - (14-x)^2 = 149 - x^2$
 $225 - 196 + 28x - x^2 = 149 - x^2 \Rightarrow 28x = 120 \Rightarrow x = \frac{30}{7}$

۶- در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش آموزان

خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش‌های

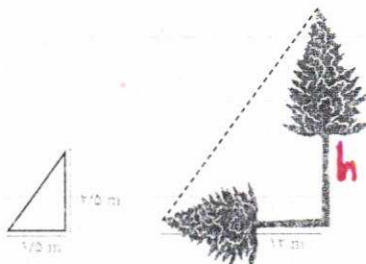
دو دانش آموز را می‌بینید. با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.

الف) روش ترانه : ترانه یک چوب $\frac{2}{5}$ متری را به صورت عمودی روی زمین در

جایی محکم کرد. طول سایه چوب در آن زمان $\frac{1}{5}$ متر بود. هم‌زمان طول سایه درخت

۱۲ متر بود. از اینجا چگونه او توانست ارتفاع درخت را اندازه بگیرد؟ ارتفاع این

درخت چند متر است؟



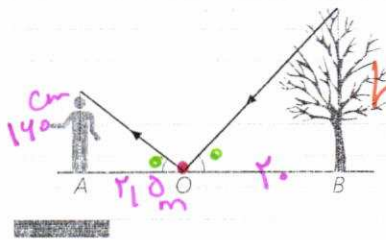
$\frac{h}{12} = \frac{2/5}{1/5} \rightarrow h=20$

ب) روش شهرزاد : شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک

نقطه در نظر گرفت، (نقطه O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای

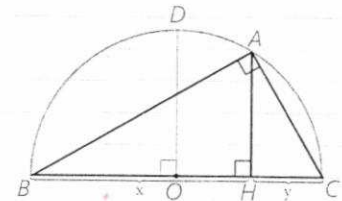
درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب

حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. با توجه به آنچه از خواص



$\frac{h}{2.0} = \frac{1.4}{2.0} \rightarrow h=1.4$

آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با داشتن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازه قد شهرزاد (فاصله چشم او تا زمین)، ارتفاع درخت را به دست آورد. اگر قد شهرزاد ۱۶۰ سانتی‌متر و فاصله پای او از آینه ۲/۵ متر و فاصله آینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



۷- در شکل مقابل نیم‌دایره‌ای به قطر BC و به مرکز O رسم شده و نقطه دلخواه A روی محیط نیم‌دایره است.
الف) چرا زاویه A قائمه است؟

زاویه مقابل به قطر برابر ۹۰ است

ب) برای نقطه A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شده و OD شعاع دایره است. اندازه‌های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

OD $\square$ AH

پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

$$AH = x \cdot y \rightarrow AH = \sqrt{xy}$$

$$OD = \frac{x+y}{2}$$

ت) آیا می‌توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا؟

به معنی ا ب ت با لا

۸- با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویه A از مثلثی مانند

$$ABC, \text{ قائمه باشد، آنگاه } a^2 = b^2 + c^2.$$

الف) عکس این قضیه را بنویسید. اگر درست است، آن را درست بنویسید. اگر نادرست است، آن را نادرست بنویسید. $a^2 = b^2 + c^2$

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

(۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه طول‌های

اضلاع آن برقرار است.

(۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که

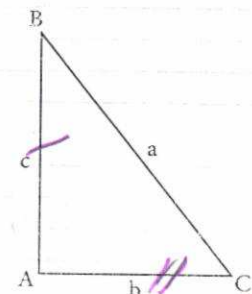
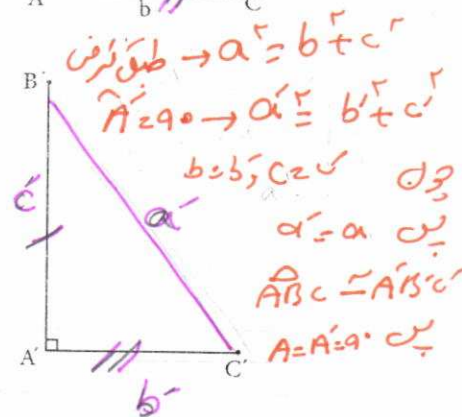
$$\hat{A}' = 90^\circ \text{ و } A'C' = AC \text{ و } A'B' = AB$$

(۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را

$$\text{به دست آورید و ثابت کنید } B'C' = BC.$$

(۴) توضیح دهید چرا $ABC \cong A'B'C'$ ، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان نمایید.



اگر زاویه A از مثلث ABC برابر ۹۰ باشد آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$

تهیه کننده:

ویراسته

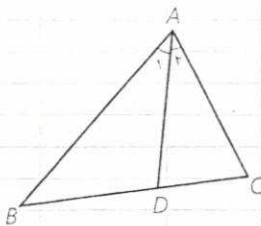
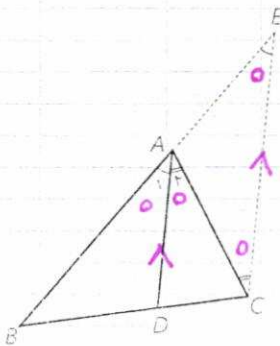
کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث ها

۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی

قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\angle A_1 = \angle A_2$

$$\text{حکم: } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



اثبات: مطابق شکل، از نقطه C خط راستی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

الف) چرا $\angle A_1 = \angle E$ و چرا $\angle A_2 = \angle C$ ؟
ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای درباره زوایای C و E می‌توان گرفت؟

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟ **مستوی الس**
ج) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC ($AD \parallel EC$) نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجه قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

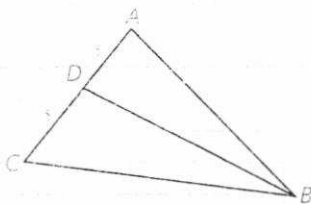
یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث، به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد.

مثال: در مثلث ABC، $AB=7$ ، $AC=5$ و $BC=8$ طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، به دست آورید.

حل:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{15}{8} \Rightarrow$$

$$CD = \frac{8 \times 5}{15} = \frac{8}{3}, \quad AD = AC - CD = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

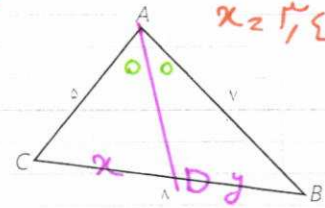


$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7} \rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{12}{7} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{12}{7} \rightarrow y = \frac{7}{12} \rightarrow x = \frac{5}{12}$$

کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را که این نیمساز روی AB جدا می‌کند به دست آورید.



۲- نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

قضیه: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

به عنوان مثال اگر مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد $\left(\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k\right)$ آنگاه:

الف) نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر آنها k است:

$$\frac{A'H'}{AH} = k$$

ب) نسبت اندازه‌های میانه‌های متناظر آنها k است:

$$\frac{C'N'}{CN} = k$$

ج) نسبت اندازه‌های نیمسازهای متناظر آنها مساوی k است:

$$\frac{B'D'}{BD} = k$$

در مورد محیط‌های دو مثلث نیز داریم:

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k$$

و در مورد مساحت‌ها داریم:

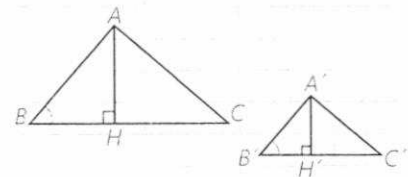
$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$$

انتهای: اگر درستی حکم را برای یکی از ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) ثابت کنیم، درستی آن قابل تعمیم به سایر ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) است. (چرا؟)

الف) ارتفاع‌ها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' , \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{A'H'}{AH} = k$

تهیه کننده:



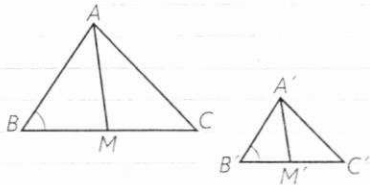
$$\hat{B} = \hat{B}' \text{ و } \hat{H} = \hat{H}'$$

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \text{ زیرا}$$

چرا $\angle B = \angle B'$ بنابراین $\triangle ABH \sim \triangle A'B'H'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه گیری کنید.

$$\frac{A'B'}{AB} = k \rightarrow \frac{A'H'}{AH} = k$$

(ب) میانه ها



فرض	$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{A'M'}{AM} = k$

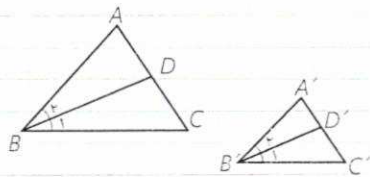
$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \text{ زیرا} \quad \angle B = \angle B' \text{ چرا؟}$$

$$\frac{B'M'}{BM} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}BC} = \dots = k \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'M'}{BM}$$

برای یک زاویه و دو ضلع متناسب زاویه برابر است. بنابراین $\triangle A'B'M' \sim \triangle ABM$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه بگیرید.

$$\frac{A'B'}{AB} = k \rightarrow \frac{A'M'}{AM} = k$$

(ج) نیمسازها



فرض	$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{B'D'}{BD} = k$

$$\hat{B} = \hat{B}' \rightarrow \frac{\hat{B}}{F} = \frac{\hat{B}'}{F'}$$

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \text{ زیرا}$$

چرا $\angle A = \angle A'$ ، چرا $\angle B = \angle B'$ ؟ بنابراین $\triangle A'B'D' \sim \triangle ABD$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نشان دهید.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'D'}{BD} = k$$

(د) محیط ها

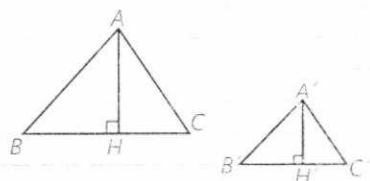
به سادگی و به کمک ویژگی تناسب ها می توان نوشت :

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k \Rightarrow$$

$$\frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k \Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = k$$

(ه) مساحت ها

دیدیم که نسبت ارتفاع های نظیر، مساوی نسبت تشابه است؛ بنابراین داریم :



$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{B'C'}{BC} = k \quad \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A'H'.B'C'}{\frac{1}{2}AH.BC} = \frac{A'H'}{AH} \times \frac{B'C'}{BC} = k.k = k^2$$

کاردر کلاس

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.

۱- اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = k \rightarrow \frac{AB+BC+CD+DA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'} = k$$

۲- قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D', \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{DC}{D'C'} \text{ و } \hat{D} = \hat{D'} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ و } \hat{B} = \hat{B'}$$

۳- جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = k^2$$

بنابراین نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی، مساوی مربع نسبت تشابه آنهاست. به همین ترتیب می‌توانیم نسبت محیط‌ها و مساحت‌های هر دو n ضلعی متشابه را به صورت زیر ثابت کنیم:

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.

مثال: محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه برابر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟
حل: می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند (چرا؟) بنابراین نسبت محیط‌های آنها، نسبت تشابه آنهاست، یعنی $k=3$ بنابراین: $\frac{S}{S'} = k^2 = 9$ یعنی مساحت مثلث بزرگ‌تر، ۹ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.

کاردر کلاس

۱- اندازه محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب 10 و 18 واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر 15 واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح

$$\frac{S}{S'} = k^2 \rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{10}{18} \rightarrow \frac{S}{15} = \frac{10}{18}$$

$$\frac{P}{P'} = k \rightarrow S = \frac{10 \times 15}{18} = \frac{25}{3}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{12}{x} \rightarrow x = 27$$

$$\frac{4}{9} = \frac{x}{12} \rightarrow x = 53$$

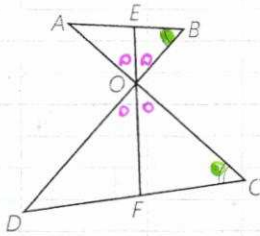
۲- نسبت مساحت های دو پنج ضلعی متشابه، $\frac{4}{9}$ است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳- اندازه های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می کنیم؛ بدون اینکه اندازه های زاویه ها را تغییر دهیم. مساحت هفت ضلعی چند برابر می شود؟

۴۹ برابر

فعالیت

در شکل روبه رو $EF = 10 \text{ cm}$ و $\angle B = \angle C$ است و



$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\hat{B} = \hat{C}$$

الف) چرا مثلث های OAB و OCD متشابه اند؟

ب) اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

ج) طول های OE و OF را به دست آورید.

$$\frac{OE}{OF} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{OE+OF}{OF} = \frac{5}{3} \rightarrow \frac{10}{OF} = \frac{5}{3} \rightarrow OF = 6 \text{ و } OE = 4$$

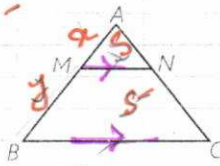


تمرین

$$\frac{18}{10} = \frac{P}{P-}$$

$$\frac{18}{10} = \frac{P}{P-} \rightarrow P = \frac{18 \times 10}{18-10} = \frac{180}{8} = \frac{45}{2}$$

۱- طول های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.



$$S' = 18 \rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = 9$$

۲- در شکل روبه رو $BC \parallel MN$ است و مساحت دوزنقه MNCB هشت برابر

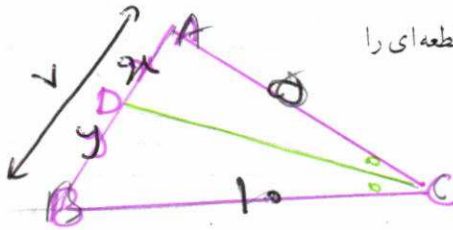
$$\frac{AB}{AM} = 3$$

مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.

$$\frac{x+y}{x} = 3 \rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{3-1}{1} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{1}$$

۳- در مثلث ABC، $AB=7$ و $AC=5$ و $BC=10$ است. طول های دو قطعه ای را

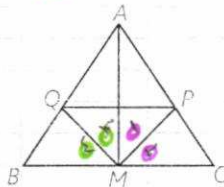
که نیمساز زاویه C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می کند، به دست آورید.



$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{10}{10} \rightarrow \frac{7}{y} = \frac{10}{10} \rightarrow y = 7 \text{ و } x = 3$$

۴- در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و

AMB هستند. ثابت کنید:



$PQ \parallel BC$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC}$$

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{AM}{MB}$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB} \rightarrow PQ \parallel BC$$

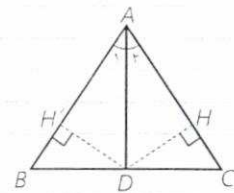
اگر در یک درخت ایستاد و به یک درخت دیگر نگاه کرد
خط راست به سمت درخت دیگر و به سمت درخت دیگر

۵- در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویه A است و عمودهای DH و DH' نیز رسم شده‌اند.

الف) با توجه به نتیجه (۲) از درس اول، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{DC}$$

نیز هر نقطه در خطی که از A از نقطه D می‌گذرد



ب) چرا $DH = DH'$ ؟ با توجه به این موضوع و نتیجه (۱) از درس اول بار دیگر

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}$$

نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید:

نسبت (۱) هر دو، درخت ایستاد و به یک درخت دیگر نگاه کرد
نسبت (۲) هر دو، درخت ایستاد و به یک درخت دیگر نگاه کرد

ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیه نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

۶- در شکل روبه‌رو می‌دانیم $BE = 2DE$ است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیاً

$$x-1 = y+10$$

$$2x-7 = x+8$$

نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.

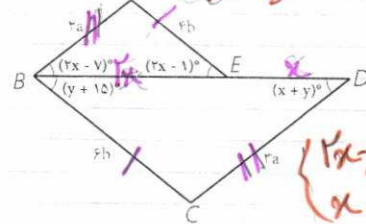
۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\angle A = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید

که $\triangle ABH \sim \triangle ABC \sim \triangle ACH$ است. با توجه به این موضوع،

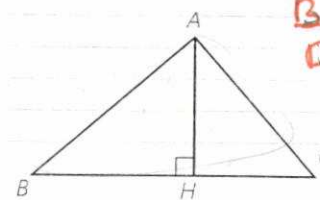
الف) ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$$



$$\frac{BD}{DE} = \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$



ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامه کار، درستی قضیه فیثاغورس را

$$\frac{S_{ABH} + S_{ACH}}{S_{ABC}} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1 \rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

۸- مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است.

در فاصله ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی

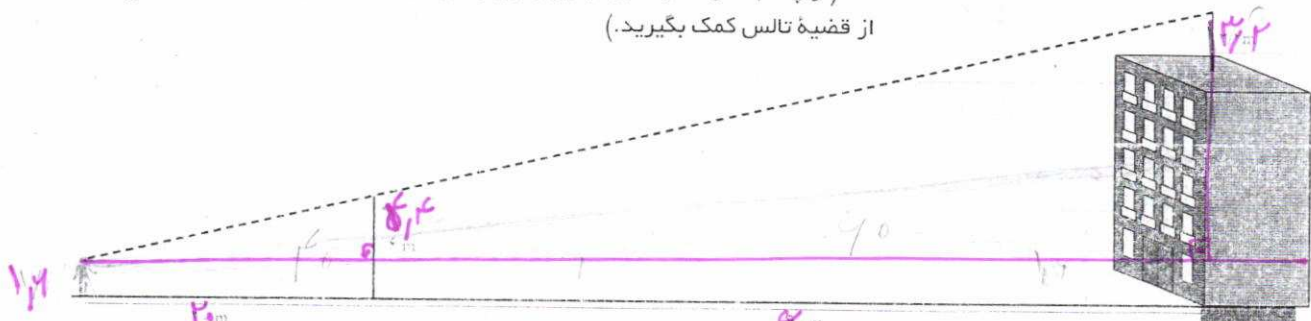
در فاصله ۲۰ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند.

اگر بدانیم فاصله چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.

(از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند.

از قضیه تالس کمک بگیرید.)

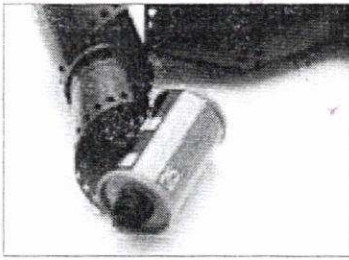
$$y_1 - 1, y = 0,8$$



$$\frac{P_0}{1.6} = \frac{4.4}{x} \rightarrow x = 17.6 \rightarrow$$

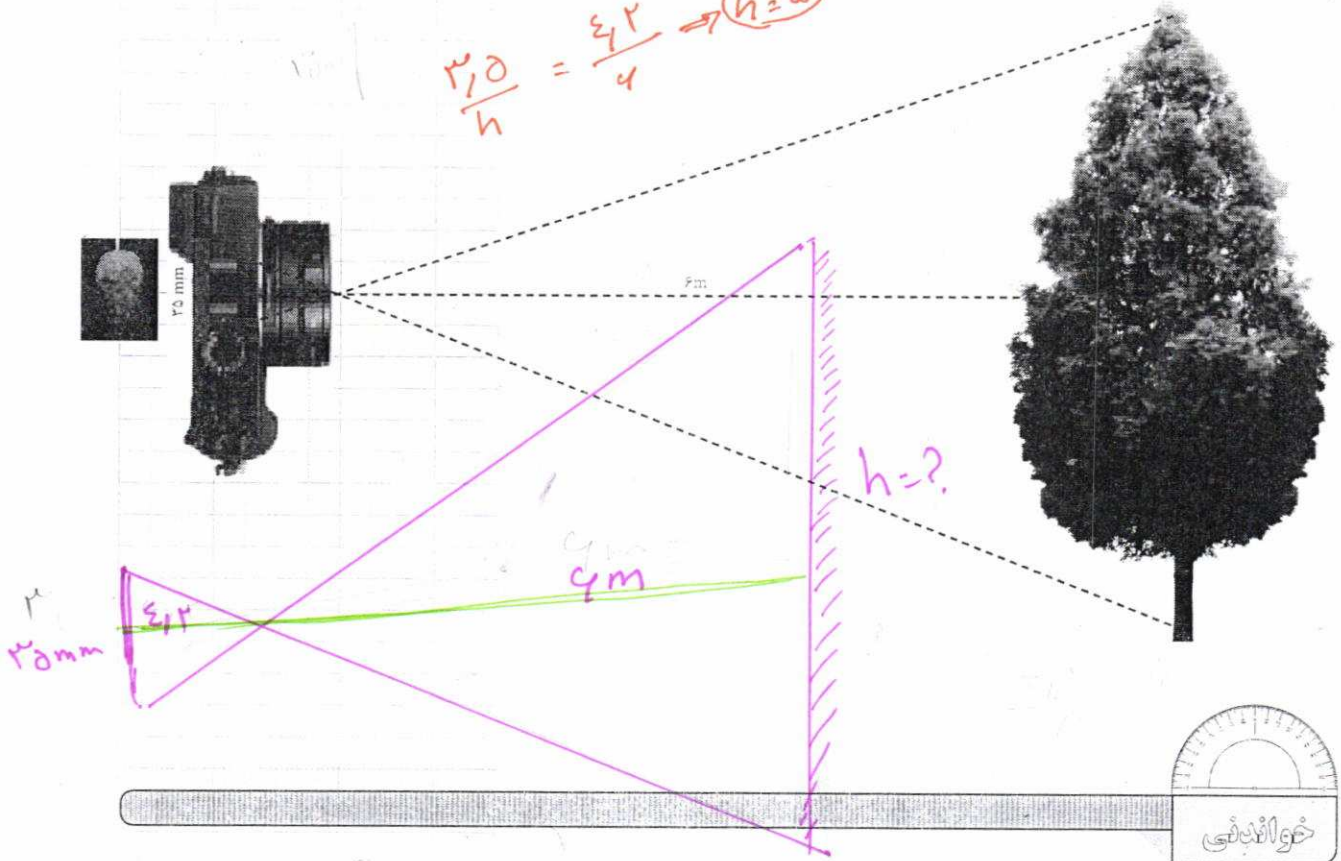
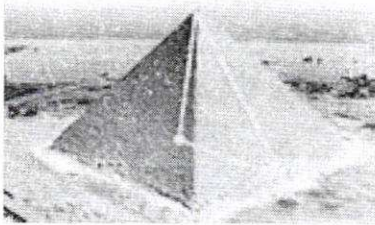
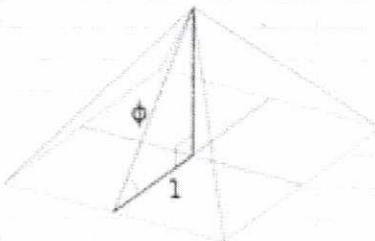
$$h = \frac{(17.6 - 3.2) \cdot 0.8}{1.6} + 1.6$$

$$h = 14m$$



۹- در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقه فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی^۱ ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، ۳۵mm و فاصله آن درون دوربین تا عدسی^۲، ۴/۲cm و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، ۶m باشد، اندازه واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟

$$\frac{3.5}{h} = \frac{4.2}{4} \Rightarrow h = 5$$



اعداد فیثاغورسی به سه عددی می‌گویند که مجموع مربع‌های دو تا از آنها برابر با مربع سومی باشد؛ به عبارتی اعداد a ، b و c را فیثاغورسی گویند، هرگاه $a^2 = b^2 + c^2$. اعداد فیثاغورسی اندازه‌های ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه (راست‌گوشه) را تشکیل می‌دهند. بررسی‌ها نشان داده است که در برخی نقاط جهان در ساخت بناها پیش از شناخت قضیه فیثاغورس از ویژگی اعداد فیثاغورسی استفاده می‌شده است.

