باسمه تعالی

هندسه ۲ سال یازدهم ریاضی

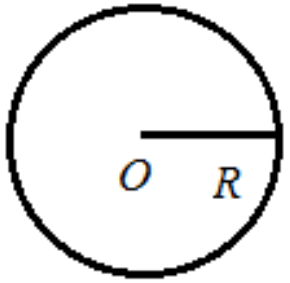
گروه ریاضی استان خراسان رضوی

فصل اول

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

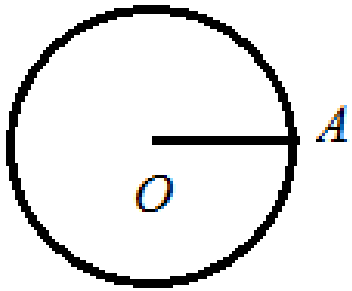
مفاهیم اولیه در دایره

نماد نویسی: دایره ای مانند C به مرکز O و به شعاع R را به صورت $C(O,R)$ نشان می دهیم.



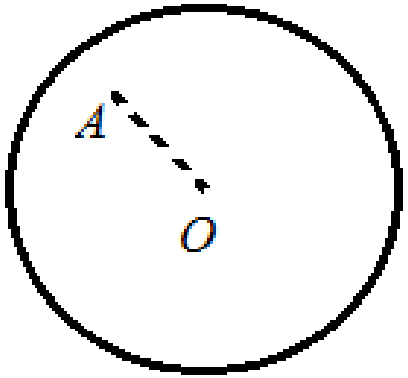
وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره:

۱) اگر فاصله نقطه A از مرکز یک دایره برابر اندازه شعاع دایره باشد، آنگاه آن نقطه روی دایره واقع است و به عکس.



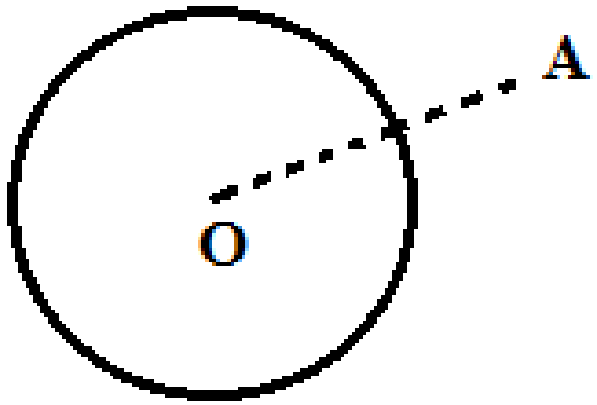
$$OA = R$$

۲) اگر فاصله نقطه A از مرکز یک دایره کوچکتر از اندازه شعاع دایره باشد، آنگاه آن نقطه درون دایره واقع است و به عکس.



$$OA < R$$

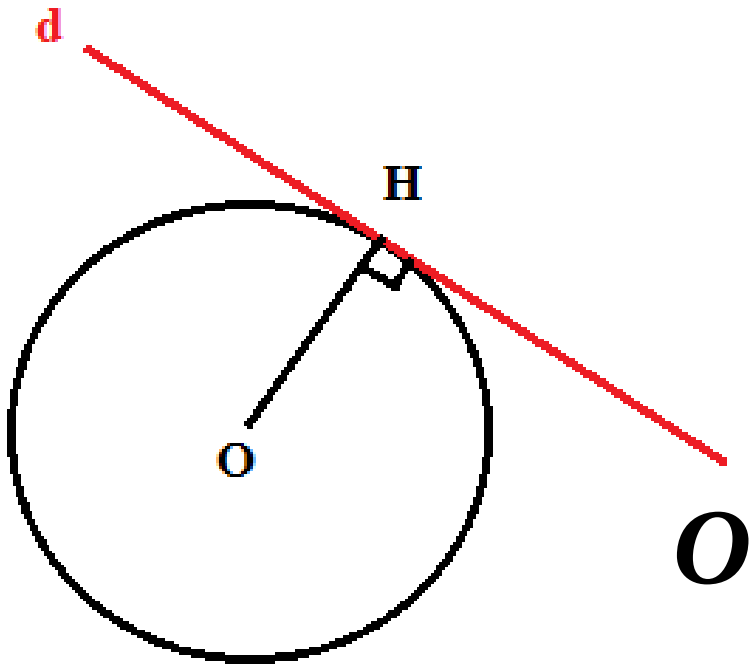
۳) اگر فاصله نقطه A تا مرکز یک دایره بزرگتر از اندازه شعاع دایره باشد، آنگاه آن نقطه بیرون دایره واقع است و به عکس.



وضعیت یک خط نسبت به یک دایره

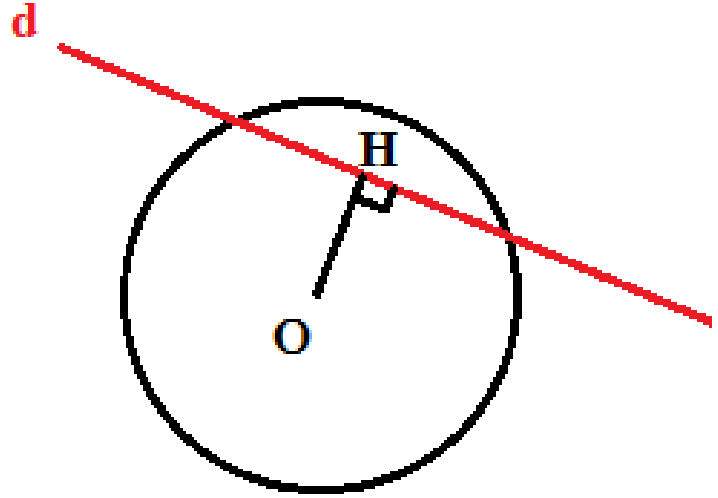
۱) اگر فاصله مرکز دایره ای تا یک خط مانند d برابر شعاع دایره باشد آنگاه آن خط بر دایره مماس است و به عکس.

به عبارت دیگر خطی بر دایره ای مماس است اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود باشد.



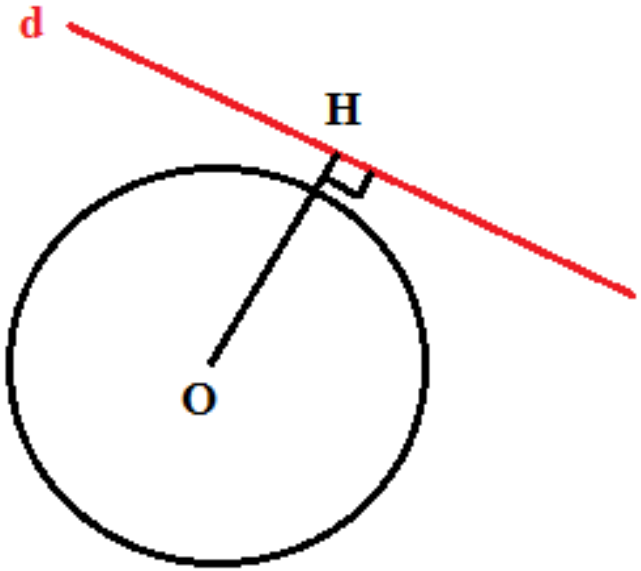
$$OH = R$$

۲) اگر فاصله مرکز دایره ای از یک خط کمتر از اندازه شعاع باشد آنگاه خط و دایره را متقاطع گوییم و به عکس.



$$OH < R$$

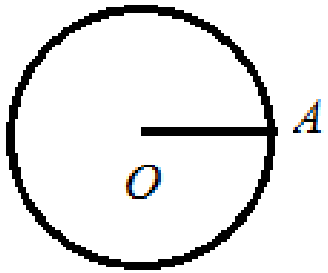
۳) اگر فاصله مرکز دایره ای از خطی مانند d بزرگتر از اندازه شعاع باشد، آنگاه خط d دایره را قطع نمی کند، (نقطه مشترک ندارد) و به عکس.



$$OH > R$$

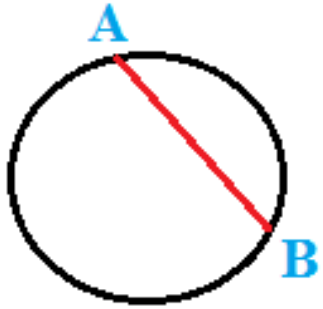
تعاریف چند مفهوم در دایره:

۱) شعاع دایره: پاره خطی که یک سر آن مرکز و سر دیگر آن نقطه ای روی دایره باشد.



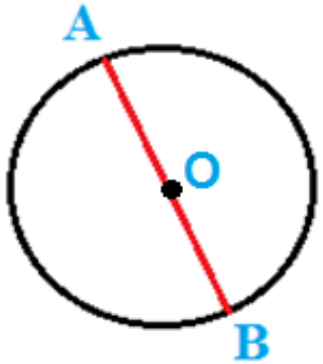
شعاع : OA

۲) وتر دایره: پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد.



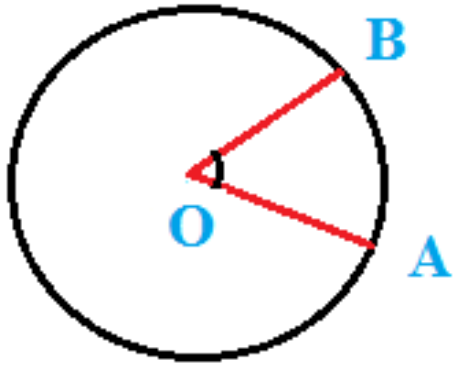
وتر : AB

۳) قطر دایره: وتری که از مرکز دایره بگذرد.

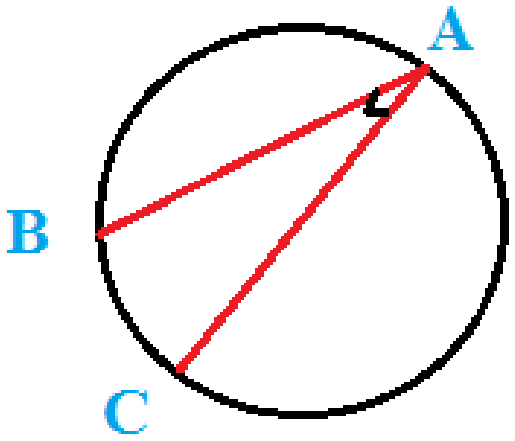


قطر : AB

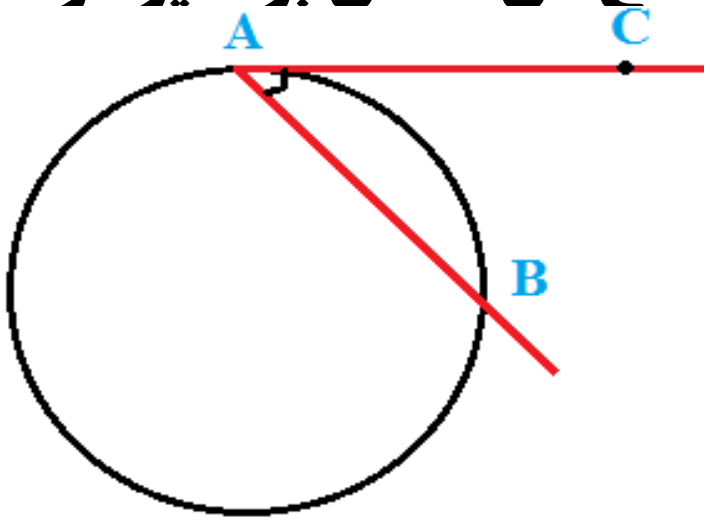
۴) زاویه مرکزی: زاویه ای که راس آن بر مرکز دایره واقع باشد.



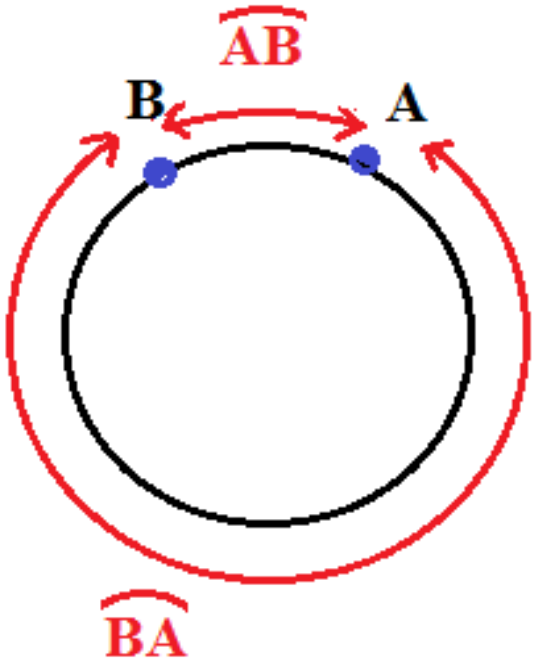
۵) زاویه محاطی: زاویه ای که راس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از یک دایره باشد.



۶) زاویه ظلی: زاویه ای که راس آن روی دایره و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد.

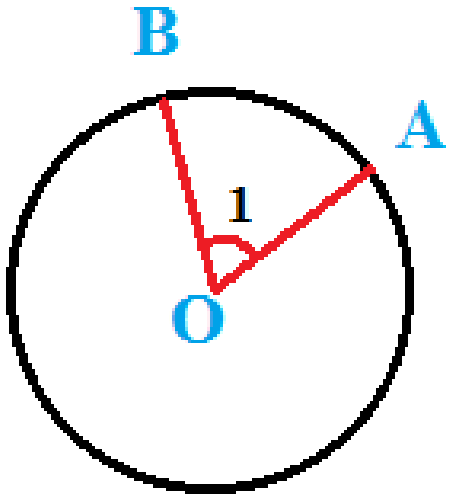


۷) کمان: یک کمان دایره شامل دو نقطه متمایز روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است.



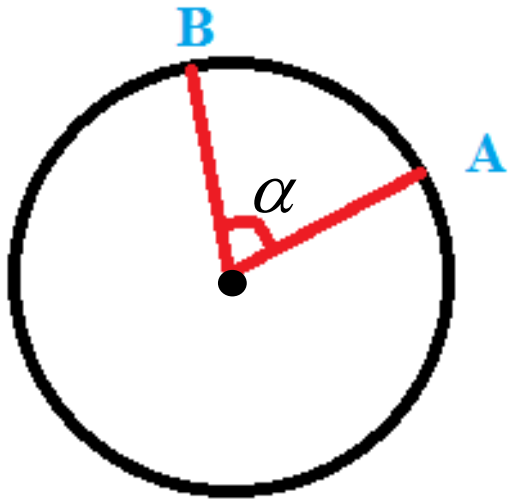
قرارداد: نام گذاری یک کمان در شکل فوق انجام شده است که جهت نامگذاری در آن خلاف عقربه های ساعت می باشد.

۸) اندازه کمان: لازم به ذکر است که اندازه هر کمان بر حسب درجه با اندازه زاویه مرکزی مقابل آن کمان برابر است.



$$AB = O_1 \quad , \quad BA = ۳۶۰^\circ - O_1$$

۹) طول کمان: برای محاسبه طول کمان در یک دایره از یک تناسب ساده استفاده می شود مثلا در شکل زیر اگر طول کمان را برابر L بگیریم، آنگاه داریم:



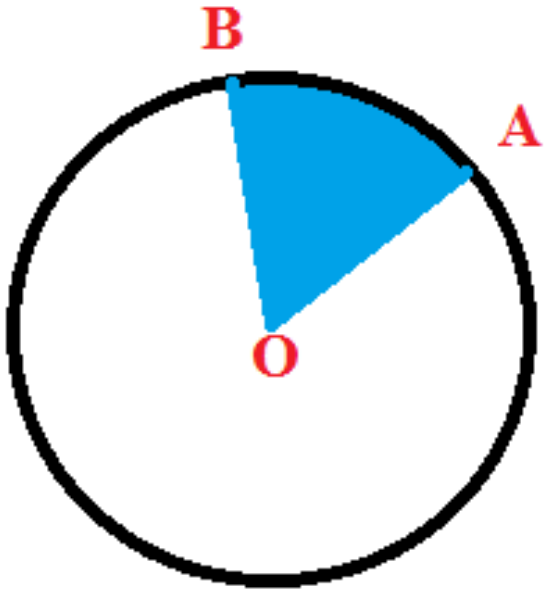
$$\frac{۳۶۰}{\alpha} = \frac{۲\pi R}{L} \Rightarrow L = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰}$$

مثال: در دایره ای به شعاع ۶ اگر اندازه کمانی برابر ۶۰° باشد، آنگاه طول این کمان را بدست آورید.

$$L = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰} = \frac{\pi(۶)(۶۰)}{۱۸۰} = ۲\pi$$

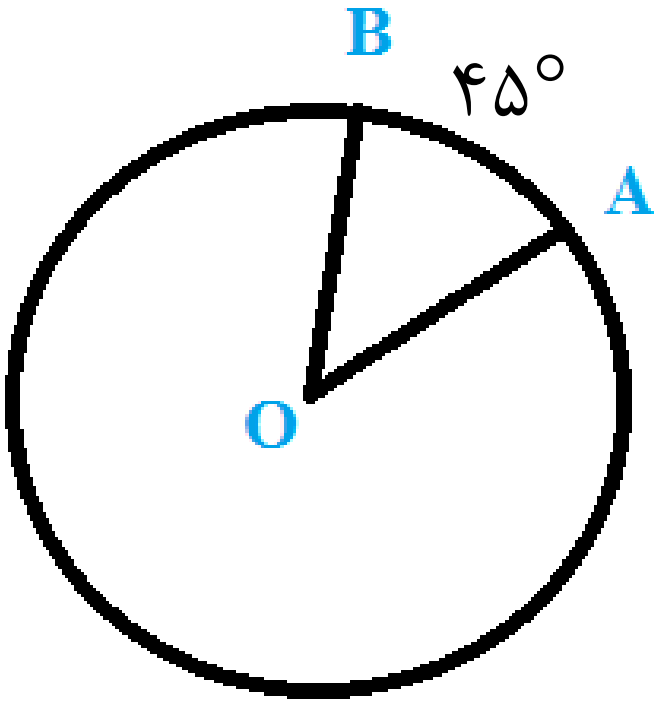
۱۰) قطاع: ناحیه محصور بین دو شعاع و دایره را یک قطاع دایره گوییم.

لازم به ذکر است که مساحت قطاع OAB در یک دایره از یک تناسب ساده بدست می آید:



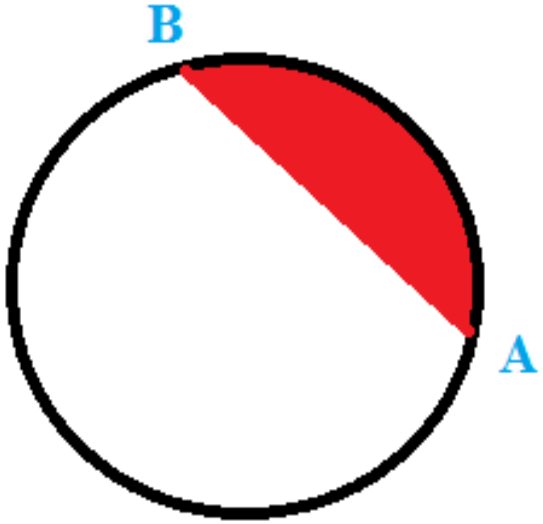
$$\frac{\text{زاویه مرکزی}}{۳۶۰} = \frac{\text{مساحت قطاع}}{\pi R^۲} \Rightarrow S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰}$$

مثال: مساحت قطاع متناظر با کمان AB در یک دایره به شعاع ۸ را با فرض $AB = ۴۵^\circ$ بدست آورید.

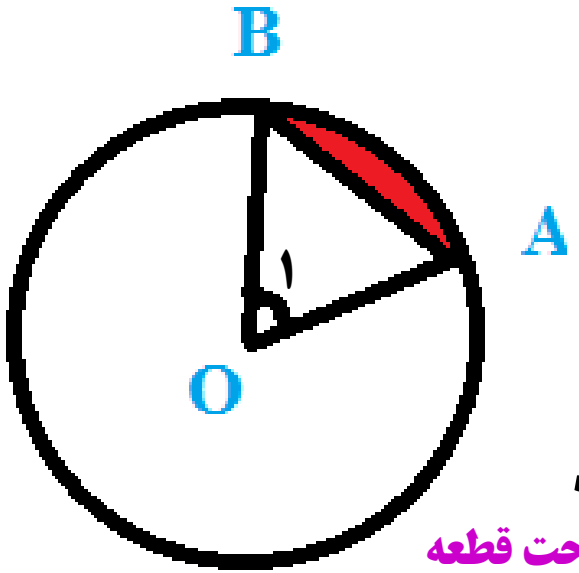


$$S = \frac{\pi R^{۲} \alpha}{۳۶۰} = \frac{\pi (۸)^{۲} (۴۵)}{۳۶۰} = ۸\pi$$

۱۱) قطعه: ناحیه محصور بین وتر و کمان نظیر آن وتر در یک دایره را یک قطعه گوییم.



مثال: در یک دایره به شعاع ۴ اگر اندازه وتر AB برابر ۴ باشد در این صورت مساحت قطعه متناظر با کمان AB را در این دایره بدست آورید.



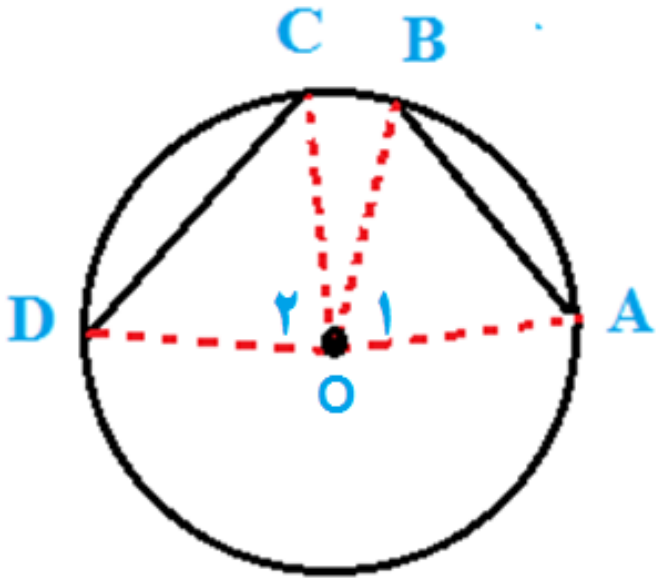
$$OA = OB = AB = ۴ \Rightarrow O_۱ = ۶۰^\circ$$

مساحت قطعه

$$S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} R^۲ = \frac{\pi (۴)^۲ (۶۰)}{۳۶۰} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} (۴)^۲ = \frac{۸\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}$$

اثبات چند قضیه

قضیه ۱: کمان های نظیر دو وتر مساوی در هر دایره با هم مساوی اند و به عکس.



اثبات: با توجه به شکل باید درستی رابطه زیر را نشان دهیم:

$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

بدین منظور دو حالت در نظر می گیریم:

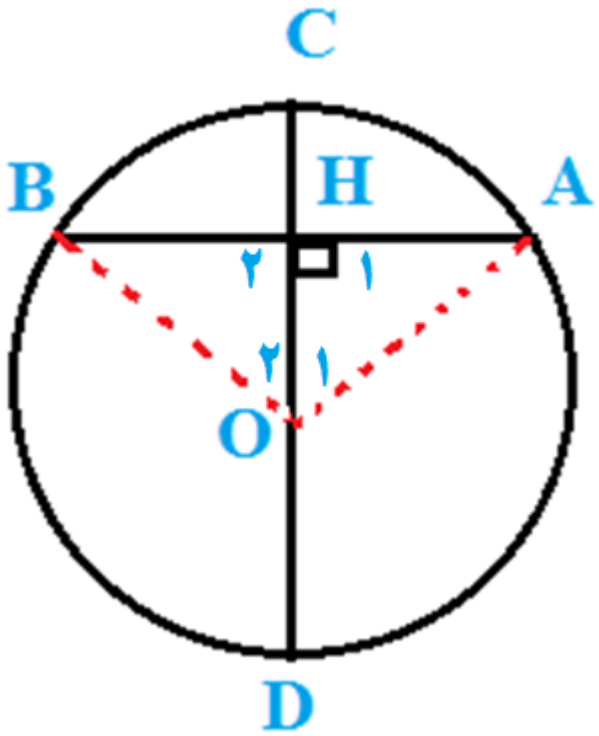
حالت اول؛

$$AB = CD \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD} \Rightarrow O_1 = O_2 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$ (ض ض ض)

حالت دوم؛

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow O_1 = O_2 \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD} \Rightarrow AB = CD$$ (ض ز ض)

قضیه۲: قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند.



اثبات: با توجه به شکل باید درستی رابطه زیر را اثبات کنیم:

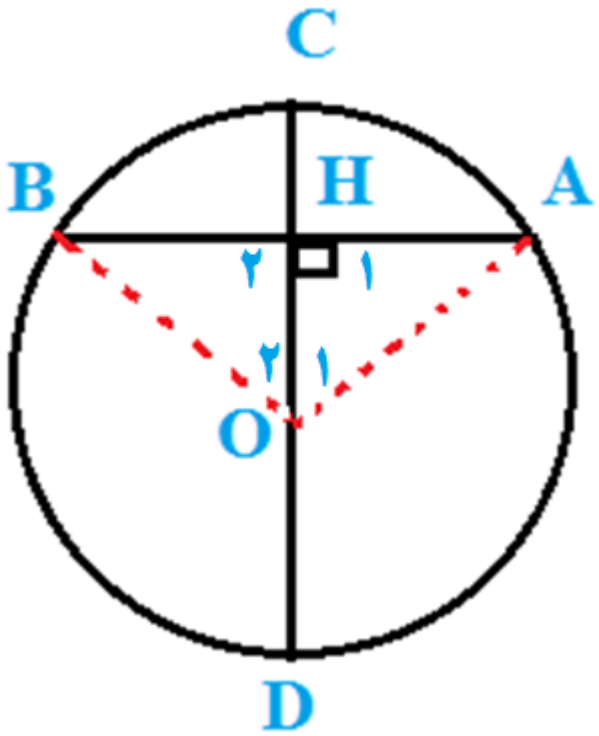
$$CD \perp AB \Rightarrow AC = CB , AH = BH$$

بدین منظور؛

وتر و یک ضلع

$$CD \perp AB \Rightarrow H_{۱} = H_{۲} = ۹۰ \Rightarrow \overset{\triangle}{OBH} \cong \overset{\triangle}{OAH} \Rightarrow \begin{cases} O_{۱} = O_{۲} \Rightarrow AC = CB \\ AH = BH \end{cases}$$

قضیه ۳: در هر دایره، اگر قطری از دایره، یک وتر را نصف کند آنگاه بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نصف می کند.



اثبات: با توجه به شکل باید درستی رابطه زیر را اثبات کنیم:

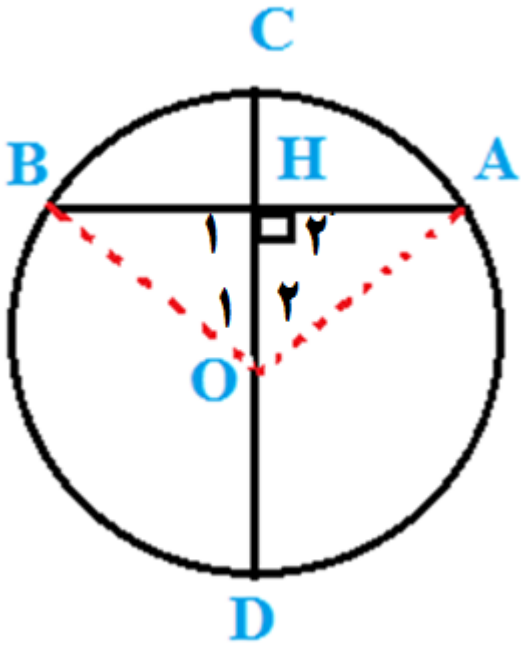
$$BH = AH \Rightarrow H_{۱} = ۹۰^{\circ}, AC = CB$$

بدین منظور؛

(ض ض ض)

$$BH = AH \Rightarrow \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OBH} \Rightarrow H_{۱} = H_{۲}, O_{۱} = O_{۲} \Rightarrow H_{۱} = ۹۰^{\circ}, AC = CB$$

قضیه ۴: در هر دایره،اگر قطری از دایره، یک کمان را نصف کند آنگاه بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن وتر را نیز نصف می کند.



اثبات: با توجه به شکل باید درستی رابطه زیر را نشان دهیم:

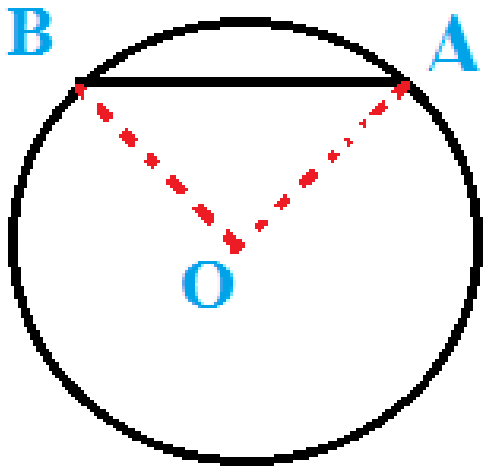
$$AC = CB \Rightarrow H_{۱} = ۹۰^{\circ}, AH = BH$$

بدین منظور؛

$$AC = CB \Rightarrow O_{۱} = O_{۲} \overset{\text{(ض ز ض)}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OBH} \Rightarrow H_{۱} = H_{۲} = ۹۰^{\circ}, BH = AH$$

چند مثال:

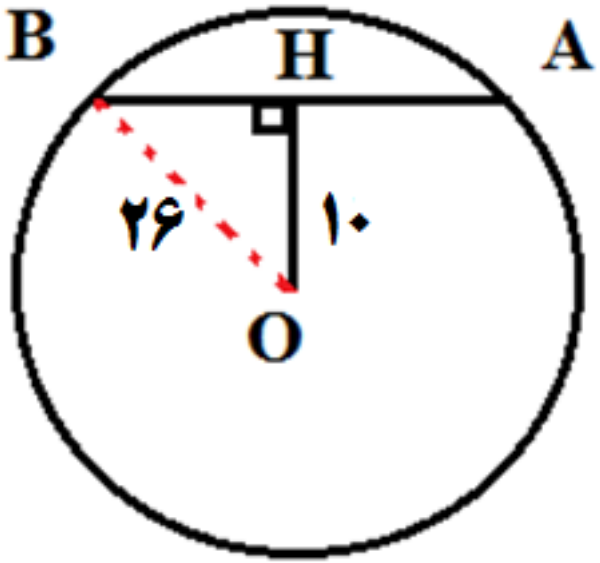
۱– در شکل زیر اگر طول وتر AB برابر شعاع دایره باشد، طول AB را بر حسب اندازهٔ شعاع دایره، بدست آورید.



حل: مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ متساوی الاضلاع است لذا $O = ۶۰^\circ$ در نتیجه $AB = ۶۰^\circ$ و در نتیجه

$$\text{طول } AB = \frac{\pi R\,\alpha}{۱۸۰} = \frac{\pi R\,(۶۰)}{۱۸۰} = \frac{\pi R}{۳}$$

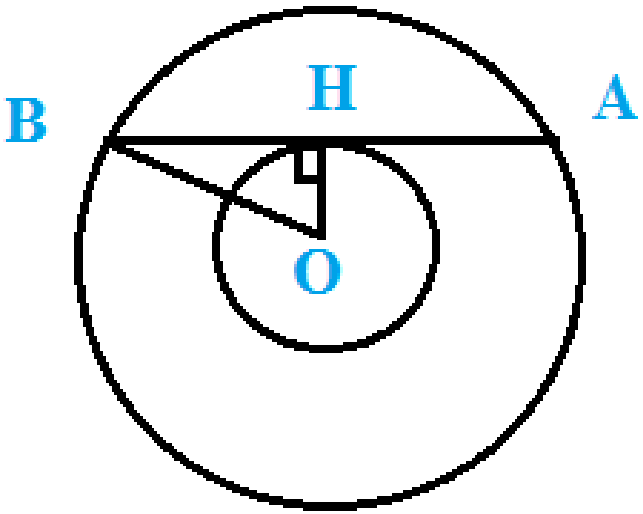
۲- در دایره $C\ (O\ ,۲۶)$ اگر فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر ۱۰ باشد، آنگاه طول وتر AB را بدست آورید.



حل: با توجه به شکل از اینکه OH عمود بر AB است، لذا AB وتر را نصف می کند.

$$AB = ۲BH = ۲\sqrt{۲۶^{۲} - ۱۰^{۲}} = ۲\sqrt{(۲۶-۱۰)(۲۶+۱۰)} = ۲(۴)(۶) = ۴۸$$

۳– در دو دایره هم مرکز اگر طول وتری که از دایره بزرگتر رسم می شود و بر دایره کوچکتر مماس باشد برابر ۸ و اندازه شعاع دایره بزرگترمساوی ۵ باشد، آنگاه اندازه شعاع دایره کوچکتر را بدست آورید.