۱- واژه «تصویر منفی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «انگاتیو» به کار رفته است.

۲- واژه «عدسی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «لنز» به کار رفته است.



اثبات ویژگی های تناسب

۱ طرفین - وسطین کردن: طرفین تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را در عدد غیر صفر bd ضرب کنید :

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd \Rightarrow ad = bc$$

۲ ویژگی های (۲) و (۳) با طرفین - وسطین کردن، به سادگی نتیجه می شوند :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow da = cb \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow bc = ad \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

۳ ویژگی های ۵ و ۴ به صورت زیر با اضافه یا کم کردن عدد ۱ به دو طرف تناسب نتیجه می شوند :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

ویژگی های تفضیل نسبت در صورت و مخارج را خودتان اثبات کنید.

۴ اثبات ویژگی ۶ :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

به همین ترتیب می توان تعمیم این ویژگی را هم اثبات کرد.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل ۳ : چند ضلعی ها

درس اول : چهار ضلعی ها

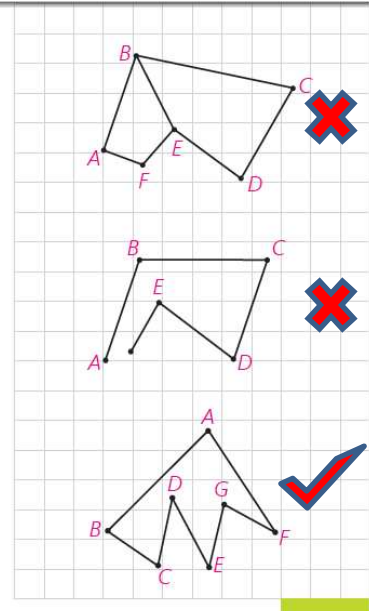
تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

تعریف: چندضلعی شکلی است شامل n ($n \geq 3$) پاره خط متوالی که:
(۱) هر پاره خط، دقیقاً دو پاره خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.
(۲) هر دو پاره خط که در یک انتها مشترک اند، روی یک خط نباشند.

هر یک از این پاره خط‌ها یک ضلع چندضلعی است.
هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک اند، دو ضلع مجاور و نقطه مشترک آن دو را رأس می‌نامند. هر دو زاویه چندضلعی را که هر دو در یک ضلع چندضلعی مشترک اند، دو زاویه مجاور به آن ضلع در چندضلعی می‌نامند. مانند $\angle A$ و $\angle B$ در شکل‌های (۱) و (۲)

هر گاه تعداد ضلع‌های چندضلعی n تا باشد، آن را n ضلعی می‌نامند.
کدام یک از شکل‌های مقابل چندضلعی است و تعداد ضلع‌ها و رأس‌های آن چند تا است؟ **۷ ضلع و ۷ رأس**
برخی ضلع‌های مجاور هم و غیر مجاور هم را مشخص کنید.



مجاور : ... - AB, BC - BC, CD - CD, DE - ... غیر مجاور : AB, CD - AB, DE - BC, EF - ...

یک چهار ضلعی چند قطر دارد؟ **دو قطر**

n ضلعی $A_1A_2...A_n$ را در نظر می‌گیریم. از رأس $A_1, A_2, ..., A_n$ قطر می‌توان رسم کرد.
با توجه به اینکه n رأس داریم، آیا می‌توان گفت تعداد قطرها در n ضلعی $n(n-3)$ است؟ **خیر**

کافی است آن را بر ۲ تقسیم کنیم

با این فرمول، مستطیل چند قطر دارد؟ $4(4-3) = 4$

آیا جواب به دست آمده درست است؟ **خیر**

با چه تغییری در این فرمول به فرمول درست محاسبه قطرها می‌رسیم؟ چرا این تغییر لازم است؟

زیرا هر رأس دو بار شمرده شده است.

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

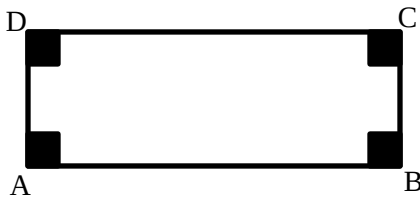
در هر n ضلعی تعداد قطرها $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

n نقطه که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. با توجه به استدلالی که در محاسبه تعداد قطرهای n ضلعی به کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر $1, 2, \dots, n-1$ پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این n نقطه را با $\frac{n(n-1)}{2}$ پاره‌خط می‌توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرهای و ضلع‌ها در n ضلعی وجود دارد؟

$$\frac{n(n-1)}{2} = n + \frac{n(n-3)}{2} \quad \text{با هم برابرند، به عبارت دیگر}$$

کار در کلاس صفحه ۵۶

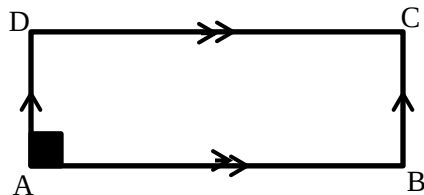
با توجه به تعریف‌های بالا درستی هریک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید :
(الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.
(ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟



الف: فرض: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

حکم: $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$

برهان: $\left. \begin{matrix} AD \perp AB \\ BC \perp AB \end{matrix} \right\} \Rightarrow AD \parallel BC$, $\left. \begin{matrix} AB \perp AD \\ CD \perp AD \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB \parallel CD$



ب: فرض: $\angle A = 90^\circ$, $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$

حکم: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

برهان:

$$\text{مورب } AB, AD \parallel BC \Rightarrow \angle A = \angle B = 90^\circ \quad [1]$$

$$\text{مورب } AD, AB \parallel CD \Rightarrow \angle A = \angle D = 90^\circ \quad [2]$$

$$[1], [2] \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle D = 90^\circ \Rightarrow \angle C = 90^\circ$$

ب) لوزی یک متوازی الاضلاع است.

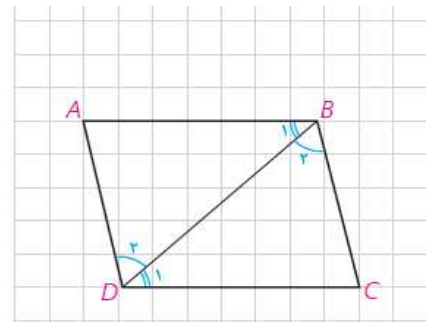
در لوزی ABCD قطر AC را رسم می کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت **ض ز ض** ... هم نهشت اند. بنابراین دو زاویه $\angle A_1$ و $\angle C_1$... هم اندازه اند. در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی اند. یعنی لوزی متوازی الاضلاع است. بنابراین، لوزی متوازی الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم اندازه باشند. (ت) مربع یک متوازی الاضلاع است.

پاسخ (ت): بنا به تعریف مربع، هر چهار ضلع مربع با هم برابرند پس هر مربع نوعی لوزی است. از طرف دیگر هر لوزی نیز نوعی متوازی الاضلاع است.

فعالیت ۱ صفحه ۵۶

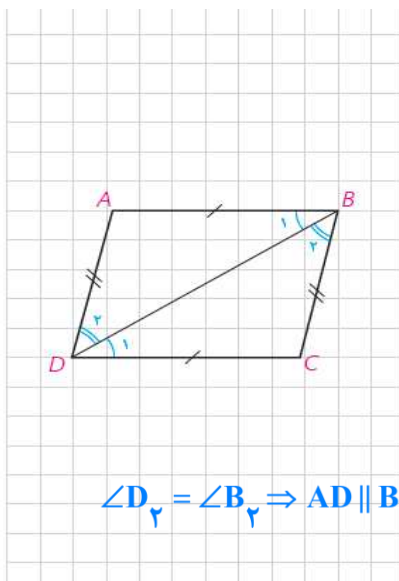
۱ فعالیت

متوازی الاضلاع ABCD را در نظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی بودن ضلع ها چه نتیجه ای می گیرید؟
دو مثلث ABD و CDB به حالت هم نهشت اند.
در نتیجه، AD = و AB =



پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مورب } BD, AD \parallel BC \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_2 \\ \text{مورب } BD, AB \parallel CD \Rightarrow \angle B_2 = \angle D_1 \\ BD = BD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta ABD \cong \Delta CDB \Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ AB = CD \end{cases}$$



عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، ضلع های مقابل دوجه دو هم اندازه باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

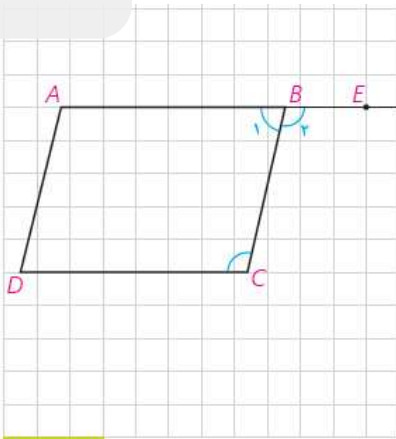
ض ز ض
در چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم می کنیم. به حالت
 $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ از هم نهشتی این دو مثلث نتیجه می گیریم، اندازه $\angle B_1$ برابر اندازه $\angle D_1$ است.
بنابراین ضلع AB موازی ضلع CD است. از چه قضیه ای آن را نتیجه گرفته اید؟
قضیه ی خطوط موازی و مورب

موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی ضلع های AD و BC را چگونه نتیجه می گیرید؟
بنابراین چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

زیرا $AB \parallel CD$ و BC مورب است.

مکمل اند

فعالیت ۲



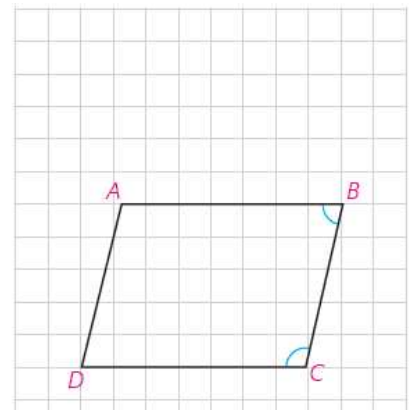
چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است.
با توجه به شکل، $\angle B_1 = \angle C$ است؛ چرا؟ $\angle B_1$ و $\angle B_2$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین $\angle B_1$ و $\angle C$ می باشند.
بنابراین قضیه زیر ثابت شده است:

قضیه ۲: در متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل اند.

صفحه ۵۸

عکس قضیه ۲: هر چهارضلعی که هر دو زاویه مجاور آن مکمل باشند، متوازی الاضلاع است.

در چهارضلعی $ABCD$ ، دو زاویه $\angle B$ و $\angle C$ با هم مکمل اند. در این صورت ضلع AB موازی ضلع CD است.
به همین ترتیب دو زاویه $\angle A$ و $\angle B$ نیز مکمل اند. در نتیجه، ضلع AD موازی ضلع BC است؛ بنابراین چهارضلعی $ABCD$ است.
متوازی الاضلاع



قضیه ۳: در هر متوازی الاضلاع، هر دو زاویه مقابل هم اندازه اند.

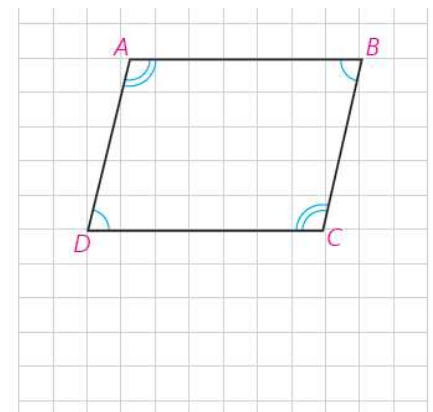
با توجه به قضیه قبل آن را ثابت کنید.
می توانید از فعالیت (۱) نیز استفاده کنید.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B = 180^\circ \\ \angle B + \angle C = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A + \angle B = \angle B + \angle C \Rightarrow \angle A = \angle C$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B = 180^\circ \\ \angle A + \angle D = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A + \angle B = \angle A + \angle D \Rightarrow \angle B = \angle D$$

عکس قضیه ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مقابل هم اندازه باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

فرض کنیم در چهارضلعی $ABCD$ هر دو زاویه مقابل هم اندازه باشند. یعنی $\angle B$ و $\angle D$ و همچنین $\angle A$ و $\angle C$ هم اندازه اند. می دانیم مجموع اندازه های زاویه های درونی هر چهارضلعی محدب 360° است. چگونه به کمک آن ثابت می کنید هر دو زاویه مجاور مثلاً $\angle B$ و $\angle C$ مکمل اند؟

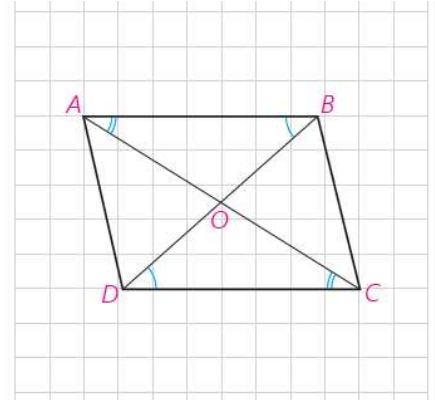


$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \xrightarrow[\angle B = \angle D]{\angle A = \angle C} 2\angle A + 2\angle B = 360^\circ \xrightarrow{\div 2} \angle A + \angle B = 180^\circ \quad \boxed{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle C \\ \angle B = \angle D \end{array} \right\} \xrightarrow{\boxed{1}} \angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle A + \angle D = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel CD, AD \parallel BC$$

۳ فعالیت

در متوازی الاضلاع ABCD، دو قطر AC و BD را رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن دو را O می‌نامیم. $\triangle AOB \cong \triangle COD$. چرا؟
بنابراین، $OA = OC$ و $OB = OD$. در نتیجه!

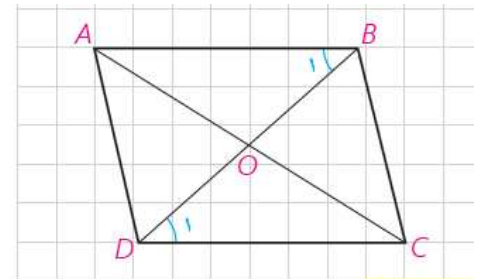


قضیه ۴: در هر متوازی الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند

$$\left. \begin{array}{l} \text{مورب } AC, AB \parallel CD \Rightarrow \angle A_1 = \angle C_1 \\ AB = CD \text{ (بنا به قضیه ۱)} \\ \text{مورب } BD, AB \parallel CD \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض}} \triangle OAB = \triangle OCD$$

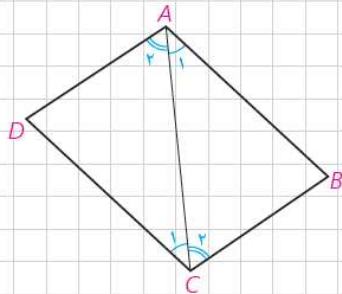
۴ فعالیت

فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می‌دهید این چهارضلعی متوازی الاضلاع است؟



$$\left. \begin{array}{l} OA = OC \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ متقابل به رأس} \\ OB = OD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow AB \parallel CD$$

به روش مشابه ثابت می‌شود: $\triangle OAD \cong \triangle OBC \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \Rightarrow AD \parallel BC$



۵ فعالیت

فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD، ضلع های AB و CD هم اندازه و موازی اند. قطر AC را رسم می کنیم.

اندازه $\angle A_1$ با اندازه $\angle C_1$... برابر است.

بنابراین، بنابر حالت هم نهشتی ... $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

در نتیجه اندازه $\angle A_2$ برابر اندازه زاویه $\angle C_2$... است که از آن نتیجه می گیرید ضلع AD موازی ضلع BC ... است. بنابراین، چهارضلعی متوازی الاضلاع است. یعنی؛

هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن هم اندازه و موازی باشند، متوازی الاضلاع است.

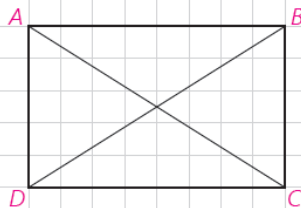
ویژگی هایی از مستطیل و لوزی

کدام ویژگی از مستطیل است که در هر متوازی الاضلاعی که مستطیل نباشد، برقرار

نیست؟ در مورد مربع چطور؟ **خیر**
زاویه قائمه

در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می کنیم. از هم نهشتی کدام دو مثلث می توان نتیجه گرفت $AC=BD$ ؟ این هم نهشتی را نشان دهید.

بنابراین در هر مستطیل قطرها **مساوی** اند.



$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \angle C = \angle D = 90^\circ \\ CD = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ADC \cong \triangle BCD \Rightarrow AC = BD$$

اگر دو قطر یک چهارضلعی هم اندازه باشند، آیا می توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟ **خیر** (توضیح : در دوزنقه متساوی الساقین نیز قطرهای مساوی اند)

اگر این چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، چطور؟ آن را با دلیل بیان کنید.

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ AC = BD \\ CD = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta ADC \cong \Delta BCD \Rightarrow \angle C = \angle D$$

از طرف دیگر در هر متوازی الاضلاع زاویه های مجاور مکمل یکدیگرند . پس : $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

۶ فعالیت

ویژگی مهمی در مثلث قائم الزاویه

مثلث قائم الزاویه ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانه وارد بر وتر است در نظر می گیریم.

روی نیم خط AM نقطه D را چنان در نظر می گیریم که $AM = MD$.

چرا چهارضلعی ABDC متوازی الاضلاع است؟ زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند

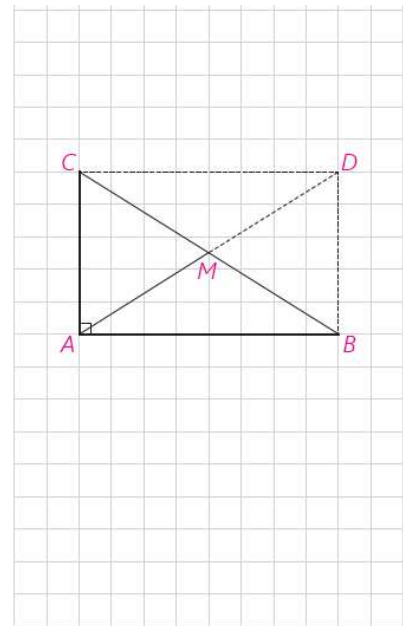
چرا این چهارضلعی مستطیل است؟

زیرا زاویه A قائمه است و هر متوازی الاضلاعی که زاویه قائمه دارد . مستطیل است در مورد قطرهای چه نتیجه ای می گیرید؟

قطرهای هر مستطیل باهم مساوی اند.

اندازه AM چه رابطه ای با اندازه BC دارد؟ آن را بیان کنید.

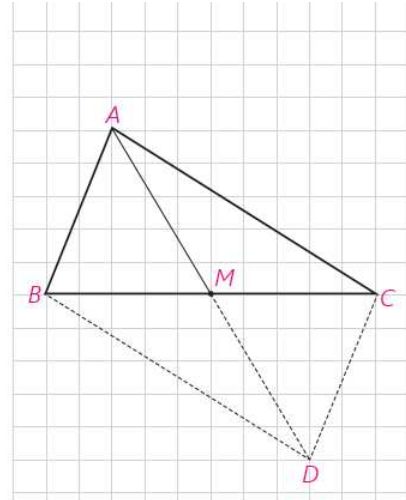
$$AM = \frac{BC}{2}$$



در هر مثلث قائم الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر . نصف اندازه وتر است.