حل: با توجه به شکل و مفروضات مساله داریم:

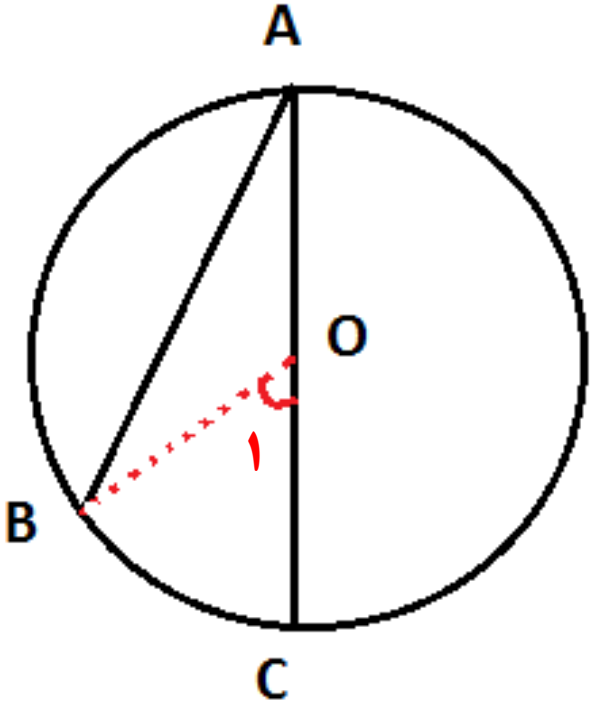
$$BH = \frac{AB}{۲} = ۴, OB = ۵$$

$$OH = \sqrt{OB^{۲} - BH^{۲}} = \sqrt{۵^{۲} - ۴^{۲}} = ۳$$

بنابراین اندازه دایره کوچکتر برابر ۳ است.

قضیه ۵: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف کمان مقابل به آن زاویه.

حالت اول: اگر یک ضلع زاویه قطری از دایره باشد در این صورت با توجه به شکل؛



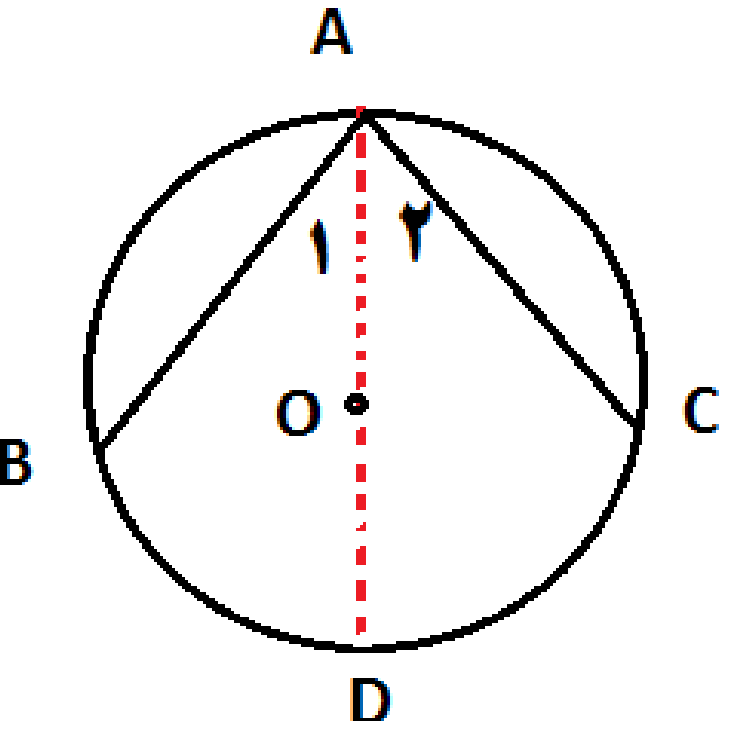
مثلث متساوی الساقین $\triangle$

$$OA = OB \Rightarrow O\hat{A}B \Rightarrow A = B$$

$\triangle$

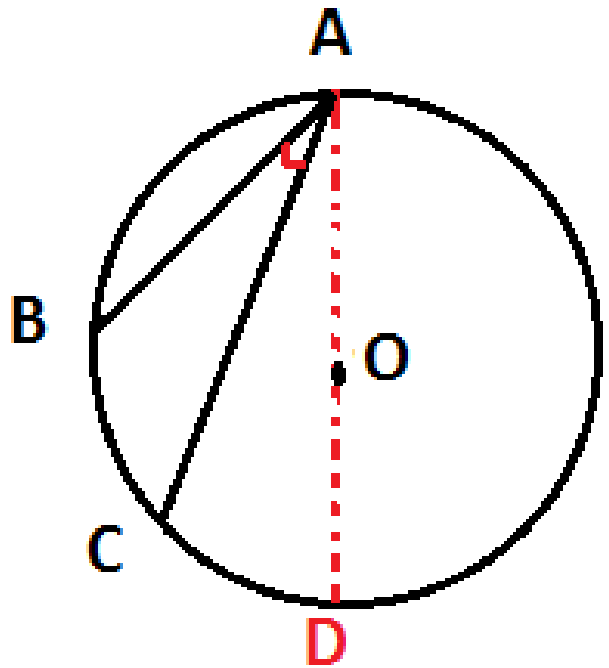
$O\hat{A}B$ زاویه خارجی مثلث $O_{۱} = A + B = ۲A \Rightarrow BC = ۲A \Rightarrow A = \frac{BC}{۲}$

حالت دوم: اگر مرکز دایره بین دو ضلع زاویه باشد:



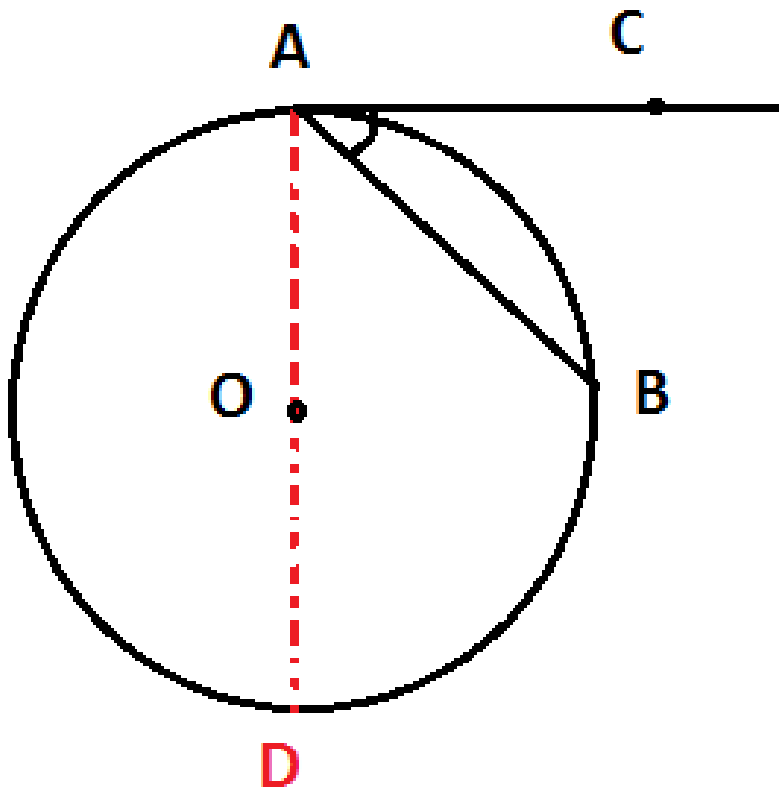
$$BAC = A_{۱} + A_{۲} \overset{\text{حالت اول}}{=} \frac{BD}{۲} + \frac{DC}{۲} = \frac{BC}{۲}$$

حالت سوم: اگر مرکز دایره خارج از ناحیه بین دوضلع زاویه باشد:



$$BAC = BAD - CAD \overset{\text{حالت اول}}{=} \frac{BD}{۲} - \frac{CD}{۲} = \frac{BC}{۲}$$

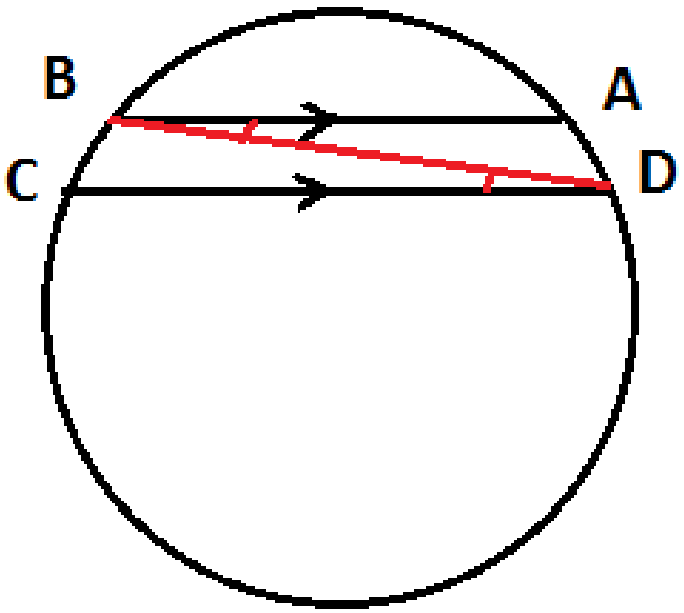
قضیه ۶: در هر دایره، اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.



اثبات: با توجه به شکل قطر گذرنده از A را رسم می کنیم:

$$CAB = CAD - BAD = ۹۰^\circ - BAD = \frac{DA}{۲} - \frac{DB}{۲} = \frac{DA - DB}{۲} = \frac{BA}{۲}$$

قضیه ۷: کمان های محصور بین دو وتر موازی، با هم مساوی اند و به عکس.



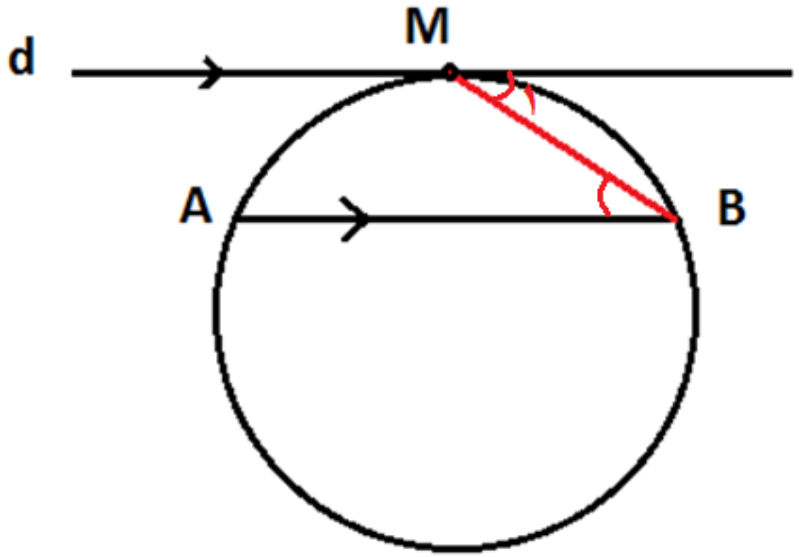
اثبات: باید با توجه به شکل درستی رابطه زیر را نشان دهیم:

$$AB \parallel CD \Leftrightarrow BC = DA$$

بدین منظور؛

$$AB \parallel CD \Leftrightarrow B = D \Leftrightarrow \frac{DA}{۲} = \frac{BC}{۲} \Leftrightarrow DA = BC$$

قضیه ۸: در هر دایره اگر وتری با یک خط مماس موازی باشد، آنگاه کمان های محصور بین آنها نیز با هم برابرند و به عکس.

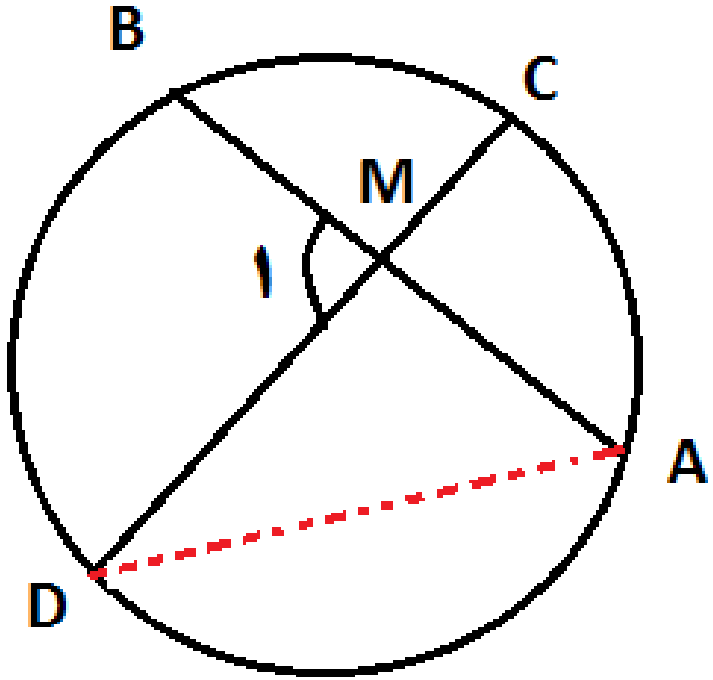


اثبات: با توجه به شکل باید نشان دهیم اگر $d \parallel AB$ باشد آنگاه $MA = BM$ و به عکس.

بدین منظور؛

$$d \parallel AB \Leftrightarrow M_{۱} = B \Leftrightarrow \frac{BM}{۲} = \frac{MA}{۲} \Leftrightarrow BM = MA$$

قضیه ۹: در هر دایره زاویه بین دو وتر برابر است با نصف حاصل جمع کمان های مقابل به آن زاویه.



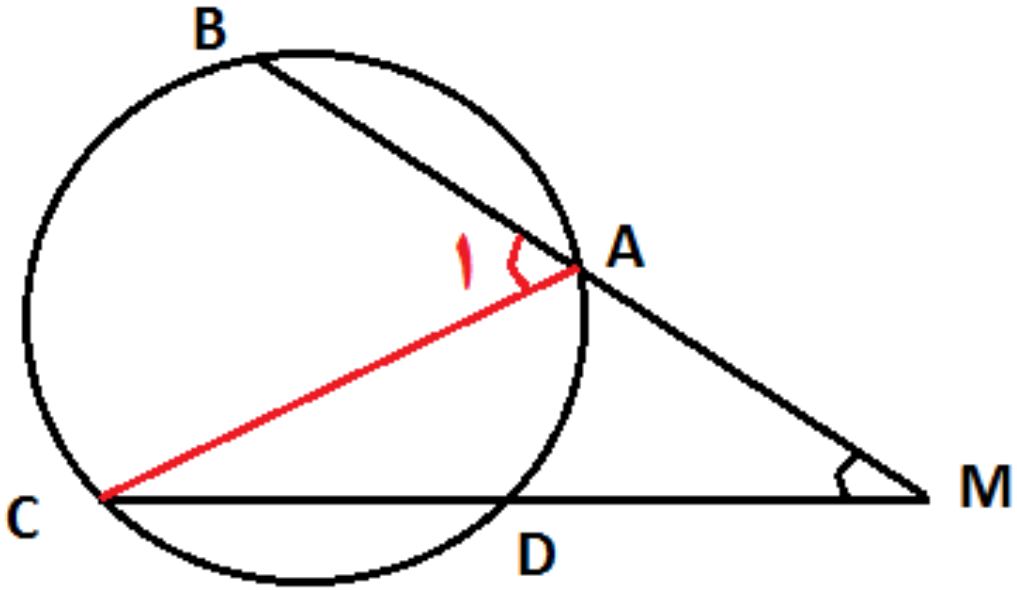
اثبات: با توجه به شکل،باید نشان دهیم:

$$M_{۱} = \frac{BD + AC}{۲}$$

بدین منظور؛ با توجه به شکل $M_{۱}$ زاویه خارجی در مثلث $\triangle MDA$ است لذا؛

$$M_{۱} = D + A = \frac{AC}{۲} + \frac{BD}{۲} = \frac{AC + BD}{۲}$$

قضیه ۱۰: در هر دایره زاویه بین امتداد دو وتر برابر است با نصف قدر مطلق تفاضل اندازه کمان های مقابل به آن زاویه.



اثبات : با توجه به شکل، باید نشان دهیم:

$$M = \frac{\left|BC - DA\right|}{۲}$$

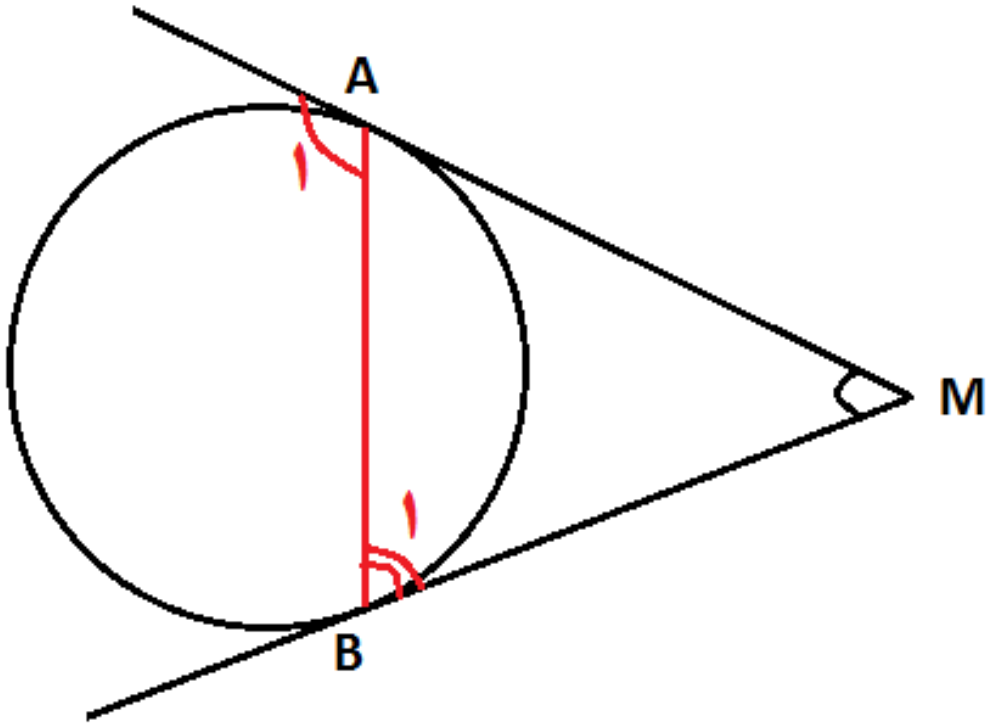
بدین منظور با توجه به شکل $A_۱$ زاویه خارجی $\triangle MAC$ است.

لذا؛

$$A_۱ = M + C \Rightarrow \frac{BC}{۲} = M + \frac{DA}{۲} \Rightarrow M = \frac{BC - DA}{۲}$$

حل تمرینات صفحه ۱۶ و ۱۷ کتاب درسی

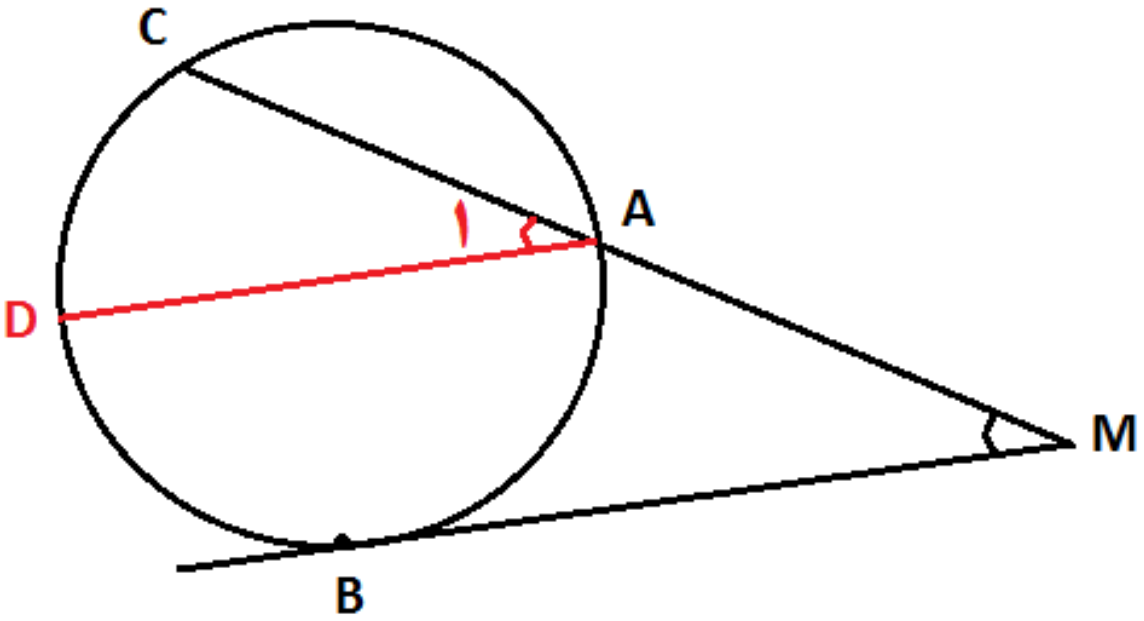
۱) در هر یک از شکل های زیر ثابت کنید.



الف) $M = \frac{AB - BA}{۲}$

حل: در مثلث $\overset{\triangle}{A}BM$ زاویه $A_۱$ خارجی است. لذا؛

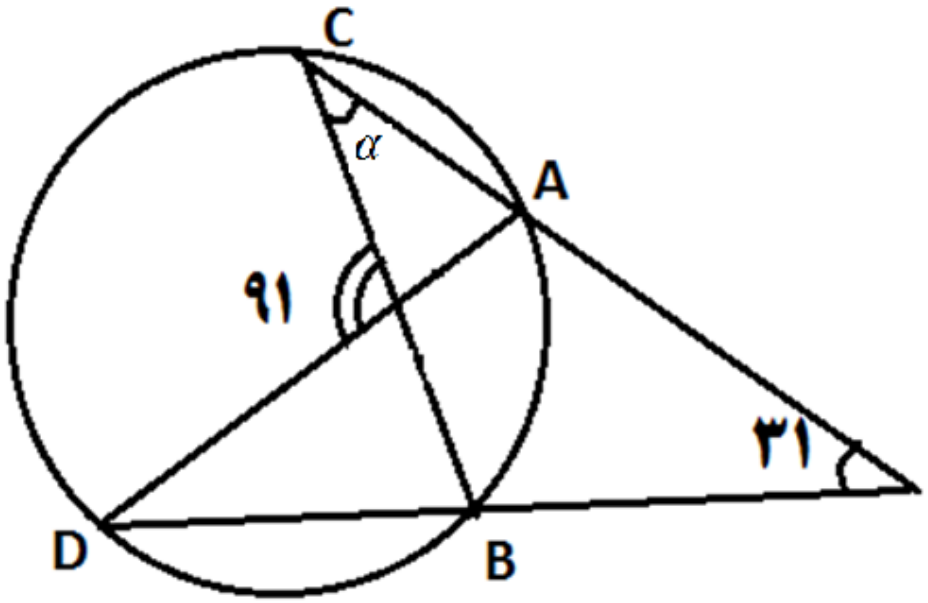
$$A_۱ = M + B_۱ \Rightarrow M = A_۱ - B_۱ = \frac{AB}{۲} - \frac{BA}{۲} = \frac{AB - BA}{۲}$$



ب) $$M = \frac{CB - BA}{٢}$$

حل: AD را موازی MB رسم می کنیم در نتیجه:

$$\begin{cases} A_{١} = M \\ DB = BA \end{cases} \Rightarrow M = A_{١} = \frac{CD}{٢} = \frac{CB - DB}{٢} = \frac{CB - BA}{٢}$$



۲) در شکل مقابل اندازه زاویه α را بدست آورید.

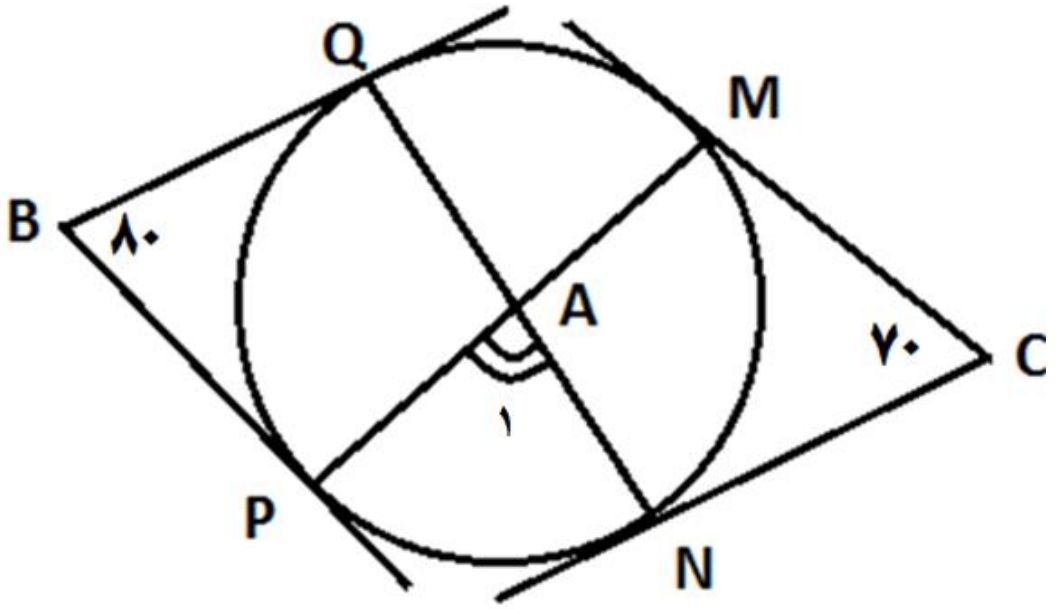
حل:

$$CD = x, BA = y$$

$$\begin{cases} ۳۱ = \dfrac{x - y}{۲} \\ ۹۱ = \dfrac{x + y}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = ۶۲ \\ x + y = ۱۸۲ \end{cases} \Rightarrow y = ۶۰$$

در نتیجه $\alpha = ۳۰^\circ$

۳) در شکل زیر اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند اندازه زاویه $A_۱$ را بدست آورید.

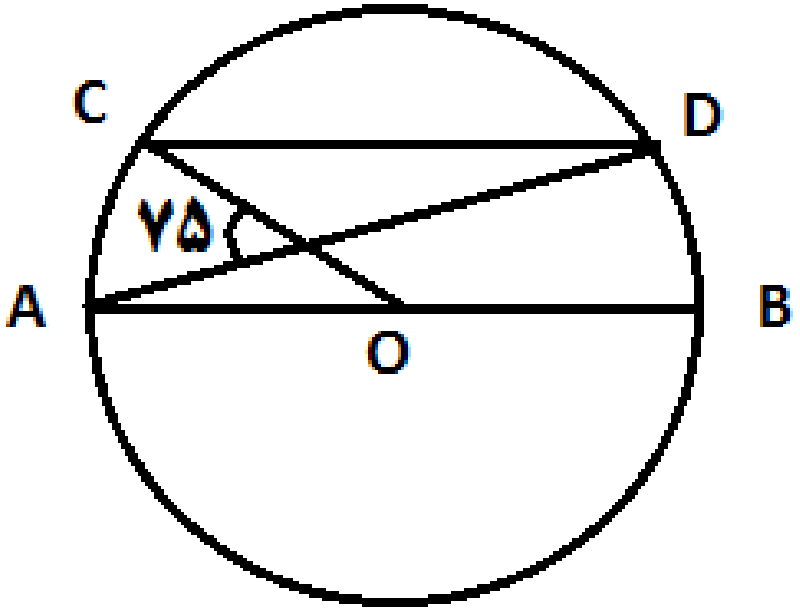


حل: با فرض $MQ = x$ ، $QP = y$ ، $PN = z$ و $NM = t$ داریم؛

$$\begin{cases} B = \dfrac{x + z + t - y}{۲} \\ C = \dfrac{x + y + z - t}{۲} \end{cases} \Rightarrow B + C = x + z$$

$$A_۱ = \frac{MQ + PN}{۲} = \frac{x + z}{۲} = \frac{B + C}{۲} = \frac{۸۰ + ۷۰}{۲} = ۷۵$$

۴) در دایره رسم شده O مرکز دایره و $CD \parallel AB$، اندازه کمان DC را بدست آورید.



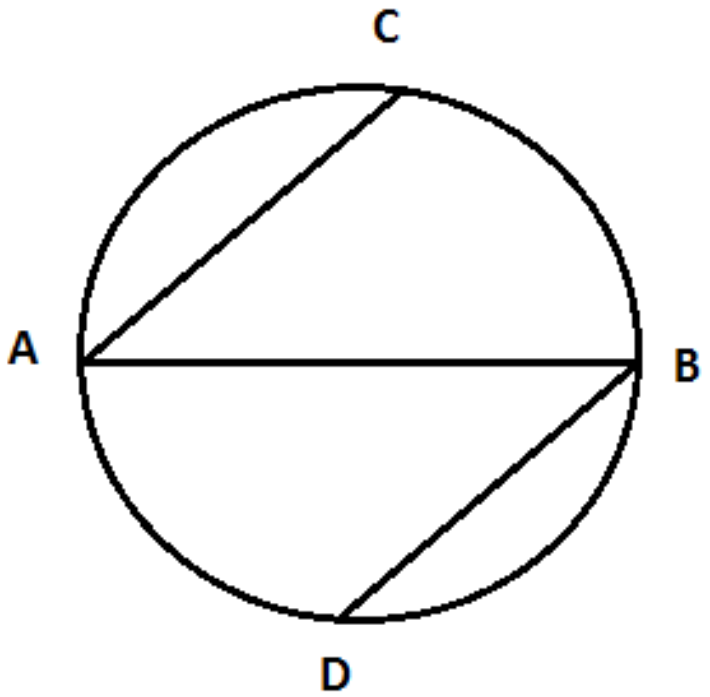
حل:

$$CD \parallel AB \Rightarrow CA = BD = ۲x$$

$$A + O = ۷۵^\circ \Rightarrow x + ۲x = ۷۵^\circ \Rightarrow x = ۲۵$$

$$DC = ۱۸۰ - ۴x = ۱۸۰ - ۱۰۰ = ۸۰$$

۵) در شکل مقابل AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند.



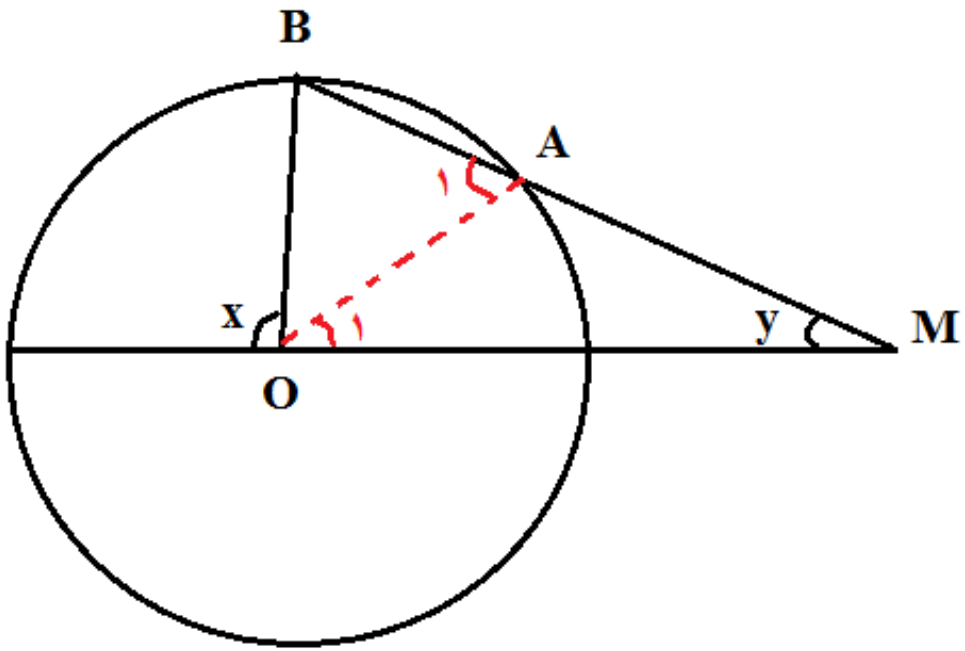
ثابت کنید: $AC = BD$

حل:

$$AC \parallel BD \Rightarrow AD = BC$$

$$CA = ۱۸۰ - BC = ۱۸۰ - AD = DB \Rightarrow AC = DB$$

۶) در شکل زیر O مرکز دایره و اندازه MA برابر شعاع دایره است ثابت کنید. $x = ۳y$



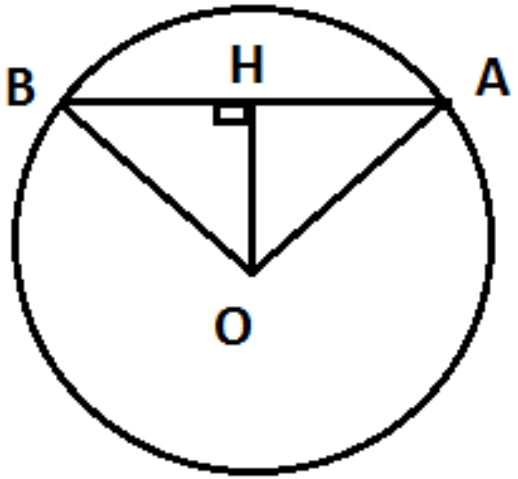
حل: با توجه به مفروضات در شکل داریم :

$$\begin{cases} OA = OB \Rightarrow B = A_{۱} \\ OA = MA = R \Rightarrow O_{۱} = M = y \end{cases}$$

$$A_{۱} = O_{۱} + M = ۲y \Rightarrow B = ۲y$$

$$x = B + M = ۲y + y = ۳y$$

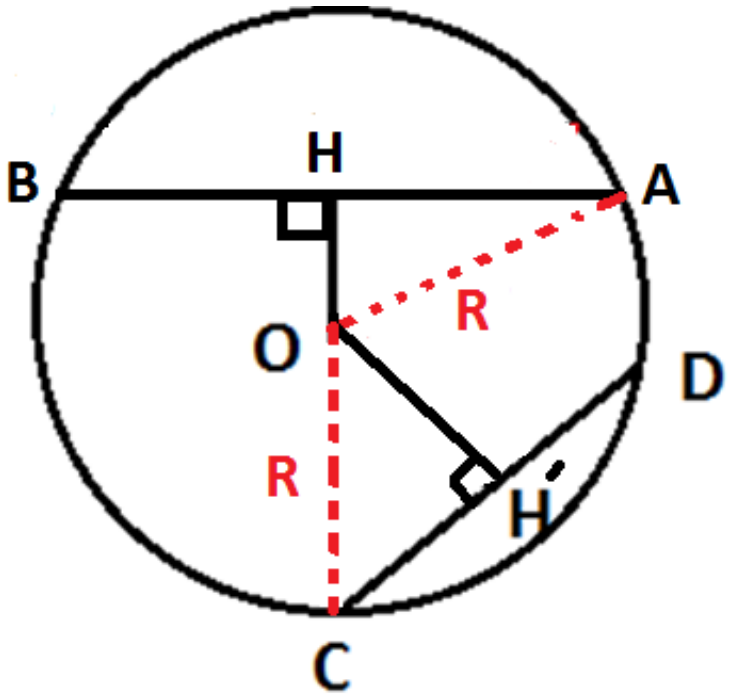
۷) در دایره $C(O,R)$ ، $AB = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$ فاصله O از وتر AB را بدست آورید.



حل: $AB = ۶۰^\circ$ در نتیجه $\overset{\triangle}{AOB} = ۶۰^\circ$ لذا مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ متساوی الساقین متساوی الاضلاع است لذا $OB = ۱۰$ در نتیجه:

$$OH = \sqrt{OB^{۲} - BH^{۲}} = \sqrt{۱۰۰ - ۲۵} = \sqrt{۷۵} = ۵\sqrt{۳}$$

۸) ثابت کنید در هر دایره از دو وتر نابرابر آن یکی بزرگتر است که به مرکز نزدیکتر است و به عکس.



حل: با توجه به شکل باید درستی رابطه زیر را اثبات کنیم.

$$OH < OH' \Leftrightarrow AB > CD$$

$$OH < OH' \Leftrightarrow OH^{۲} < OH'^{۲} \Leftrightarrow R^{۲} - OH^{۲} > R^{۲} - OH'^{۲}$$

$$\Leftrightarrow AH^{۲} > CH'^{۲} \Leftrightarrow AH > CH' \Leftrightarrow AB > CD$$

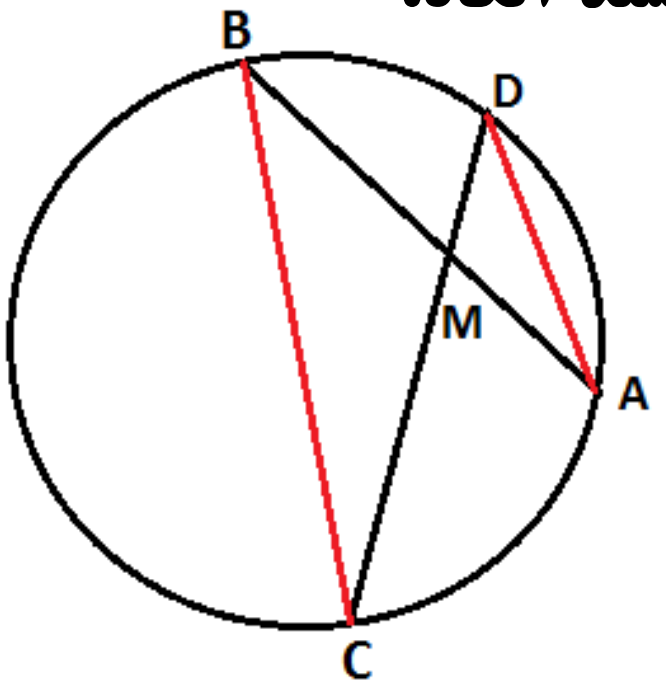
فصل اول

درس دوم: رابطه های طولی در دایره

روابط طولی در دایره

برای به دست آوردن چند رابطه طولی در دایره به اثبات قضایای زیر می پردازیم.

قضیه ۱: در هر دایره اگر دو وتر AB و CD در نقطه M متقاطع باشند آنگاه:

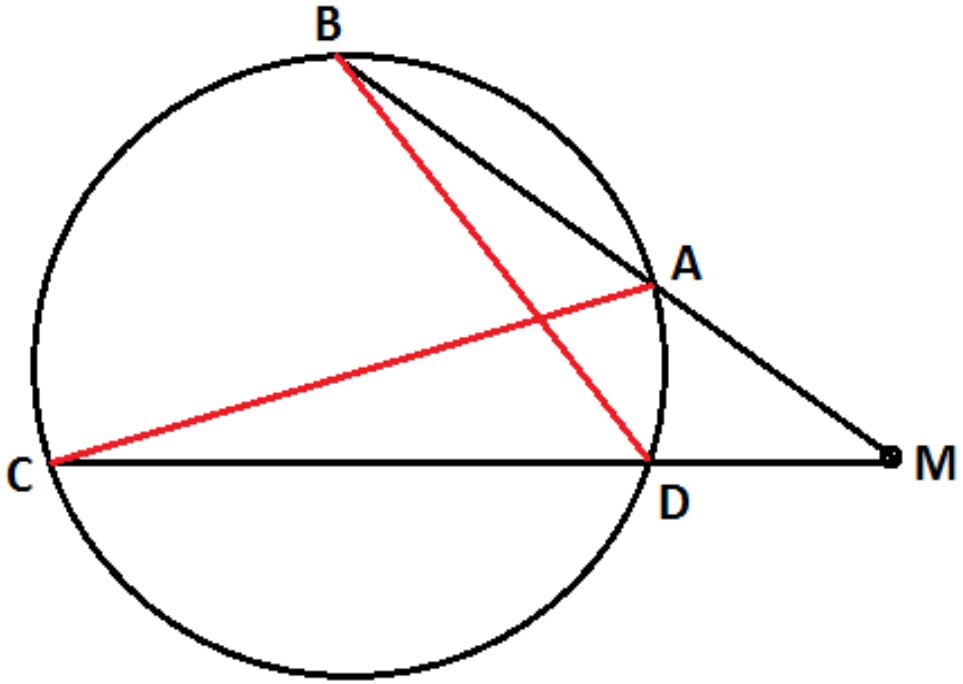


$$MA \times MB = MC \times MD$$

اثبات: باتوجه به شکل در دو مثلث $\overset{\triangle}{MAD}$ و $\overset{\triangle}{MBC}$داریم؛

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{DB}}{۲} \text{ (زاویه ی ظلی)} \\ \hat{B} = \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{CA}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{MAD} \sim \overset{\triangle}{MBC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD$$

قضیه ۲: در هر دایره اگر امتداد دو وتر AB و CD در نقطه M متقاطع باشند آنگاه:

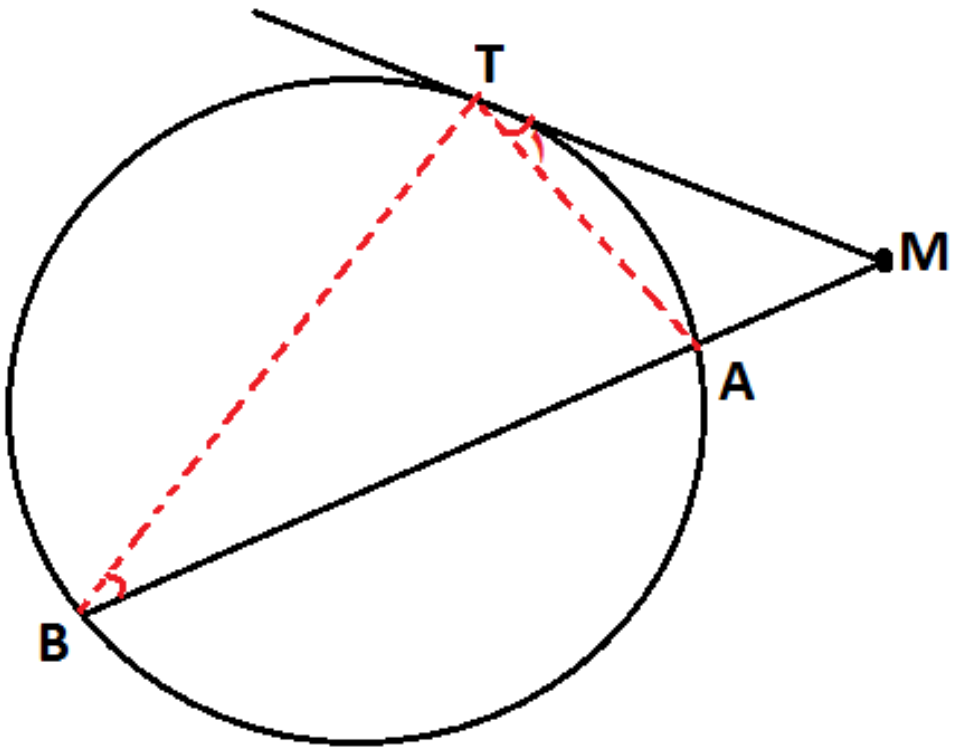


$$MA \times MB = MC \times MD$$

اثبات: باتوجه به شکل در دو مثلث $\overset{\triangle}{MBD}$ و $\overset{\triangle}{MAC}$ داریم؛

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{DA}}{۲} \quad (\text{ز}، \text{ز}) \Rightarrow \overset{\triangle}{MBD} \sim \overset{\triangle}{MAC} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD \\ \hat{M} = \hat{M} \end{cases}$$

قضیه ۳: هرگاه M نقطه ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه های دو قطعه قاطع.
یعنی طول مماس واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع است.

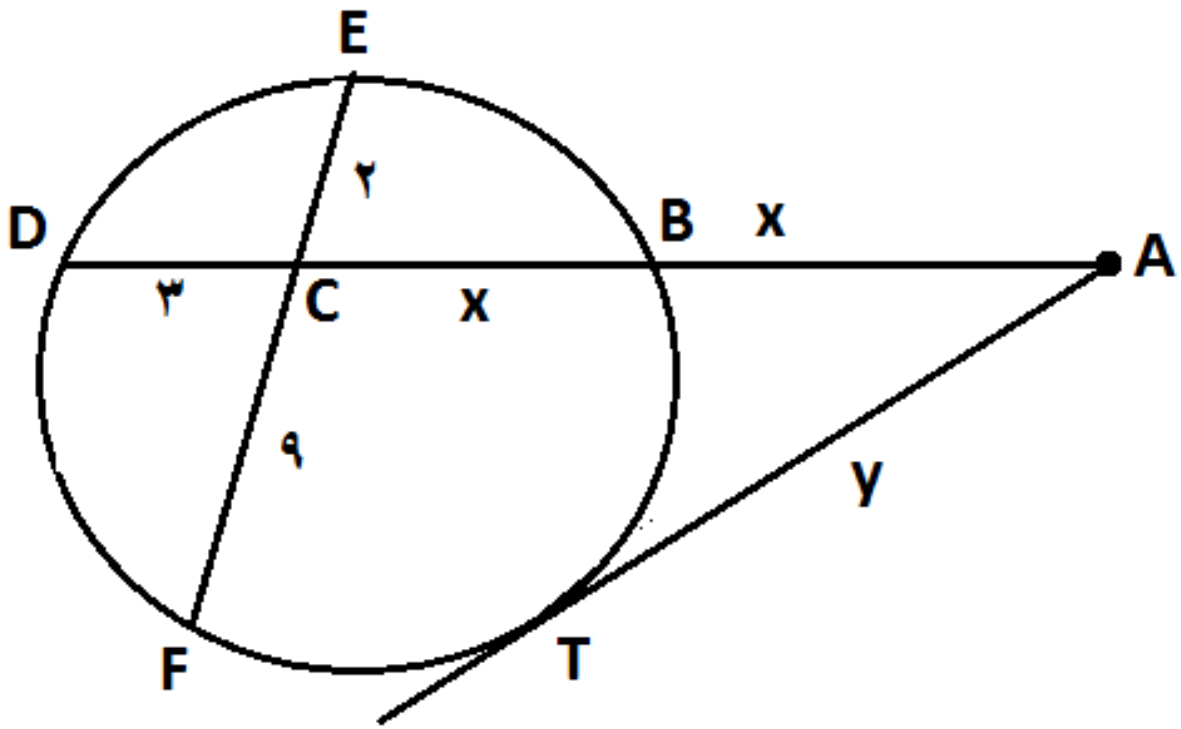


اثبات: باتوجه به شکل در دو مثلث $\overset{\triangle}{MAT}$ و $\overset{\triangle}{MBT}$ داریم؛

$$\begin{cases} M = M \\ B = T_1 = \dfrac{AT}{2} \end{cases} \overset{(ز\,ز)}{\Rightarrow} \overset{\triangle}{MAT} \sim \overset{\triangle}{MBT}$$

در نتیجه $\dfrac{MT}{MB} = \dfrac{MA}{MT}$ لذا $MT^2 = MA \times MB$ و حکم برقرار است.

مثال ۱: در شکل زیر از نقطه A مماس و قاطعی بر دایره رسم شده است. مقادیر x و y را محاسبه کنید.



حل: با توجه به قضایای فوق:

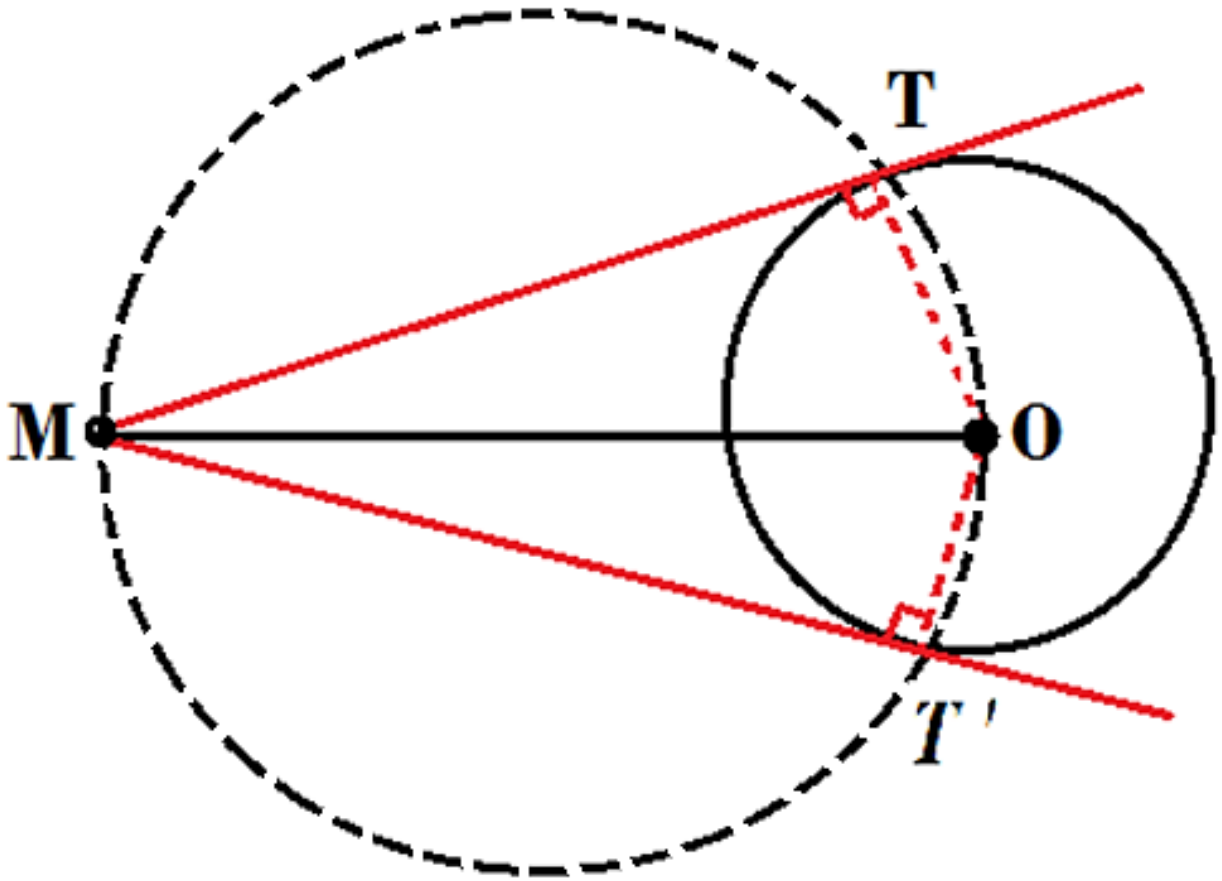
$$CD \times CB = CE \times CF$$

$$۳x = ۲ \times ۹ \Rightarrow x = ۶$$

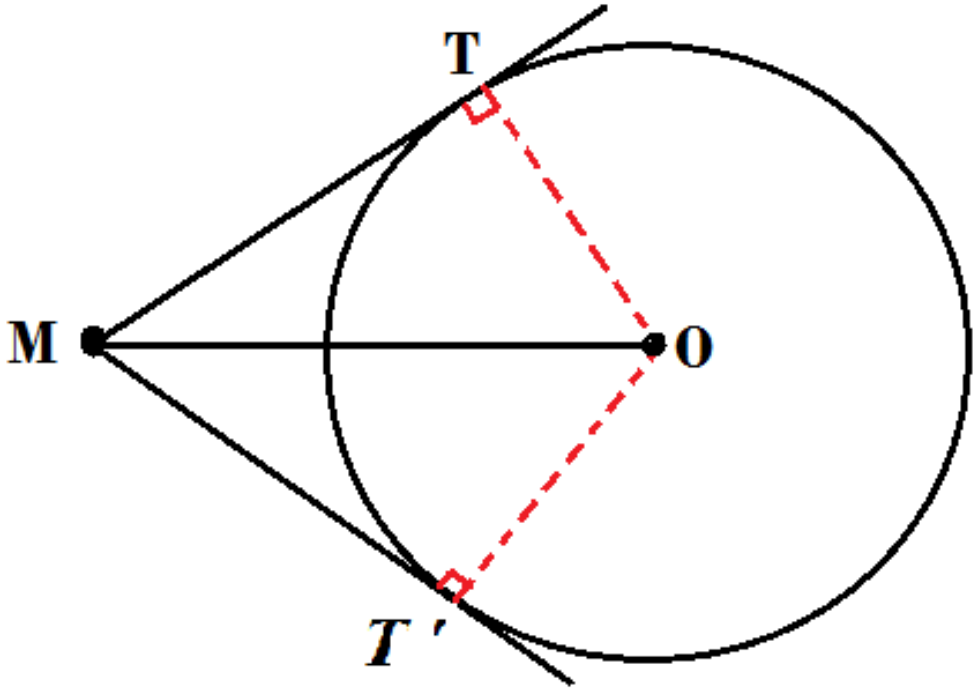
$$AT^{۲} = AB \times AD \Rightarrow y^{۲} = ۶ \times (۶ + ۹) = ۹۰ \Rightarrow y = ۳\sqrt{۱۰}$$

طریقه رسم مماس بر دایره از نقطه ای خارج آن دایره؛

بفرض نقطه M خارج دایره $C\left(O,R\right)$ باشد در این صورت برای رسم مماس از M بر دایره ابتدا دایره ای به قطر OM رسم می کنیم. که این دایره جدید، دایره $C\left(O,R\right)$ را در نقاط T و T' قطع می کند، MT و MT' بر دایره $C\left(O,R\right)$ مماس اند.



قضیه ۴: طول مماس های رسم شده از هر نقطه خارج دایره بر آن دایره با هم مساوی اند.



اثبات: با توجه به شکل اگر MT و MT' مماس های رسم شده بر دایره باشد در این صورت دو مثلث قائم الزاویه $\hat{MOT}$ و $\hat{MOT'}$ بنا به حالت وتر و یک ضلع همنهشت اند؛

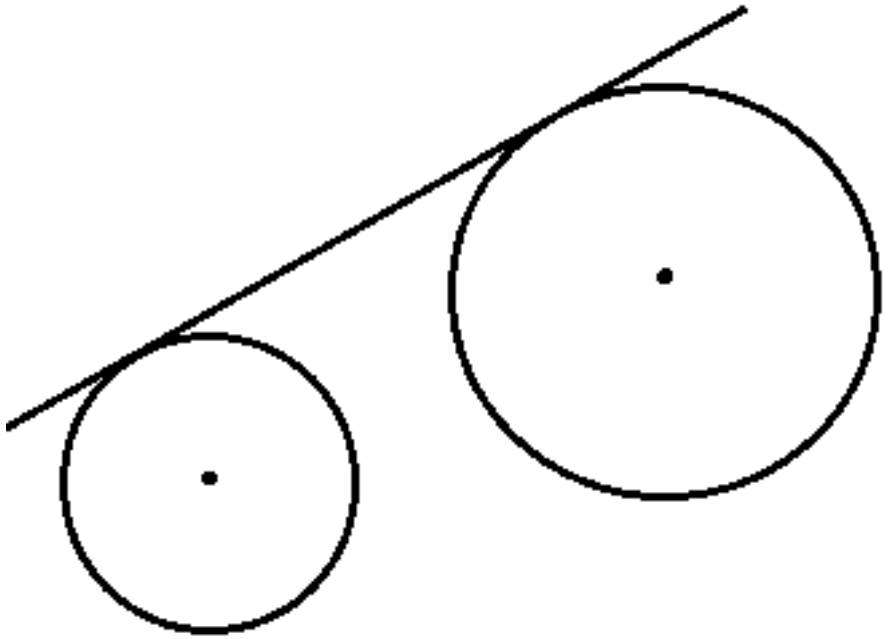
در نتیجه: $MT = MT'$

مماس مشترک دو دایره

تعریف: خط یا پاره خطی که بردو دایره مماس باشد را مماس مشترک دو دایره گوییم:

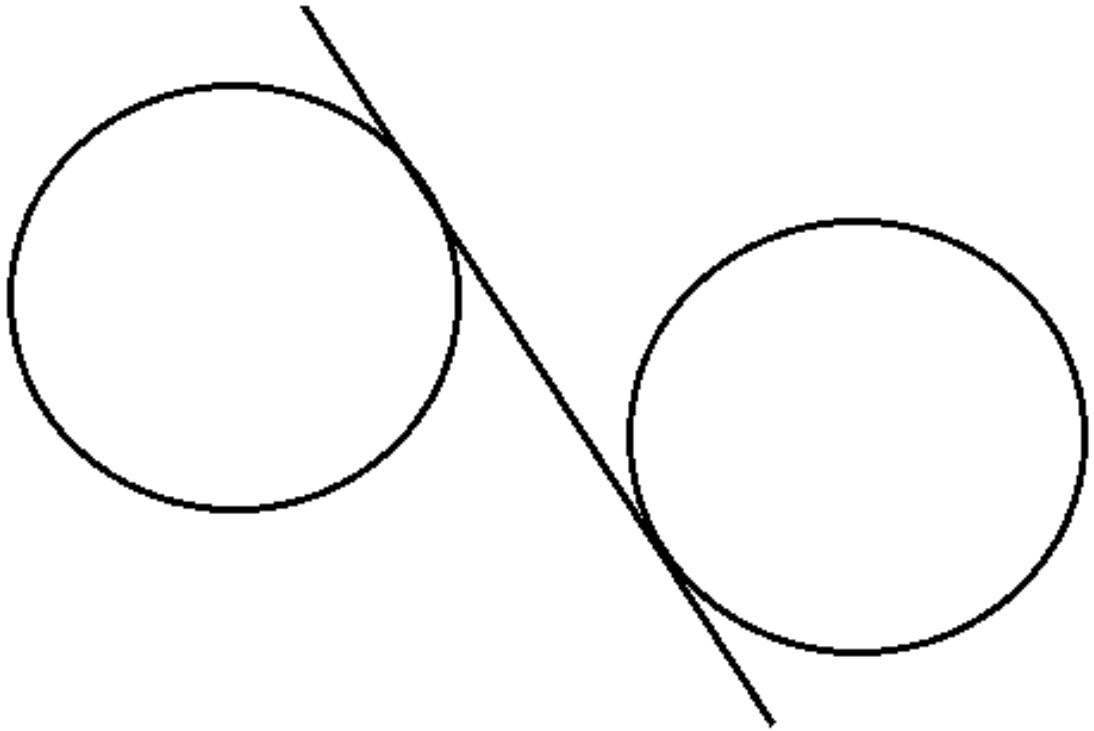
۱) مماس مشترک خارجی دو دایره

تعریف: اگر خطی یا پاره خطی بر دو دایره مماس باشد به طوری که این دو دایره در یک طرف خط مماس واقع باشند آنگاه این خط مماس را مماس مشترک خارجی دو دایره گوییم.



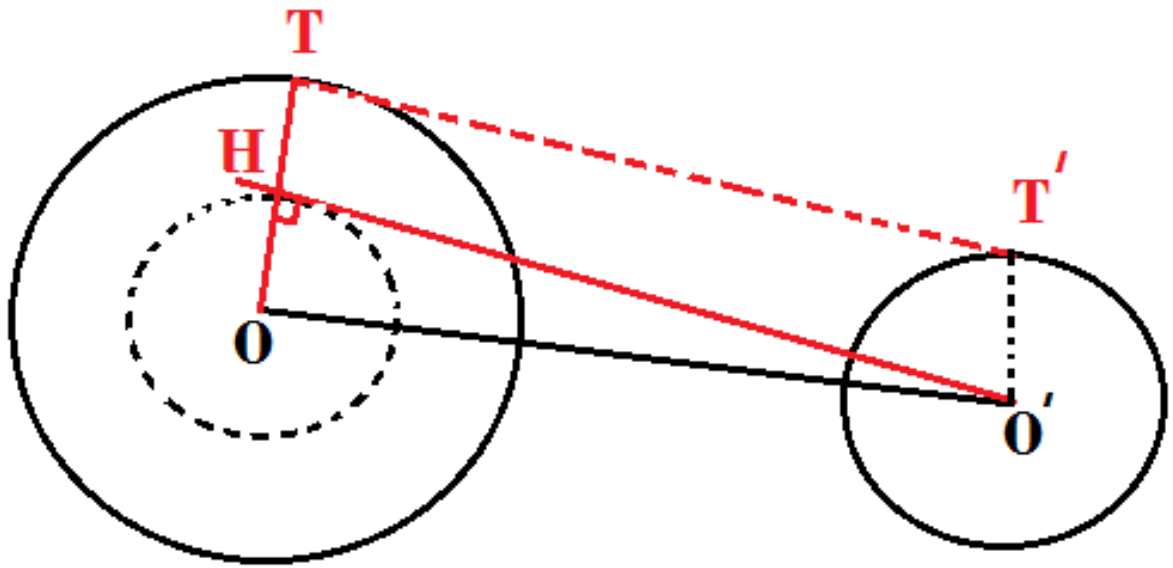
۲) مماس مشترک داخلی دو دایره

تعریف: اگر خطی یا پاره خطی بر دو دایره مماس باشد به طوری که این دو دایره در دو طرف خط مماس واقع باشند آنگاه این خط مماس را مماس مشترک داخلی دو دایره گوییم.



طریقه رسم مماس مشترک خارجی دو دایره

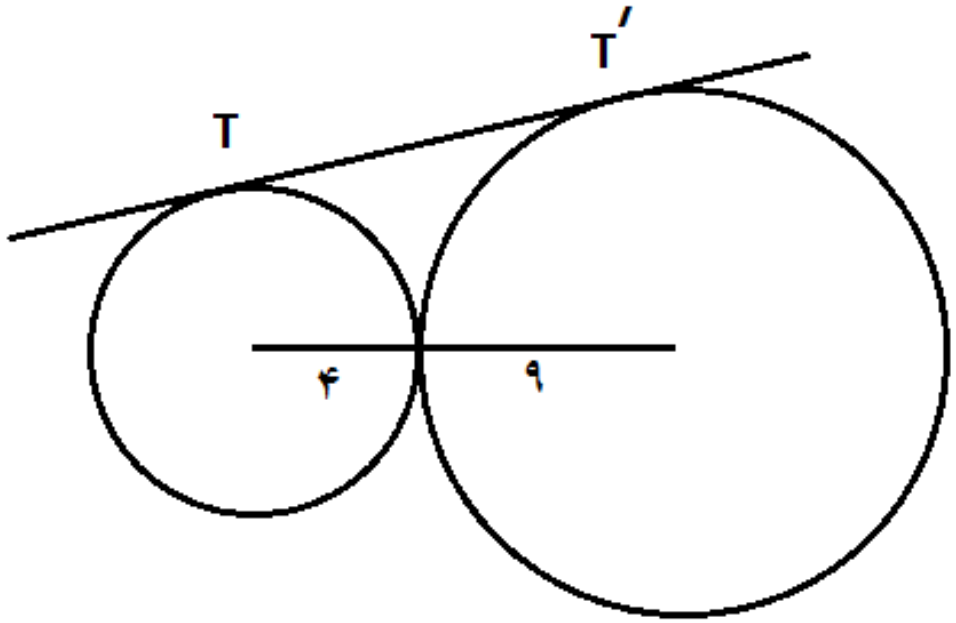
دو دایره متخارج $C\left(O,R\right)$ و $C'\left(O',R'\right)$ را با فرض $R>R'$ و $OO'=d$ در نظر می گیریم
در این صورت برای رسم مماس مشترک خارجی ابتدا دایره ای به مرکز O' و به شعاع $R-R'$ رسم می کنیم سپس از O' نیم خط $O'H$ را مماس بر دایره جدید رسم می کنیم.
O را به H وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا دایره $C\left(O,R\right)$ را در نقطه ای مانند T قطع کند پاره خط TT' را موازی $O'H$ رسم می کنیم این پاره خط TT' بر هر دو دایره مماس است و جواب مساله است.



طول مماس مشترک خارجی این دو دایره از رابطه زیر بدست می آید در مثلث قائم الزاویه $\overset{\Delta}{O\,O'H}$ داریم:

$$OO'^{2}=OH^{2}+O'H^{2}\Rightarrow d^{2}=\left(R-R'\right)^{2}+TT'^{2}\Rightarrow TT'=\sqrt{d^{2}-\left(R-R'\right)^{2}}$$

مثال ۲: دو دایره به شعاع های ۴ و ۹ مماس برون اند طول مماس مشترک خارجی این دو دایره را بدست آورید.