اگر در مثلثی اندازه میانه وارد بر یک ضلع، نصف اندازه آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

در مثلث ABC، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{2}$ روی نیم خط AM نقطه D را چنان در نظر می‌گیریم که $MD = AM$.

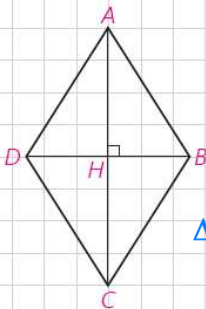


آیا می‌توانید نتیجه بگیرید $AD = BC$ و قطرهای AD و BC منصف یکدیگرند؟ بله چگونه نتیجه می‌گیرید $\angle A$ قائمه است؟
بنا به قضایای قبل هر چهار ضلعی که قطرهاش یکدیگر را نصف کنند مستطیل است لذا تمام زاویه های داخلی آن قائمه اند.

ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟ **بله، هر چهار ضلع لوزی با هم برابرند.**

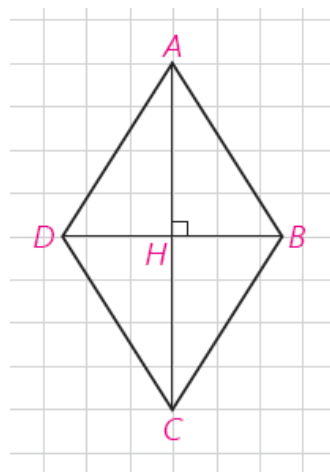
قطرهای لوزی ABCD را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، قطرها منصف یکدیگرند. $\triangle ABD$ چه نوع مثلثی است؟ **متساوی الساقین**
نقطه تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD، AH چه پاره‌خطی است؟ **میانه**
چرا پاره خط AH بر قطر BD عمود است و روی نیمساز $\angle A$ است؟ **زیرا $\triangle ABH \cong \triangle ADH$**
بنابراین؛



در هر لوزی قطرها **عمود منصف** یکدیگرند و قطرها روی **نیمسازهای** زاویه‌ها می‌باشند.

کار در کلاس صفحه ۶۱

۱- نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.

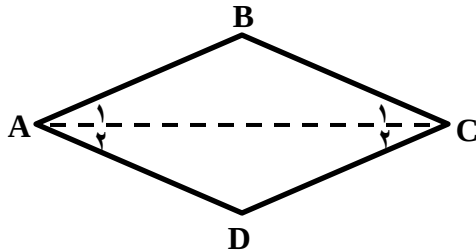


فرض: $AB \parallel CD, AD \parallel BC, AC \perp BD$

حکم: $AB = BC = CD = DA$

برهان : قطرهای هر متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند و از طرف دیگر $AC \perp BD$ پس در $\triangle ABD$ ، AH عمود منصف ضلع BD است . لذا مثلث متساوی الساقین می باشد . به طریق مشابه در $\triangle ABC$ نیز BH عمود -منصف ضلع AC می باشد بنا براین می توان نتیجه گرفت که $AB = BC = CD = DA$ پس چهار ضلعی $ABCD$ لوزی است.

۲- نشان دهید متوازی الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویه آن باشد، لوزی است.



فرض : $AB \parallel CD, AD \parallel BC, \angle A_1 = \angle A_2$

حکم : $AB = BC = CD = DA$

برهان : در دو مثلث ABC, ACD داریم :

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_2 \\ \angle B = \angle D \end{array} \right\} \rightarrow \angle C_1 = \angle C_2 \quad [1]$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_2 \\ [1] \Rightarrow \angle C_1 = \angle C_2 \\ AC = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{فرض}} \triangle ABC \cong \triangle ACD \Rightarrow \begin{array}{l} AB = AD \\ BC = CD \end{array}$$

از طرف دیگر در هر متوازی الاضلاع ، اضلاع موازی مساوی اند پس : $AB = BC = CD = DA$

اکنون با توجه به ویژگی های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.

۱-مستطیلی که دو ضلع مجاورش مساوی باشند مربع است. ۲- مستطیلی قطرهايش بر هم عمودند مربع است. ۳- مستطیلی قطرهايش نیمساز زاویه های داخلی باشند مربع است.

۱- هر لوزی که یکی از زاویه های آن قائمه باشد مربع است. ۲- هر لوزی که قطرهای مساوی دارد مربع است.



در شکل یک جک اتومبیل را می بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟ اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز با هم اندازه های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بسته شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه مشکلی ایجاد می شود؟

جک به طور کامل بسته نمی شود. زیرا مجموع طول های دو

ضلع بالایی با مجموع طول های دو ضلع پایینی مساوی نیست.

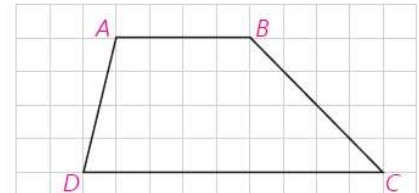
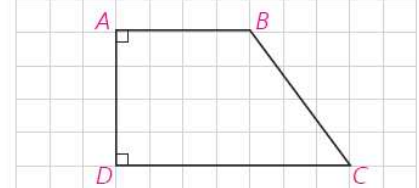
صفحه ۶۲

هر یک از دو ضلع AB و CD را که موازی اند، قاعده و هر یک از دو ضلع غیرموازی را ساق می نامند. از موازی بودن قاعده های AB و CD و قاطع های BC و AD در مورد زاویه ها چه نتیجه ای می گیرید؟ **دو زاویه مجاور به یک ساق، مکمل اند.**

زاویه های $\angle A$ و $\angle D$ **مکمل** هستند. همچنین زاویه های $\angle B$ و $\angle C$ **مکمل** هستند.

اگر در یک دوزنقه اندازه های دو ساق برابر باشند، آن را دوزنقه متساوی الساقین می نامند.

هرگاه در یک دوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده ها عمود باشد، مسلماً بر قاعده دیگر نیز عمود است؛ چرا؟ **زیرا دو زاویه مجاور به یک ساق، مکمل اند.** در این صورت دوزنقه را قائم الزاویه می نامند.



فعالیت ۷

دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ را که در آن $AD = BC$ است، در نظر می گیریم. از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می کنیم تا قاعده DC را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی $ABED$ **متوازی الاضلاع** است.

چرا دو زاویه $\angle D$ و $\angle E$ هم اندازه اند؟

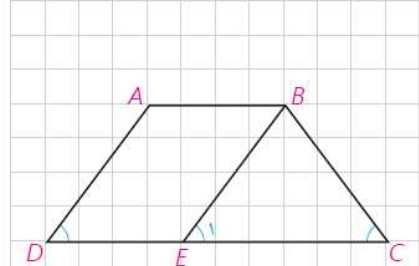
$$DC, AD \parallel BE \Rightarrow \angle D = \angle E \quad \text{مورب}$$

$BC = BE$ چرا؟

زیرا اگر دو زاویه از مثلثی با هم برابر باشند، اضلاع روبرو به آنها نیز با هم برابرند

بنابراین اندازه $\angle E$ برابر اندازه $\angle C$ است.

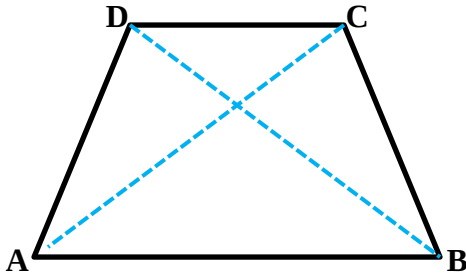
اکنون $\angle D$ و $\angle C$ هم اندازه اند. چرا؟ بنابراین :



در هر دوزنقه متساوی الساقین زاویه های مجاور به یک قاعده هم اندازه اند.

به کمک ویژگی دوزنقه متساوی الساقین، ویژگی زیر به سادگی ثابت می شود. آن را
صفحه ۶۳ ثابت کنید.

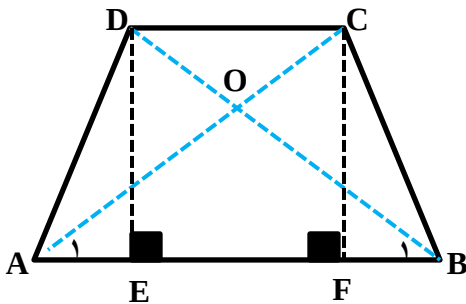
در هر دوزنقه متساوی الساقین، قطرهای مساوی دارند و بر عکس.



فرض : $AD = BC$, $AB \parallel CD$ حکم : $AC = BD$

برهان : در دو مثلث ABD , ABC داریم :

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \angle A = \angle B \\ AB = AB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ABC \cong \triangle ABD \Rightarrow AC = BD$$



برعکس

فرض : $AD = BC$, $AB \parallel CD$, $AC = BD$ حکم :

برهان : عمودهای DE, CF را بر AB وارد می کنیم چهار ضلعی $CDEF$ مستطیل

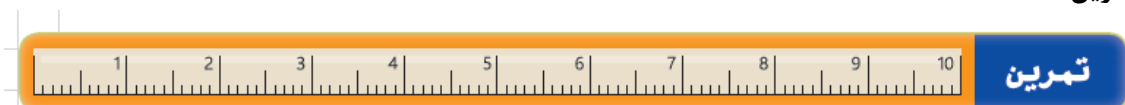
است . پس $DE = CF$

$$\left. \begin{array}{l} \angle E = \angle F = 90^\circ \\ AC = BD \\ CF = DE \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle ACF \cong \triangle BDE \Rightarrow \angle A_1 = \angle B_1 \Rightarrow OA = OB$$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ AC = BD \end{array} \right\} \Rightarrow OC = OD$$

پس دو مثلث OAD, OBC بنا به حالت (ض ز ض) همیشه اند . در نتیجه $AD = BC$

تمرین صفحه ۶۳

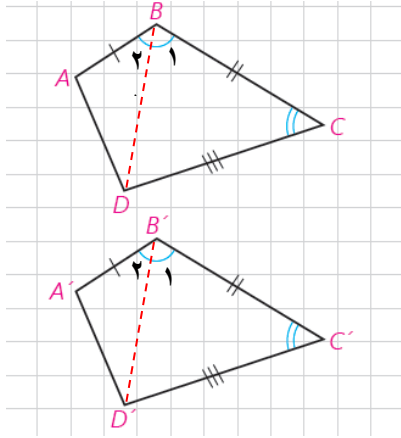


تمرین

۱- در کدام n ضلعی تعداد قطرهای و ضلعها برابر است؟

پاسخ :

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \Rightarrow n(n-3) = 2n \Rightarrow n-3=2 \Rightarrow n=5$$



۲- در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

الف

اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$ در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

ب

پاسخ قسمت الف :

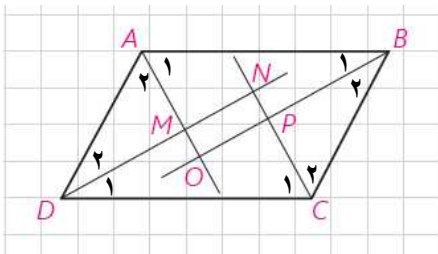
قطرهای BD ، $B'D'$ را در دو چهارضلعی رسم می‌کنیم بدیهی است که دو مثلث BCD ، $B'C'D'$ هم‌نهشت اند

$$\angle B_1 = \angle B'_1 \xrightarrow{\angle B = \angle B'} \angle B_2 = \angle B'_2 \quad \text{پس :}$$

در دو مثلث ABD ، $A'B'D'$:

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \angle B_2 = \angle B'_2 \\ BD = B'D' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle A'B'D' \xrightarrow{\triangle BCD \cong \triangle B'C'D'} \square ABCD \cong \square A'B'C'D'$$

پاسخ قسمت ب : در این حالت کافی است قطرهای AC ، $A'C'$ را رسم نموده و مانند قسمت الف عمل کنیم.



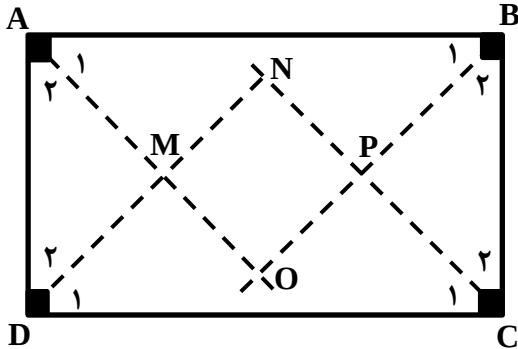
۳- از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است. اگر ABCD مستطیل باشد، نشان دهید چهارضلعی MNPQ مربع است.

$$\square ABCD ; \angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = \frac{180^\circ}{2} \Rightarrow \triangle OAB ; \angle A_1 + \angle B_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle O = 90^\circ \quad [1]$$

به روش مشابه ثابت می‌شود :

$$\Delta OAB; \angle C_1 + \angle D_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle N = 90^\circ \quad [2], \quad \Delta PBC; \angle B_2 + \angle C_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle P = 90^\circ \quad [2]$$

$[1], [2], [3] \Rightarrow \angle M = \angle N = \angle P = \angle O = 90^\circ \Rightarrow$ چهارضلعی MNPO مستطیل است



اگر چهارضلعی ABCD مستطیل باشد:

$$\Delta CDN; \angle C_1 = \angle D_1 = 45^\circ \Rightarrow CN = DN \quad [1]$$

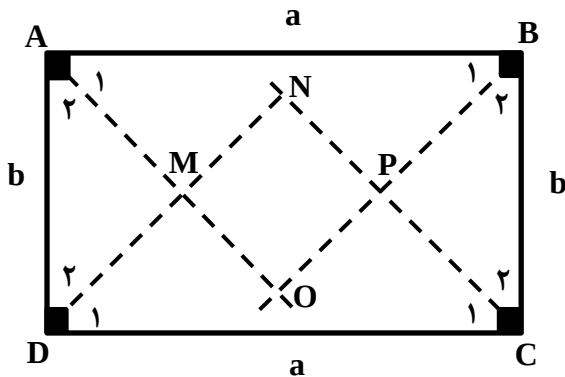
$$\left. \begin{array}{l} \angle A_2 = \angle B_2 = 45^\circ \\ AD = BC \\ \angle D_2 = \angle C_2 = 45^\circ \end{array} \right\} \longrightarrow \Delta BCP \cong \Delta ADM \Rightarrow PC = DM \quad [2]$$

$$[1], [2] \Rightarrow CN - PC = DN - DM \Rightarrow PN = MN$$

پس طول و عرض مستطیل MNPO با هم برابرند. به عبارت دیگر MNPO مربع است.

صفحه ۶۴

۴- در مسئله قبل، اگر اندازه‌های ضلع‌های مستطیل a و b باشند، اندازه ضلع مربع را بر حسب a و b محاسبه کنید.



$$\Delta DCN; \angle N = 90^\circ \Rightarrow CN^2 + DN^2 = CD^2$$

$$\xrightarrow{CN = DN} 2CN^2 = a^2 \Rightarrow CN = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad [1]$$

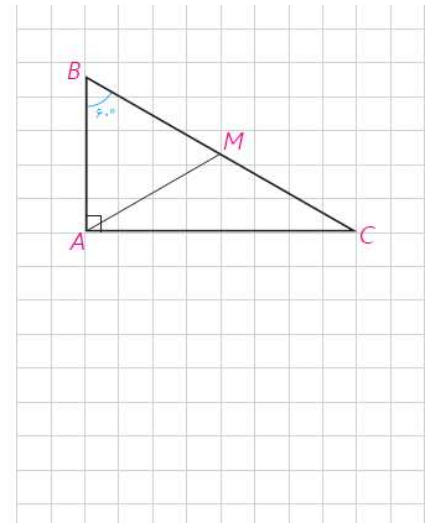
$$\Delta BCP; \angle P = 90^\circ \Rightarrow PC^2 + PB^2 = BC^2$$

$$\xrightarrow{CN = DN} 2CP^2 = b^2 \Rightarrow CP = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{2} \quad [2]$$

$$[1], [2] \Rightarrow CN - CP = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{b\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PN = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b)$$

۵- مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازه $\angle C$ است، در نظر می‌گیریم. میانه وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های $\triangle AMB$ و $\triangle AMC$ چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{2}$ یعنی در هر مثلث قائم الزاویه اگر اندازه یک زاویه 30° باشد، اندازه ضلع مقابل آن نصف اندازه وتر است.
سپس با استفاده از قضیه فیثاغورث نشان دهید، $AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$.
یعنی در هر مثلث قائم الزاویه اگر یک زاویه 60° باشد، اندازه ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ اندازه وتر است.

اکنون مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کنید که اندازه یک زاویه آن 45° باشد و نشان دهید که اندازه هر ضلع قائم الزاویه در آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ اندازه وتر است.



پاسخ: در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس:

$$\triangle ABC; \angle A = 90^\circ, \angle C = 30^\circ \Rightarrow \angle B = 60^\circ$$

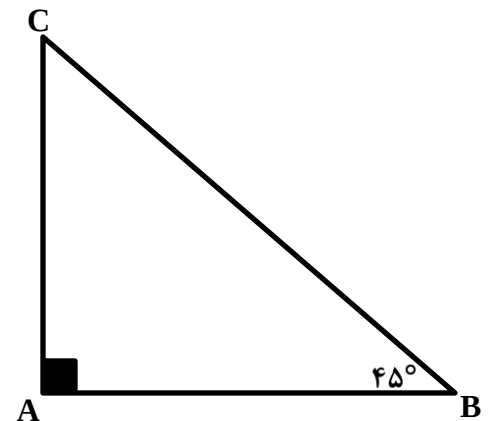
$$\triangle ABM; AM = BM \Rightarrow \angle A_1 = \angle B = 60^\circ \Rightarrow AM = BM = AB \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$$

$$\triangle ABC; \angle A = 90^\circ \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \xrightarrow{AB = \frac{BC}{2}} AC^2 = BC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

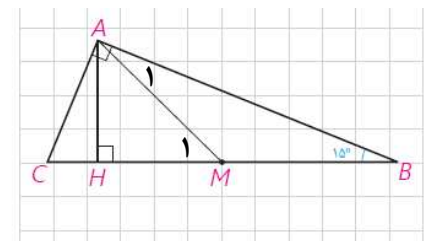
$$\Rightarrow AC^2 = \frac{3BC^2}{4} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$$

$$\triangle ABC; \angle A = 90^\circ, \angle B = 45^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{cases}$$

$$2AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{BC^2}{2} \Rightarrow AB = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} BC$$



۶- در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ ، اندازه زاویه B برابر 15° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ اندازه وتر است.



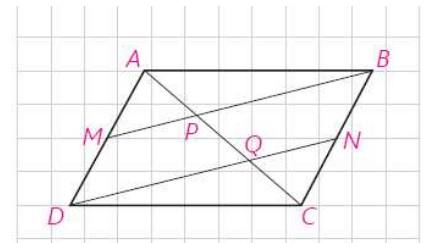
در مثلث قائم الزاویه میانه وارد وتر نصف وتر است پس:

$$\triangle ABC; AM = MB = \frac{BC}{2} \Rightarrow \angle A_1 = \angle B = 15^\circ \Rightarrow \angle M_1 = \angle A_1 + \angle B = 30^\circ$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ضلع روبرو به زاویه ی ۳۰ درجه نصف وتر است

$$\triangle AMH; \angle H = 90^\circ, \angle M_1 = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AM}{2} \Rightarrow AH = \frac{\frac{AM}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{AM}{4}$$

۷- در متوازی الاضلاع ABCD، M و N به ترتیب وسطهای ضلعهای AD و BC می باشند. چرا خطهای MB و DN موازی اند؟ به کمک آن ثابت کنید
AP = PQ = QC



پاسخ: اگر در یک چهار ضلعی دو ضلع موازی و مساوی باشند آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است. در چهار ضلعی

BMDN داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \xrightarrow{\div 2} BN = MD \\ BN \parallel MD \end{array} \right\} \Rightarrow BM \parallel DN$$

$$\triangle ADQ; MP \parallel DQ \Rightarrow \frac{AP}{PQ} = \frac{AM}{MQ} = 1 \Rightarrow AP = PQ$$

$$\triangle BCP; BP \parallel QN \Rightarrow \frac{CQ}{QP} = \frac{CN}{NB} = 1 \Rightarrow CQ = PQ$$

$$\Rightarrow AP = PQ = QC$$

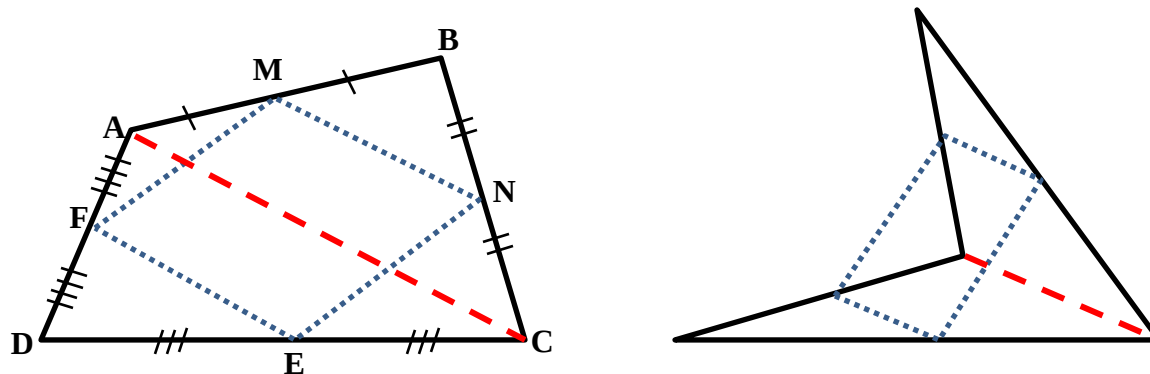
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۸- ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟



برهان: فرض کنیم نقاط F, E, N, M به ترتیب وسط‌های اضلاع AD, CD, BC, AB از چهارضلعی $ABCD$ باشند باید ثابت کنیم چهارضلعی $MNEF$ متوازی‌الاضلاع است. قطر AC را رسم می‌کنیم:

$$\triangle ABC; \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس تالس ۱}} MN \parallel AC, MN = \frac{AC}{2} \quad [1]$$

$$\triangle ACD; \frac{DE}{DC} = \frac{DF}{DA} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس تالس ۱}} EF \parallel AC, EF = \frac{AC}{2} \quad [2]$$

$$[1], [2] \Rightarrow MN \parallel EF, MN = EF$$

به عبارت دیگر در چهارضلعی $MNEF$ دو ضلع موازی و مساوی اند لذا چهارضلعی $MNEF$ متوازی‌الاضلاع است.