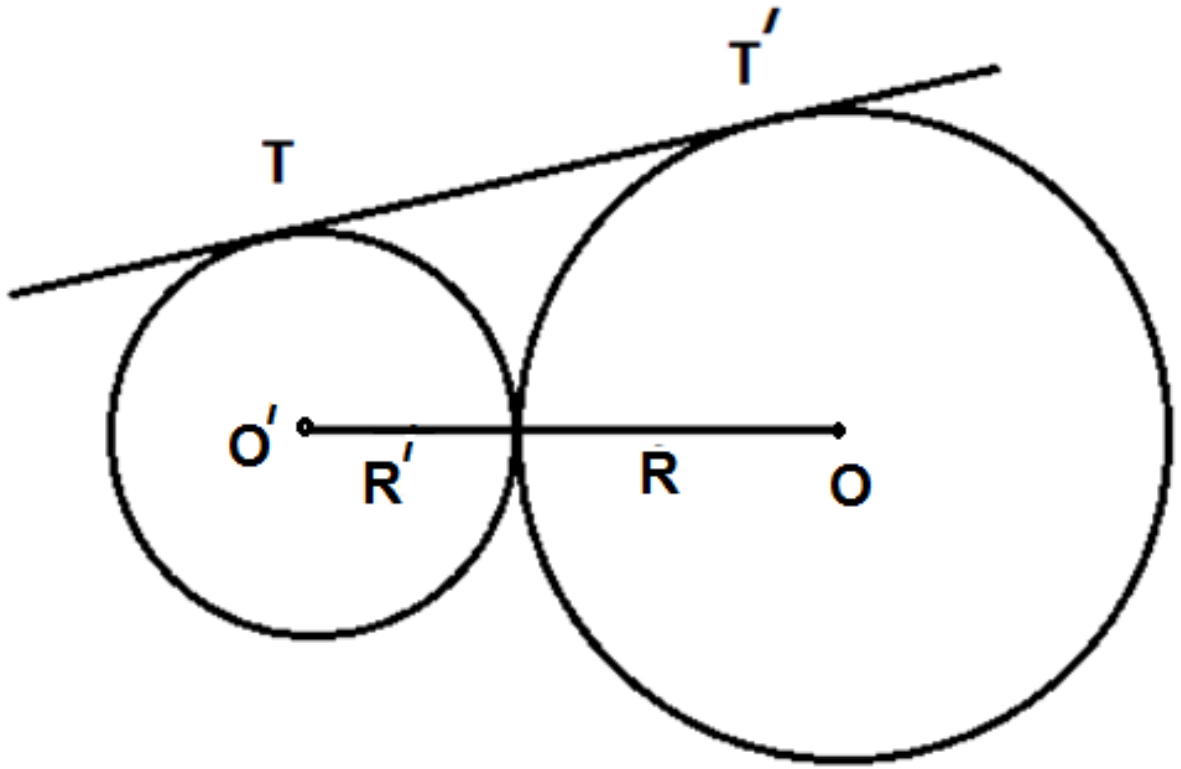


$$TT'=\sqrt{d^{2}-(R-R')^{2}}=\sqrt{(R+R')^{2}-(R-R')^{2}}=\sqrt{۱۳^{2}-۵^{2}}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

مثال ۳: دو دایره به شعاع های R و R' مماس خارج اند نشان دهید طول مماس مشترک خارجی این دو دایره از رابطه زیر بدست می آید:

$$TT' = ۲\sqrt{RR'}$$

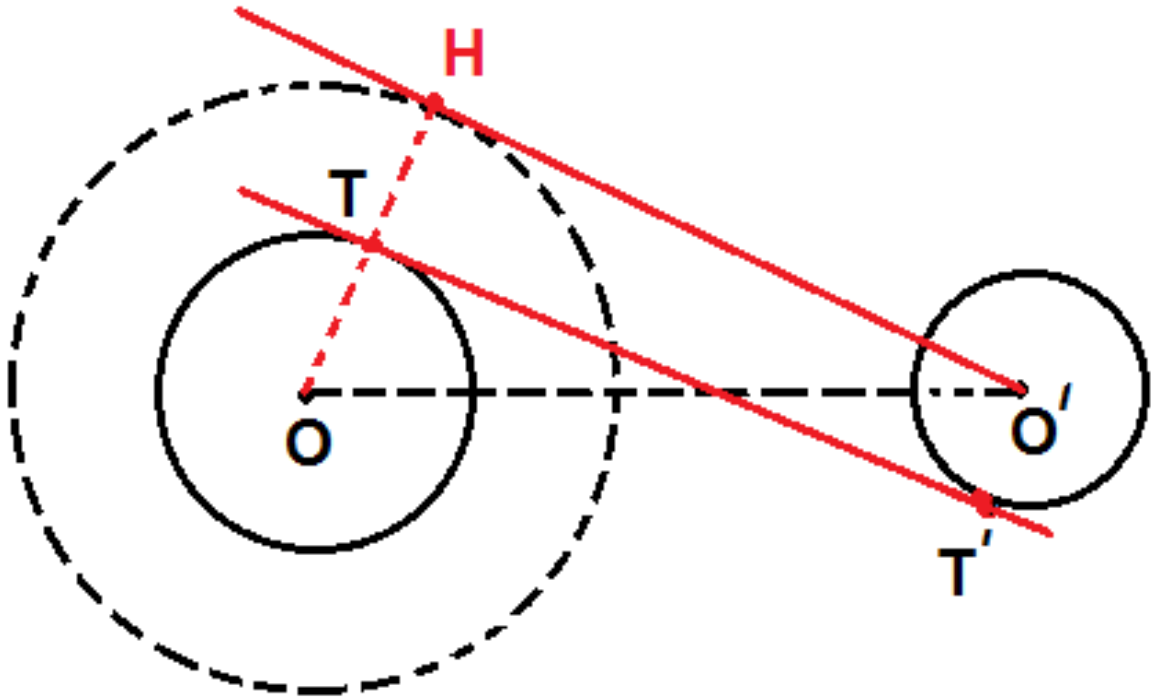
$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}} = \sqrt{(R + R')^{۲} - (R - R')^{۲}} = \sqrt{۴RR'} = ۲\sqrt{RR'}$$



نتیجه: دو دایره مماس خارج اند، اگر و تنها اگر طول مماس مشترک خارجی، واسطه هندسی طول دو قطر باشد.

طریقه رسم مماس مشترک داخلی دو دایره

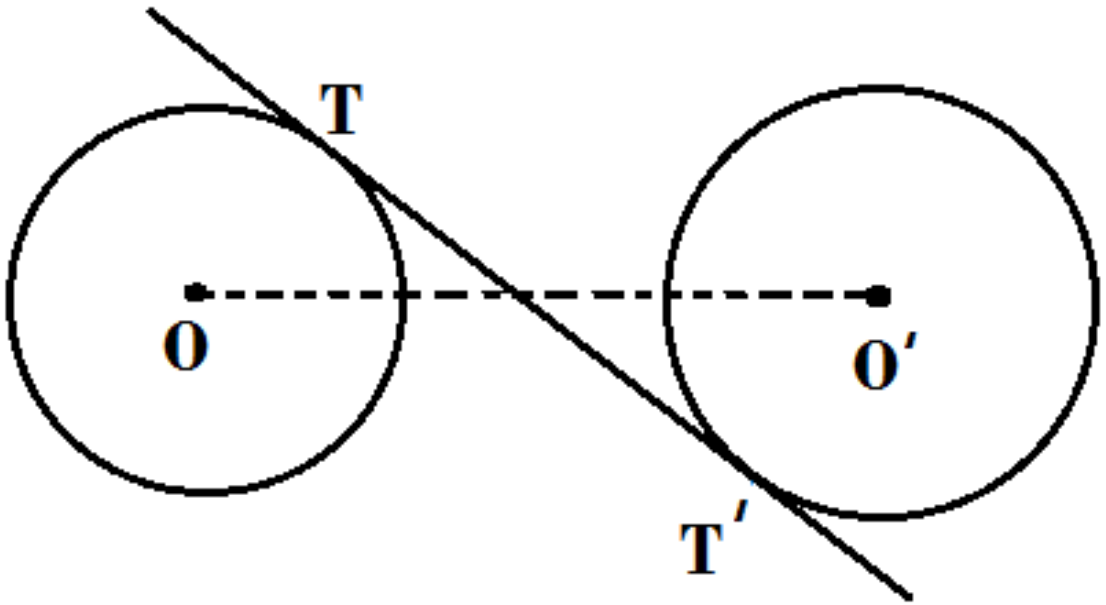
دو دایره متخارج $C\left(O,R\right)$ و $C'\left(O',R'\right)$ را با فرض $R>R'$ و $OO'=d$ در نظر می گیریم در این صورت برای رسم مماس مشترک داخلی، ابتدا دایره ای به مرکز O و به شعاع $R+R'$ رسم می کنیم سپس از O' نیم خط $O'H$ را مماس بر دایره جدید رسم می کنیم O را به H وصل می کنیم تا دایره $C\left(O,R\right)$ را در نقطه ای مانند T قطع کند پاره خط TT' را موازی $O'H$ رسم می کنیم این پاره خط TT' بر هر دو دایره مماس است و جواب مساله است.



طول مماس مشترک داخلی دو دایره با توجه به شکل فوق از رابطه زیر بدست می آید:

$$TT'=\sqrt{d^{2}-(R+R')^{2}}$$

مثال ۴: دو دایره به شعاع های ۵ و ۷ با طول خط المرکزین ۱۳ مفروض اند، طول مماس مشترک داخلی این دو دایره را بدست آورید.

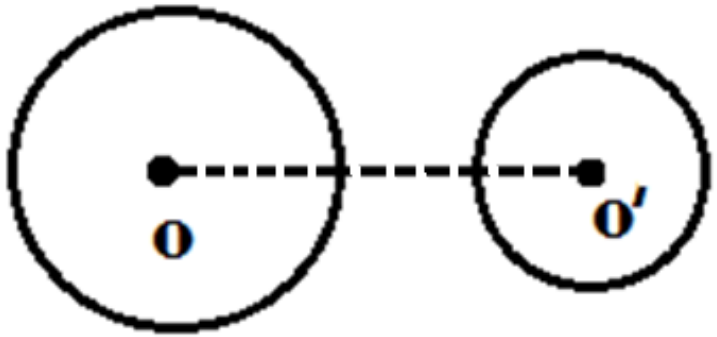


$$TT' = \sqrt{d^{۲} - \left(R + R'\right)^{۲}} = \sqrt{۱۳^{۲} - ۱۲^{۲}} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

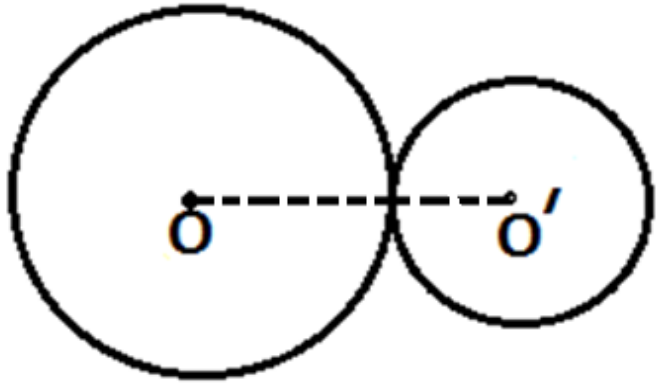
حالت های دو دایره نسبت به هم

دو دایره $C\left(O,R\right)$ و $C'\left(O',R'\right)$ را با فرض $R>R'$ و $OO'=d$ در نظر می گیریم حالتهای مختلف این دو دایره به شرح زیر است.

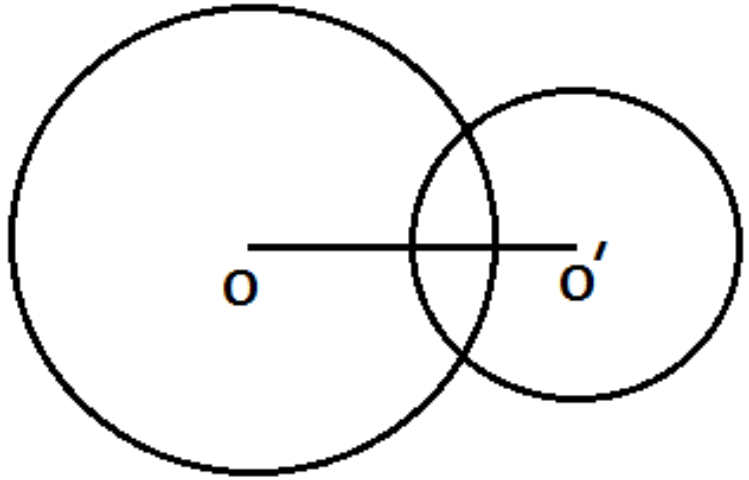
۱) اگر $d>R+R'$ باشد آنگاه دو دایره متخارج اند.



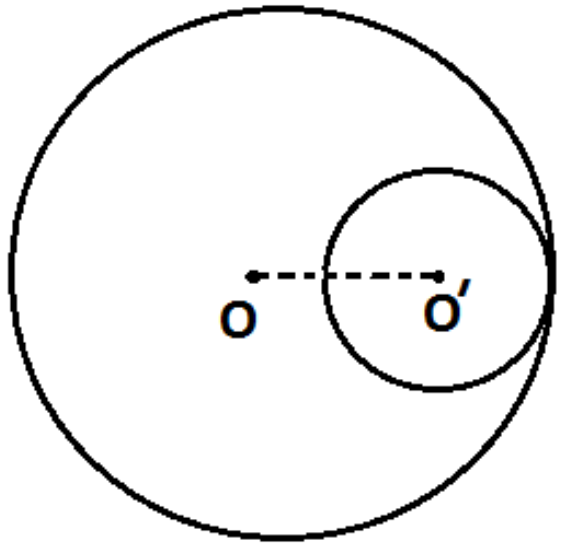
۲) اگر $d=R+R'$ باشد آنگاه دو دایره مماس برون اند.



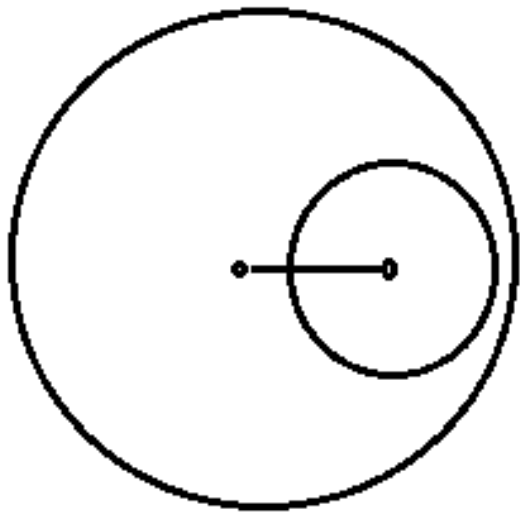
۳) اگر $R - R' < d < R + R'$ باشد آنگاه دو دایره متقاطع اند.



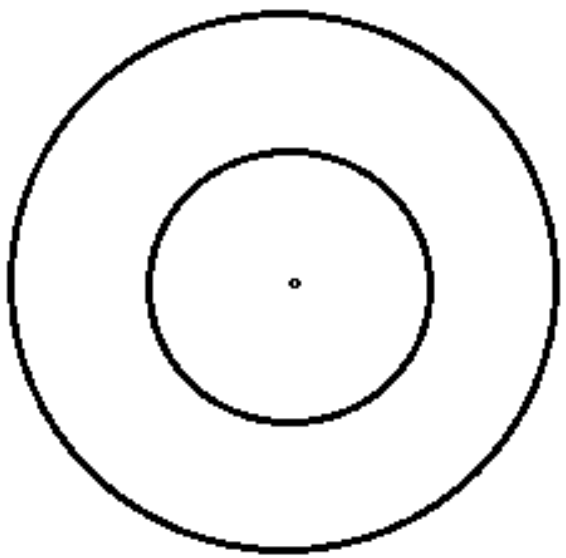
۴) اگر $d = R - R'$ باشد آنگاه دو دایره مماس درون اند.



۵) اگر $d < R - R'$ باشد آنگاه دو دایره متداخل اند.

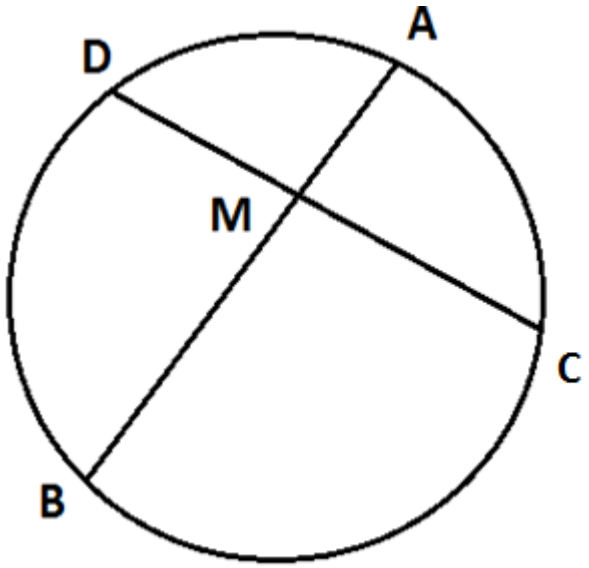


۶) اگر $d = ۰$ آنگاه دو دایره هم مرکزند.



حل تمرینات صفحه ۲۳ کتاب درسی

۱) در دایره $C\left(O,R\right)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتی متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB=۱۱$ آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی تقسیم می کند.



حل: باتوجه به مفروضات اگر $DM=x$ باشد، آنگاه $MC=۲x$

در نتیجه:

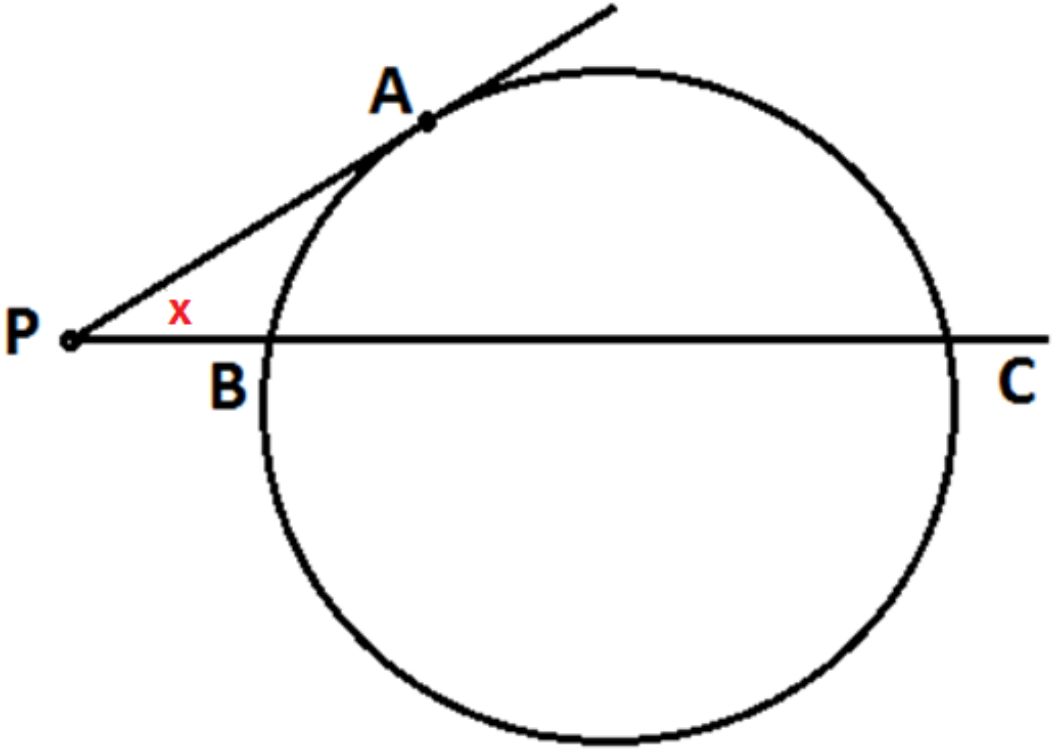
$$۳x=۹\Rightarrow x=۳$$

$$DM\times MC=AM\times MB$$

$$۳\times ۶=y\left(۱۱-y\right)\Rightarrow y^{۲}-۱۱y+۱۸=۰\Rightarrow y=۲$$

لذا وتر CD وتر AB را به نسبت ۲ به ۹ تقسیم کرده است.

۲) از نقطه P در خارج دایره ای مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ بر آن رسم کرده ایم. همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است اگر $BC = ۲۰$ باشد، آنگاه طول های PB و PC تعیین کنید.



حل:

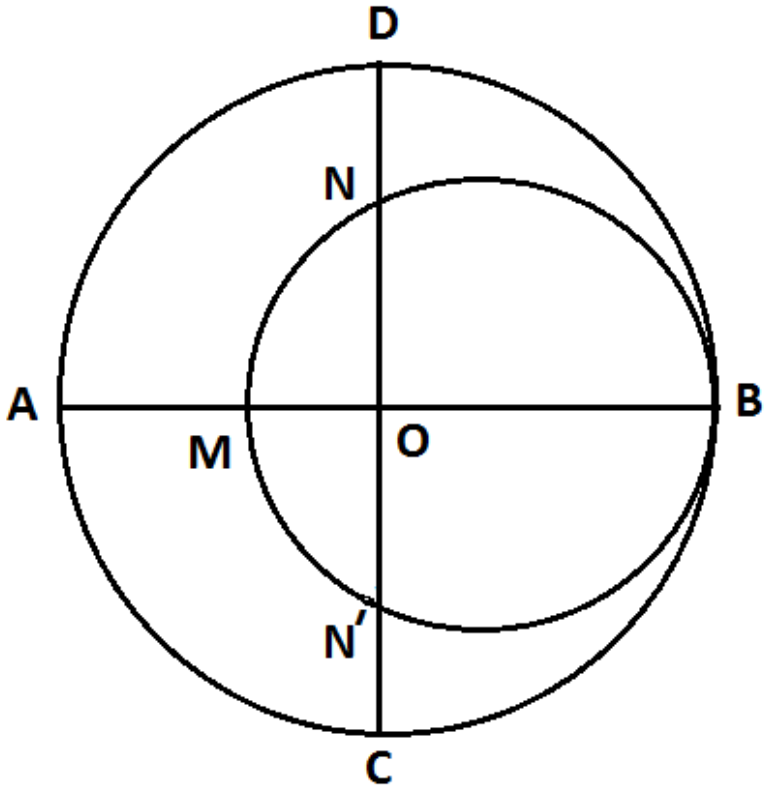
$$PA^{۲} = PB \times PC$$

$$(۱۰\sqrt{۳})^{۲} = x(۲۰ + x)$$

$$x^{۲} + ۲۰x - ۳۰۰ = ۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

در نتیجه $PC = ۳۰, PB = ۱۰$

۳) در شکل مقابل دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند اگر $AM = ۱۶$ و $DN = ۱۰$ باشد آنگاه اندازه شعاع های دو دایره را بدست آورید.



حل: با فرض $ON = ON' = x$ و $OM = y$ داریم:

$$OA = OD \Rightarrow ۱۶ + y = ۱۰ + x \Rightarrow x = ۶ + y$$

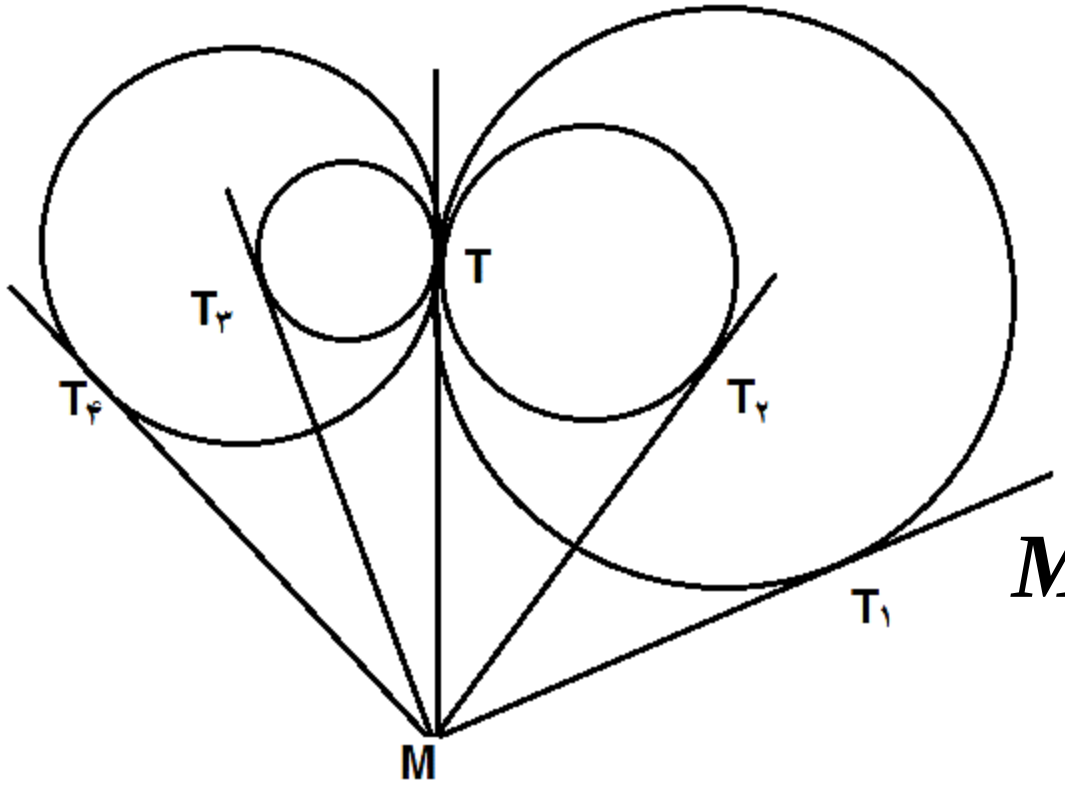
$$OM \times OB = ON \times ON' \Rightarrow y \times (۱۶ + y) = (۶ + y)^{۲}$$

$$y^{۲} + ۱۶y = y^{۲} + ۱۲y + ۳۶ \Rightarrow y = ۹, x = ۱۵$$

لذا شعاع دایره بزرگتر ۲۵ و شعاع دایره کوچکتر ۱۷ است.

۴) مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه T بر هم مماس اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم ثابت کنید.

$$MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴$$



حل: از نقطه M بر دایره کوچکتر دو مماس رسم شده لذا طول مماس ها برابرند.

$$MT = MT_۳$$

و با استدلالی مشابه

$$MT = MT_۴, MT = MT_۲, MT = MT_۱$$

و نتیجه $MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴$

۵) طول شعاع های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

$$\sqrt{d^{۲}-(R+R')^{۲}}=\sqrt{۱۵}^{۲} \Rightarrow ۶۴-(R+R')^{۲}=۱۵$$

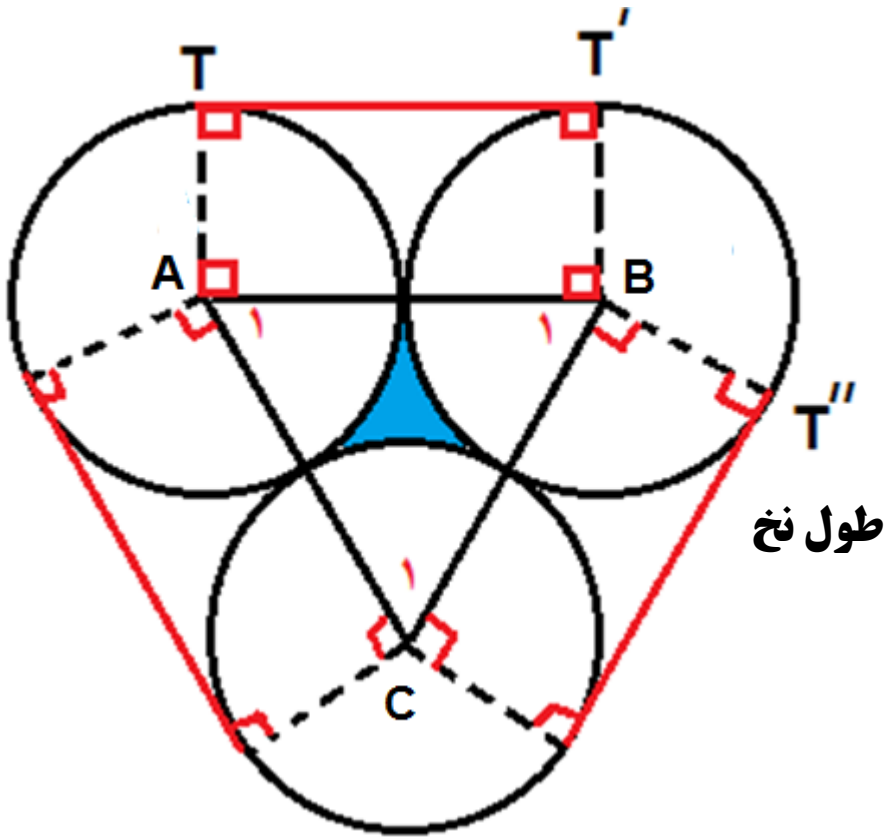
$$R+R'=۷ \quad (*)$$

$$\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}=(۳\sqrt{۷})^{۲} \Rightarrow ۶۴-(R-R')^{۲}=۶۳$$

$$R-R'=۱ \quad (**)$$

$$*, ** \Rightarrow R=۴, R'=۳$$

۶) سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو بر هم مماس اند مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخی بسته شده اند نشان دهید طول این نخ برابر $۶r + ۲\pi r$ همچنین نشان دهید مساحت ناحیه بین این سه دایره برابر $r^{۲}(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$ محدود است.

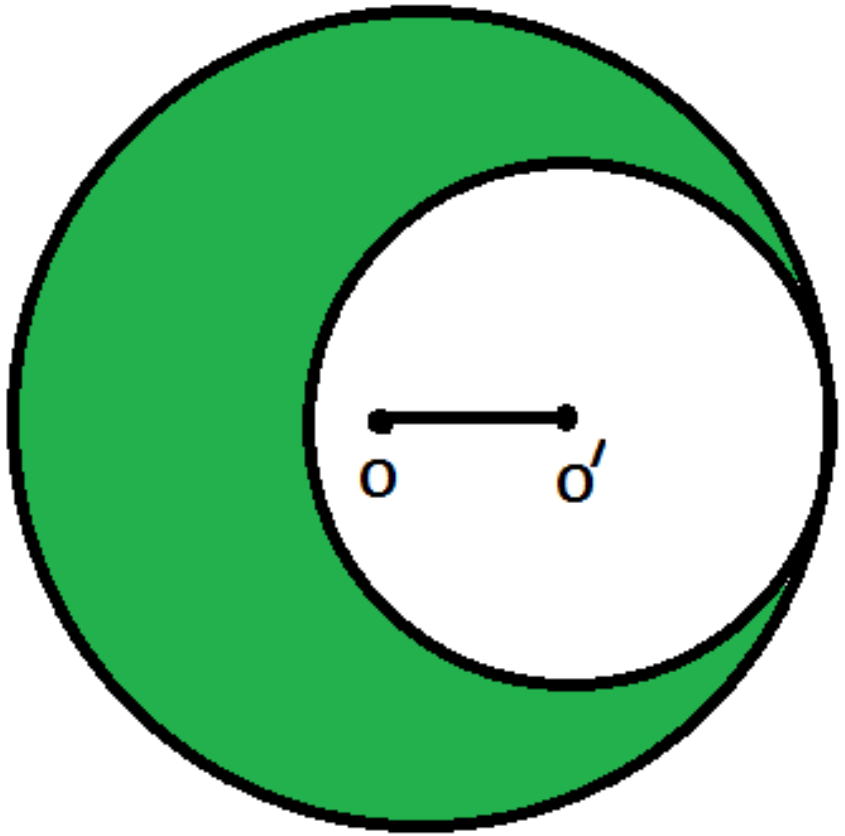


حل:

$$\text{طول نخ} = ۳(TT' + T''T') = ۳(۲r + \frac{۱}{۳}(۲\pi r)) = ۶r + ۲\pi r$$

$$\text{مساحت ناحیه} = S_{ABC} - \text{مجموع مساحت های سه قطاع} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^{۲} - \frac{\pi r^{۲}}{۲} = \sqrt{۳}r^{۲} - \frac{\pi r^{۲}}{۲} = r^{۲}(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$$

۷) طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها ۱۶π سانتی متر مربع است. طول شعاع های دو دایره را بدست آورید.



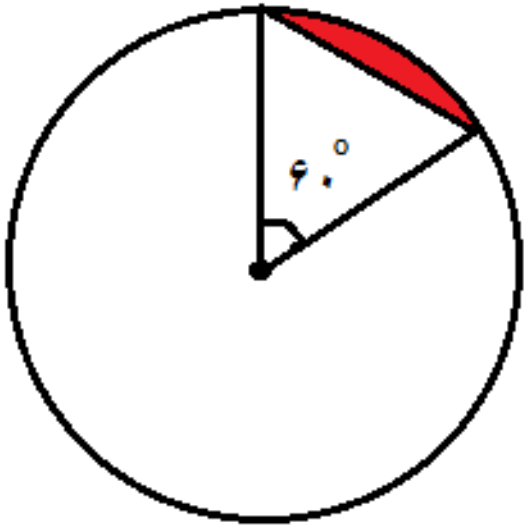
حل: با توجه به شکل؛

$$OO' = ۲ \Rightarrow R - R' = ۲$$

$$\pi R^{۲} - \pi R'^{۲} = ۱۶\pi \Rightarrow R^{۲} - R'^{۲} = ۱۶$$

در نتیجه $R + R' = ۸$ **لذا** $R' = ۳, R = ۵$

۸) مطابق شکل دایره ای به شعاع ۴ مفروض است، مساحت ناحیه سایه زده را حساب کنید.