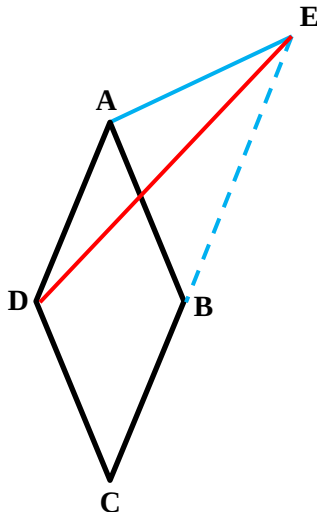
اگر قطرهای چهارضلعی $ABCD$ بر هم عمود باشند. چهارضلعی $MNEF$ مستطیل است. زیرا قطرهای چهارضلعی $ABCD$ چهارضلعی $MNEF$ موازی اند.

اگر قطرهای چهارضلعی $ABCD$ با هم مساوی باشند. چهارضلعی $MNEF$ لوزی است. و اندازه هر ضلع این لوزی نصف طول قطر چهارضلعی $ABCD$ است.

$$MN = EF = \frac{AC}{2}, FM = EN = \frac{BD}{2} \Rightarrow MN + NE + EF + FM = 2 \left(\frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} \right) = AC + BD$$

سوال های تکمیلی :

- ۱- یک n ضلعی ۹۰ قطر دارد . مجموع زاویه های داخلی آن را حساب کنید.
- ۲- اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی ۳ ضلع اضافه شود ۳۶ قطر به قطرهای آن اضافه می شود . مجموع زاویه های داخلی n ضلعی را حساب کنید.
- ۳- مجموع زاویه های خارجی n ضلعی محدب را حساب کنید.
- ۴- ثابت کنید یک چند ضلعی محدب نمی تواند بیش از سه زاویه حاده داشته باشد.
- ۵- در شش ضلعی محدب $ABCDEF$ زاویه های روبرو دو به دو به دو متساوی اند
 $(\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F)$. ثابت کنید اضلاع روبرو دو به دو با هم موازی اند.
- ۶- نشان دهید در هر چهار ضلعی محدب ، زاویه ی حاده بین نیمسازهای دو زاویه مقابل ، مساوی نصف تفاضل دو زاویه ی دیگر است.
- ۷- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع هر خطی (به جز قطر های متوازی الاضلاع) که از مرکز می گذرد . آن را به دو ذوزنقه همنهشت تقسیم می کند.
- ۸- ثابت کنید در هر ذوزنقه متساوی الساقین زاویه های مقابل مکمل اند و برعکس.
- ۹- روی امتداد ضلع BC از لوزی $ABCD$ نقطه E را چنان اختیار می کنیم که
 $AE = CD$ نشان دهید DE نیمساز زاویه $\angle AEB$ است.



- ۱۰- در مربع $ABCD$ از رأس A خط دلخواهی رسم می کنیم تا ضلع CD را در نقطه E قطع کند. اگر F نقطه ی برخورد نیمساز زاویه ی $\angle BAE$ با ضلع BC باشد . ثابت کنید : $BF + DE = AE$
- ۱۱- نشان دهید برای آنکه چهار نیمساز زاویه های داخلی یک ذوزنقه از یک نقطه بگذرند کافی است که مجموع طول های قاعده ها ، مساوی مجموع طول ساق ها باشد.
- ۱۲- از متوازی الاضلاعی طول دو قطر و یک ضلع معلوم است . این متوازی الاضلاع را رسم کنید

نقد و بررسی :

- ❖ در تعریف چند ضلعی صفحه ۵۴ از شرط هم صفحه بودن رئوس حرفی به میان نیامده است . چندضلعی که رئوس آن در یک صفحه نباشند چند ضلعی فضایی نام دارد این چند از نظر مجموع زاویه های داخلی ، محدب و مقعر بودن و با چندضلعی در صفحه متفاوت است .
- ❖ تعریف چند ضلعی محدب صفحه ۵۵ بدون ارائه هیچ گونه کاربردی در حل مسائل و قضیه های کتاب مطرح شده است.
- ❖ تعریف چهارضلعی ها بسیار منطقی و خوب ارائه شده و نتایج و قضیه های حاصل از این تعریف ها کاملاً با هم سازگارند.
- ❖ اگر چه اغلب قضیه ها به صورت فعالیت یا کار در کلاس مطرح شده است . ولی مشارکت دانش آموز در روند استدلال بسیار اندک است . و اغلب سوالهای مطرح شده در متن قضیه ها به طور شهودی نیز قابل پاسخ هستند.
- ❖ در کل فصل نامگذاری چهارضلعی ها فقط با چهار حرف ثابت D, C, B, A است که این باعث می شود دانش آموز در مواجهه با مسائل خارج از چارچوب کتاب درسی دچار سردرگمی شود.
- ❖ مسائل کاربردی و مدل سازی در این فصل مطرح نشده است (به جز کار در کلاس صفحه ۶۱).
- ❖ در تمرین های صفحه ۶۴ متن سوال های ۵ و ۸ بسیار طولانی است و دانش آموز را دچار سردرگمی و اضطراب می کند.
- ❖ بهتر بود از مسائل ترسیم با خطکش و پرگار نیز در تمرینات استفاده می شد.

تهیه کننده :

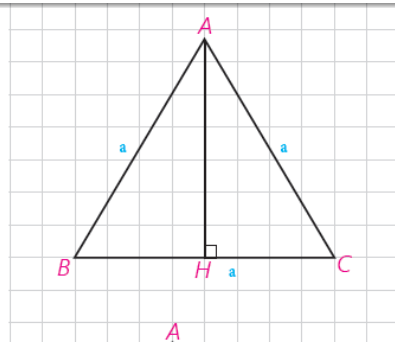
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل ۳

درس دوم : مساحت و کاربردهای آن

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان



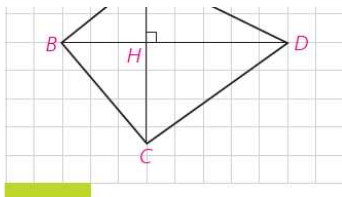
کاردکلاس

فرض کنیم اندازه هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم می کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟
 $\Delta ABH \cong \Delta ACH \Rightarrow BH = CH = \frac{a}{2}$
 به کمک قضیه فیثاغورث نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$\Delta ABH ; \angle H = 90^\circ \Rightarrow AH^2 + BH^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH \times BC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و DB برهم عموداند.

$$S_{ADB} = \dots\dots\dots S_{\Delta ADB} = \frac{1}{2}BD \times AH$$

$$S_{DBC} = \dots\dots\dots S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2}BD \times CH$$

۶۵

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD \times (AH + HC) = \frac{1}{2}BD \times AC$$

با جمع این دو مساحت داریم،

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD(\dots + \dots) = \frac{1}{2}BD \dots$$

بنابراین؛

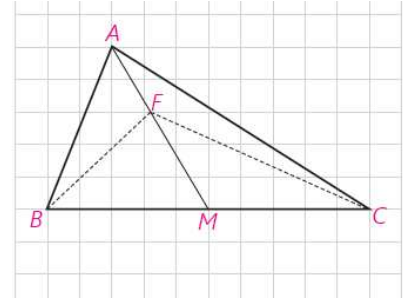


مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن برهم عمودند برابر است با نصف حاصلضرب اندازه های دو قطر آن چهارضلعی

کاردکلاس

نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

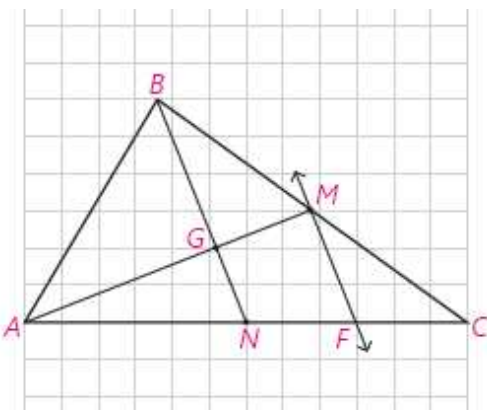
اگر F هر نقطه‌ای روی میانه AM به جز نقطه M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟



الف: در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle ABM} &= \frac{1}{2} AH \times BM \\ S_{\triangle ACM} &= \frac{1}{2} AH \times CM \end{aligned} \right\} \xrightarrow{BM=MC} S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM}$$

ب: بله زیرا FM نیز میانه BFC است.



فعالیت

در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانه مثلث را ثابت می‌کنید.
دو میانه AM و BN از $\triangle ABC$ را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطه G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانه BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟ N وسط ضلع AC است؛ بنابراین، $AF = 2NF$ چرا؟ در نتیجه، $AM = 3GM$ چرا؟

$$\triangle BCN; MF \parallel BN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{FN} = \frac{CM}{MB} = 1$$

$$\Rightarrow CF = FN$$

$$AN = NC = 2NF$$

$$\Rightarrow AF = AN + FN = 2FN + FN = 3FN$$

$$\triangle AMF; MF \parallel GN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AG}{GM} = \frac{AN}{NF} = 2$$

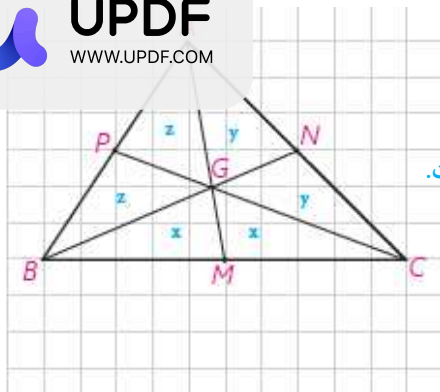
$$AG = 2GM \Rightarrow AM = 3GM$$

بنابراین، $GM = \frac{1}{3} AM$ و $AG = \frac{2}{3} AM$ بین A و M است؛ در نتیجه G تنها نقطه‌ای روی نیم خط AM است که $AG = \frac{2}{3} AM$. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{2}{3} BN$. پس برای هر دو میانه دلخواه نقطه G با این ویژگی به دست می‌آید در نتیجه هر سه میانه در G هم‌رس‌اند.

به روش دیگر، می‌توانید از M به N وصل کنید و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید؛ چون $AB = 2MN$ پس $AG = 2GM$ و $BG = 2GN$. اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.

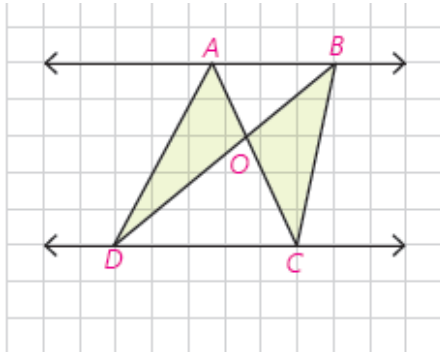
سه میانه هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث هم‌رس‌اند؛ به طوری که فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است.





با رسم سه میانه مثلث نشان دهید، سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم مساحت تقسیم می کنند. بنابر فعالیت قبلی $S_{BGM} = S_{MGC} = x$. چرا؟ زیرا GM میانه مثلث BGC است. به همین ترتیب برای بقیه برقرار است.

اکنون میانه AM را در نظر بگیرید، $2z + x = 2y + x$ در نتیجه $y = z$. پس، $x = y = z$. میانه BN را در نظر بگیرید $2z + y = 2x + y$ در نتیجه، $z = x$.



ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به طوری که دو خط AC و BD در نقطه ای مانند O متقاطع باشند. می دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$. چگونه از آن نتیجه می گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟

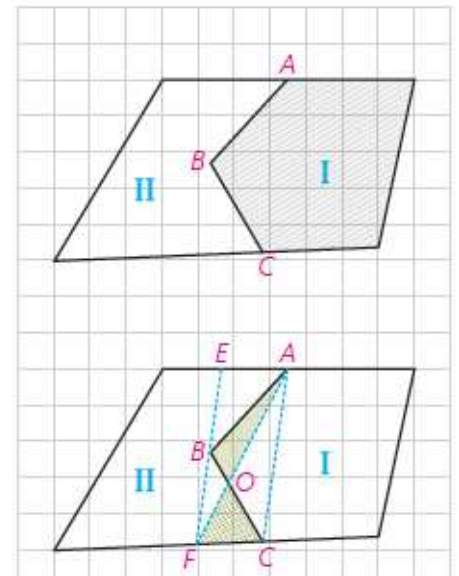
این ویژگی که در هر دوزنقه نیز برقرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.

$$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABCD} \Rightarrow S_{\triangle ACD} - S_{\triangle OCD} = S_{\triangle ABCD} - S_{\triangle OCD} \Rightarrow S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC}$$

یک مسئله.

در شکل دو مزرعه I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین های کشاورزی می خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت های زمین های آنها تغییر نکند. چگونه شما می توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟ فکر اصلی این عمل براساس مسئله قبلی است.

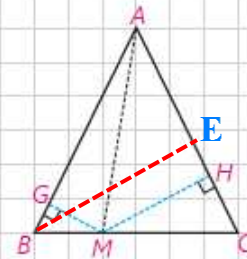
از A به C متصل، و از B موازی خط AC رسم کنید تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. اکنون نشان دهید این مرز مشترک جدید می تواند مرز AF باشد؛ چرا؟ البته می تواند مرز EC نیز باشد.



زیرا دو پاره خط AC, BF موازی و AF, BC یکدیگر را در نقطه O قطع کرده اند پس بنا به قضیه قبل $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OCF}$

با توجه به اینکه چهار ضلعی AEBC نیز دوزنقه می باشد و به روش مشابه می توان به جای AF, BC از EC, AB استفاده کرد.

در مثلث متساوی الساقین ABC که $AB = AC$ است؛ نقطه دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C در نظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMB} و S_{AMC} را بنویسید. مساحت مثلث $\triangle ABC$ را نیز وقتی پاره خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید. چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



در هر مثلث متساوی الساقین ABC که $AB = AC$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از AB, AC برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \times MG, \quad S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} AC \times MH, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BE$$

$$S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ACM} = S_{\triangle ABC} \xrightarrow{AB=AC} \frac{1}{2} AC \times MG + \frac{1}{2} AC \times MH = \frac{1}{2} AC \times BE$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AC \times (MG + MH) = \frac{1}{2} AC \times BE \Rightarrow MG + MH = BE$$

به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین ABC ، قدر مطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعده BC از خط‌های شامل دو ساق برابر اندازه ارتفاع وارد بر ساق است.

فرض کنیم P نقطه‌ای روی امتداد ضلع BC باشد. اگر PM و PN فاصله‌های نقطه P از دو ساق مثلث ABC ($AB = AC = a$) باشند. پاره خط AP و ارتفاع BH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم.

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} AB \times PM, \quad S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} AC \times PN, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$$

$$|S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ACP}| = S_{\triangle ABC} \xrightarrow{AB=AC=a} \left| \frac{1}{2} a \times PM - \frac{1}{2} a \times PN \right| = \frac{1}{2} a \times BH$$

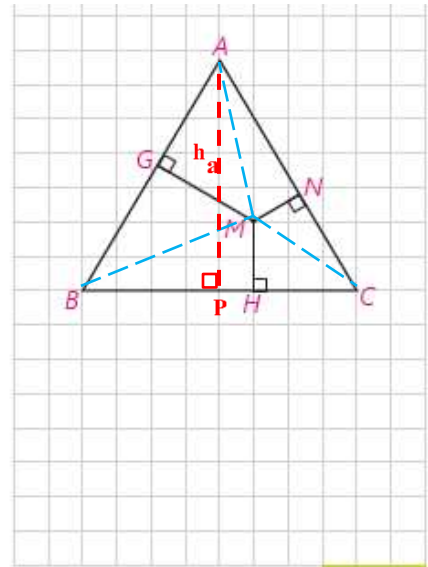
$$\Rightarrow \frac{1}{2} a \times |PM - PN| = \frac{1}{2} a \times BH \Rightarrow |PM - PN| = BH$$

فعالیت

نقطه دلخواه M را درون یک مثلث متساوی الاضلاع با ضلع به اندازه a در نظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث MAC، MBC، MAB را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت ΔABC چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$MH + MN + MG = AP \dots$$

مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث ...



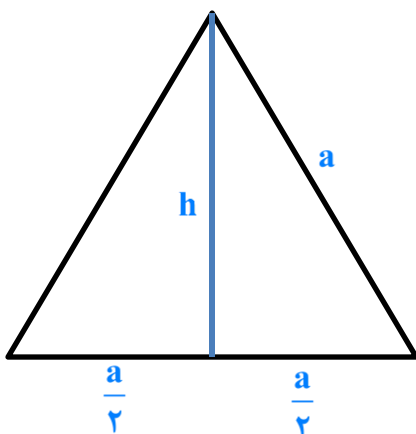
۶۸

$$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} AB \times MG = \frac{1}{2} a \times MG, S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} AC \times MN = \frac{1}{2} a \times MN, S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} BC \times MH = \frac{1}{2} a \times MH$$

$$S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC} + S_{\Delta BMC} = S_{\Delta ABC} \Rightarrow \frac{1}{2} a \times MG + \frac{1}{2} a \times MN + \frac{1}{2} a \times MH = \frac{1}{2} a \times AP \Rightarrow MG + MN + MH = h_a$$

سوال بالای صفحه ۶۹

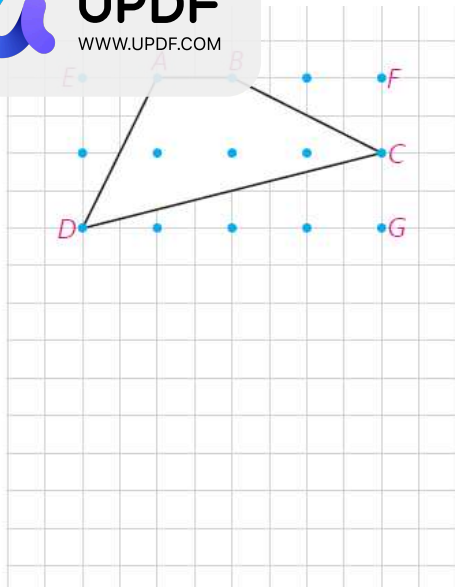
اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع فاصله‌های نقطه M درون مثلث از سه ضلع، برابر ۴، ۲ و ۶ باشند. اندازه ضلع مثلث را محاسبه کنید.



$$h = 2 + 4 + 6 = 12$$

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow 12^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow 144 = \frac{3}{4} a^2 \Rightarrow a^2 = 192 \Rightarrow a = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$



$$S_{\square DEFG} = 4 \times 2 = 8$$

$$S_{\triangle AED} = S_{\triangle BCF} = \frac{1 \times 2}{2} = 1, S_{\triangle CDG} = \frac{4 \times 1}{2} = 2$$

$$S_{\square ABCD} = 8 - (1 + 1 + 2) = 4$$

مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند؛ به‌طوری که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای برای چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.