حل: مساحت قطعه متناظر به کمان مذکور یا زاویه مقابل به ۶۰° در این دایره از رابطه زیر به دست می آید؛

$$\text{مساحت ناحیه سایه زده} = \frac{\pi(۴)^۲}{۶} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴)^۲ = \frac{۸\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}$$

فصل اول

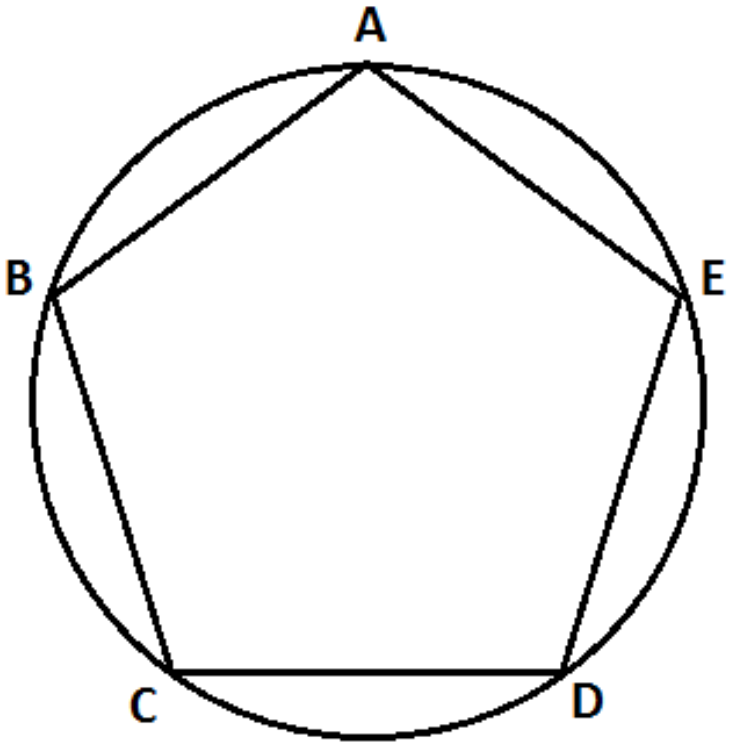
درس سوم: چند ضلعی های محاطی و محیطی

چند ضلعی های محاطی و محیطی

۱) چند ضلعی محاطی

تعریف: یک چند ضلعی را محاطی گوییم هرگاه دایره ای باشد که از تمام رئوس آن بگذرد.
که در این صورت دایره را دایره محیطی چند ضلعی گوییم.

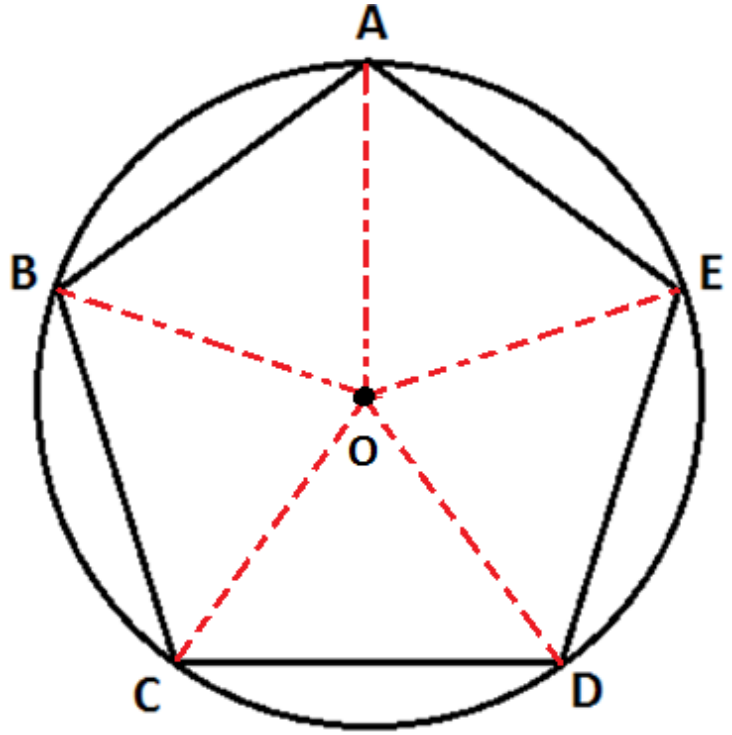
مثال ۱: در شکل زیر پنج ضلعی $ABCDE$ یک پنج ضلعی محاطی است.



قضیه ۱: یک چند ضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف های همه اضلاع آن در یک نقطه همرس باشند.

اثبات: برای سادگی، قضیه را در یک پنج ضلعی اثبات می کنیم.

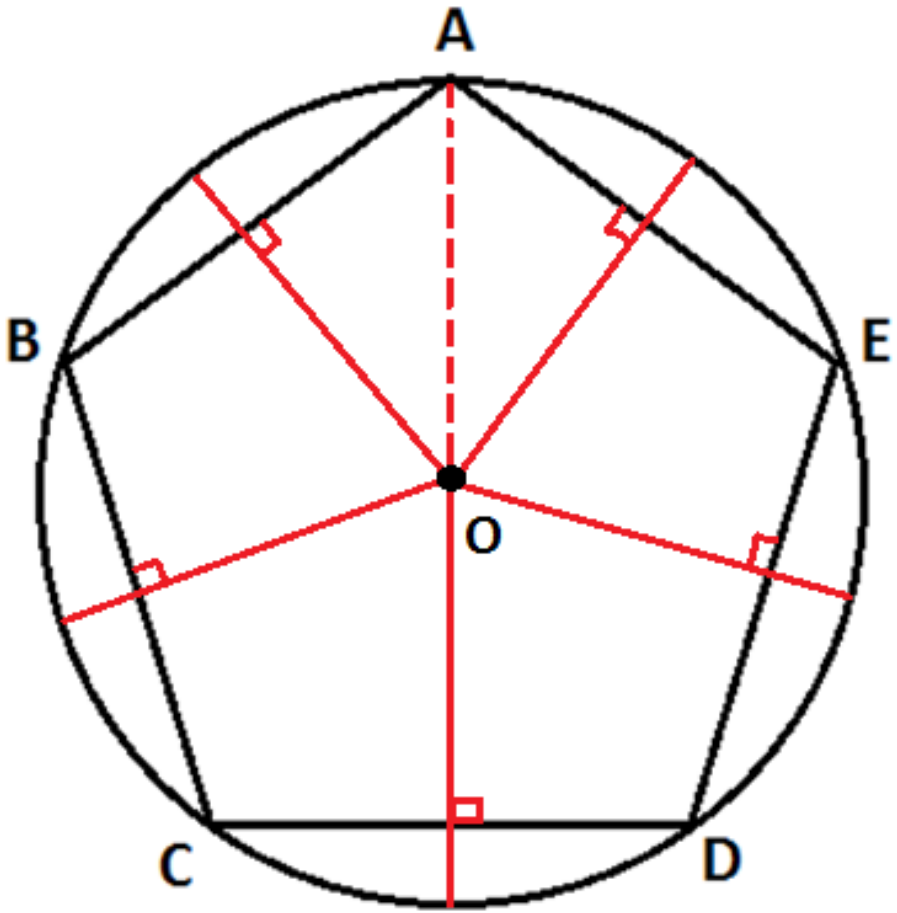
بفرض پنج ضلعی زیر محاطی باشد در نتیجه تمام رئوس آن در یک دایره به مرکز O و به شعاع R قرار می گیرد با توجه به شکل؛



$$OA = OB = OC = OD = OE$$

در نتیجه نقطه O روی عمود منصف اضلاع پنج ضلعی قرار دارد یعنی O نقطه همرسی عمود منصف اضلاع است در نتیجه حکم برقرار است.

حال گیریم عمود منصف اضلاع پنج ضلعی $ABCDE$ در یک نقطه به نام O همرس باشد در نتیجه فاصله نقطه O از تمام رئوس به یک اندازه ثابت OA است لذا کافی است دایره ای به مرکز O و به شعاع OA رسم کنیم این دایره از تمام رئوس پنج ضلعی می گذرد لذا پنج ضلعی مذکور محاطی است.

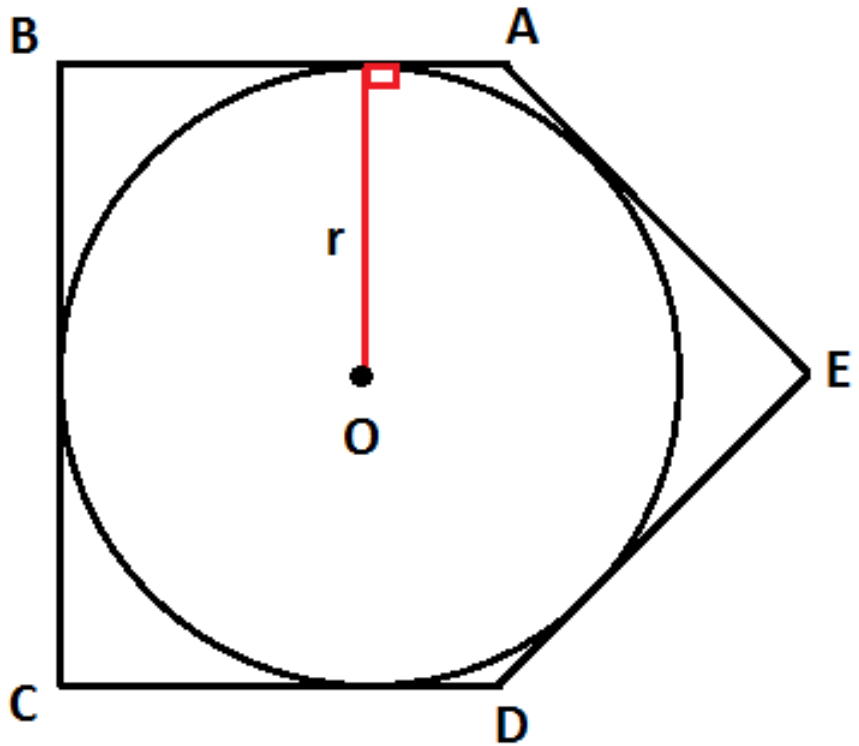


و اثبات برای هر چند ضلعی دلخواه نیز به طور مشابه است.

۲) چند ضلعی محیطی

تعریف: یک چند ضلعی را محیطی گوییم هرگاه دایره ای باشد که بر تمام اضلاع چند ضلعی مماس باشد در این صورت این دایره را، دایره محاطی این چند ضلعی گوییم.

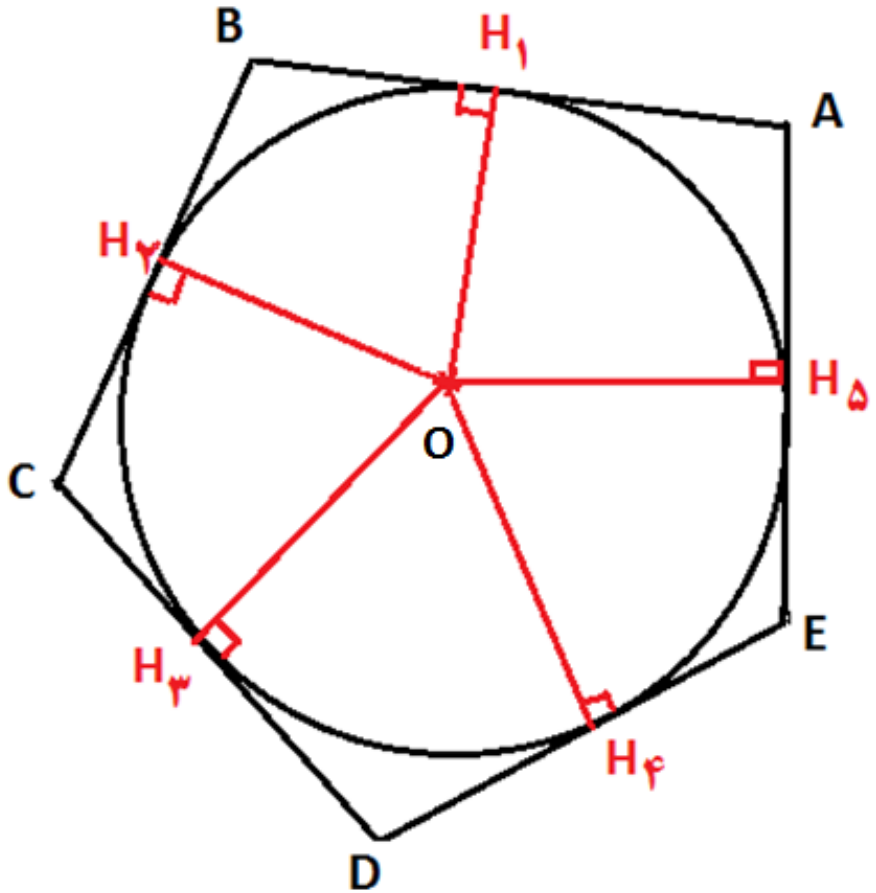
مثال ۲: در شکل زیر پنج ضلعی $ABCDE$ پنج ضلعی محیطی و دایره $C\ (0\ ,r\ )$دایره محاطی است.



قضیه ۲: یک چند ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر تمام نیمسازهای زاویه های آن در یک نقطه همرس باشند.

اثبات: برای سادگی قضیه را برای یک پنج ضلعی اثبات می کنیم و اثبات در هر چند ضلعی دیگر به طور مشابه انجام می گیرد.

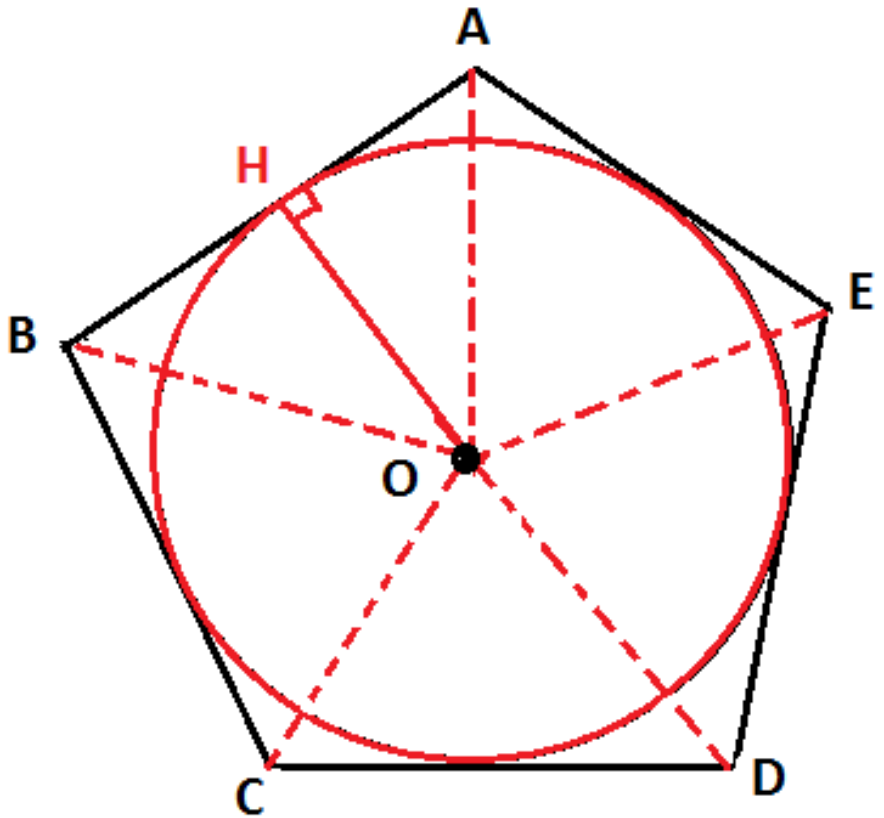
بفرض چند ضلعی $ABCDE$ محیطی باشد در نتیجه تمام اضلاع آن بر دایره $C\,(O\,,\,r\,)$مماس است لذا:



$$OH_{۱}=OH_{۲}=...=OH_{۵}=r$$

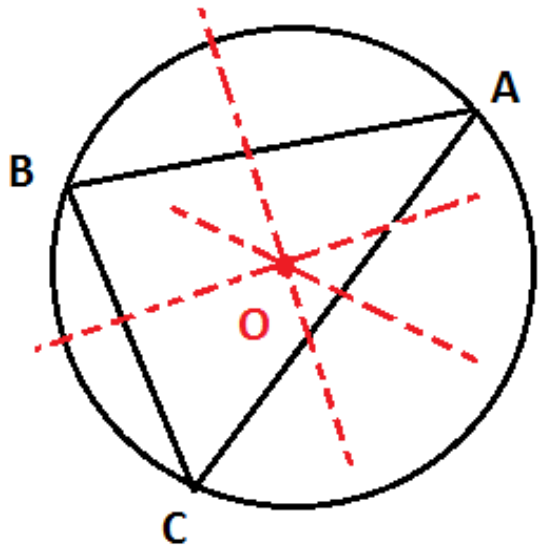
با توجه به شکل فاصله مرکز دایره از تمام اضلاع به یک فاصله است پس نقطه O روی نیمساز زاویه های داخلی چند ضلعی واقع است یعنی نیمساز زاویه های چند ضلعی در نقطه O همرس اند.

حال گیریم تمام نیمساز زاویه های داخلی پنج ضلعی $ABCDE$ در نقطه O همرس باشد لذا فاصله نقطه O از تمامی اضلاع به یک اندازه ثابت OH است لذا کافی است دایره ای به مرکز O و به شعاع OH رسم کنیم این دایره بر تمام اضلاع پنج ضلعی مماس است لذا پنج ضلعی مذکور محیطی است.

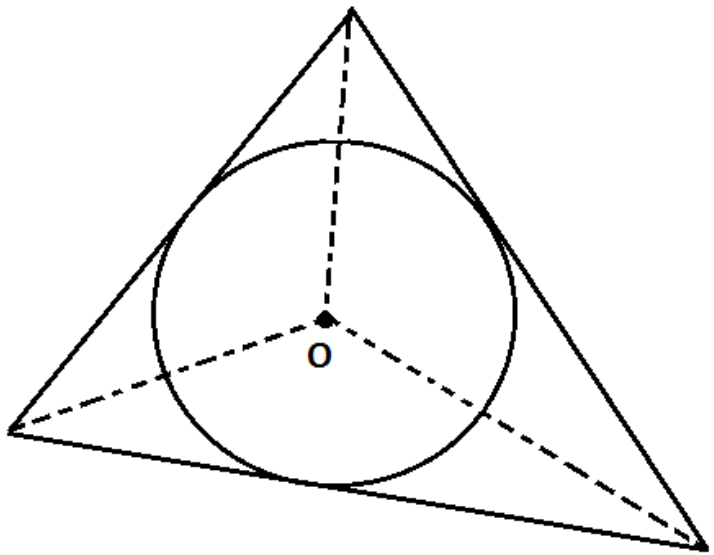


نتایج:

۱) هر مثلث یک سه ضلعی محاطی است زیرا عمود منصف اضلاع در آن همرس اند.



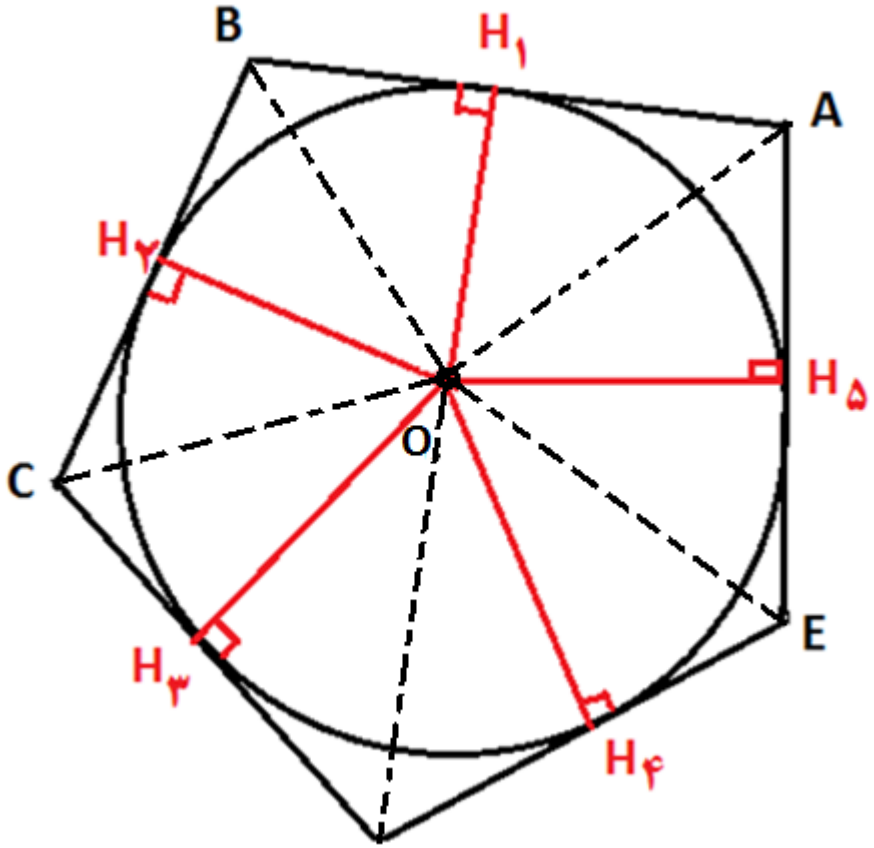
۲) هر مثلث یک سه ضلعی محیطی است زیرا نیمساز زاویه های داخلی هر مثلث همرس اند.



مثال ۳: بفرض در یک چند ضلعی محیطی مساحت S و محیط $۲p$ و شعاع دایره محاطی برابر r باشد ثابت کنید: $S = rP$

اثبات: برای سادگی مساله را در یک پنج ضلعی محیطی اثبات می کنیم و لازم به ذکر است که اثبات برای هر چند ضلعی محیطی دیگر نیز به طور مشابه انجام می گیرد.

با توجه به شکل:



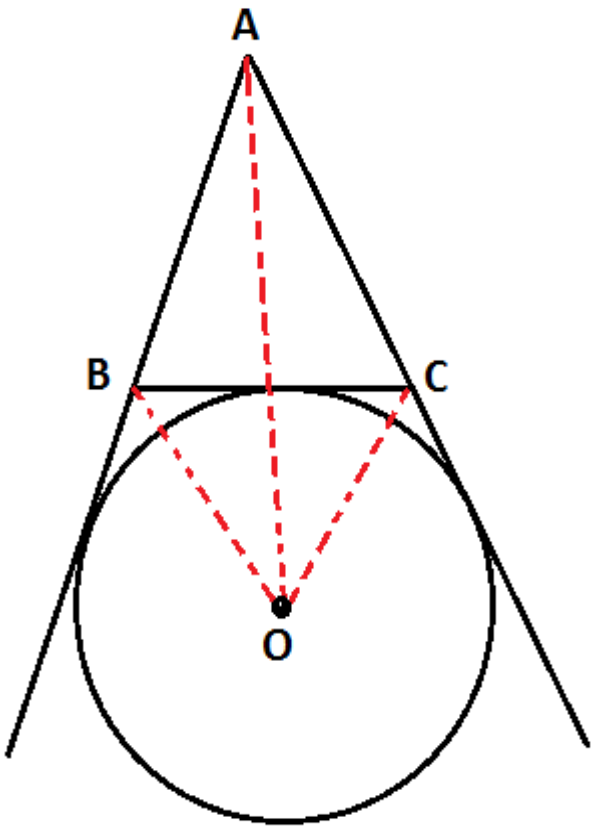
$$S = S_{\triangle OAB} + \ldots + S_{\triangle OAE}$$

$$= \frac{۱}{۲} OH_۱ \times AB + \ldots + \frac{۱}{۲} OH_۵ \times AE$$

$$= \frac{۱}{۲} r \times AB + \ldots + \frac{۱}{۲} r \times AE$$

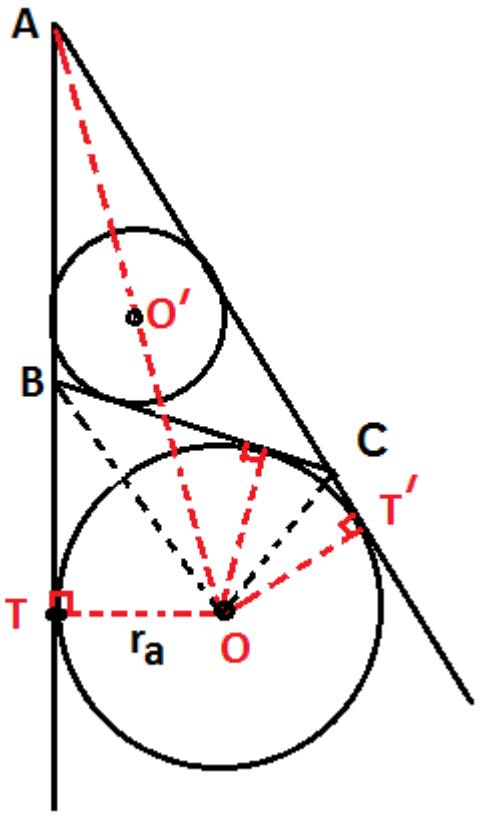
$$= \frac{۱}{۲} r\,(۲p) = rp$$

تذکر: در هر مثلث نیمساز های دو زاویه خارجی و زاویه داخلی غیر مجاور همرس اند، لذا می توان دایره ای رسم کرد که بر یک ضلع و بر امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس باشد. به این دایره، دایره محاطی خارجی مثلث گوییم. در شکل ذیل دایره محاطی خارجی نظیر ضلع $BC = a$ یا راس A رسم شده است لذا شعاع این دایره را با r_a نشان می دهیم و به طور مشابه دو دایره محاطی خارجی دیگر نظیر رئوس B و C یا اضلاع $AC = b$ و $AB = c$ وجود دارد که به ترتیب شعاع این دایره هارا نیز با r_b و r_c نشان می دهیم.



قضیه ۳: در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ با مساحت S و محیط $۲p$ اگر شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رئوس A ، را r_a نشان دهیم؛ آنگاه:

$$r_a = \frac{S}{p - a}$$



اثبات: با توجه به شکل با فرض $AB = c$، $AC = b$ و $BC = a$ داریم:

$$S_{ABC}^{\triangle} = S_{OAB}^{\triangle} + S_{OAC}^{\triangle} - S_{OBC}^{\triangle}$$

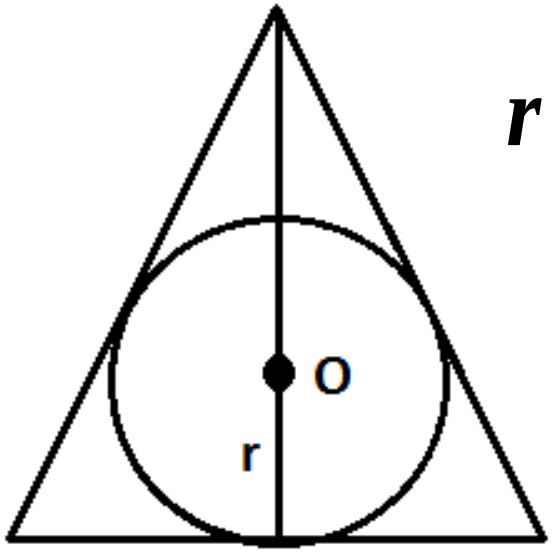
$$S = \frac{۱}{۲} r_a \times c + \frac{۱}{۲} r_a \times b - \frac{۱}{۲} r_a \times a = \frac{۱}{۲} r_a (a + b + c - ۲a)$$

$$= \frac{۱}{۲} r_a (۲p - ۲a) = r_a (p - a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{p - a}$$

نتیجه: در مثلث $\triangle ABC$ با مساحت S و محیط $2p$ اگر شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رئوس B و C را با r_b و r_c نشان دهیم داریم:

$$r_b = \frac{S}{p-b} \quad , \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

مثال ۴: اندازه شعاع دایره محاطی داخلی و خارجی یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۸ را بدست آورید.



حل:

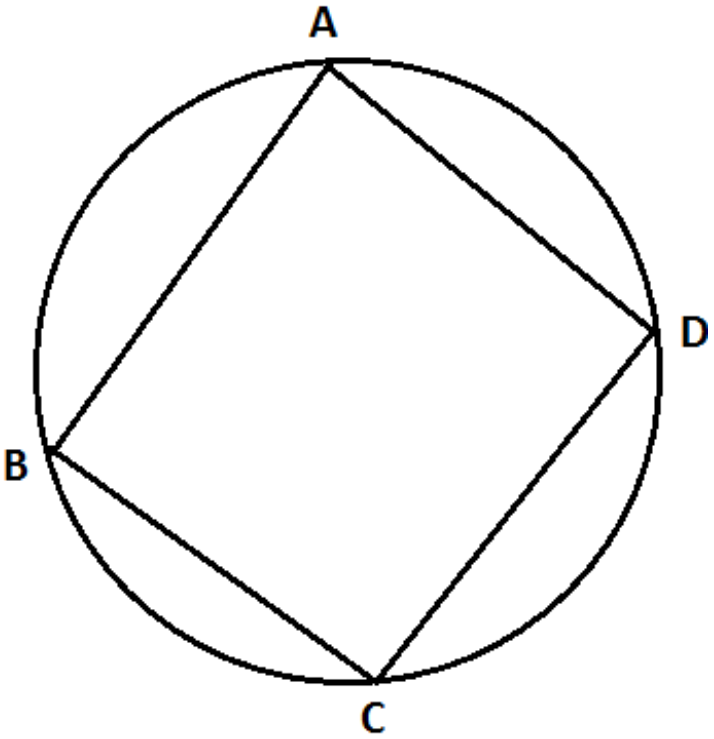
$$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}(8) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a = 4\sqrt{3}$$

لازم به ذکر است که در مثلث متساوی الاضلاع اندازه های r_b و r_c نیز با اندازه r_a برابر است.

قضیه ۴ : یک چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشد.

اثبات: بفرض چهار ضلعی $ABCD$ محاطی باشد با توجه به شکل؛



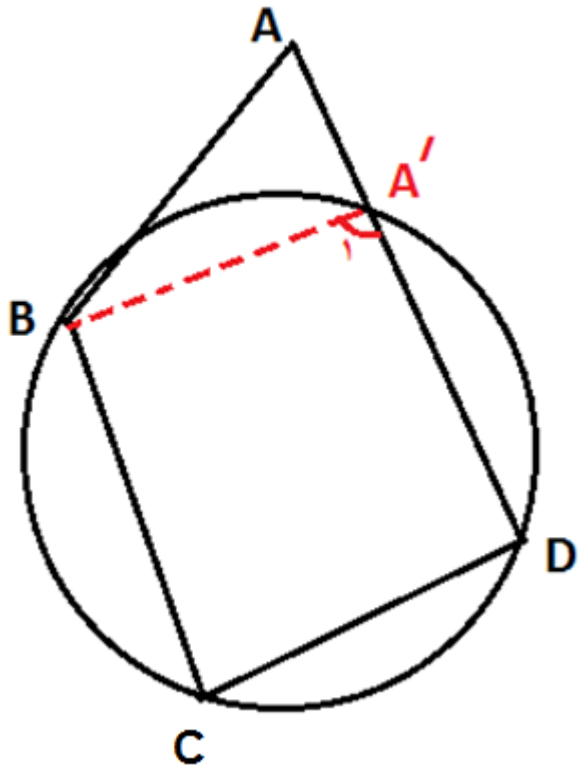
$$A + C = \frac{BD}{۲} + \frac{DB}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

و به طور مشابه $B + D = ۱۸۰^\circ$ لذا زاویه های مقابل مکمل اند و حکم برقرار است.

حال گیریم در یک چهارضلعی $ABCD$ زاویه های رو برو مکمل باشد و چهارضلعی $ABCD$ محاطی نباشد (برهان خلف) در نتیجه چون از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط یک دایره می گذرد (زیرا هر مثلث محاطی است) حال گیریم دایره $C_۱$ از نقاط B ، C و D بگذرد و از A نگذرد در نتیجه با توجه به شکل چهارضلعی $A'BCD$ محاطی است پس: $A'_۱ + C = ۱۸۰$

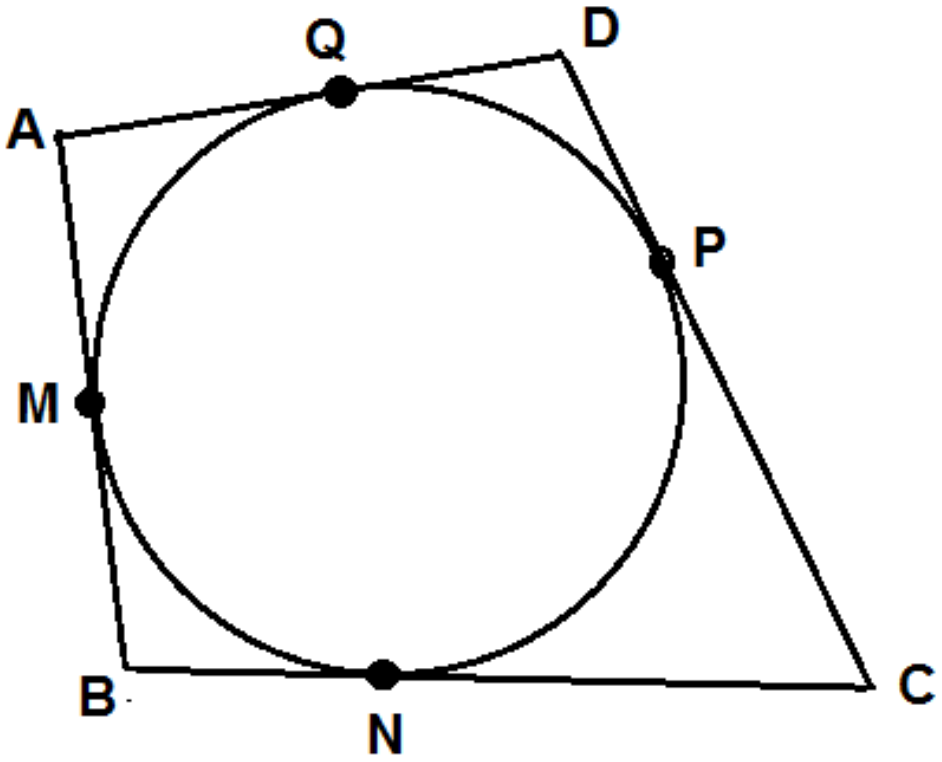
از طرفی طبق فرض $A + C = ۱۸۰$ لذا $A = A'_۱$ و این غیرممکن است،
لذا فرض خلف باطل و اثبات تمام است.