به‌طور مثال در شکل بالا چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی شبکه‌ای است که دارای ۴ نقطه مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

در این چهارضلعی، شبکه‌ای با به‌کاربردن مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و مستطیل نشان دهید مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۴ واحد سطح است. ←

فعالیت صفحه ۶۹

فعالیت

- ۱- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟
حداقل ۳ نقطه مرزی - زیرا برای رسم مثلث شبکه‌ای حداقل به سه نقطه نیاز داریم
- ۲- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه درونی می‌تواند داشته باشد؟ صفر

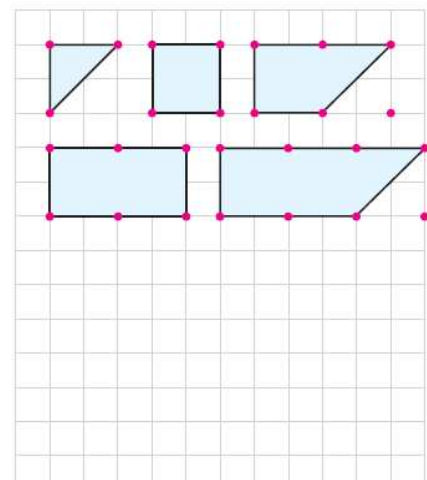
جدول زیر را با محاسبه مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

$$i = 0, b = 3, 4, 5, \dots$$

تعداد نقاط مرزی i	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	$\frac{5}{2}$	۳

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

$$S = \frac{b}{2} - 1 + 1$$

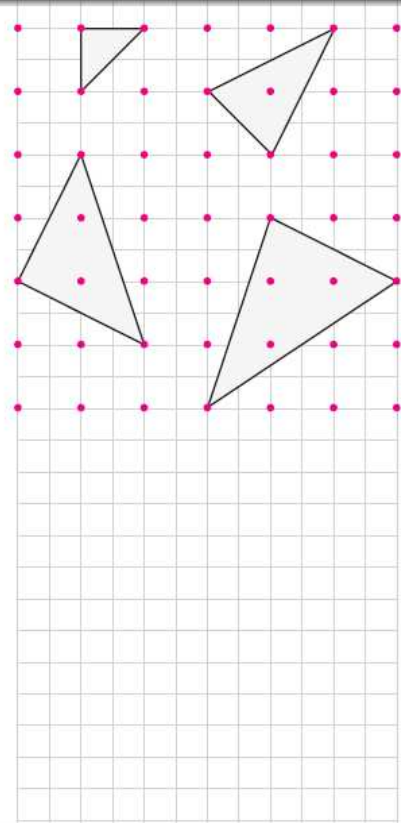


۴- اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای $b = 3$ باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید. (نتیجه‌گیری $S = \frac{b}{2} - 1 + i$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید در نظر داشته باشید.)

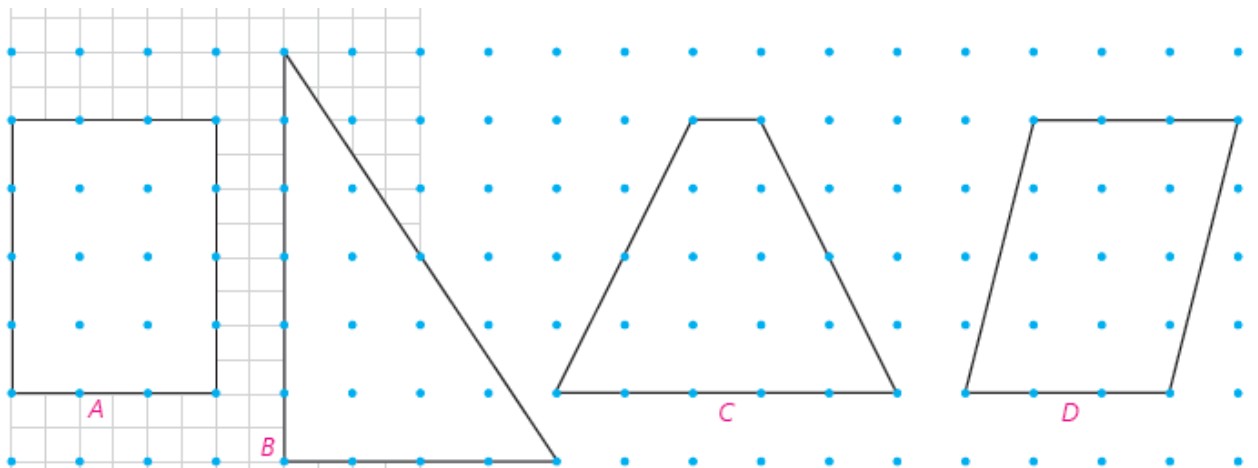
تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{2} - 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
S	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$

با تکمیل جدول بالا و مقایسه اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضرب‌هایی ظاهر می‌شوند.

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i$$



کاردکلاس صفحه ۷۱



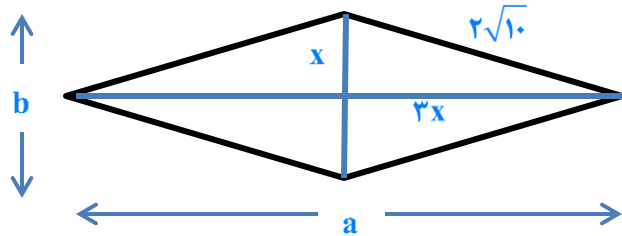
$$S_A = 3 \times 4 = 12$$

$$S_B = \frac{4 \times 6}{2} = 12$$

$$S_C = \frac{4 \times (1 + 5)}{2} = 12$$

$$S_D = 4 \times 3 = 12$$

چند ضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد نقاط درونی i	۶	۷	۸	۹
مساحت	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

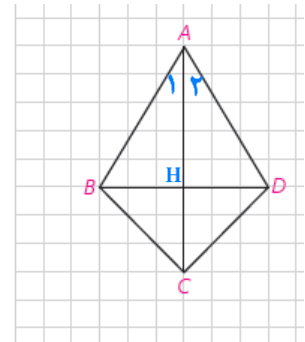


۱- در یک لوزی اندازه هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

$$x^2 + (3x)^2 = (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = 40 \Rightarrow 10x^2 = 40 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow a = 12, b = 4 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$$

۲- در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل $AB = AD$ و $BC = CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عموداند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.



$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \\ CB = CD \\ AC = AC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ACD \Rightarrow \angle A_1 = \angle A_2$$

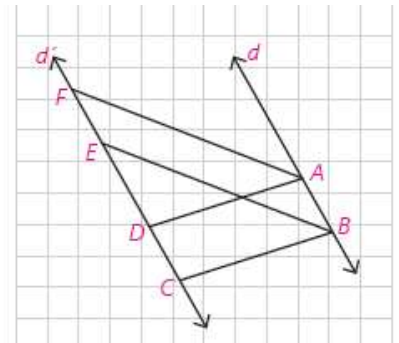
$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \\ \angle A_1 = \angle A_2 \\ AH = AH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABH \cong \triangle ADH \Rightarrow \angle H_1 = \angle H_2 = 90^\circ$$

$$AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

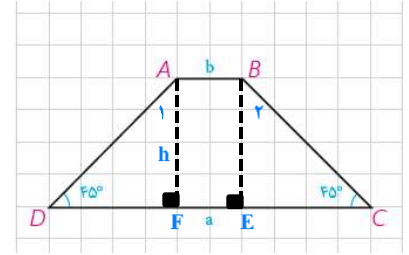
۳- در شکل دو خط d و d' موازی اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟

فرض کنیم فاصله دو خط موازی d, d' برابر h باشد در این صورت:

$$S_{ABCD} = S_{ABEF} = AB \times h$$



۴- در دوزنقه شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه مجاور به یک قاعده 45° است. مساحت دوزنقه را بر حسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.



عمودهای BF , AF را بر CD وارد می‌کنیم چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است پس:

$$AB = EF = b$$

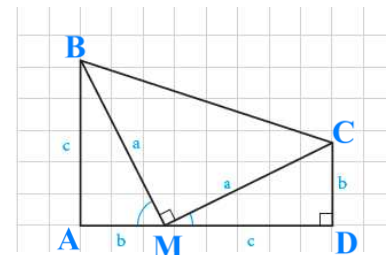
$$\triangle ADF; \angle A_1 = \angle D = 45^\circ \Rightarrow AF = DF = h$$

$$\triangle BCE; \angle B_1 = \angle C = 45^\circ \Rightarrow BE = CE = h$$

$$\Rightarrow CD = 2h + b = a \Rightarrow h = \frac{a-b}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \times \frac{a-b}{2} = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

۵- مساحت دوزنقه مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



$$S_{\square ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \times AD = \frac{1}{2}(b+c)(b+c) = \frac{1}{2}(b+c)^2$$

$$S_{\square ABCD} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle CDM} + S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}c^2 = bc + \frac{1}{2}a^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(b+c)^2 = bc + \frac{1}{2}a^2 \xrightarrow{\times 2} (b+c)^2 = 2bc + a^2$$

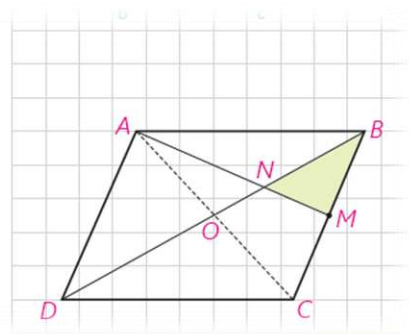
$$\Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

۶- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، M وسط ضلع BC است و پاره خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید:

$$S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$

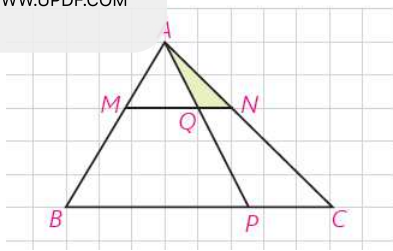
$$\triangle ABC \cong \triangle ACD \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD} \quad [1]$$

میانه‌های هر مثلث آن را به شش قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کنند:



$$\triangle ABC; BM = MC, AO = OC \Rightarrow S_{\triangle MNB} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} \quad [2]$$

$$[1], [2] \Rightarrow S_{\triangle MNB} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} S_{\square ABCD} \right) = \frac{1}{12} S_{\square ABCD}$$



۷- در مثلث ABC، خط موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$. همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3}$ است. S_{MQPB} و S_{AQN} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

$$\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle APC} \quad [1]$$

$$\triangle ABC; MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \\ \triangle AQN \sim \triangle APC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ANQ}}{S_{\triangle APC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\triangle APC} = 9S_{\triangle ANQ} \quad [2]$$

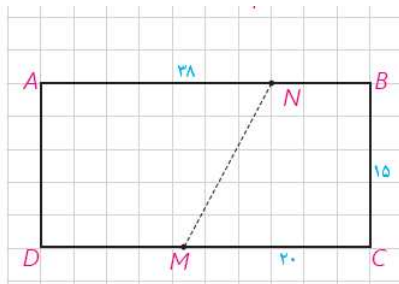
$$[1], [2] \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 9(4S_{\triangle APC}) = 36S_{\triangle APC} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{PB}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{\triangle APB} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$$

$$\triangle ABC; MQ \parallel BP \Rightarrow \triangle AQM \sim \triangle ABP$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AMQ}}{S_{\triangle APB}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\triangle APB} = 9S_{\triangle AMQ} \Rightarrow S_{\square BPQM} = \frac{8}{9}S_{\triangle APB} \quad [2]$$

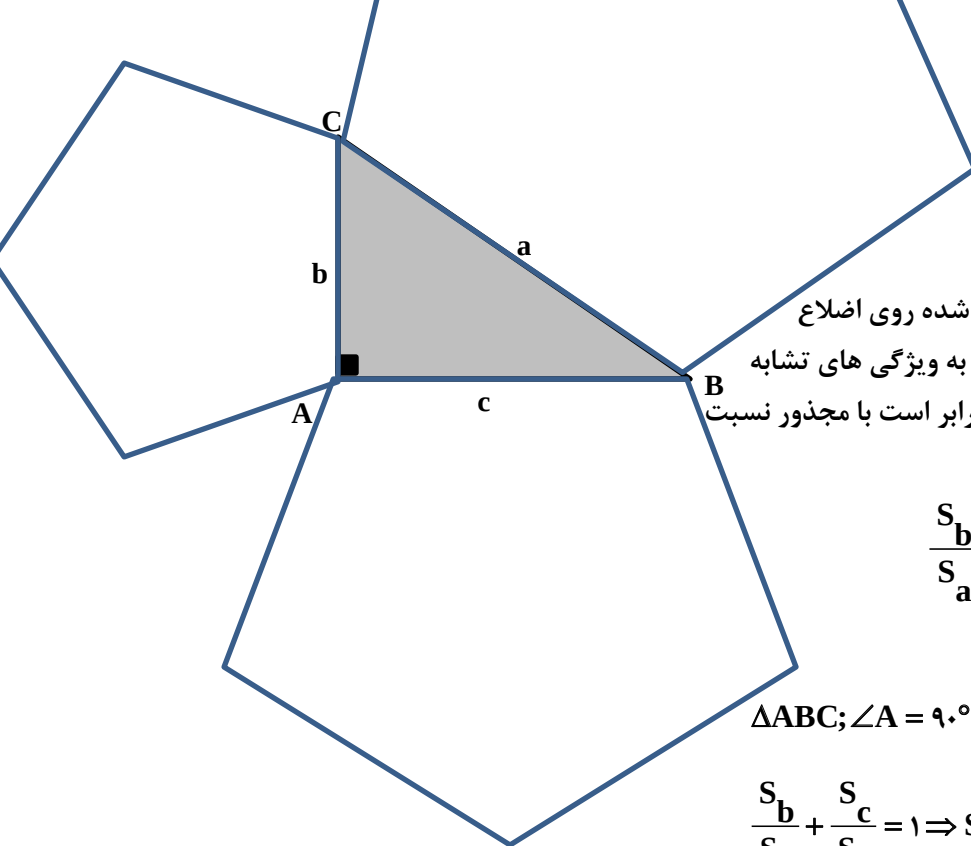
$$[1], [2] \Rightarrow S_{\square BPQM} = \frac{8}{9} \left(\frac{3}{4}S_{\triangle ABC} \right) = \frac{2}{3}S_{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{S_{\square BPQM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{3}$$



۸- زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطه M که $MC = 20$ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعه با مساحت های مساوی بین آن دو تقسیم شود.

کافی است نقطه N را روی ضلع AB چنان اختیار کنیم که $AN = 20$ در این صورت دو ذورنقه با قاعده های ۲۰ و ۱۸ و ارتفاع ۱۵ تشکیل می شود.

۹- سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم الزاویه می سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت های ساخته شده روی ضلع های زاویه قائمه است.



اگر مساحت چندضلعی های متشابه تشکیل شده روی اضلاع a, b, c را به ترتیب S_a, S_b, S_c بنامیم بنا به ویژگی های تشابه نسبت مساحت های دو چند ضلعی متشابه برابر است با مجذور نسبت اضلاع متناظر آنها. به عبارت دیگر:

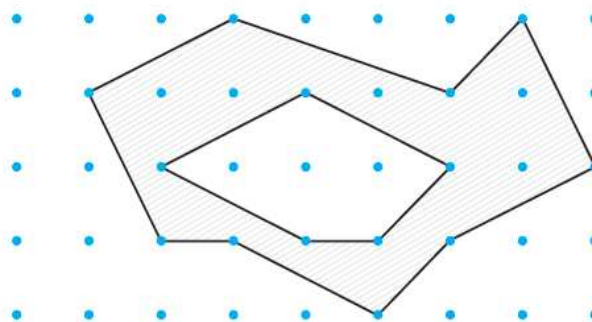
$$\frac{S_b}{S_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \frac{S_c}{S_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

از طرف دیگر:

$$\Delta ABC; \angle A = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{S_b}{S_a} + \frac{S_c}{S_a} = 1 \Rightarrow S_b + S_c = S_a$$

۱۰- با توجه به مساحت چندضلعی های شبکه ای، مساحت قسمت سایه زده را محاسبه کنید.



$$b = 14, i = 5, S = \frac{b}{2} - 1 + i$$

$$\Rightarrow S = 7 - 1 + 5 = 11$$

۱۱- یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

مساحت به روش معمول : $S = m \times n$

مساحت به کمک قضیه پیک :

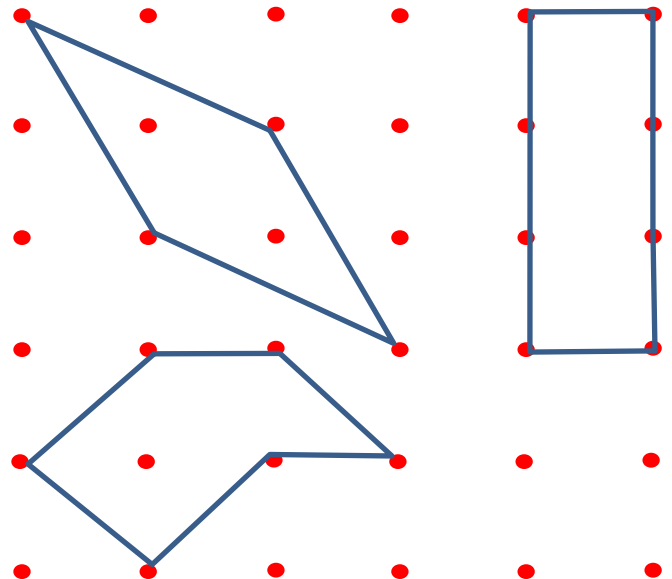
$$b = 2m + 2n$$

$$i = (m+1) \times (n+1) - (2m + 2n) = mn - m - n + 1$$

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i = \frac{2m + 2n}{2} - 1 + (mn - m - n + 1) = m + n - 1 + mn - m - n + 1 = mn$$

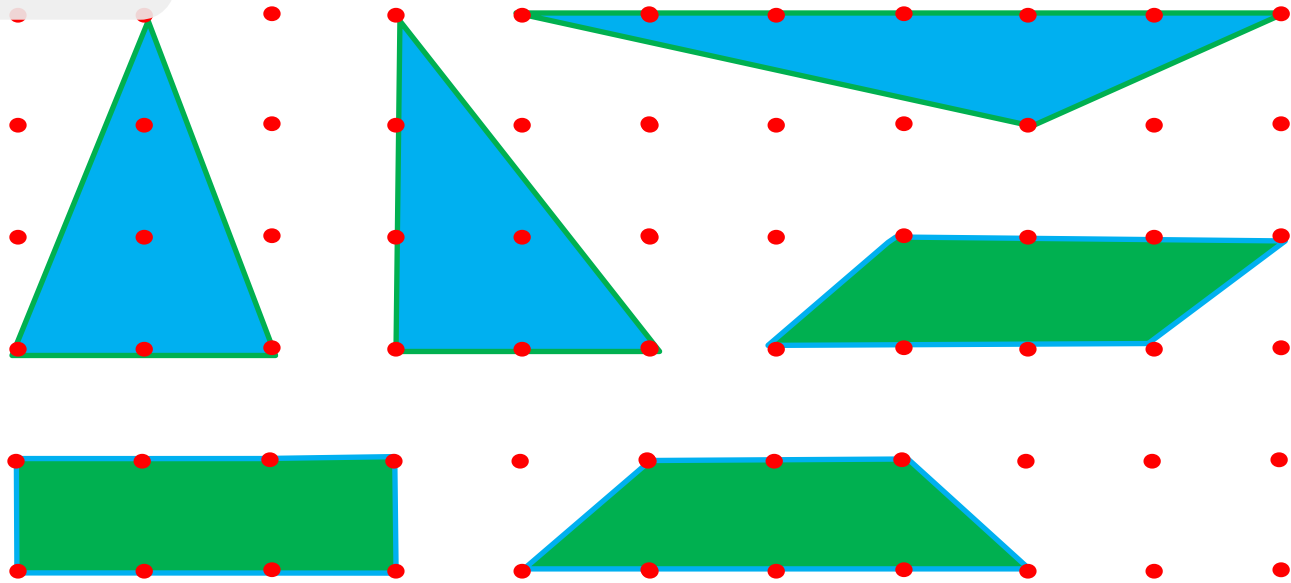
۱۲- مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

b	۴	۶	۸
i	۲	۱	۰
$S = \frac{b}{2} - 1 + i$	۳	۳	۳



تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان



تهیه کننده :

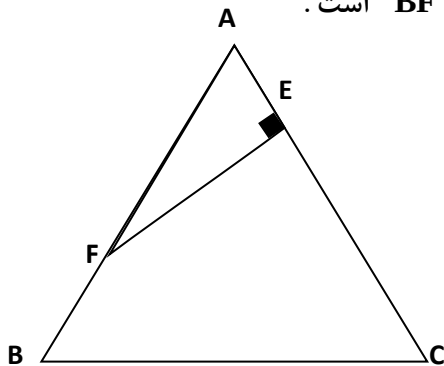
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

تمرینات تکمیلی :

۱- ثابت کنید مساحت هر ذوزنقه برابر است با حاصل ضرب اندازه یک ساق در فاصله ی آن از وسط ساق دیگر.

۲- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الاضلاع و $EF = 2\sqrt{3}$, $BF = 2$ است .

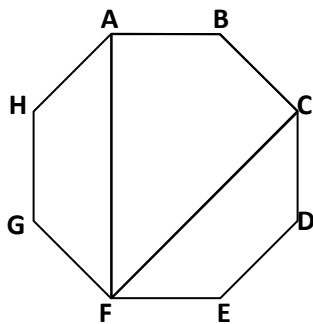
مساحت ناحیه سایه زده را حساب کنید.



۳- اگر هشت ضلعی مقابل ، منتظم و محیط آن برابر ۳۲ باشد . و قطر های

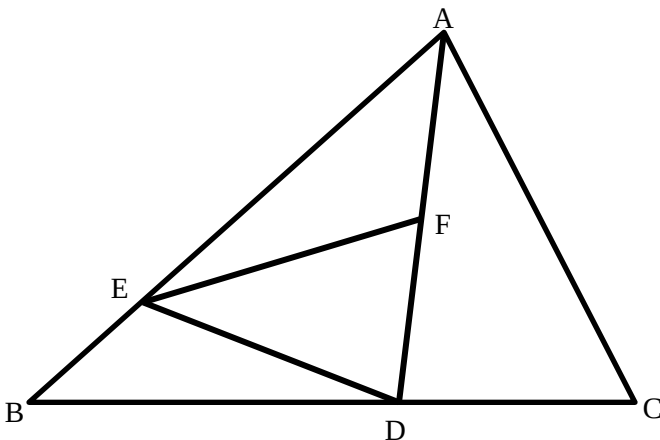
FA و FC زاویه ی EFG را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده باشند .

مساحت چهار ضلعی $ABCF$ را حساب کنید ؟

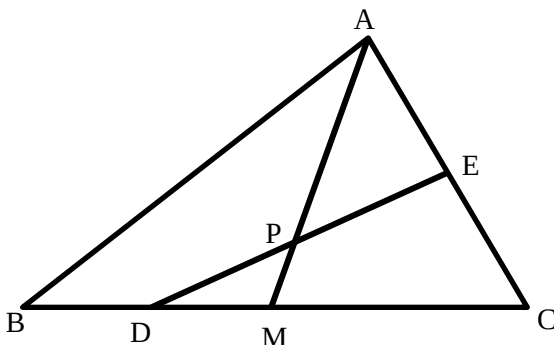


۴- در شکل مقابل مساحت $\triangle ABC$ برابر ۹۰ سانتی متر مربع و $BD = 2DC$, $BE = \frac{1}{4}EA$ و نقطه ی F وسط

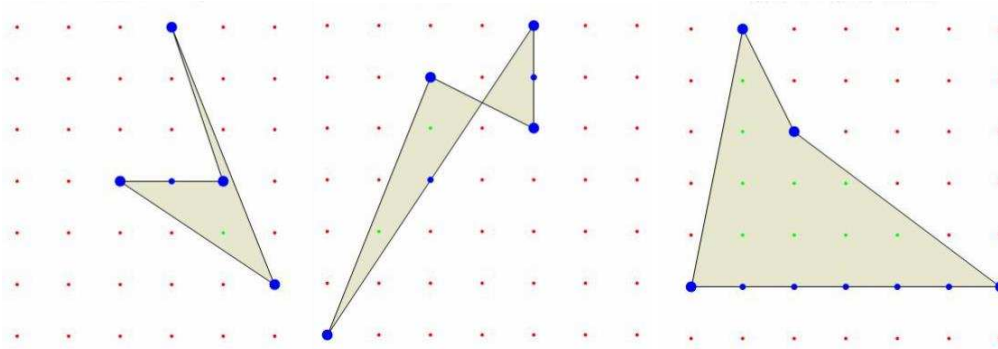
پاره خط AD است . مساحت $\triangle DEF$ را حساب کنید.



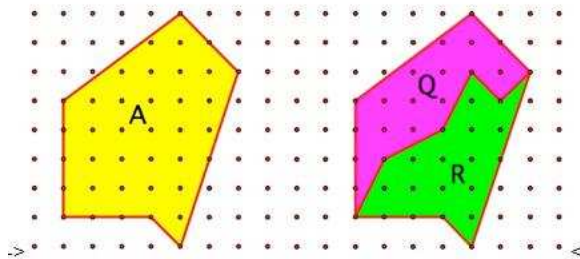
۵- در شکل مقابل AM میانه وارد بر BC است نشان دهید اگر $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle CDE}$ آنگاه $AP \times EP = DP \times MP$



۶- مساحت هر یک از شکل های زیر را به کمک قضیه پیک حساب کنید.



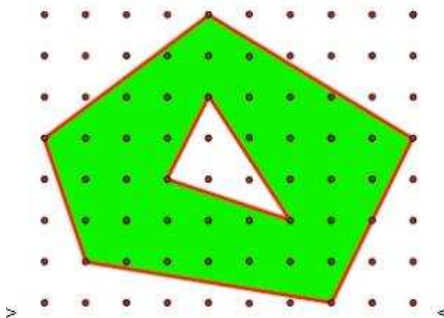
۷- در صفحه مختصات نقطاتی که طول و عرض آنها اعداد صحیح می باشند را علامت گذاشته ایم . مربعی که هیچ یک از این نقاط ، نقطه درونی نباشد. حداکثر چه مساحتی دارد؟ آیا اگر این سوال را به کمک قضیه پیک حل می کردیم جواب نهایی تغییر می کرد ؟ چرا ؟



۸- به کمک قضیه پیک در شکل مقابل درستی یا نادرستی رابطه زیر را بررسی کنید:

$$S_Q + S_R = S_A$$

۹- به کمک قضیه پیک در شکل مقابل درستی یا نادرستی رابطه زیر را بررسی کنید:



مساحت قسمت رنگی = مساحت رنگ نشده - مساحت کل شکل

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

نقد و بررسی :

- ❖ اگر چه دانش آموز در دوره متوسطه اول با مساحت آشنا شده است ولی چیزی از اهمیت لزوم تعریف مساحت کم نمی کند . بهتر بود تعریف مساحت و اثبات فرمول های مساحت چند ضلعی های متعارف بررسی می شد.
- ❖ مساحت مثلث متساوی الاضلاع صفحه ۶۵ ارائه شده ولی هیچ مساله ی یا کاربردی برای مساحت مثلث متساوی الاضلاع بیان نشده است.
- ❖ همرسی سه میانه در فعالیت صفحه ۶۷ به روشی بسیار زیبا ثابت شده ولی درمورد کاربردهای فراوان این قضیه در حل مسائل هیچ اشاره ای نشده است.
- ❖ ایده استفاده از قضیه پیک در کتاب درسی بسیار پسندیده است و بهتر است که از این قضیه در سالهای بعد نیز استفاده شود.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل ۴

هندسه دهم

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

کاردکلاس

به این تصویر دقت کنید. توپ A داخل جیب یکی از بازیکن‌ها و توپ C روی راکت بازیکن دیگر است و بقیه توپ‌های تنیس روی زمین افتاده‌اند.

الف) سه توپ نام ببرید که در یک راستا هستند.

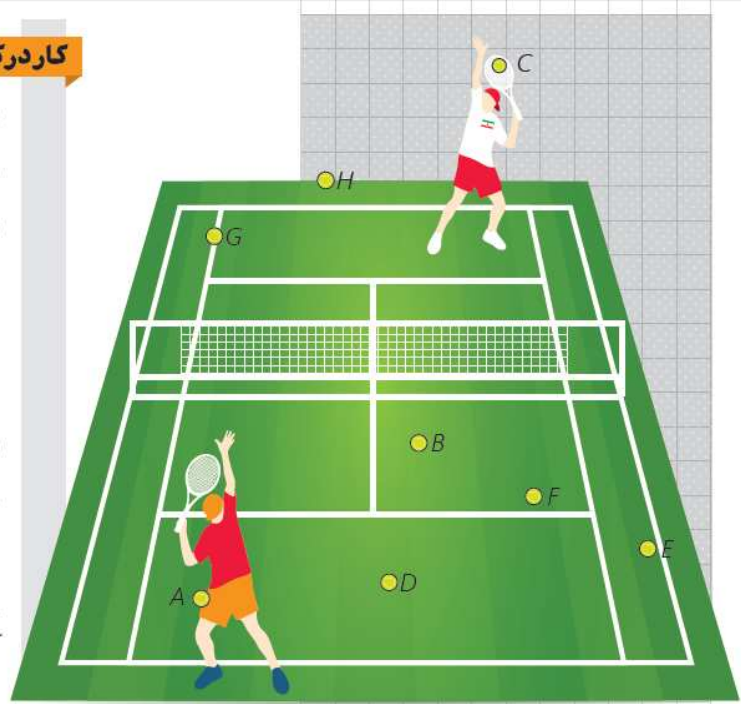
B, F, E

ب) سه توپ نام ببرید که در یک صفحه‌اند ولی هم راستا نیستند.

B, F, D

ج) چهار توپ نام ببرید که همگی در یک صفحه نیستند.

B, F, D, C



فعالیت

مکعب روبه‌رو را در نظر بگیرید.

در هر مورد وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید و بنویسید که آیا می‌توان صفحه‌ای شامل آن دو در نظر گرفت؟

متقاطع : HD و HG

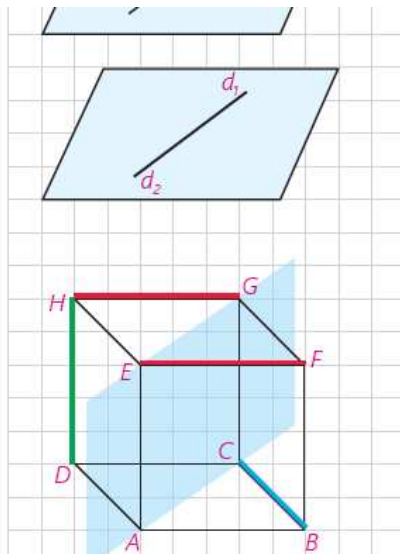
موازی : HG و EF

متقاطع : FD و EC

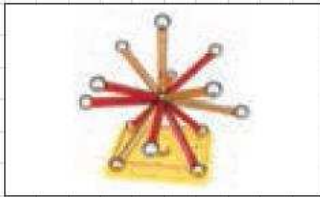
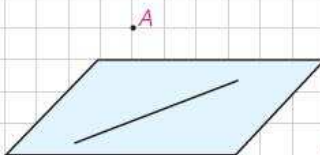
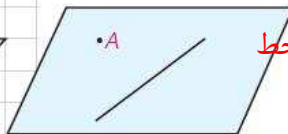
موازی : GC و EA

متنافر : AB و GD

متنافر : BC و HD



تعریف: دو خط را که نقطه اشتراکی ندارند، در نظر بگیرید:



دو خط در فضا نسبت به هم موازی یا متقاطع یا منطبق یا متناظر هستند.

کاردرکلاس

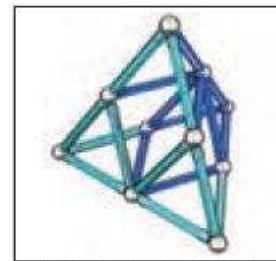
۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید.
(می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)

- در صفحه از هر نقطه چند خط می‌گذرد؟ بی شمار
در فضا چطور؟ بی شمار

- در صفحه از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، چند
خط موازی آن خط می‌توان رسم کرد؟ یک و تنها یک خط
در فضا چطور؟ یک و تنها یک خط

۷۹

۲- در شکل‌های زیر در صورت وجود، به خطوط موازی، متقاطع و متناظر اشاره کنید.



۳- دو خط موازی رسم کنید و آنها را d_1 و d_2 بنامید.
حالا خط d_3 را موازی با d_1 رسم کنید. دو خط d_1 و d_2 نسبت به هم چه وضعی دارند؟ موازی

نتیجه ۱: در یک صفحه دو خط موازی با یک خط موازی اند.

آیا در فضا نیز این نتیجه برقرار است؟ بله

۴- می‌دانیم که در صفحه دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی اند.

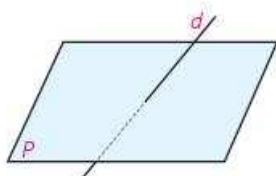
آیا در فضا هم این رابطه برقرار است؟ خیر

۵- خط d با صفحه P متقاطع است.

خط‌های موجود در صفحه P نسبت به خط d چه

وضعیت‌هایی می‌توانند داشته باشند؟

متقاطع یا متناظر



■ حالت‌های مختلف خط و صفحه

► مدادتان را طوری در دست بگیرید که مداد یا امتداد آن، صفحه میز را قطع نکند.

اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم **موازی** هستند.

► نوک مداد را روی میز بگذارید. در این حالت مدادتان در یک نقطه با میز اشتراک دارد.

اگر خط و صفحه در یک نقطه مشترک باشند، نسبت به هم **میتقاطع** هستند.

► مدادتان را روی میز قرار دهید.

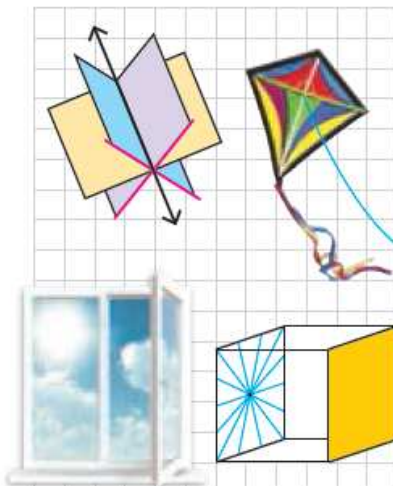
اگر خط و صفحه بی‌شمار نقطه اشتراک داشته باشند خط بر صفحه واقع است.

خط و صفحه در فضا نسبت به هم **موازی** یا **میتقاطع** هستند یا خط بر صفحه **واقع** است.



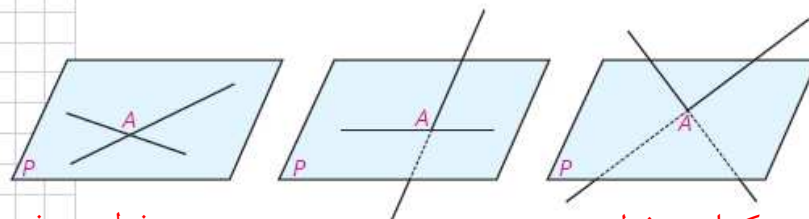
۸۰

کارد رگلاس



- ۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید. (می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)
 - از یک خط در فضا چند صفحه می‌گذرد؟ **بی شمار**
 - از دو خط متقاطع چند صفحه می‌گذرد؟ **یک و تنها یک صفحه**
 - از دو خط موازی چطور؟ **یک و تنها یک صفحه**
 - از یک نقطه غیر واقع بر یک صفحه، چند خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد؟ **بی شمار**

- ۲- دو خط در نقطه A متقاطع اند و صفحه P شامل نقطه A است. با توجه به شکل‌های زیر حالت‌های مختلف خطوط متقاطع و صفحه P را بررسی کنید.



هر دو خط در صفحه P قرار دارند

فقط یکی از دو خط در صفحه P قرار دارد

هیچ یک از دو خط در صفحه P قرار ندارند



۸۱

۳- دو خط d_1 و d_2 در فضا با هم موازی اند.

الف) اگر صفحه‌ای مثل P با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟

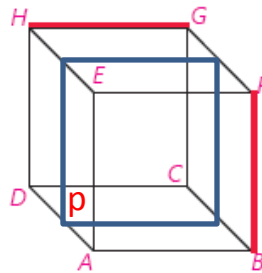
یا با خط دوم موازی است یا خط دوم بر آن واقع است.

ب) اگر صفحه P شامل یکی از این دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

یا با خط دیگر موازی است. یا هر دو خط بر آن صفحه قرار دارند

ج) اگر صفحه P با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟ متقاطع

۴- مسئله قبل را برای حالتی حل کنید که دو خط، متناظرند.



الف) اگر صفحه‌ای با یکی دو خط متناظر موازی باشد می توان سه حالت را در نظر گرفت ۱- با خط دیگر موازی است. مانند صفحه P و دو خط

GH, BF ۲- با خط دیگر متقاطع است

مانند صفحه BFG و خطهای AE ,

GH ۳- خط دیگر بر آن صفحه قرار

دارد. مانند صفحه BFE و خطهای AE

GH ,

ج) اگر صفحه‌ای یکی از دو خط متناظر را قطع کند. می توان سه حالت را در نظر گرفت ۱- با خط دیگر موازی است. مانند صفحه EHD و دو خط GH, BF ۲- با خط دیگر متقاطع است مانند صفحه‌ای که از وسط یال های GH, BF, EF می گذرد و دو خط GH, BF ۳- خط دیگر بر آن صفحه قرار دارد. مانند صفحه BFE و خطهای EH, BF

ب) اگر صفحه‌ای شامل یکی از دو خط متناظر باشد می توان دو حالت را در نظر گرفت ۱- با خط دیگر موازی است. مانند صفحه GHD و دو خط GH, BF ۲- با خط دیگر متقاطع است مانند صفحه BFG و خطهای BF , GH

حالت‌های مختلف دو صفحه

► یک برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحه میز را قطع نکند.

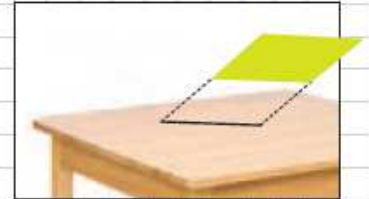
اگر دو صفحه با هم نقطه اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم **موازی** هستند.

► برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحه میز را قطع کند. اشتراک صفحه‌ای که برگه قسمتی از آن است، با سطح میز به چه شکلی است؟

اگر دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم **متقاطع** هستند. خط راستی که اشتراک دو صفحه متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.

► برگه را روی میز قرار دهید.

دو صفحه در فضا نسبت به هم **موازی** یا **متقاطع** یا **منطبق** هستند.



کاردرکلاس

به این مکعب دقت کنید :

الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟ **موازی**

HG و DC چطور؟ **موازی**

EF و GC چطور؟ **متناظر**

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟ **چهار خط**

با چند خط موازی است؟ **سه خط**

با چند خط متناظر است؟ **چهار خط**

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟ **BFG**

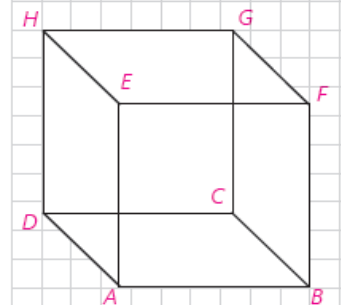
با کدام متقاطع است؟ **EFG, ABC**

بر کدام منطبق است؟ **HAD, HDC**

د) دو صفحه موازی و دو صفحه متقاطع نام ببرید.

EFG, ABC دو صفحه موازی اند

ABF, ABC دو صفحه متقاطع اند



تعامد

نوک مداد خود را مطابق شکل به صورت قائم بر صفحه کتاب نگه دارید. در این حالت مدادتان با بقیه خطهای موجود در صفحه که از نقطه تقاطع مداد و سطح میز می گذرند، چه وضعیتی دارد؟

عمود است

تعریف: فرض کنید خط l در نقطه A صفحه P را قطع می کند. خط l بر صفحه P عمود است؛ هرگاه بر تمام خطهای صفحه P که از نقطه A می گذرند، عمود باشد.

آیا اگر خطی فقط بر یکی از خطوط صفحه ای عمود باشد، می توانیم بگوییم آن خط به آن صفحه عمود است؟

خیر

می توان نشان داد که:

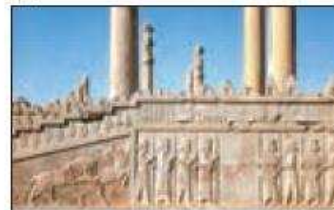
اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه ای، در محل تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

کاردرکلاس

(۲)



(۱)



می دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی اند.

الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی اند؟ **بله**

ب) آیا دو صفحه عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی اند؟ **بله**

ج) دو صفحه عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟ **موازی اند**

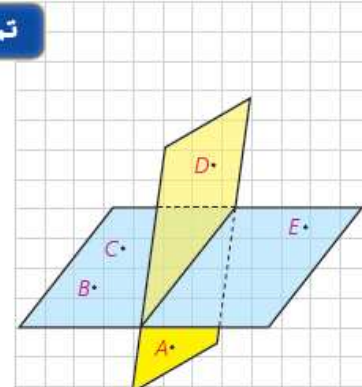
د) اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟ **عمود است**

ه) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید. **آن نیز عمود است**



تمرین

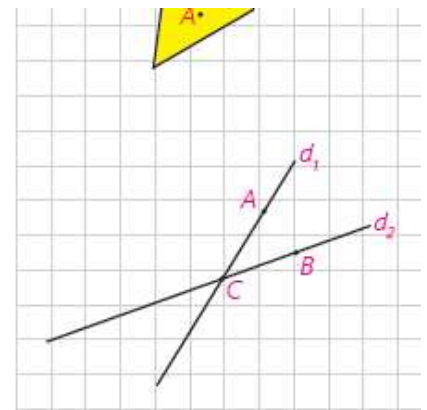
- ۱- با توجه به شکل به سوالات پاسخ دهید :
 الف) چند صفحه در شکل می بینید، نام ببرید.
 ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه اند.
 ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.
 د) دو خط AB و CE نسبت به هم چه وضعی دارند؟ AC و CE چطور؟



الف: دو صفحه - صفحه BCE و صفحه ای که از AD و فصل مشترک می گذرد

ب: B, C, E ج: B, C, E, D د: متنافر - متنافر

- ۲- خطوط d_1 و d_2 و نقاط A و B و C مانند شکل مقابل اند. صفحه P را در حالت های زیر در نظر بگیرید و وضعیت نسبی آن را با هر یک از خطوط d_1 و d_2 بررسی کنید.
 الف) صفحه P شامل نقطه C است.
 ب) صفحه P شامل A و C باشد؛ ولی شامل B نباشد.
 ج) صفحه P شامل نقاط C و B و A است.
 د) صفحه P شامل خط d_1 و نقطه B است.



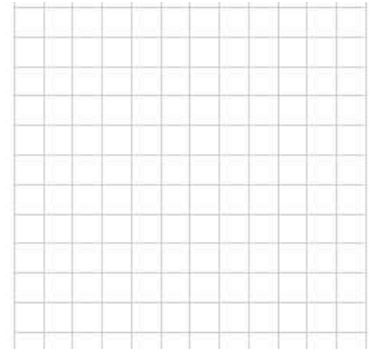
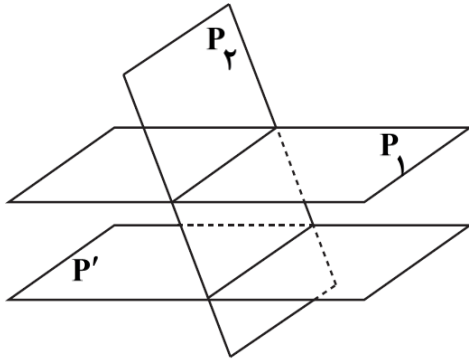
الف: یکی از حالت های زیر رخ می دهد: ۱- هر دو خط روی صفحه P قرار دارند. ۲- فقط یکی از دو خط متقاطع روی صفحه P قرار دارد. و دیگری صفحه P را در نقطه C قطع می کند ۳- هر دو خط صفحه P را در نقطه C قطع می کنند.