در نتیجه باید دایره رسم شده، از A بگذرد.



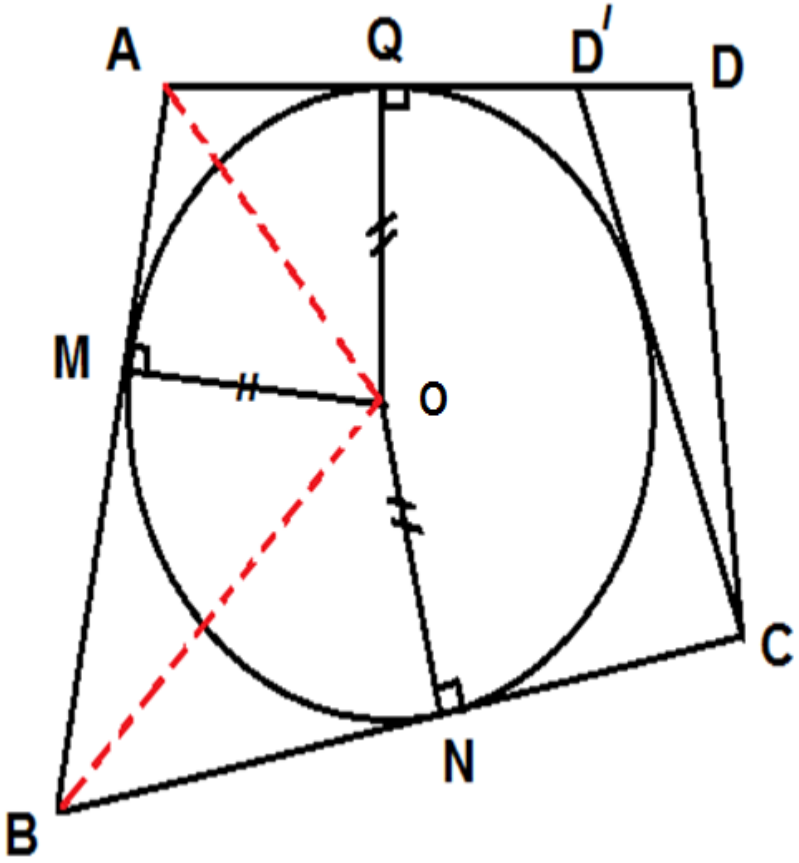
قضیه ۵: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل دیگر باشند.

اثبات: بفرض چهارضلعی $ABCD$ محیطی باشد در نتیجه با توجه به شکل داریم:



$$AD + BC = (AQ + QD) + (BN + NC)$$
$$= (AM + DP) + (MB + PC)$$
$$= AB + DC$$

حال گیریم در چهارضلعی $ABCD$ داشته باشیم $AD+BC=AB+DC$ نشان می دهیم چهارضلعی محیطی است بدین منظور از برهان خلف استفاده می کنیم.



نیمساز دو زاویه A و B در نقطه O متقاطع اند لذا فاصله O از سه ضلع زاویه به یک فاصله است لذا اگر دایره ای به مرکز O و به شعاع OM رسم کنیم بر سه ضلع چهارضلعی یعنی AB و BC و AD مماس است فرض کنیم بر DC مماس نباشد (فرض خلف) لذا اگر از C پاره خط CD' را مماس بر دایره رسم کنیم چهار ضلعی $ABCD'$ محیطی است لذا

$$AB+D'C=AD'+BC \quad (*)$$

طبق فرض

$$AD + BC = AB + DC$$

$$AD' + D'D + BC = AB + DC$$

لذا با توجه به رابطه (*) داریم:

$$AB + D'C + D'D = AB + DC \Rightarrow D'C + D'D = DC$$

و این غیر ممکن است (زیرا در هر مثلث مجموع اندازه های دو ضلع از اندازه ضلع سوم بزرگتر است) لذا باید DC نیز بر دایره مماس باشد.

مثال ۵:

در جدول زیر چهارضلعی های داده شده را از نظر محاطی و محیطی بودن مشخص کنید.

چند ضلعی	ذوزنقه	کایت	متوازی الاضلاع	مستطیل	لوزی	مربع
محاطی	–	–	–	❊	–	❊
محیطی	–	❊	–	–	❊	❊

چند ضلعی منتظم

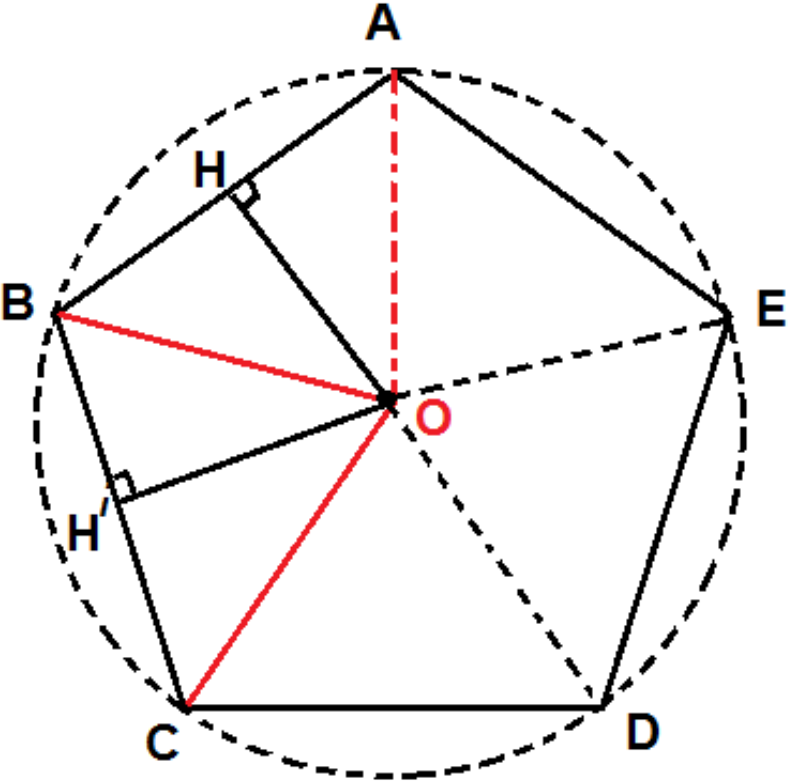
تعریف: یک چند ضلعی محدب را منتظم گوییم هرگاه طول تمام ضلع های آن برابر و اندازه تمام زاویه های آن نیز با هم مساوی باشد.

مثال ۶: مثلث متساوی الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.

قضیه ۶: هر چند ضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است.

اثبات: برای سادگی قضیه را در پنج ضلع های منتظم ثابت می کنیم و اثبات برای هر چند ضلعی منتظم دیگر به طور مشابه است.

بدین منظور فرض کنیم اندازه هر زاویه پنج ضلعی $ABCDE$ برابر 2α باشد عمود منصف های دو ضلع AB و BC در نقطه O متقاطع اند بنابر این؛



$$OA = OB = OC$$

از طرفی دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OBC}$ بنا به حالت (ض ض ض) همنهشت اند در نتیجه:

$$OAB = OBA = OBC = OCB = \alpha$$

به طور مشابه $\overset{\Delta}{OBC} \cong \overset{\Delta}{OCA}$ در نتیجه:

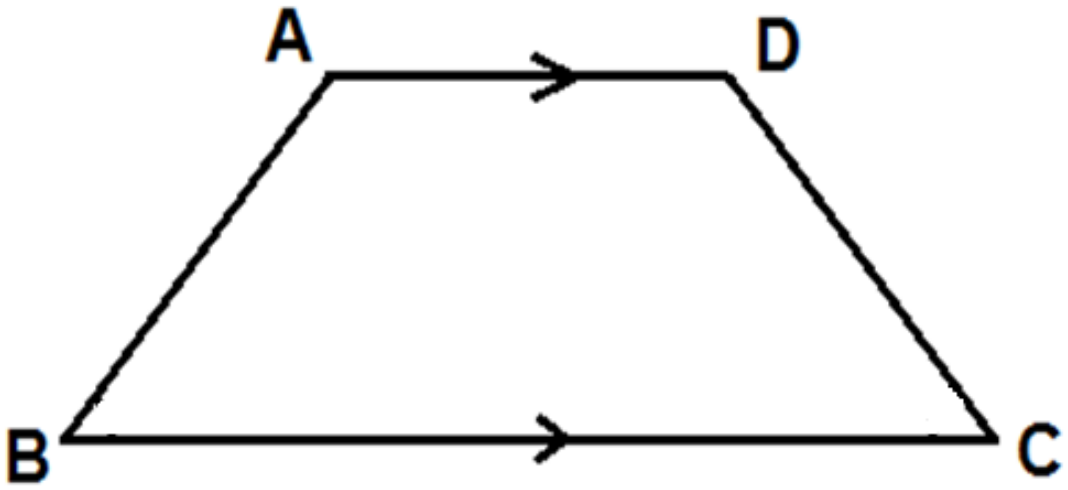
$$\overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OBC} \cong \ldots \cong \overset{\Delta}{OCB}$$

لذا فاصله O از راس های چند ضلعی به یک اندازه است پس O مرکز دایره ای است که از تمام راس های چند ضلعی می گذرد و به همین ترتیب O از تمام ضلع ها به یک فاصله است پس مرکز دایره ای است که بر تمام ضلع های چند ضلعی منتظم مماس است، پس نتیجه می گیریم چندضلعی محاطی و محیطی است.

تمرین های صفحه های ۲۹، ۳۰، ۳۱

۱) ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

حل: بفرض ذوزنقه $ABCD$ محاطی باشد در نتیجه چون در هر چهارضلعی محاطی زاویه های روبرو مکمل اند لذا (*) $A+C=۱۸۰$ از طرفی

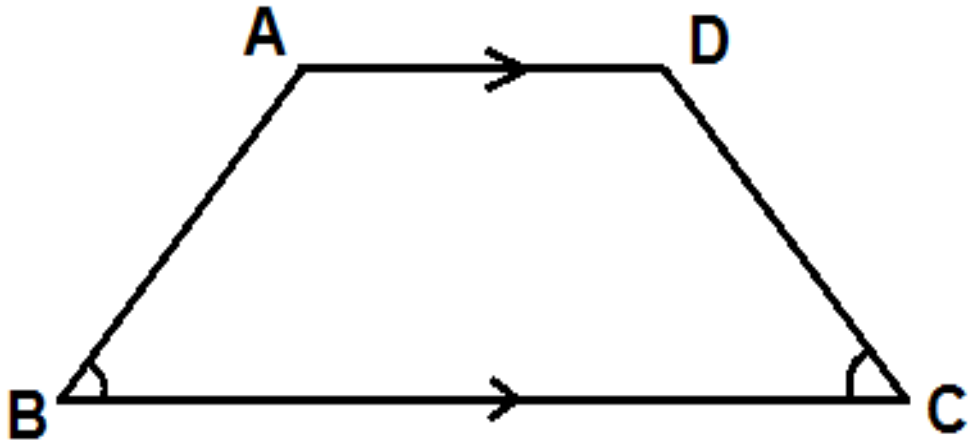


$$AD \parallel BC \Rightarrow A+B=۱۸۰ \quad (**)$$

$$* \text{ و } ** \Rightarrow B=C$$

در نتیجه ذوزنقه متساوی الساقین است.

حال گیریم ذوزنقه $ABCD$ متساوی الساقین باشد لذا $B = C$ از طرفی با توجه به موازی بودن AD و BC داریم:



$$A + B = ۱۸۰ \quad , \quad C + D = ۱۸۰$$

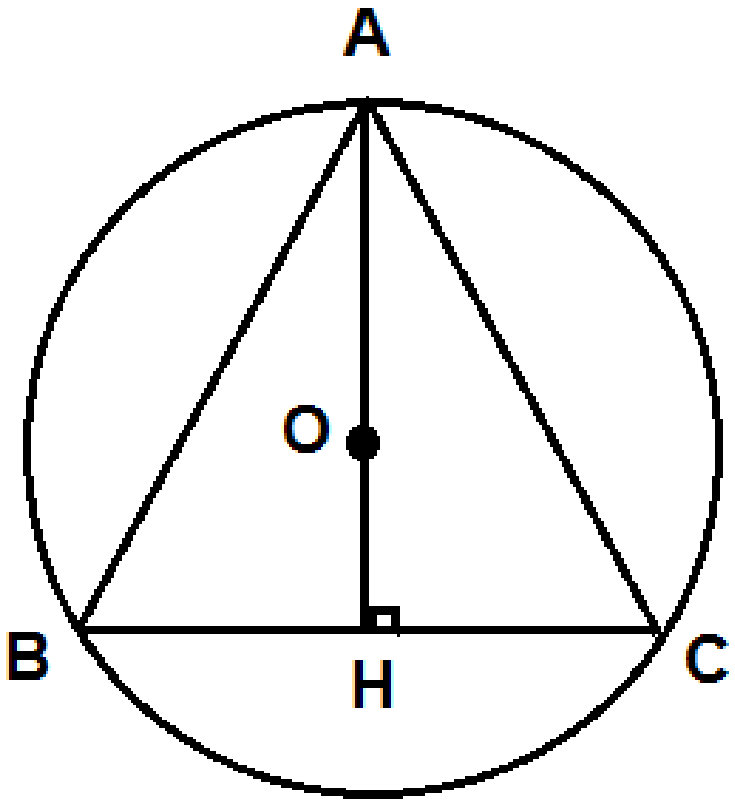
در نتیجه:

$$A + C = ۱۸۰ \quad , \quad B + D = ۱۸۰$$

چون زاویه های مقابل مکمل اند لذا چهارضلعی محاطی است.

۲) مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را بدست آورید که در دایره ای به شعاع r محاط شده باشد.

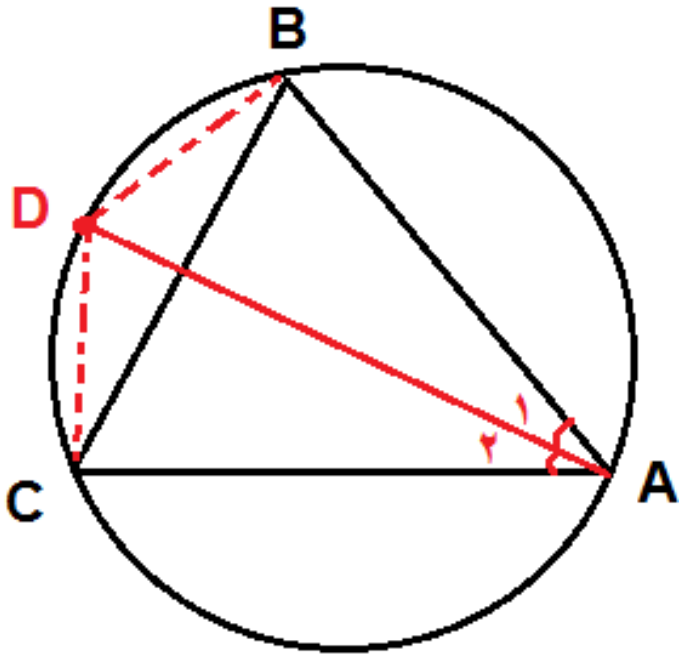
حل: باتوجه به اینکه مرکز دایره محیطی مثلث نقطه همرسی میانه ها و ارتفاع ها نیز می باشد با توجه به شکل اگر، مثلث متساوی الاضلاع $\overset{\triangle}{ABC}$ در یک دایره محاط شود و AH ارتفاع باشد و O مرکز دایره محیطی باشد آنگاه



$$OA = \frac{۲}{۳}AH \Rightarrow r = \frac{۲}{۳}h \Rightarrow h = \frac{۳r}{۲}$$

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۳}h^{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\left(\frac{۹r^{۲}}{۴}\right) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}r^{۲}$$

۳) ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند.

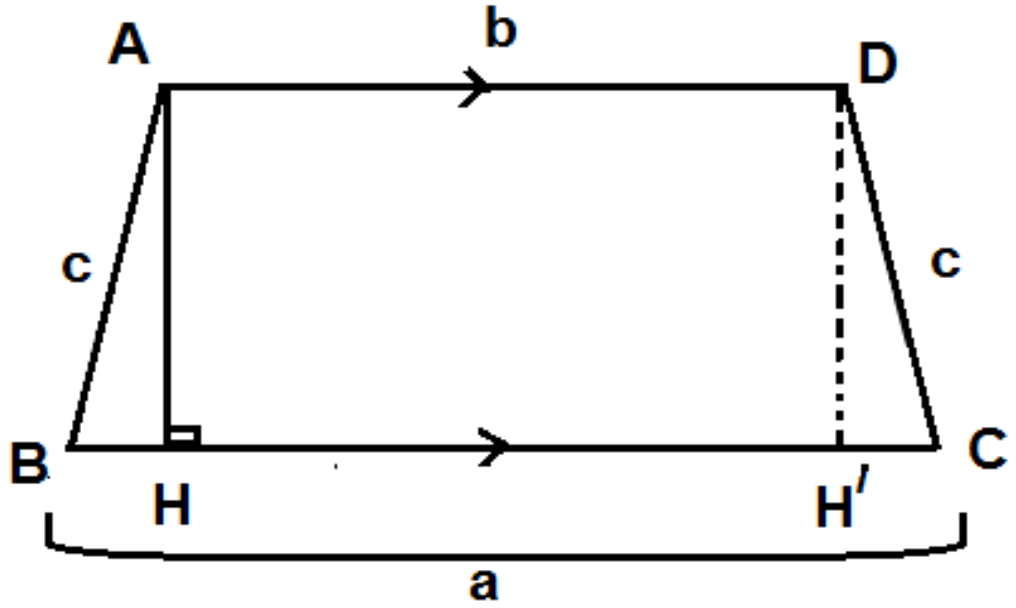


حل: بفرض مثلث $\triangle ABC$ در این دایره محاط شده و نیمساز زاویه A دایره محیطی را در نقطه D قطع کند در نتیجه:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow BD = DC \Rightarrow BD = CD$$

یعنی فاصله نقطه D از دو سر پاره خط B و C به یک اندازه است. پس D روی عمود منصف BC واقع است یعنی عمود منصف BC و نیمساز زاویه A در نقطه D متقاطع اند، و حکم برقرار است.

۴) یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.



حل:

چون ذوزنقه محاطی است لذا باید متساوی الساقین باشد بفرض ذوزنقه $ABCD$ متساوی الساقین باشد به طوری که؛

$$AB = DC = C$$

$$BC = a \ , AD = b$$

در نتیجه چون ذوزنقه محیطی هم است لذا

$$۲c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{۲}$$

از طرفی با توجه به شکل

$$BH = H'C \Rightarrow ۲BH + b = a \Rightarrow BH = \frac{a-b}{۲}$$

$$AH = \sqrt{(AB)^{۲} - (BH)^{۲}} = \sqrt{(\frac{a+b}{۲})^{۲} - (\frac{a-b}{۲})^{۲}} = \sqrt{ab}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(AD + BC) \times AH = \frac{۱}{۲}(a+b)(\sqrt{ab})$$

به عبارت دیگر در ذوزنقه محاطی و محیطی اندازه ارتفاع با میانگین هندسی طول دو قاعده برابر است.

۵) اگر r_a ، r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

حل:

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{p-a}{s}+\frac{p-b}{s}=\frac{p-c}{s}=\frac{۳p-۲p}{s}=\frac{p}{s}=\frac{p}{rp}=\frac{۱}{r}$$

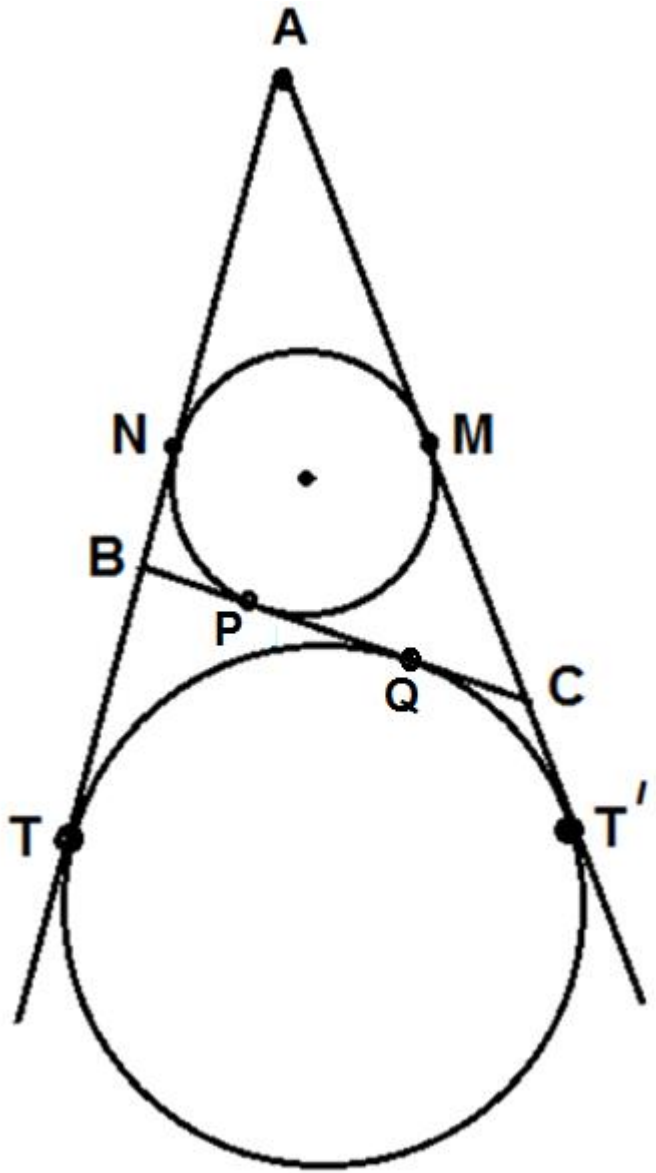
به همین ترتیب اگر h_a ، h_b و h_c اندازه های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

حل:

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{\frac{۲s}{a}}+\frac{۱}{\frac{۲s}{b}}+\frac{۱}{\frac{۲s}{c}}=\frac{a+b+c}{۲s}=\frac{۲p}{۲s}=\frac{p}{s}=\frac{p}{rp}=\frac{۱}{r}$$

۶) اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M و N و P باشند و T و T' نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:



۱) $AN = AM = P - a$

حل:

$$AB + AC + BC = ۲P$$

$$(AN + NB) + (AM + MC) + BC = ۲P$$

$$AN + AM + (NB + MC) + BC = ۲P$$

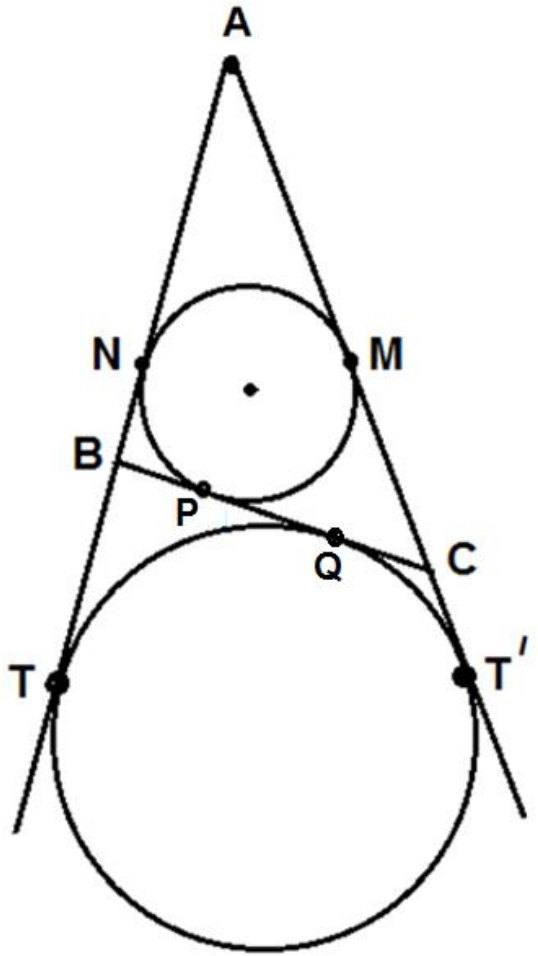
$$AN + AM + (BP + PC) + BC = ۲p$$

$$AN + AM + BC + BC = ۲P$$

$$AN + AM = ۲p - ۲a \ (*)$$

$$AN = AM \overset{(*)}{\Rightarrow} ۲AM = ۲(p - a) \Rightarrow AM = p - a$$

$AN = AM = P - a$ در نتیجه



۲) $BN = BP = P - b \ , \ CM = CP = P - C$

لذا به طور مشابه: $BN = BP = P - b \ , \ CM = CP = P - c$

۳) $AT = AT' = p$

$AB + AC + BC = ۲P$

$AB + AC + BQ + QC = ۲p$

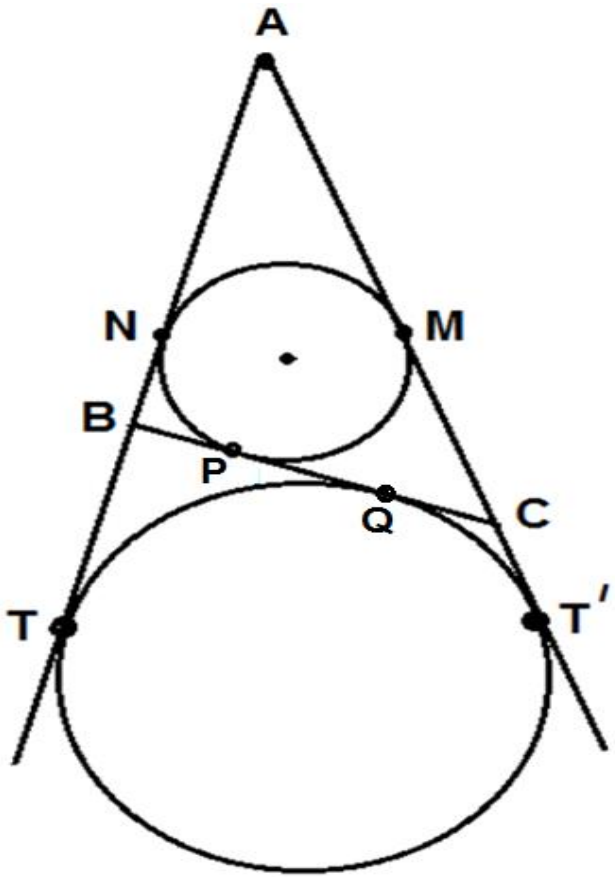
$AB + AC + BT + CT' = ۲p$

$(AB + BT) + (AC + CT') = ۲P$

$AT + AT' = ۲p \qquad (*)$

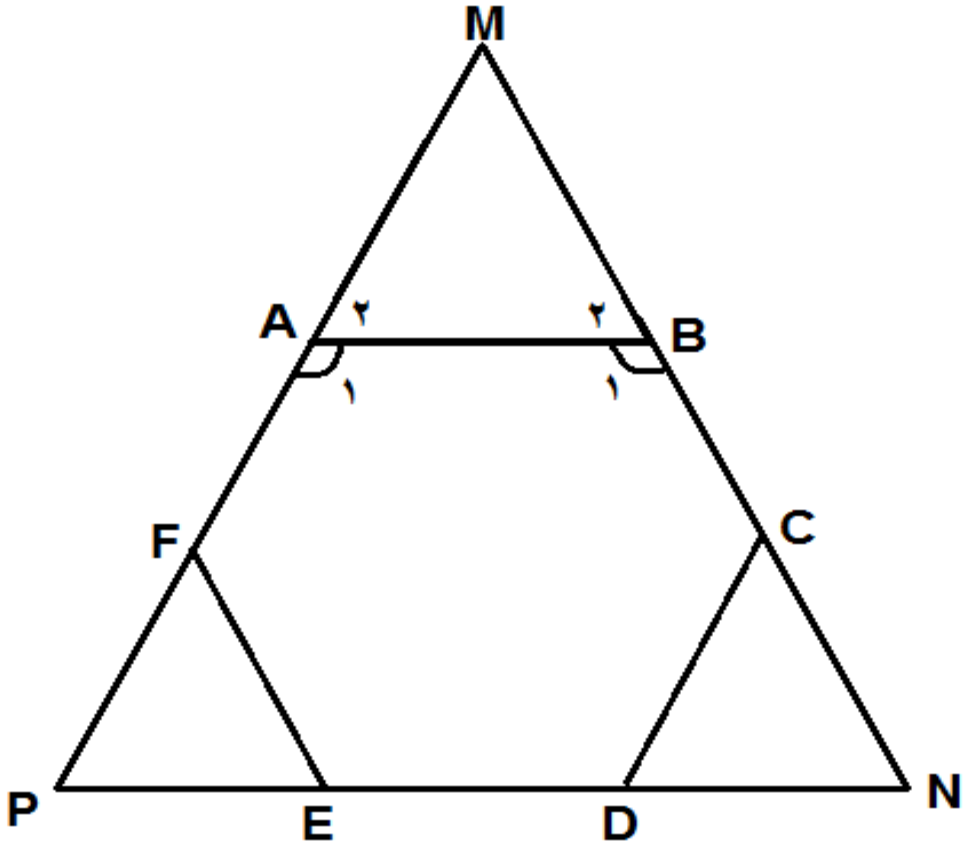
$AT = AT' \overset{(*)}{\Rightarrow} ۲AT = ۲p \Rightarrow AT = p$

$AT = AT' = p$ پس



۸) شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی، مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.

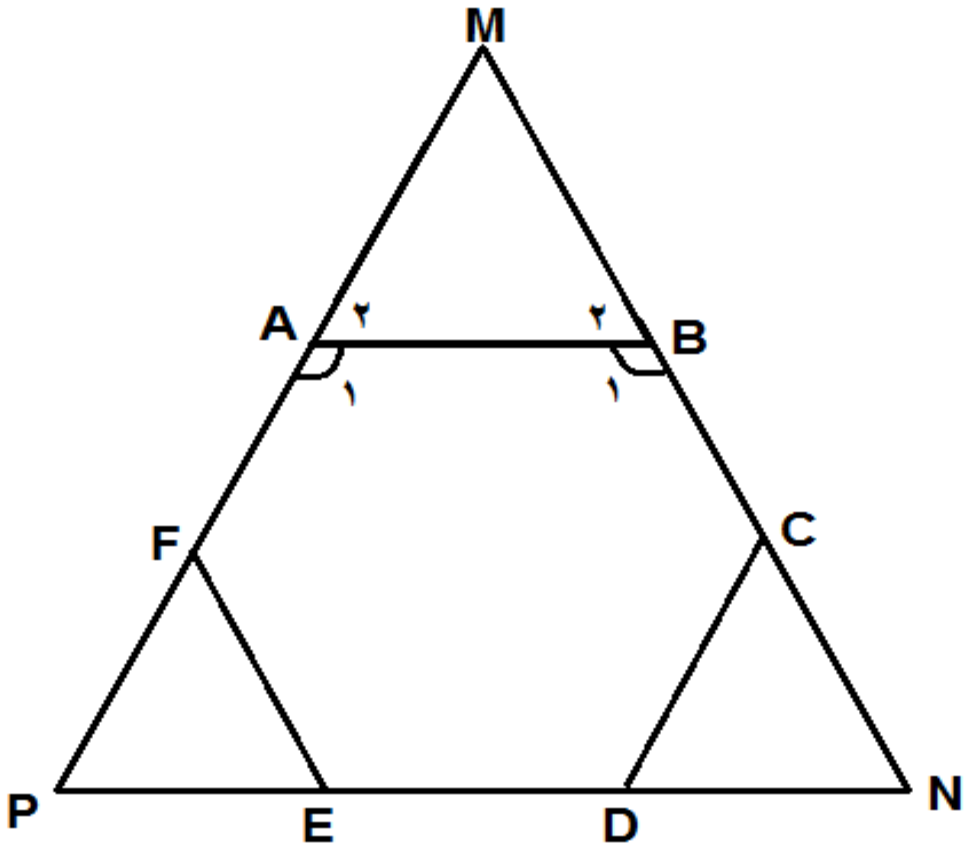


$$A_۱ = B_۱ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow A_۲ = B_۲ = ۶۰^\circ$$

لذا $M = ۶۰^\circ$ و به طور مشابه $P = N = ۶۰$ لذا مثلث MNP متساوی الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

اگر $AB = a$ در نتیجه اگر S مساحت شش ضلعی و S' مساحت مثلث MNP باشد.

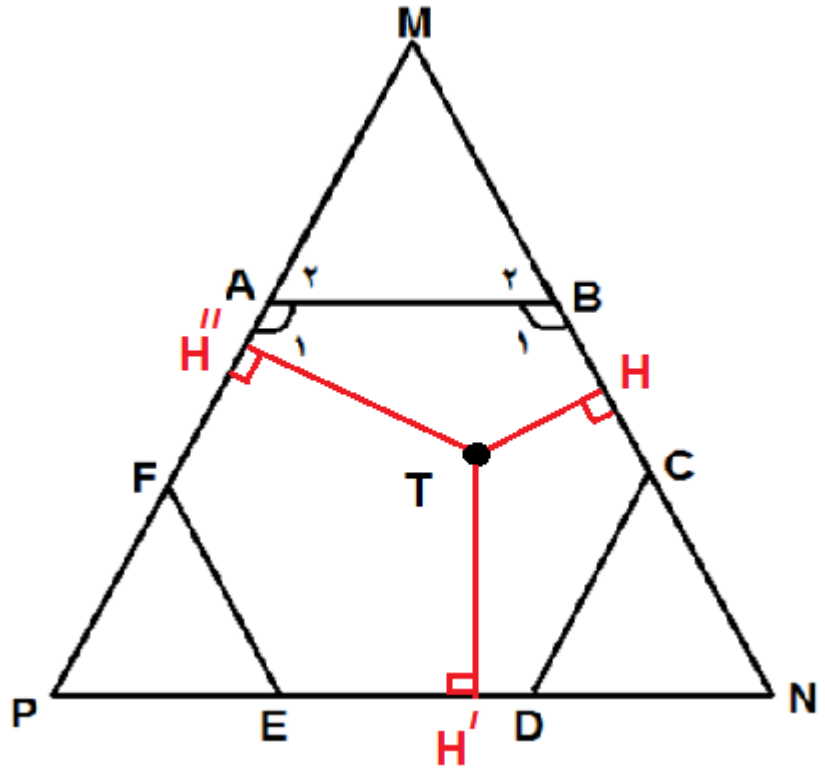


$$S = ۶(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}) \ , \ S' = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳a)^{۲}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}a^{۲}}{۲}}{\frac{۹\sqrt{۳}a^{۲}}{۴}} = \frac{۲}{۳}$$

پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمود های TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱ می دانید، مجموع طول های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

پ) اگر ارتفاع مثلث MNP برابر h و طول ضلع شش ضلعی را a بگیریم این مجموع طولها با ارتفاع مثلث MNP برابراست یعنی:



$$TH + TH' + TH'' = h$$

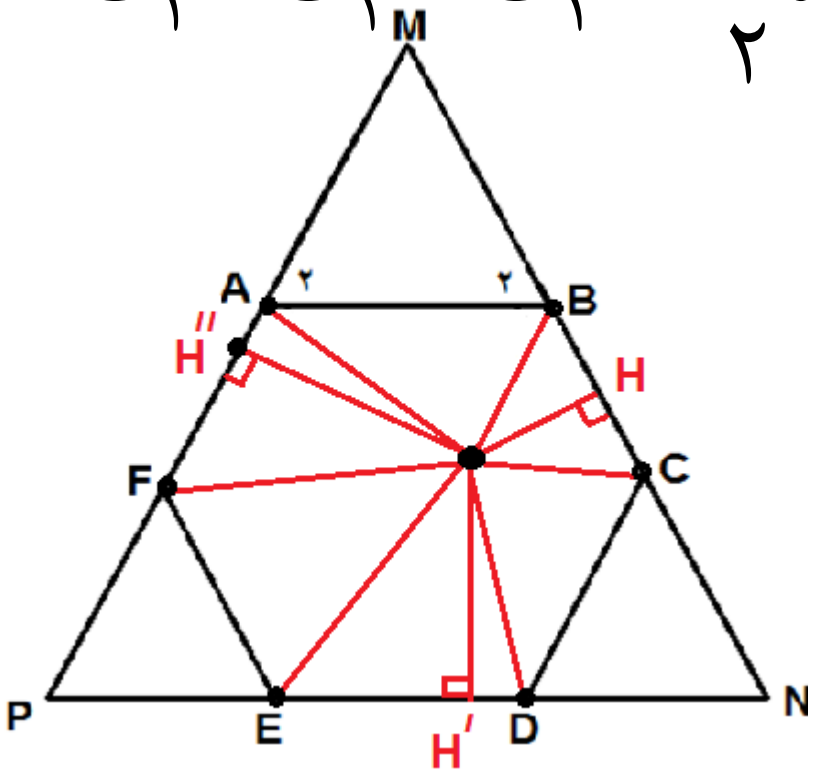
$$\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}MN$$

ت) مجموع مساحت مثلث های TBC ، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید :

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

اگر مساحت مثلث های TBC ، TDE و TAF را به ترتیب $S_۱$ ، $S_۲$ و $S_۳$ بنامیم داریم و اندازه ضلع شش را نیز a در نظر بگیریم.

$$S_۱ + S_۲ + S_۳ = \frac{۱}{۲}a(TH + TH' + TH'') = \frac{۳}{۲}ah$$



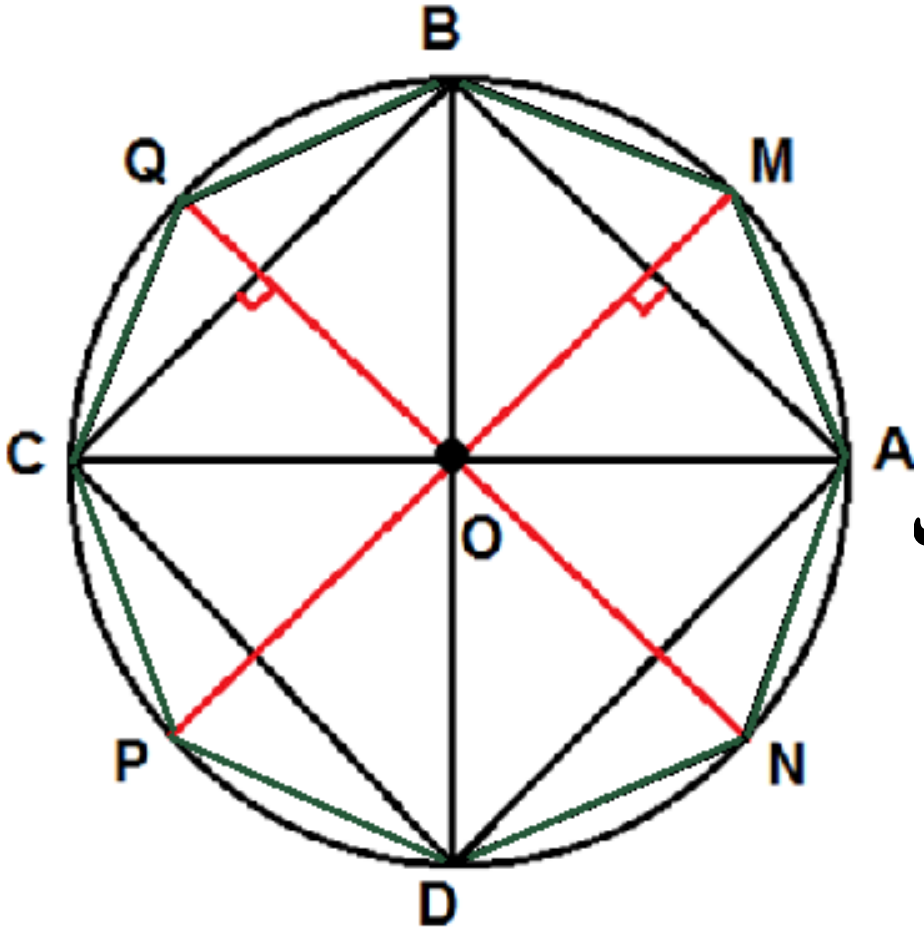
(منظور از h ارتفاع مثلث $\overset{\triangle}{MNP}$ می باشد)

$$\frac{S_{۱}+S_{۲}+S_{۳}}{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}=\frac{\frac{۱}{۲}ah}{\frac{۱}{۲}(۳a)(h)}=\frac{۱}{۳}\quad (*)$$

بنا به قسمت (ب) چون مساحت شش ضلعی $ABCDEF$ ، برابر $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث $\overset{\triangle}{MNP}$ است
لذا از رابطه (*) نتیجه می شود که:

$$S_{\overset{\triangle}{TAB}}+S_{\overset{\triangle}{TCD}}+S_{\overset{\triangle}{TFE}}=S_{\overset{\triangle}{TBC}}+S_{\overset{\triangle}{TDE}}+S_{\overset{\triangle}{TAF}}$$

۹) دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می کنیم؛ چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف های ضلع های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.



حل: در چهارضلعی $ABCD$ قطر ها با هم برابر و بر هم عمودند لذا چهارضلعی مربع است.

اگر عمود منصف اضلاع مربع را رسم کنیم فاصله مرکز دایره از رئوس A، B ، C و D به یک اندازه است لذا عمود منصف ها از مرکز می گذرند.

از طرفی قطر عمود بر هر وتر آن وتر و کمان های نظیر را نصف می کند لذا؛

$$AM = MB = BQ = \ldots = NA$$

و چون وتر های نظیر دو کمان مساوی برابرند ولی

$$AM = MB = \ldots = NA$$

$$AMB = MBQ = \ldots = NAM = ۱۳۵^\circ$$

لذا هشت ضلعی مذکور منتظم است.

فصل دوم

درس اول : تبدیل های هندسی

تبدیل

تعریف: به هر تابع یک به یک از R^2 به R^2 یک تبدیل گوییم هرگاه برد تابع برابر R^2 باشد به عبارت دیگر تابع $T : R^2 \to R^2$ که تابع یک به یک و $R_T = R^2$ باشد یک تبدیل گوییم.

(نکته: منظور از R^2 همان مجموعه نقاط صفحه است)

لازم به ذکر است در تبدیل T ، اگر داشته باشیم $T(A) = A'$ در این صورت نقطه A' را تبدیل یافته یا تصویر نقطه A تحت تبدیل T گوییم و به صورت $A \xrightarrow{T} A'$ نشان می دهیم.

طولپا (ایزومتری)

تعریف: به هر تبدیلی که تحت آن طول هر پاره خط با طول تصویرش برابر باشد، تبدیل طولپا یا ایزومتری گوییم.

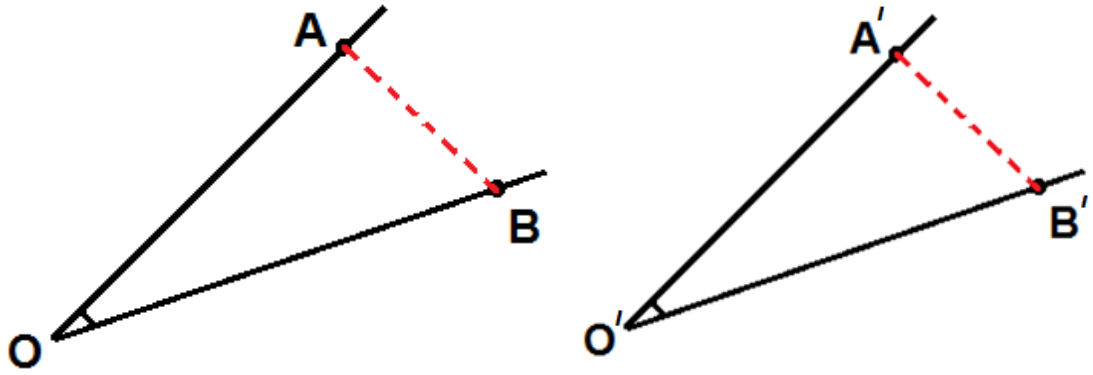
به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} A \xrightarrow{T} A' \\ B \xrightarrow{T} B' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

قضیه ۱: در هر تبدیل طولپا، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه ای هم اندازه آن است.

به عبارت دیگر در تبدیلات طولپا اندازه هر زاویه با اندازه تصویرش برابر است.

اثبات: بفرض تصویر زاویه O زاویه O' تحت تبدیل طولپای T باشد همچنین تصویر نقاط A و B تحت T نقاط، A' و B' باشد لذا می توان نوشت.



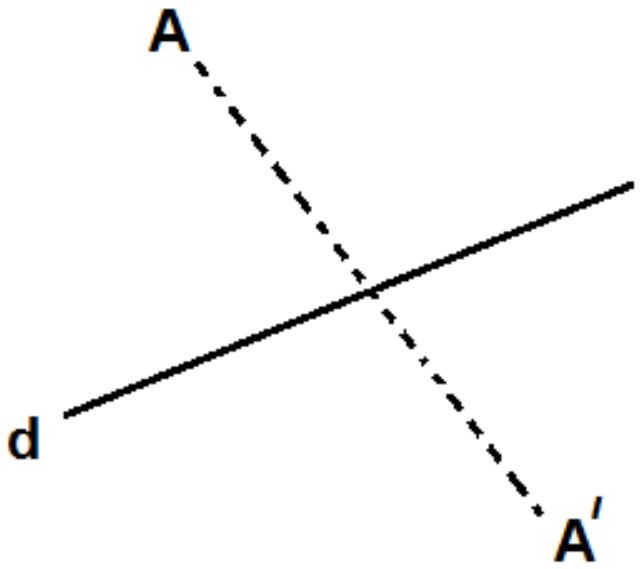
$$\begin{cases} A \xrightarrow{T} A' \\ B \xrightarrow{T} B' \\ O \xrightarrow{T} O' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \xrightarrow{T} A'B' \\ OA \xrightarrow{T} O'A' \\ OB \xrightarrow{T} O'B' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = A'B' \\ OA = O'A' \\ OB = O'B' \end{cases}$$

لذا $\overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{O'A'B'}$ در نتیجه $O = O'$ و حکم بر قرار است.

معرفی چند تبدیل

۱) بازتاب

تعریف: بازتاب T نسبت به خط d تبدیلی است که تحت آن هر نقطه A به نقطه ای مانند A' تصویر می شود به طوری که d عمود منصف AA' باشد که در این صورت خط d را محور بازتاب گوییم.

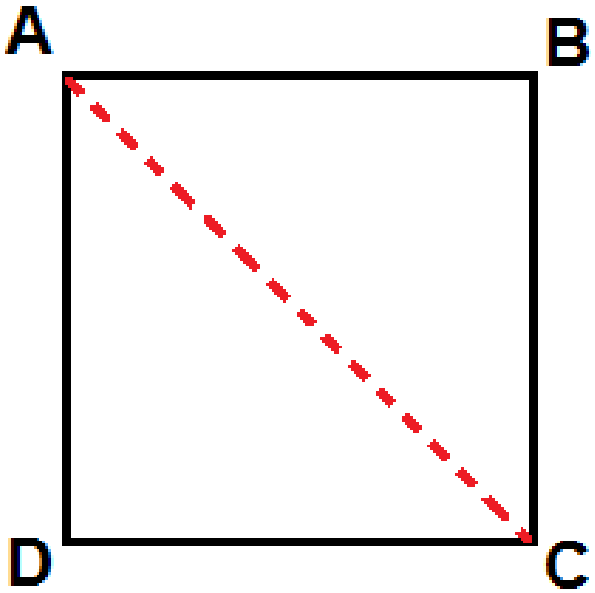


نکته: اگر نقطه A روی خط d باشد در این صورت تصویر A برابر خودش است یعنی:

$$A \in d \Leftrightarrow A \xrightarrow{T} A$$

مثال ۱: در شکل زیر بازتاب مربع $ABCD$ را نسبت به قطر AC بدست آورید.

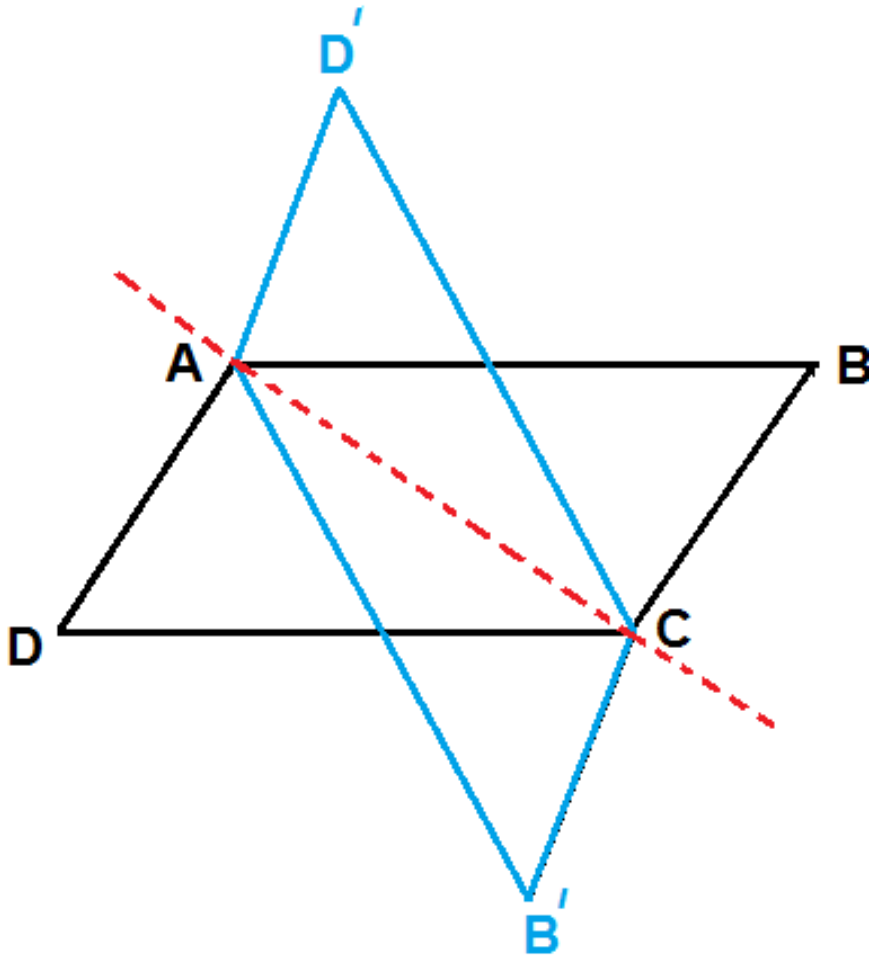
بفرض T یک بازتاب نسبت به قطر AC باشد.



$$\begin{cases} A \to A \\ B \to D \\ C \to C \\ D \to B \end{cases}$$

در نتیجه تصویر (تبدیل یافته) مربع $ABCD$ خودش خواهد بود.

مثال ۲: در شکل زیر تبدیل یافته متوازی الاضلاع $ABCD$ را نسبت به قطر AC به دست آورید.



تصویر $ABCD$ متوازی الاضلاع $AB'CD'$ خواهد بود.

نقطه ثابت یک تبدیل

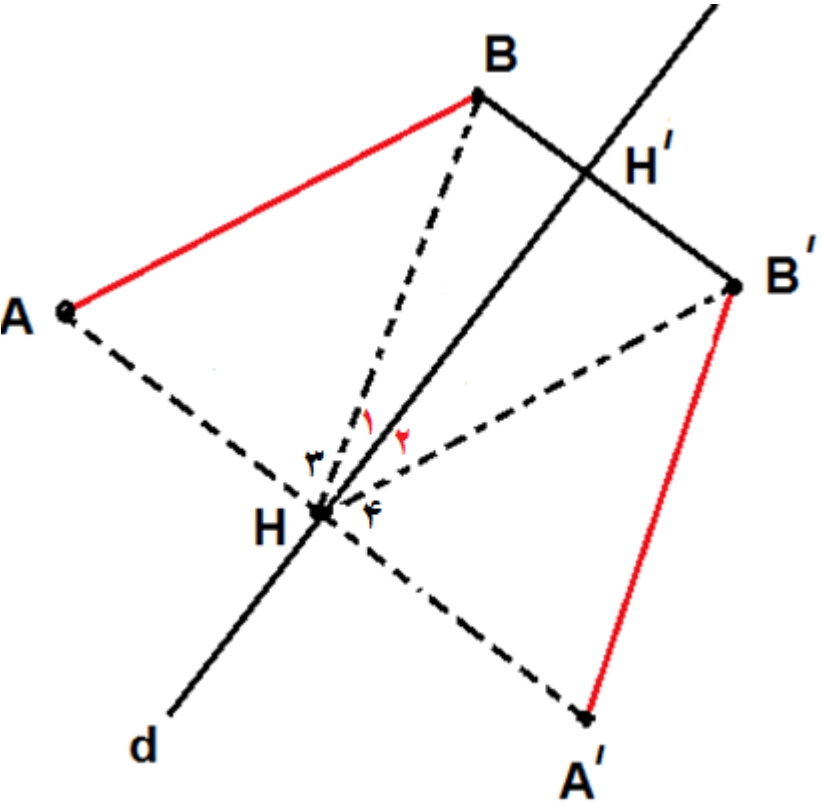
تعریف: اگر در تبدیل T تصویر نقطه A منطبق بر خودش باشد در این صورت نقطه A را نقطه ثابت تبدیل T گوییم.

مثال۳: در بازتاب T نسبت به خط d ، نقاط روی d نقطه های ثابت تبدیل T به حساب می آیند یعنی محور بازتاب نقاط ثابت در بازتاب است.

قضیه ۲: بازتاب یک تبدیل طولپا است.

اثبات:

بفرض T یک بازتاب نسبت به خط d باشد و A و B دو نقطه دلخواه و در یک طرف خط d باشد به طوری که AB غیر موازی و غیر عمود بر d باشد. نشان می دهیم طول تصویر AB با خودش برابر است بدین منظور با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} A \xrightarrow{T} A' \\ B \xrightarrow{T} B' \end{cases}$$

چون H روی عمودمنصف BB' واقع است لذا $BH = B'H$

و چون $H_1 = H_2$ در نتیجه $H_3 = H_4$ پس دو مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$ و $\overset{\triangle}{A'B'H}$ بنابه حالت (ض ز ض) همنهشت اند در نتیجه $AB = A'B'$ در سایر حالاتی که $AB \perp d$ یا $AB \parallel d$، A و B در یک طرف خط d واقع باشد یا حداقل یکی از نقاط A و B روی خط d باشد به طور مشابه اثبات می شود.

نتیجه: در بازتاب اندازه تصویر هر زاویه با خودش برابر است.

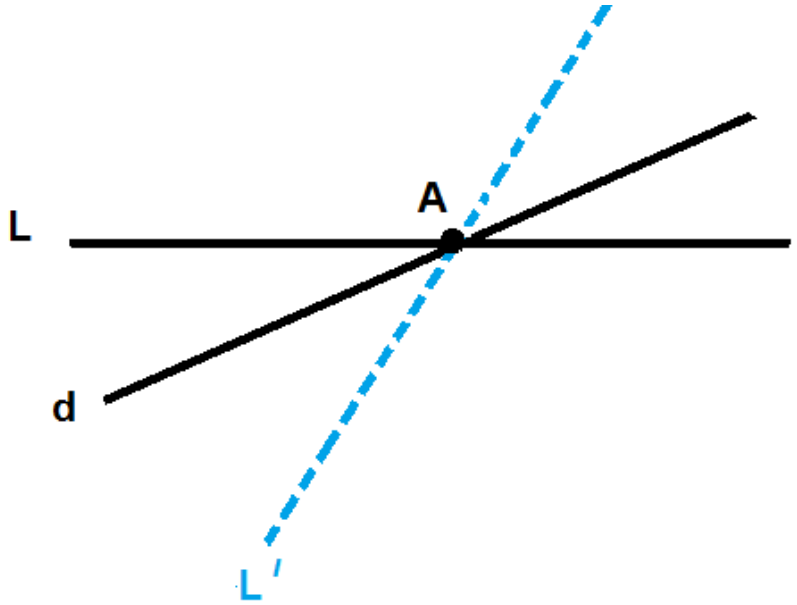
زیرا بازتاب یک تبدیل طولپاست لذا تحت آن اندازه هر زاویه با تصویرش برابر است.

نکات قابل توجه

۱) اگر تبدیل T طولپا باشد گوییم تبدیل T حافظ طول است.

۲) اگر در تبدیل T اندازه هر زاویه با تصویرش برابر باشد گوییم T یک تبدیل حافظ زاویه است.

۳) اگر در تبدیل T هر خط با تصویرش موازی باشد گوییم تبدیل T حافظ شیب است.



مثال ۴: نشان دهید بازتاب، حافظ شیب نیست.

حل: بفرض T یک بازتاب نسبت به خط d باشد با توجه به شکل:

تصویر خط L خط L' است که در آن $L \cap L' = \{A\}$

و چون L و L' در یک راستا نیستند لذا: $L \nparallel L' \Rightarrow m_L \neq m_{L'}$

نکته: در حالتی که محور بازتاب موازی خط L یا عمود بر L باشد تبدیل یافته L با خط L موازی است یعنی در این حالت شیب خط حفظ می شود.

ویژگی های تبدیل بازتاب

۱) طولپاست

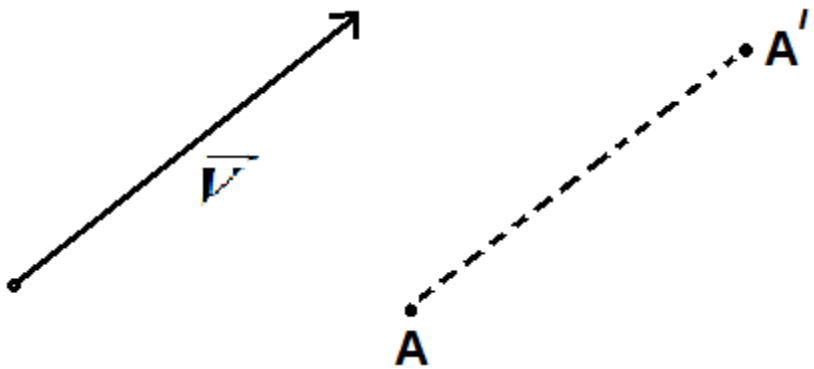
۲) لزوما حافظ شیب نیست

۳) جهت شکل را حفظ نمی کند

۴) تصویر هر شکل با خودش همنهشت است

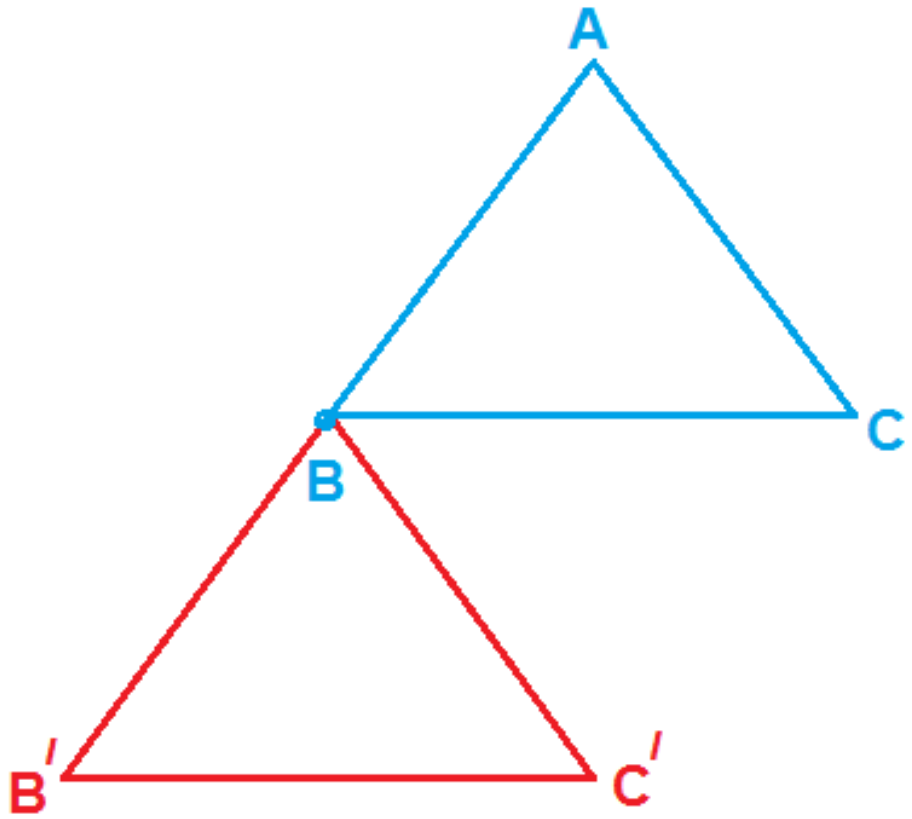
۵) حافظ زاویه است (اندازه زاویه ها با اندازه تبدیل یافته هایشان برابر است)

۲) انتقال) **تعریف:** انتقالی مانند T، تحت بردار $\overrightarrow{V}$ تبدیلی است که تحت آن تصویر(تبدیل یافته) هر نقطه A نقطه ای مانند A' باشد به طوریکه $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{V}$



نکته: اگر T یک انتقال تحت بردار غیر صفر $\overrightarrow{V}$ باشد T نقطه ثابت ندارد.

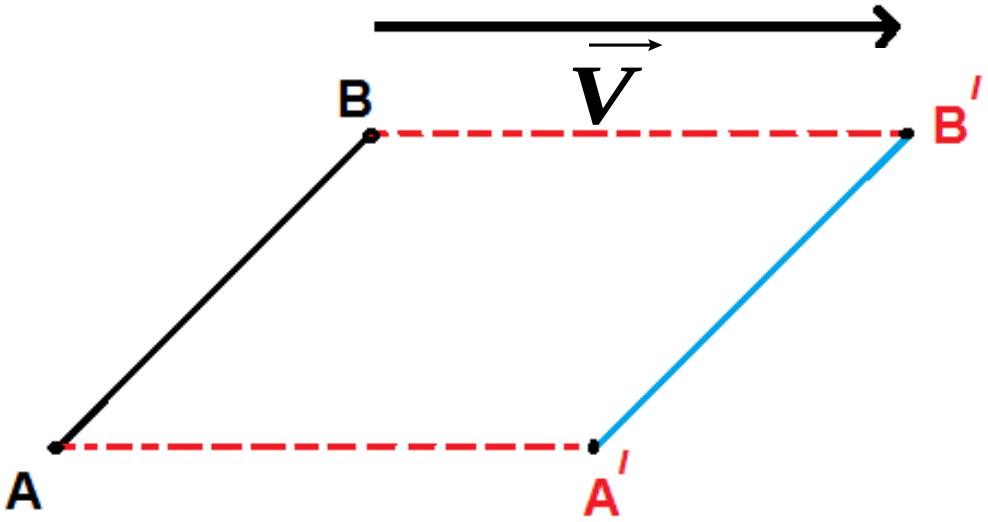
مثال ۵: در شکل زیر تصویر مثلث $\overset{\triangle}{A\,B\,C}$ را تحت انتقال بردار $\overrightarrow{AB}$ رسم کنید.



تصویر $\overset{\triangle}{A\,B\,C}$ مثلث $\overset{\triangle}{B\,B'C'}$ است.

قضیه ۳: انتقال یک تبدیل طولپاست.

اثبات: بفرض پاره خط AB با بردار $\vec{V}$ موازی نباشد و T یک انتقال تحت بردار $\vec{V}$ باشد در این صورت با توجه به شکل:



$$\begin{cases} A \xrightarrow{T} A' \\ B \xrightarrow{T} B' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{V}$$

لذا $AA' \parallel BB'$ و $AA' = BB'$ در نتیجه چهارضلعی $ABB'A'$ متوازی الاضلاع بوده در نتیجه: $AB = A'B'$

در حالت هایی که $AB \parallel \vec{V}$ باشد اثبات به طور مشابه است لذا T یک تبدیل طولپاست.

قضیه ۴: انتقال شیب خط را حفظ می کند. اثبات: با علائم شکل فوق بفرض T یک انتقال تحت بردار نا صفر $\vec{V}$ و L خط گذرنده از دو نقطه A و B باشد اگر $L \nparallel \vec{V}$ نباشد، آنگاه چهارضلعی $ABB'A'$ متوازی الاضلاع است لذا $AB \parallel A'B'$ در نتیجه $m_{AB} = m_{A'B'}$

لذا شیب خط L با شیب تصویرش که از نقاط A' و B' می گذرد برابر است و در حالتی که $L \parallel \vec{V}$ باشد اثبات به طور مشابه است.