ب: یکی از حالت های زیر رخ می دهد: ۱- هر دو خط روی صفحه P قرار دارند. ۲- فقط خط d_1 روی صفحه P قرار دارد. و d_2 صفحه P را در نقطه C قطع می کند.

ج: هر دو خط روی صفحه P قرار دارند.

د: هر دو خط روی صفحه P قرار دارند.

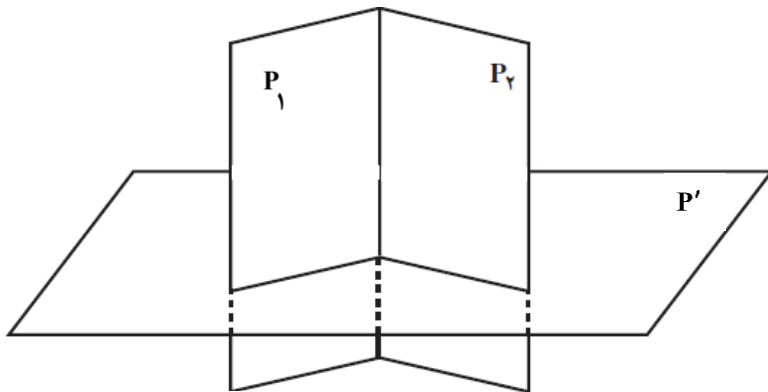
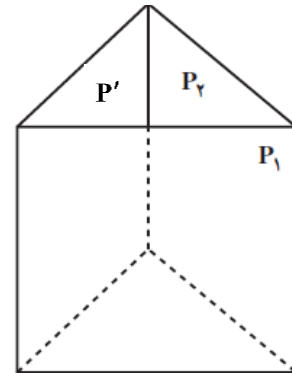
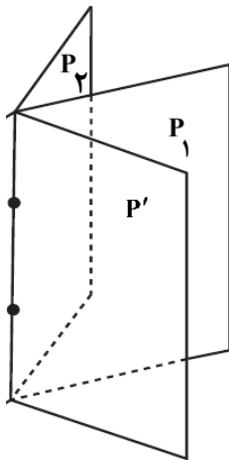
۳- دو صفحه P_1 و P_2 را به گونه‌ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).
الف) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 موازی باشد، نسبت به P_2 چه وضعیتی خواهد داشت.
ب) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 متقاطع است، با P_2 چه وضعیتی می‌تواند داشته باشد.



الف : صفحه P' صفحه P_2 را در خطی موازی خط d قطع

می‌کند.

ب :

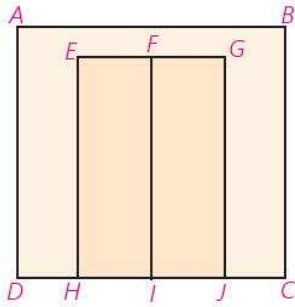


۴- شکل مقابل یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار

می دهد. وضعیت خط ها و صفحه های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحات EFIH و ABCD و FGJI را دو به دو نسبت به هم بررسی

کنید.



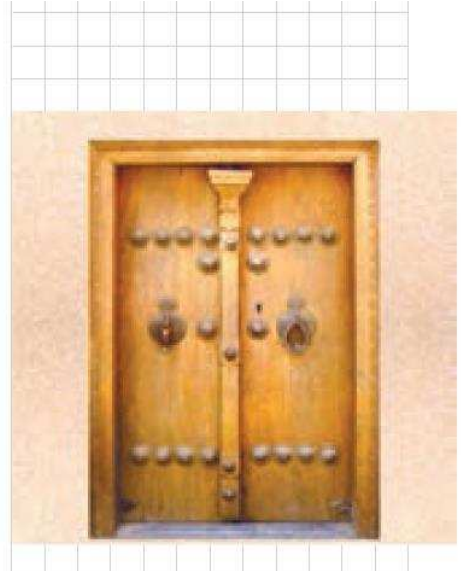
ب) خطوط BC و FI

ج) خطوط AB و FI

د) خطوط EF و FG

ه) خطوط HI و FG

و) یکی از خطوط (به دلخواه) و یکی از صفحات (به دلخواه)



الف: دو صفحه EFIH, FGJI بر هم منطبق اند و صفحه ABCD با هر دوی آن ها موازی است.

ب: موازی - ج: متناظر - د: منطبق - ه: موازی - و: موازی

۵- تجسم کنید دو لنگه در هر کدام 30° باز شده اند، وضعیت خط ها و صفحه های

زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحه های EIKH و ABCD و

JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحه EIKH

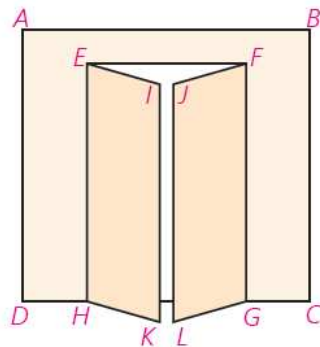
ج) خط JL و صفحه EIKH

د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

ه) خطوط EI و JF

و) خطوط EI و FG

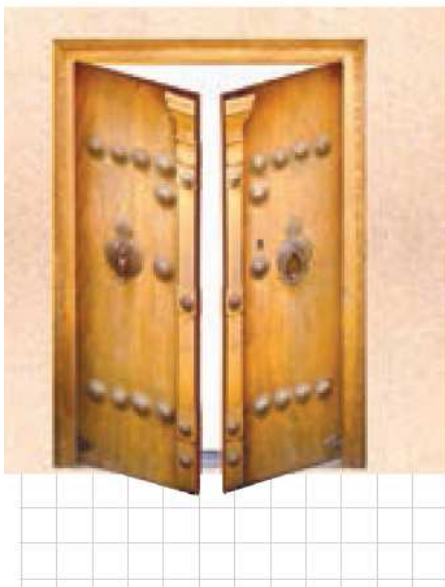
ت) خطوط BC و FJ

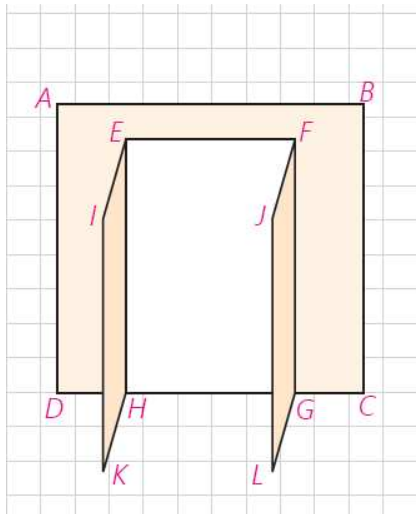


الف: دو به دو متقاطع اند. ب: متقاطع ج: موازی

د: خط EH روی دو صفحه ABCD, EIKH قرار دارد و با صفحه JFGL

ه: متقاطع و: متناظر ز: متناظر





۶- تصور کنید دو لنگه در هر کدام 90° باز شده‌اند. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحات EIKH و ABCD و FGLJ را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

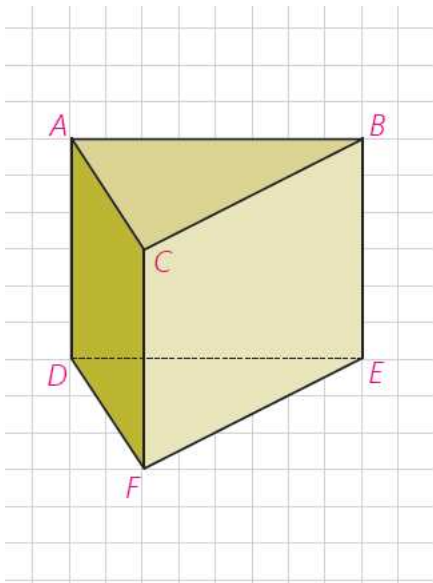
ب) خط FJ و صفحه EIKH موازی

ج) خط JL و صفحه EIKH موازی

د) خطوط EI و FJ موازی

هـ) خطوط FJ و HK موازی

الف : دو صفحه ABCD, EIKH متقاطع ، دو صفحه ABCD, FGLJ متقاطع ، دو صفحه EIKH, FGLJ موازی



۷- منشور سه پهلوی زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

الف) سه جفت خط متمایز دو به دو موازی نام ببرید. **AD, CF, BE**

ب) سه جفت خط متمایز دو به دو متناظر نام ببرید. **CD, EF, AB**

ج) سه جفت خط دو به دو متقاطع نام ببرید. **AB, AC, BC**

د) سه خط هم‌مرس نام ببرید. **AB, AC, AD**

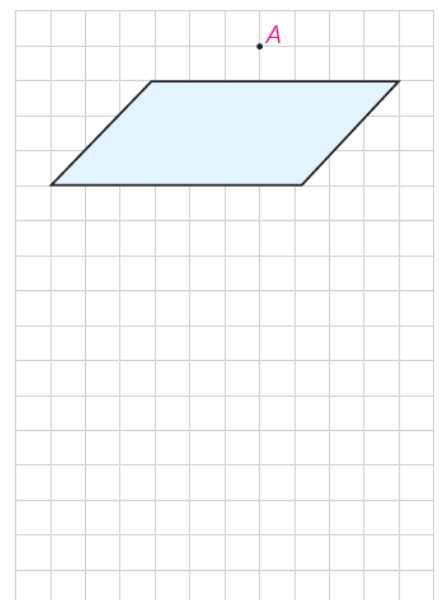
هـ) سه جفت خط و صفحه موازی نام ببرید. **خطهای AB, AC, BC و صفحه DEF**

و) دو صفحه موازی نام ببرید. **ABC , DEF**

ز) سه صفحه دو به دو متقاطع نام ببرید. **ABC , BCFE , ACFD**

۸- از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟

یک و تنها یک خط می‌توان عمود کرد



۹- از هر خط غیر واقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه

عمود باشد؟

الف) خط بر صفحه عمود باشد. **بی شمار صفحه**

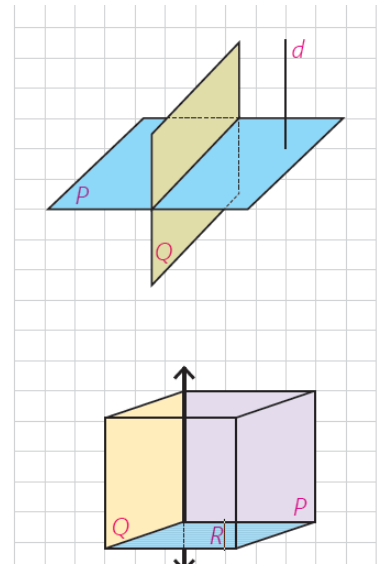
ب) خط بر صفحه عمود نباشد. **فقط یک صفحه**

۱۰- دو صفحه P و Q برهم عمودند و خط d نیز بر صفحه P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد؟

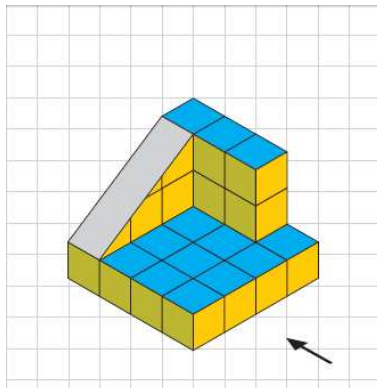
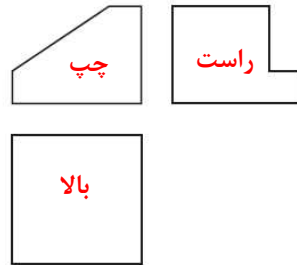
موازی است

۱۱- دو صفحه متقاطع P و Q بر صفحه R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحه R چه وضعیتی دارد؟

عمود است



کار در کلاس

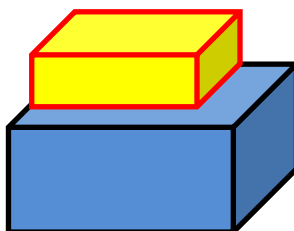


۱- شکل روبه‌رو از نماهای مختلف رسم شده است. مشخص کنید در هر تصویر از کدام جهت به شکل نگاه شده است؟

۲- سعی کنید از جهت‌های مختلف به هر شکل نگاه کرده و آن نما را رسم کنید.

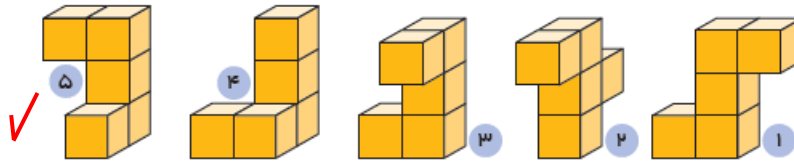
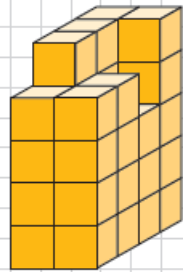
	نمای چپ	نمای بالا	نمای روبه‌رو

۳- دو مکعب مستطیل را روی هم قرار داده‌ایم. ابعاد مکعب مستطیل بالایی از مکعب مستطیل پایینی کمتر است. تصویری از این دو مکعب مستطیل رسم کنید که نمای روبه‌رو و نمای بالا را نشان دهد.



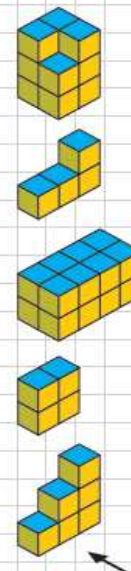


۱- کدام قطعه، شکل سمت راست را به یک مکعب مستطیل کامل تبدیل می کند؟

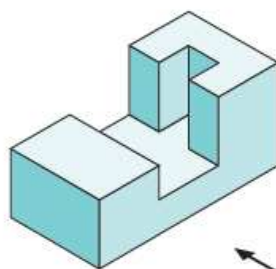
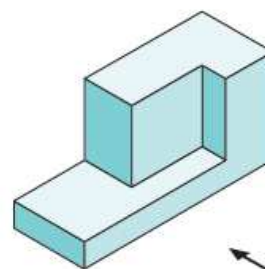


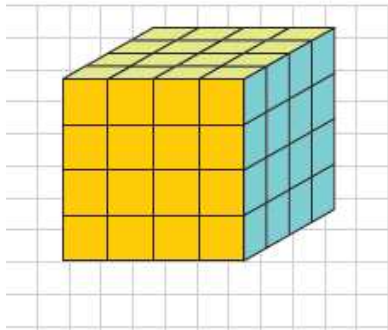
۲- نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید.

نمای بالا	نمای چپ	نمای روبه‌رو

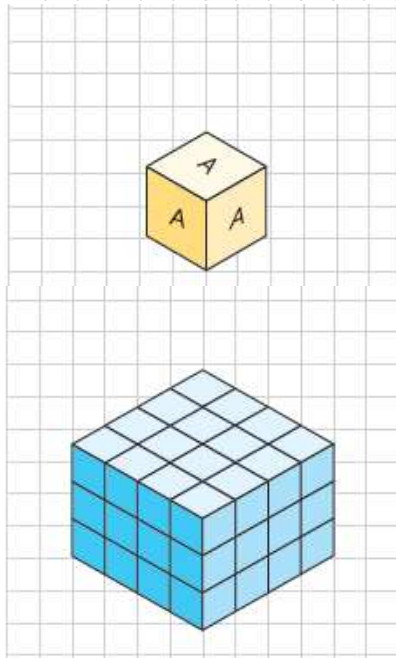


۳- در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.



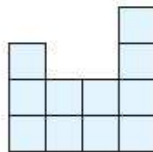


- ۴- تمام وجه‌های مکعبی را رنگ آمیزی کرده ایم.
 - چند مکعب کوچک در این شکل وجود دارد؟ ۶۴
 - چند مکعب، رنگ نشده است؟ ۸
 - چند مکعب، رنگ شده است؟ ۵۶
 - چند مکعب، فقط دو وجه رنگ شده دارد؟ ۲۴
 - چند مکعب، سه وجه رنگ شده دارد؟ ۸



- ۵- روی تمام وجه‌های مکعب‌هایی حرف A نوشته شده است. ۸ تا از این مکعب‌ها را به شکل ستونی روی هم می‌چینیم. چند حرف A دیده می‌شود؟ ۳۳

- ۶- شکل سمت چپ از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟ ۴۸
 حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟ ۱۵



صفحه ۹۲



دایره



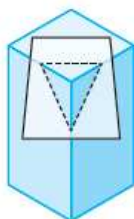
بیضی



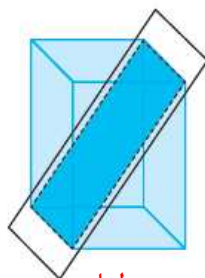
مستطیل

در سال‌های آینده با تعریف دقیق‌تر
 بیضی آشنا خواهید شد.

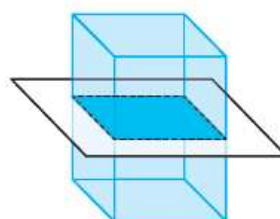
— سطح مقطع یک مکعب مستطیل با صفحه‌های قائم، افقی و مایل به چه شکل است؟



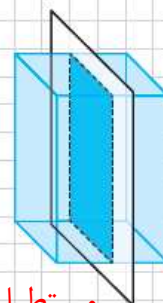
مثلث



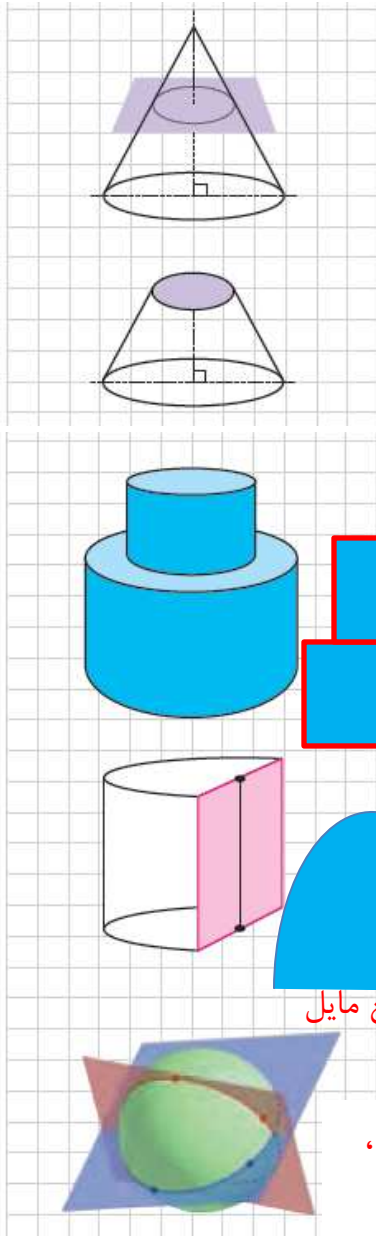
مستطیل



مستطیل



مستطیل



— مخروط قائمی را مطابق شکل با صفحه‌ای موازی قاعده آن برخورد داده‌ایم. این صفحه مخروط را به دو بخش تقسیم می‌کند. بخش بالایی به چه شکل است؟ **دایره**
بخش زیرین را مخروط ناقص می‌نامند.
اگر صفحه‌ای به شکل عمودی مخروط ناقص را قطع کند، سطح مقطع حاصل چیست؟ **دوازنه**

کاردکلاس

۱— دو استوانه را روی هم قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای به شکل عمودی با هر این استوانه‌ها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟

۲— در شکل زیر نصف یک استوانه داده شده است. سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحه مایلی که از قاعده استوانه عبور نکند به چه شکل است؟

مقطع مایل

مقطع عمودی

مقطع افقی

۳— سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟
در چه صورت این سطح مقطع بیشترین مساحت ممکن را خواهد داشت؟

دایره — در صورتی که صفحه قاطع از مرکز کره بگذرد سطح مقطع ،

بیشترین مساحت ممکن را دارد

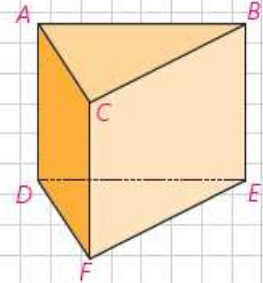
تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

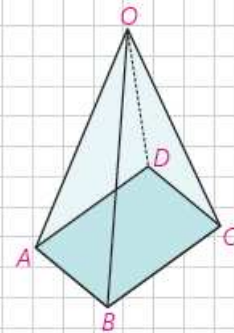


تمرین

- ۱- فرض کنید منشور زیر، یک قطعه چوبی توپر باشد. این قطعه چوبی را طوری اهره می‌کنیم که از سه نقطه مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟
- (الف) M، N و P وسط پاره‌های BE، CF و AD دو منشور هم اندازه و هم شکل
(ب) E، D، C و Q (وسط پاره خط AB) دو منشور هم اندازه
(ج) F، C و Q (وسط پاره خط AB) دو منشور هم اندازه

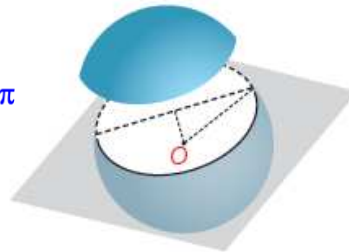


- ۲- قاعده هرمی، مستطیل ABCD است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه P با این هرم در هر حالت مشخص کنید.
- (الف) صفحه P بر ارتفاع هرم عمود باشد. **مستطیل**
(ب) صفحه P از O بگذرد و بر قاعده هرم عمود باشد. **مثلث**
(ج) صفحه P از O نگذرد؛ ولی بر قاعده هرم عمود باشد. **ذوزنقه**



- ۳- صفحه P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصله نقطه O از صفحه ۳ سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟

$$r^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow S = \pi r^2 = 16\pi$$



- ۴- دو کره با شعاع‌های r و r' یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟ **دایره**
- اگر همه این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ **مخروط**



از دوران دادن شکل‌های متفاوت هندسی، حول یک محور می‌توان جسم‌های هندسی مختلفی را تصور کرد.