ویژگی های تبدیل انتقال

۱) طولپاست

۲) جهت شکل، حفظ می شود

۳) اندازه زاویه ها را حفظ می کند

۴) حافظ شیب است

۵) نقطه ثابت ندارد مگر بردار انتقال، بردار صفر باشد

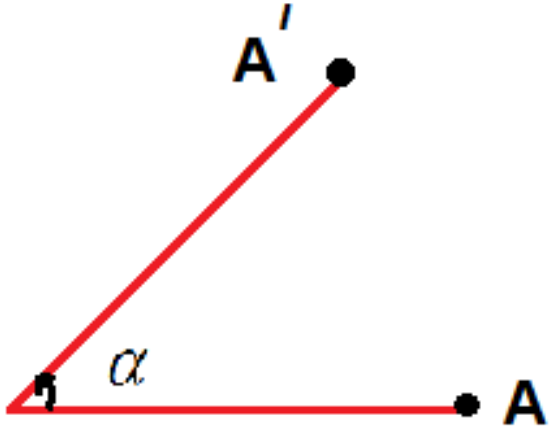
۶) تصویر هر شکل با خودش همنهشت است

۷) بردار هایی که هر نقطه را به تصویرشان وصل می کند با بردار انتقال برابر است

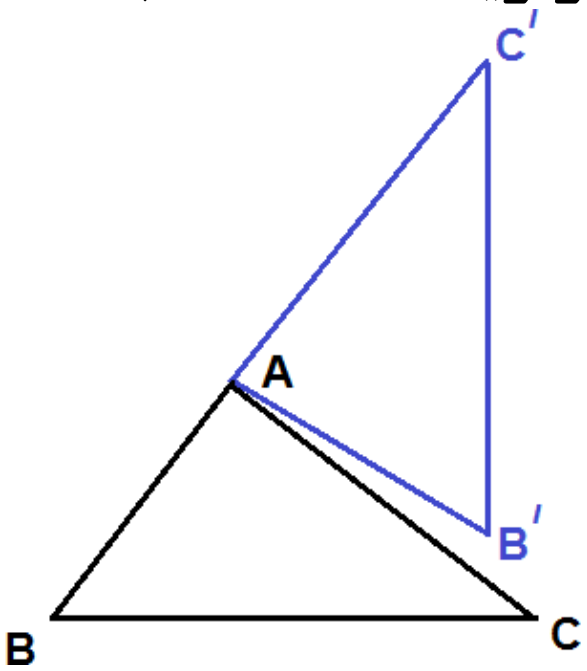
۳) دوران

تعریف: دوران به مرکز O و زاویه α تبدیلی است که هر نقطه مانند A را به A' تصویر کند به طوریکه

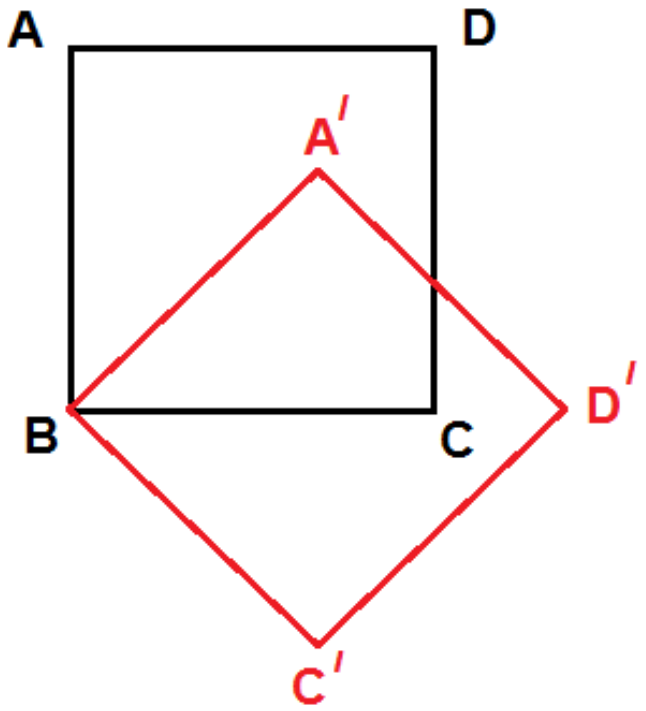
$$AOA' = \alpha \quad , \quad OA = OA'$$



مثال ۶: در شکل زیر تصویر مثلث $\overset{\triangle}{A\,B\,C}$ را تحت دوران به مرکز A و زاویه $\alpha = ۹۰^\circ$ بدست آورید.



مثال ۷: در شکل زیر دوران یافته مربع $ABCD$ را تحت دوران به مرکز B و زاویه ۶۰° در جهت حرکت عقربه های ساعت به دست آورید. ($\alpha = -۶۰^\circ$)



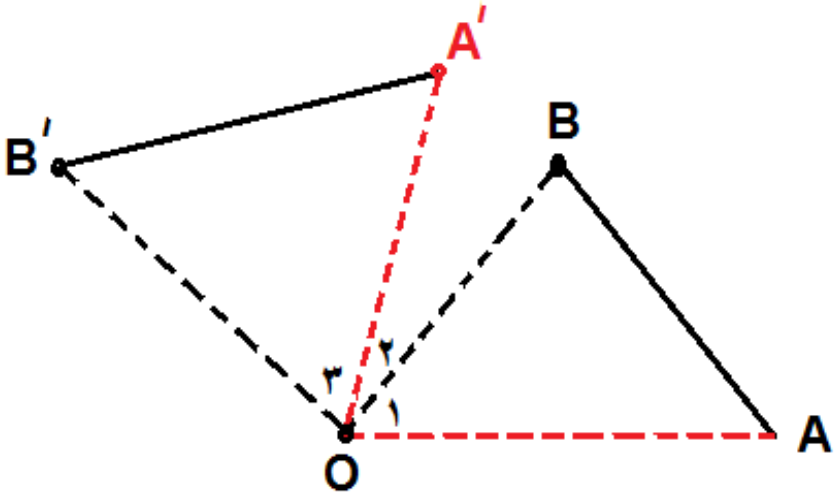
بفرض T یک دوران به مرکز B و $\alpha = -۶۰^\circ$ باشد $T(B) = B$

در نتیجه چهارضلعی $A'BC'D'$ دوران یافته (تبدیل یافته) مربع $ABCD$ است.

قضیه ۵: دوران یک تبدیل طولپاست.

اثبات: قضیه را در یک حالت اثبات می کنیم و اثبات در حالتهای دیگر نیز به طور مشابه انجام می گیرد.

بفرض مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه BOA بیشتر باشد.



باتوجه به شکل اگر α زاویه دوران باشد.

$$\begin{cases} O_1 + O_2 = \alpha \\ O_2 + O_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow O_1 = O_3$$

درنتیجه در دو مثلث OAB و $OA'B'$ داریم:

$$\begin{cases} OA = OA' \\ O_1 = O_3 \\ OB = OB' \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OA'B'} \Rightarrow AB = A'B'$$

لذا تبدیل دوران طولپاست.

ویژگی های تبدیل دوران

۱) طولپاست

۲) جهت شکل را حفظ می کند

۳) لزوما حافظ شیب نیست (اگر زاویه دوران مضارب ۱۸۰درجه باشد دوران حافظ شیب است)

۴) زاویه بین هر خط و تصویرش با زاویه دوران برابر است

۵) مرکز دوران ثابت می ماند (در هر دوران مرکز دوران نقطه ثابت تبدیل دوران است)

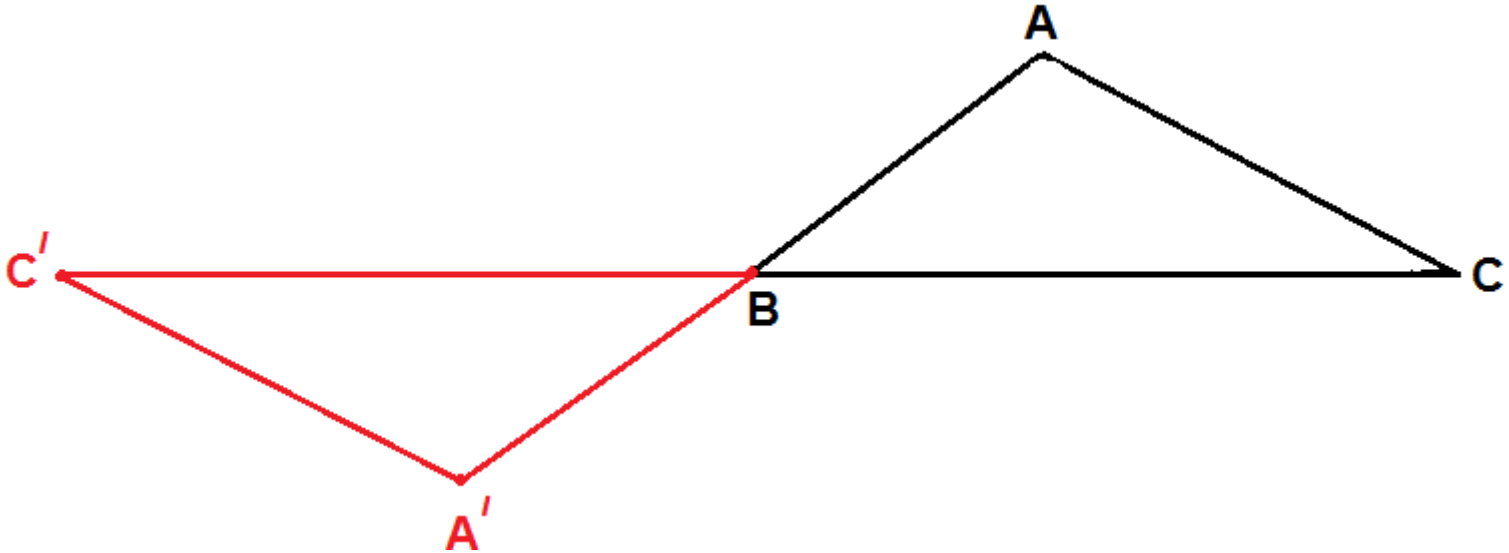
۶) تصویر هر شکل با خودش همنهشت است

۴) تجانس

تعریف: بفرض k یک عدد حقیقی مخالف صفر و O نقطه ای ثابت باشد در این صورت تجانس به مرکز O و به نسبت k تبدیلی است که تحت آن نقطه A به نقطه ای مانند A' تصویر شود به طوریکه: $\overrightarrow{OA'} = k \times \overrightarrow{OA}$

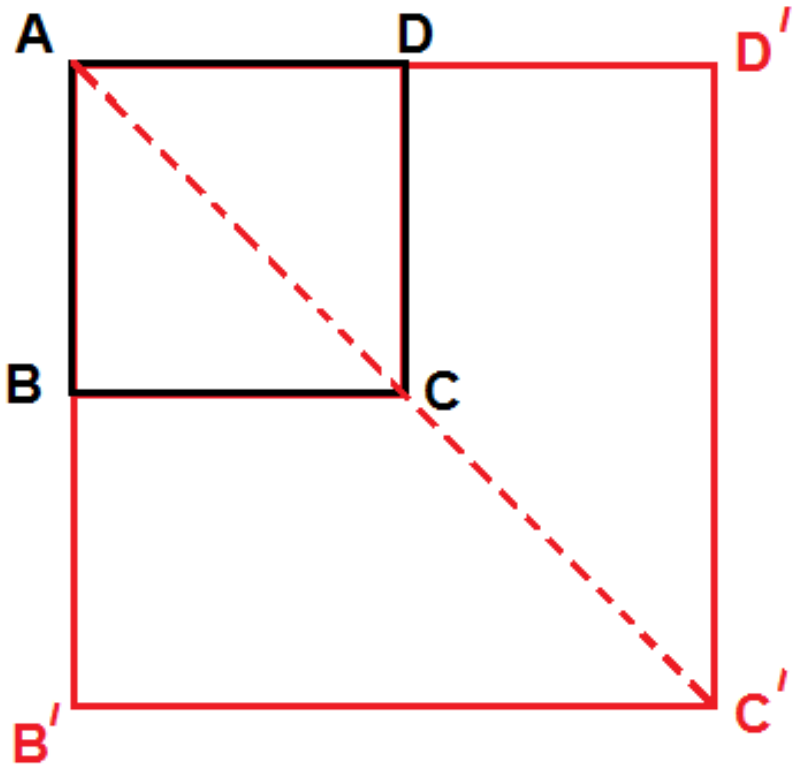
مثال ۸: در شکل زیر تصویر مثلث $\overset{\triangle}{A\,B\,C}$ را تحت تجانس به مرکز B و به نسبت $k = -1$ رسم کنید.

تجانس یافته (مجانس) مثلث $\overset{\triangle}{A\,B\,C}$ ، مثلث $\overset{\triangle}{A'\,B\,C'}$ است.

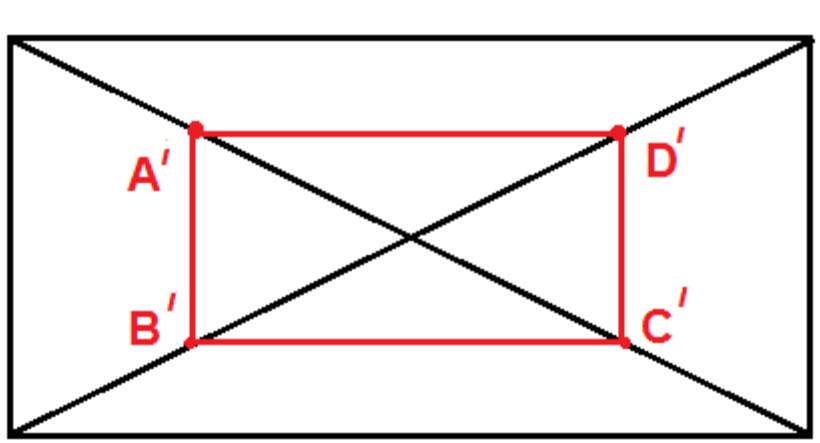


مثال ۹: در شکل زیر تصویر مربع $ABCD$ را تحت تجانس به مرکز A و به نسبت $k = ۲$ رسم کنید.

مجانس (تجانس یافته) مربع $ABCD$ مربع $AB'C'D'$ است.



مثال ۱۰: در شکل زیر تصویر مستطیل $ABCD$ را تحت تجانس به مرکز نقاط برخورد قطر ها و به نسبت $k = \frac{۱}{۲}$ رسم کنید.



لازم به ذکر است که دریک تجانس به مرکز O و به نسبت k :

۱) اگر $k > ۰$ باشد تجانس را تجانس مستقیم می نامیم.

۲) اگر $k < ۰$ باشد تجانس را تجانس معکوس می نامیم.

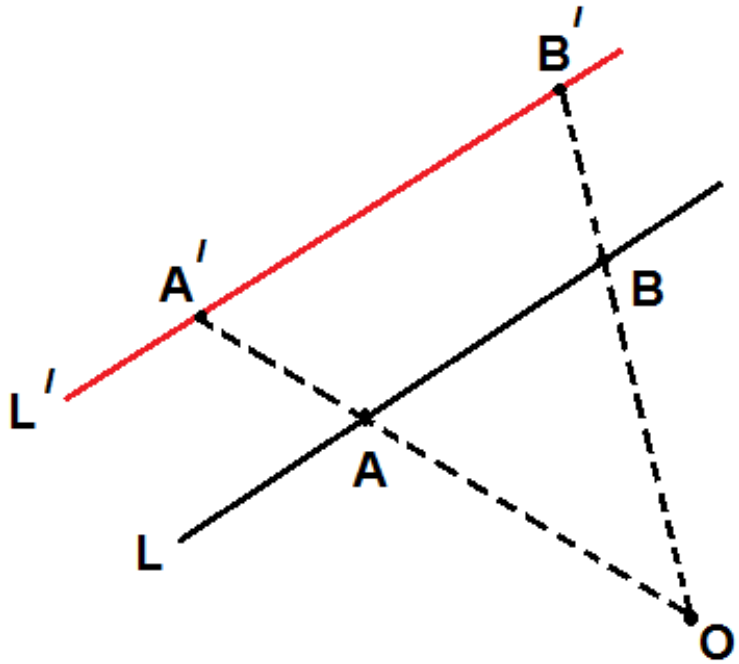
۳) اگر $|k| < ۱$ تصویر شکل کوچکتر می شود و آن را تجانس انقباضی می گوییم.

۴) اگر $|k| > ۱$ تصویر شکل بزرگتر می شود آن را تجانس انبساطی گوییم.

قضیه ۶: تجانس، شیب خط را حفظ می کند.

اثبات: قضیه را در حالتی که $k > 1$ است اثبات می کنیم و اثبات در حالت های دیگر هم به طور مشابه است.

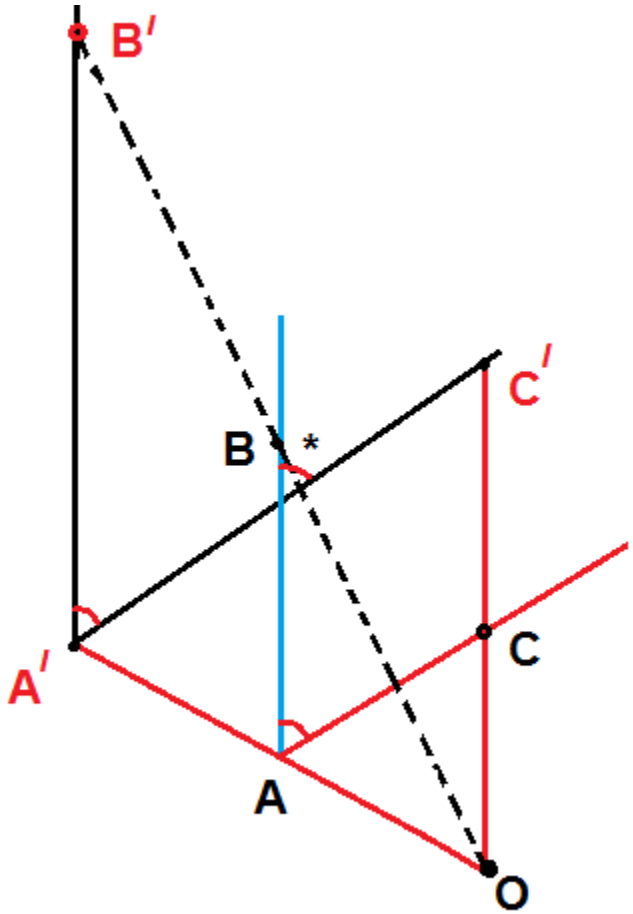
بفرض T یک تجانس به مرکز O و به نسبت k باشد و L خطی گذرنده از دو نقطه A و B و L' تصویر خط L باشد با توجه به شکل و تعریف تجانس داریم؛



$$\begin{cases} \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB} \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow AB \parallel A'B' \Rightarrow L \parallel L' \Rightarrow m_L = m_{L'}$$

قضیه ۷: تجانس، اندازه زاویه را حفظ می کند.

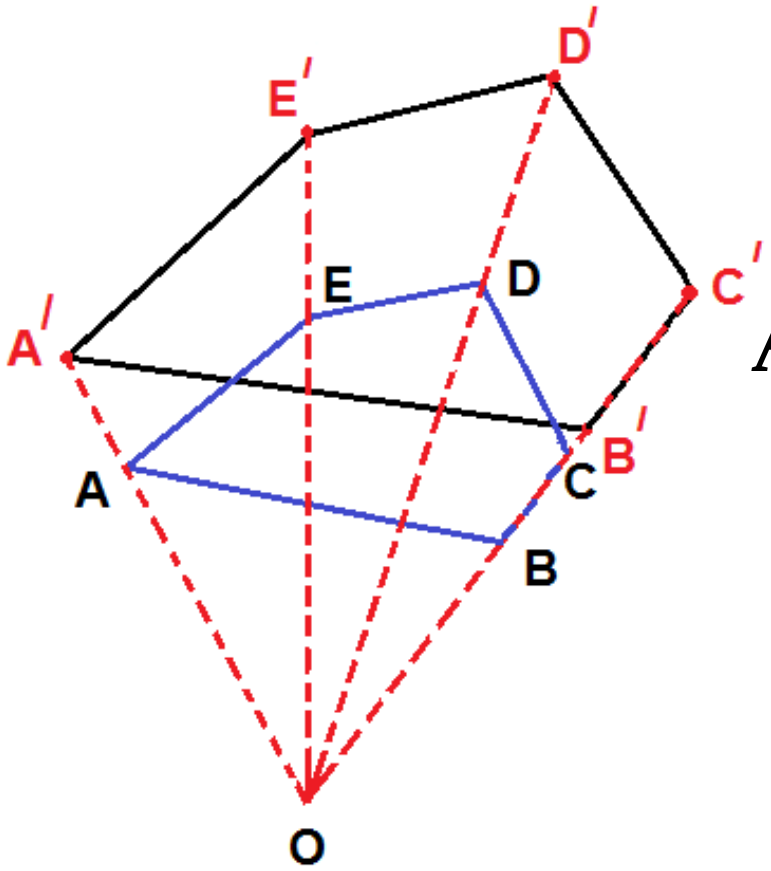
اثبات: باتوجه به شکل اگر O مرکز تجانس باشد تصویر (مجانس) زاویه A همان زاویه A' است و چون طبق قضیه قبل اضلاع زاویه در A و تصویرش نظیر به نظیر موازی اند، لذا:



$$\begin{cases} AC \parallel A'C' \Rightarrow \hat{*} = A \\ AB \parallel A'B' \Rightarrow \hat{*} = A' \end{cases} \Rightarrow A = A'$$

قضیه ۸: مجانس هر n ضلعی با خودش متشابه است.

اثبات: قضیه را برای یک پنج ضلعی اثبات می کنیم و اثبات برای هر n ضلعی دیگر هم به طور مشابه است بفرض $ABCDE$ یک پنج ضلعی باشد مجانس پنج ضلعی را تحت تجانس به مرکز O و به نسبت k (عدد k را بزرگتر از یک می گیریم) بدست می آوریم.



باتوجه به شکل و قضایای قبل:

$$AB \parallel A'B' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$

و به طور مشابه نسبت مجانس هر ضلع به خودش برابر k است

و چون اندازه زاویه ها هم بدون تغییر است یعنی:

$$\begin{cases} A' = A \\ B' = B \\ \vdots \\ E' = E \end{cases}$$

در نتیجه دو چند ضلعی با هم هم متشابه اند.

تبدیل همانی

تعریف: تبدیل T را همانی گوییم هرگاه تبدیل یافته هر نقطه مانند A برابر خودش باشد یا تبدیل یافته هر نقطه بر خودش منطبق باشد ($T(A)=A$)

مثال: تجانس به مرکز O و به نسبت $k=1$ همانی است.

مثال: دوران به مرکز O و زاویه $\alpha=360^\circ$ یک تبدیل همانی است.

مثال: انتقال تحت بردار صفر یک تبدیل همانی است.

ویژگی های تجانس به مرکز O و به نسبت k

۱) لزوما طولپا نیست (مگر $k = \pm 1$)

۲) مرکز تجانس ثابت می ماند.

۳) تصویر هر شکل با خودش متشابه است و نسبت تشابه برابر $|k|$ است.

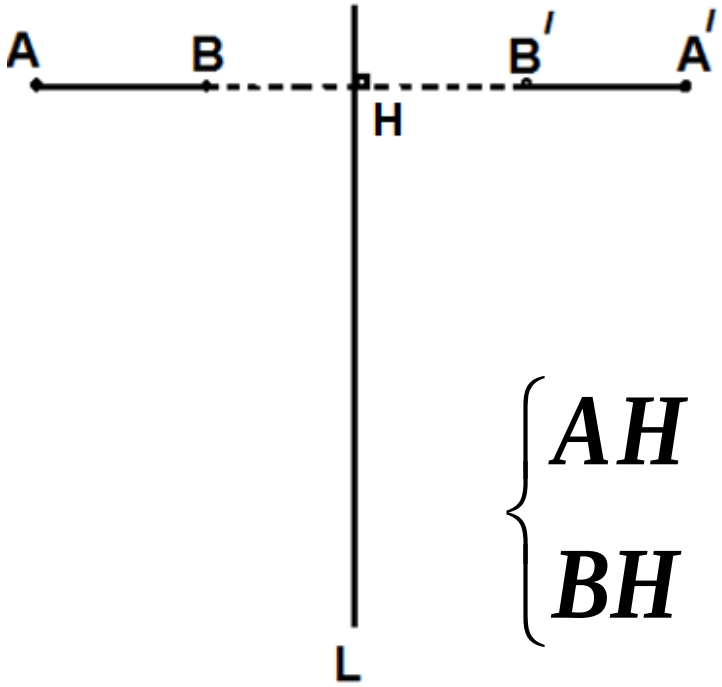
۴) پاره خط هایی که هر نقطه را به تصویرشان متصل می کنند در مرکز تجانس همرس اند.

۵) تحت هر تجانس، مساحت هر شکل k^2 برابر و محیط هر شکل $|k|$ برابر می شود.

تمرینات صفحه ۴۴ و ۴۵

۱ــ در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.

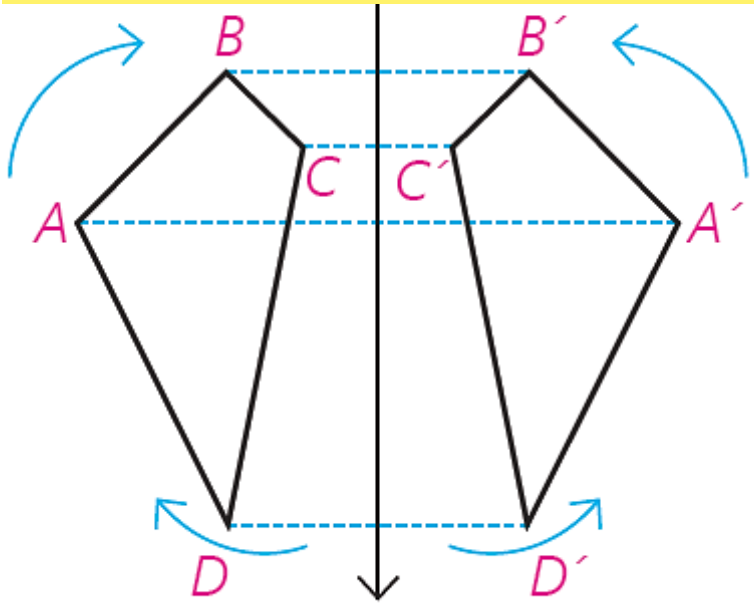
بفرض L محور بازتاب و پاره خط AB در یک طرف L باشد به طوریکه امتداد AB بر L عمود باشد در نتیجه با توجه به شکل:



$$\begin{cases} AH = A'H \\ BH = B'H \end{cases} \Rightarrow AB = AH - BH = A'H - B'H = A'B'$$

۲ــ در شکل زیر چهار ضلعی $A'B'C'D'$ تصویر **چهارضلعی محدب** ABCD تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B، C وD می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می کند؟

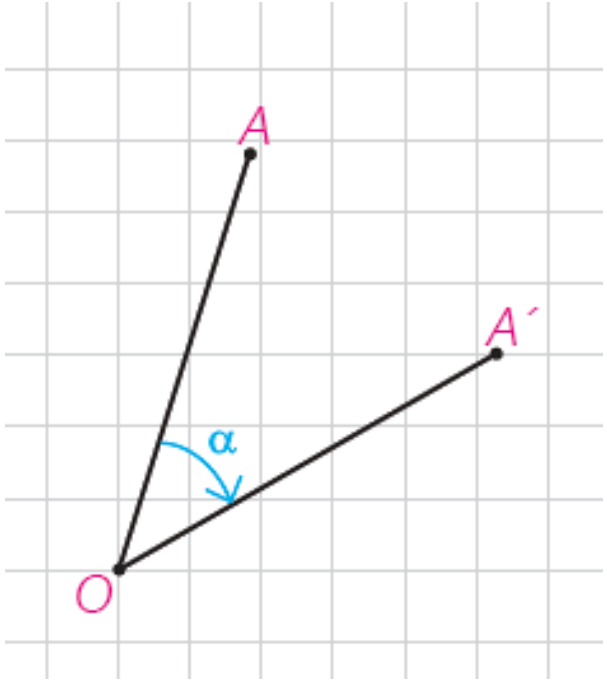
جهت حرکت در بازتاب این نقاط خلاف جهت عقربه های ساعت است .خیر نمی توان گفت بازتاب جهت شکل را حفظ می کند.



۳ــ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

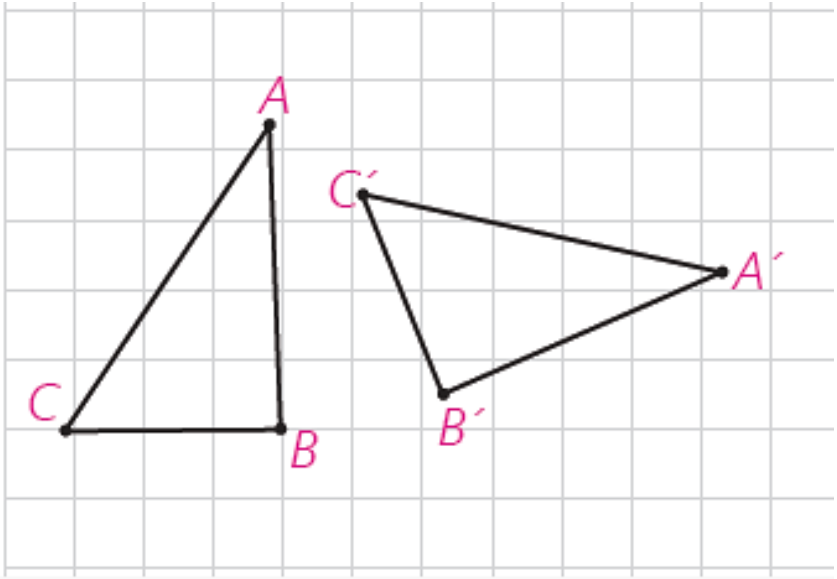
الف) در شکل مقابل نقطهٔ A' دوران یافتهٔ نقطهٔ A در دوران به مرکز O و زاویه α است.

نشان دهید عمودمنصف AA' از نقطهٔ O می‌گذرد.



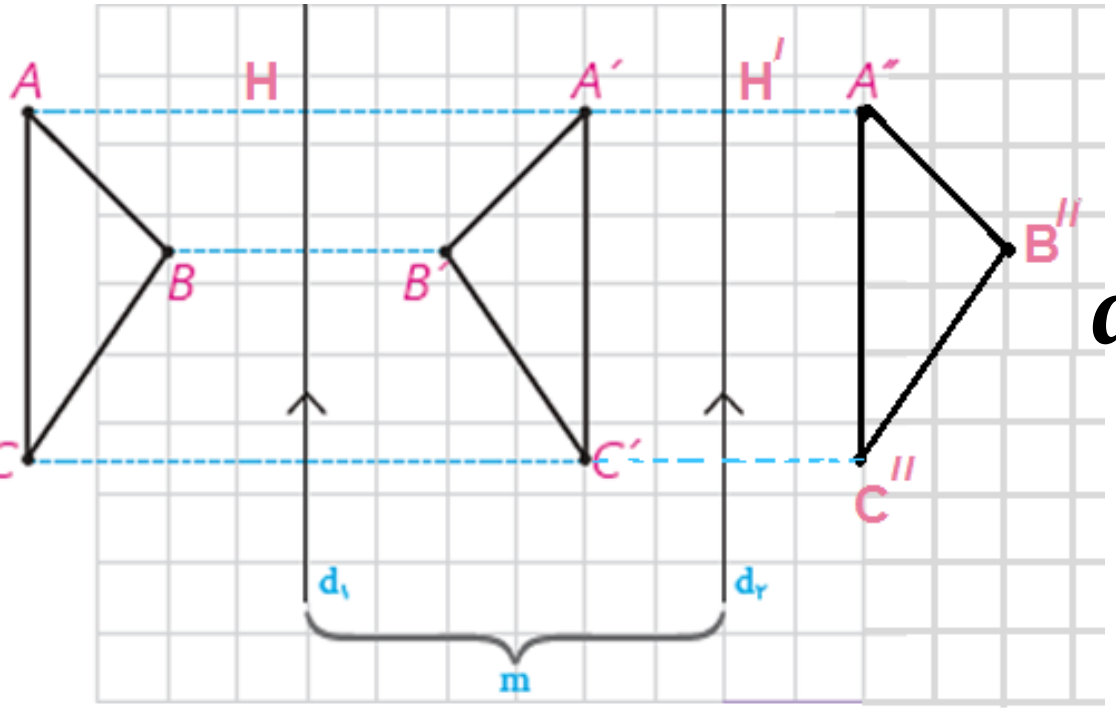
الف) طبق تعریف دوران $OA = OA'$ لذا فاصله O از دو سر پاره خط AA' به یک اندازه است لذا O روی عمود منصف AA' واقع است.

ب) اگر بدانیم $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ دوران یافتهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟



ب) کافی است نقطه برخورد عمود منصف های AA' و BB' رابدست آوریم این نقطه مرکز دوران است.

۴ــ در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصلهٔ m از آن قرار دارد و مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.



الف) نشان دهید : $AA''=2m$

با توجه به شکل اگر نقاط برخورد AA'' باخطوط d_1 و d_2 را به ترتیب H و H' بنامیم داریم:

$$AA'' = AH + A'H + A'H' + A''H'$$

$$= 2A'H + 2A'H' = 2(A'H + A'H') = 2HH' = 2m$$

ب) اندازهٔ BB'' و CC'' چقدر است؟