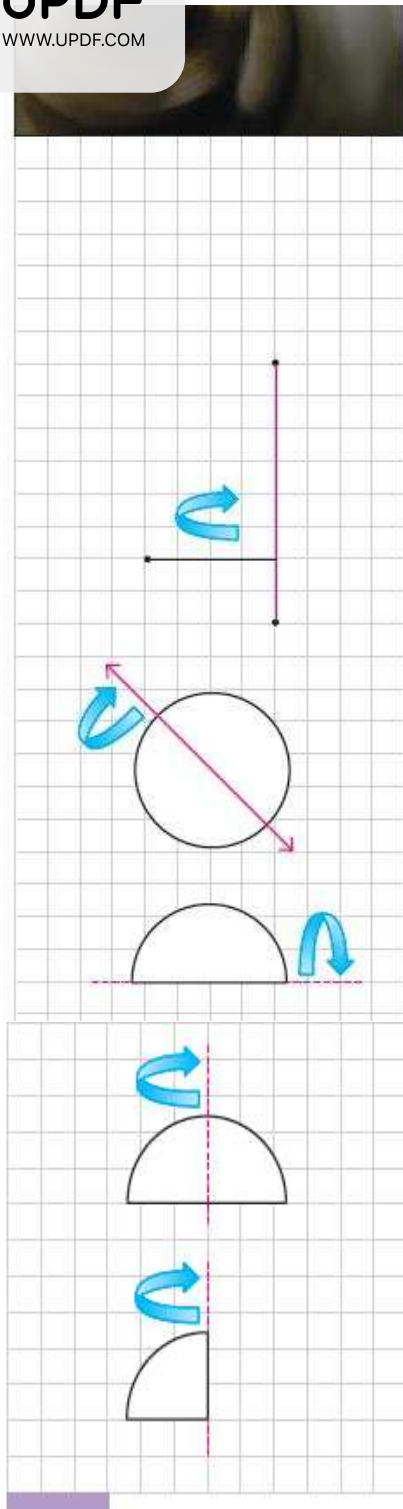
– فرض کنید دو پاره‌خط برهم عمودند و یکی را حول دیگری دوران داده‌ایم. چه شکل هندسی‌ای ساخته می‌شود؟ **استوانه**

– دایره‌ای به شعاع r را حول یکی از قطرهای آن دوران داده‌ایم. شکل حاصل چیست؟ **کره**

– یک نیم دایره را حول قطر دوران می‌دهیم. شکل حاصل چه خواهد بود؟ **کره**

– اگر همین نیم دایره را حول شعاع عمود بر قطر داده شده دوران دهیم، چه شکلی ساخته می‌شود؟ **نیم کره**

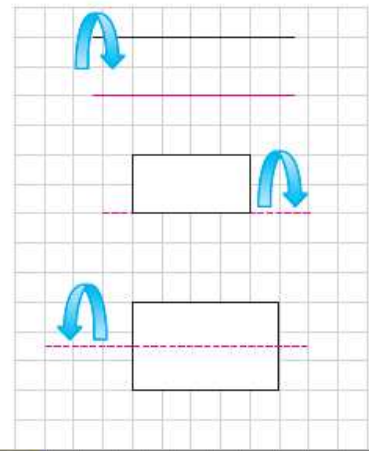
– اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟ **نیم کره**



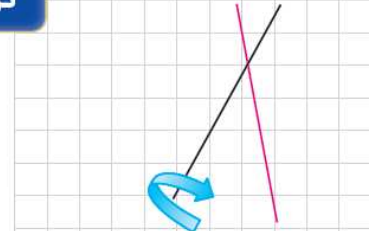
– دو خط موازی را در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی ای ساخته می شود؟ **استوانه**

– اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، چطور؟ **استوانه**

– اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟ **استوانه**



۱– دو خط متقاطع را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی ای ساخته می شود؟



دو مخروط با راس و محور مشترک

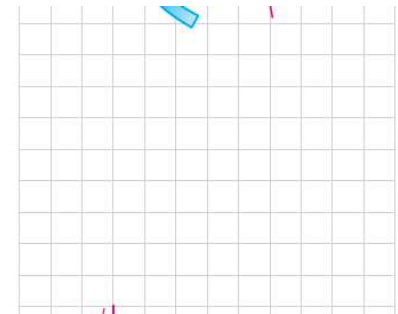
۲– در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

الف) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول ارتفاع آن: **مخروط**

ب) دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه: **مخروط**

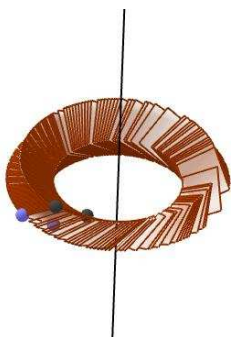
پ) دوران یک دوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده ها: **مخروط ناقص**

ت) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول قاعده آن:

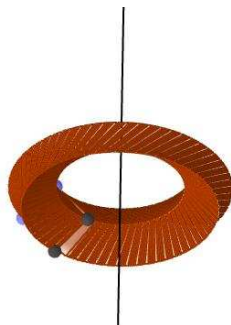


دو مخروط مساوی با قاعده مشترک (دوک)

۳– مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.

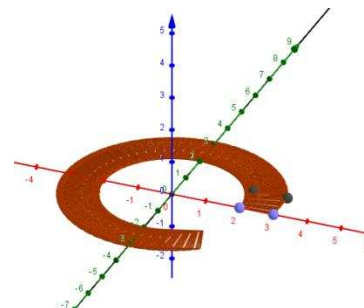
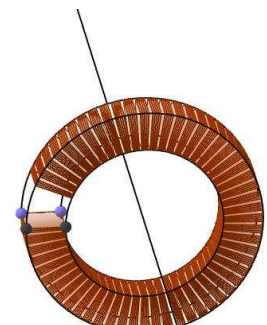


اگر خط، صفحه مربع را قطع کند



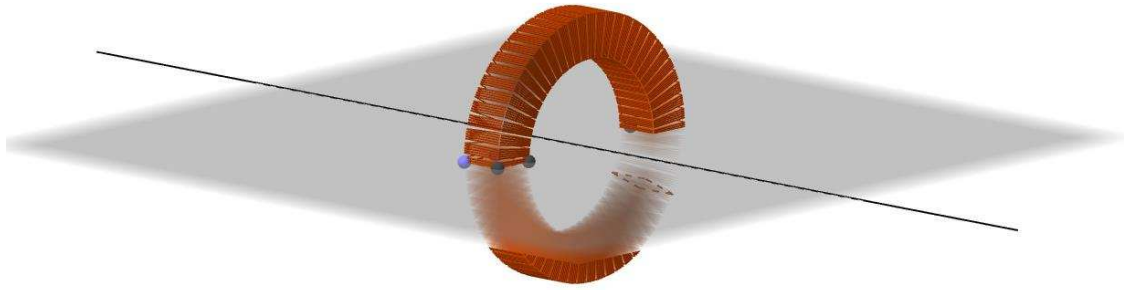
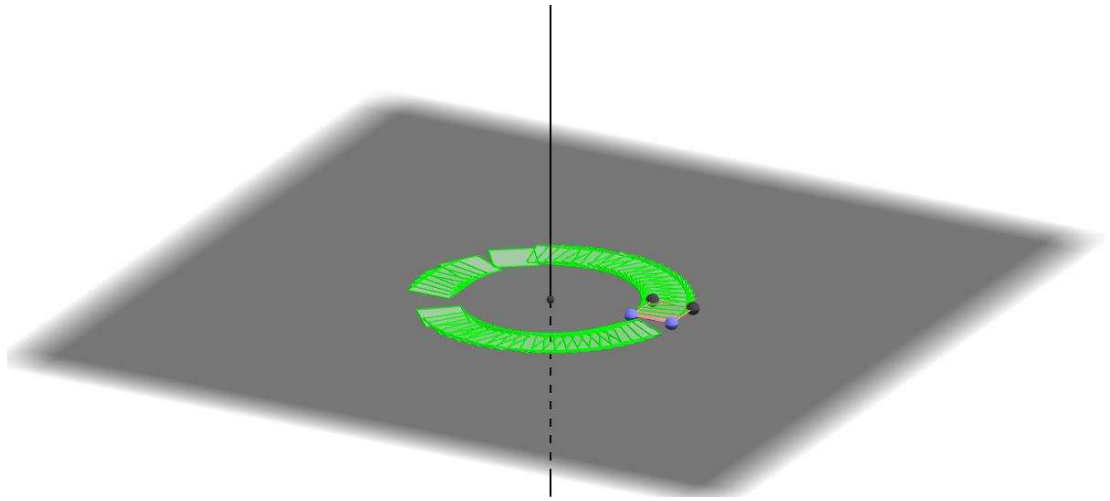
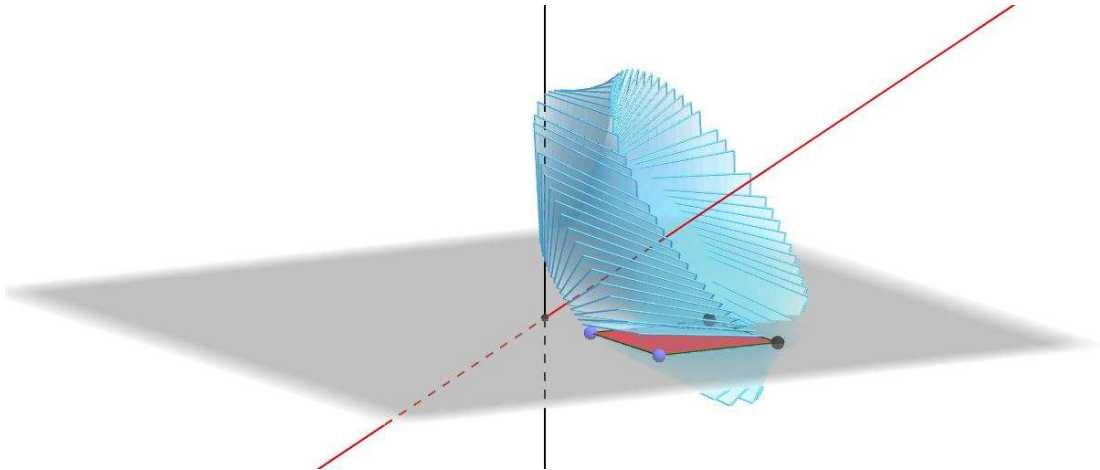
اگر خط بر صفحه مربع

عمود باشد

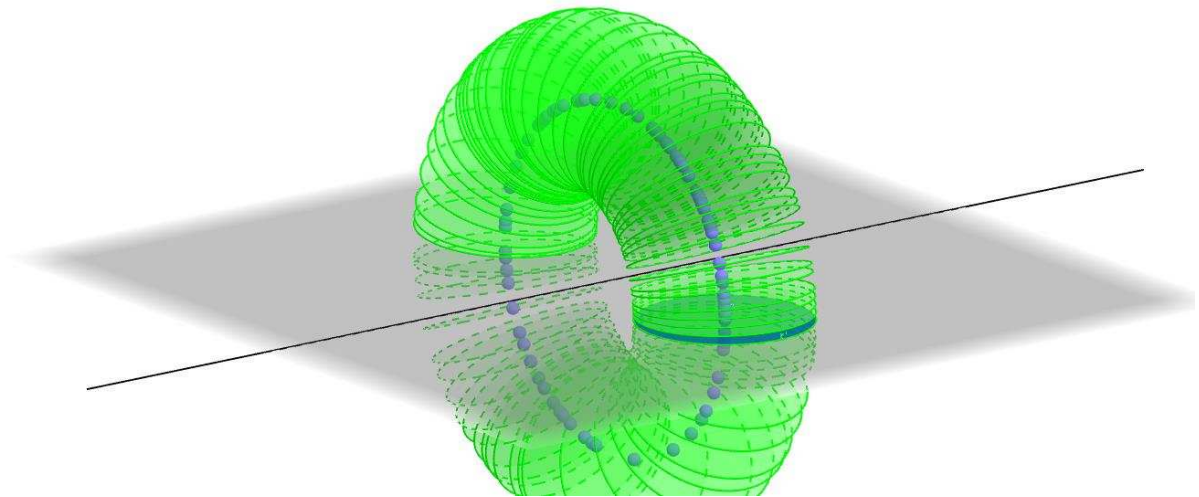


اگر خط و مربع

در یک صفحه باشند



۴- شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید. **دایره**



تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

تمرین های تکمیلی :

۱- چهار نقطه غیر واقع بر یک صفحه مفروض اند.

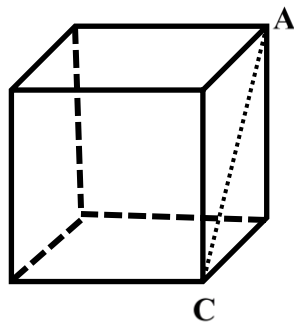
الف : چند صفحه وجود دارد که حداقل از سه نقطه از آنها بگذرد

ب : چند خط وجود دارد که حداقل از دو نقطه از آنها بگذرد

ج : چند جفت صفحه موازی می توان رسم کرد که یکی از آنها شامل سه نقطه و دیگری از نقطه چهارم بگذرد.

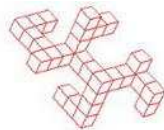
۲- از یک نقطه خارج از دو خط متنافر چند خط وجود دارد که از آن نقطه بگذرند و بر هر دو خط عمود باشند.

۳- دو خط متنافر و یک نقطه خارج آنها مفروض اند چند خط وجود دارد که از آن نقطه بگذرند و دو خط متنافر را قطع کنند.

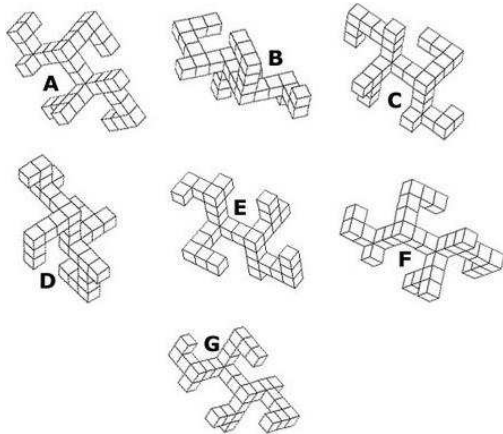


۴- در شل مقابل اگر صفحه ای از قطر AC بگذرد و مکعب را چنان قطع کند که هیچکدام

از یالهای مکعب روی آن صفحه نباشند . مقطع ایجاد شده چه شکلی دارد؟



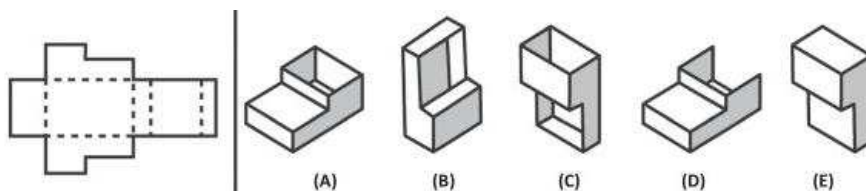
۵- کدامیک از تصاویر زیر از با شکل مقابل شبیه است ؟



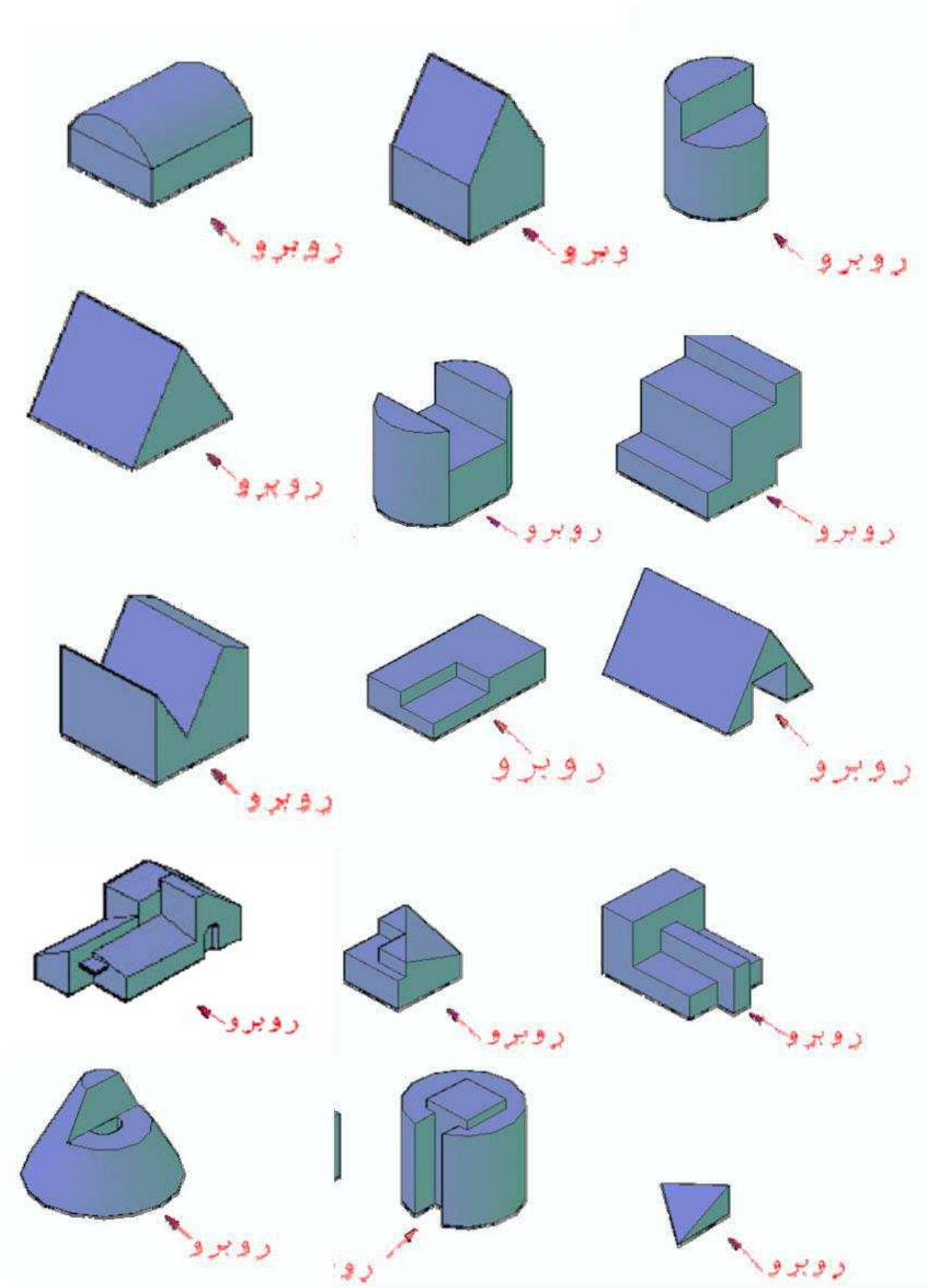
۶- خط d و دو صفحه متمایز P, P' مفروض اند اگر d بر صفحه P عمود بوده و بر یکی از خطوط صفحه ی

P' نیز عمود باشد . وضعیت نسبی دو صفحه P, P' را با رسم شکل مشخص کنید.

۷- شکل سمت چپ گسترده شده کدامیک از اجسام سمت راست می باشد؟



۸- برای هر شکل سه نمای روبرو - بالا و نمای جانبی را با رعایت اصول رسم و تمیز بودن کاغذ رسم کنید.



نقد و بررسی :

- ❖ هدف این فصل همان گونه که از نام آن مشخص است درک شهودی از فضای سه بعدی می باشد. اگر چه درک شهودی از فضای سه بعدی لازم و ضروری است ولی افراط در آن باعث می شود دانش آموز اهمیت قیاس و استدلال استنتاجی را درک نکند.
- ❖ نامتناهی بودن مفاهیمی مانند خط ، صفحه و فضا در مثالهای کتاب به خوبی تبیین نشده است و این باعث صدمات جبران ناپذیری در درک دانش آموزان از فضای سه بعدی خواهد شد.
- ❖ در تمرینات صفحه ۸۴ اختصاص سه سوال ۴ و ۵ و ۶ (با قسمت های زیاد) از بین ۱۱ سوال به یک مفهوم ثابت نه تنها ضروری نیست بلکه برای دانش آموز کسالت بار است و بار آموزشی ندارد.
- ❖ بخش مربوط به دوران بدون هیچ گونه تعریف یا مقدمه ای از دوران ارئه شده است.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان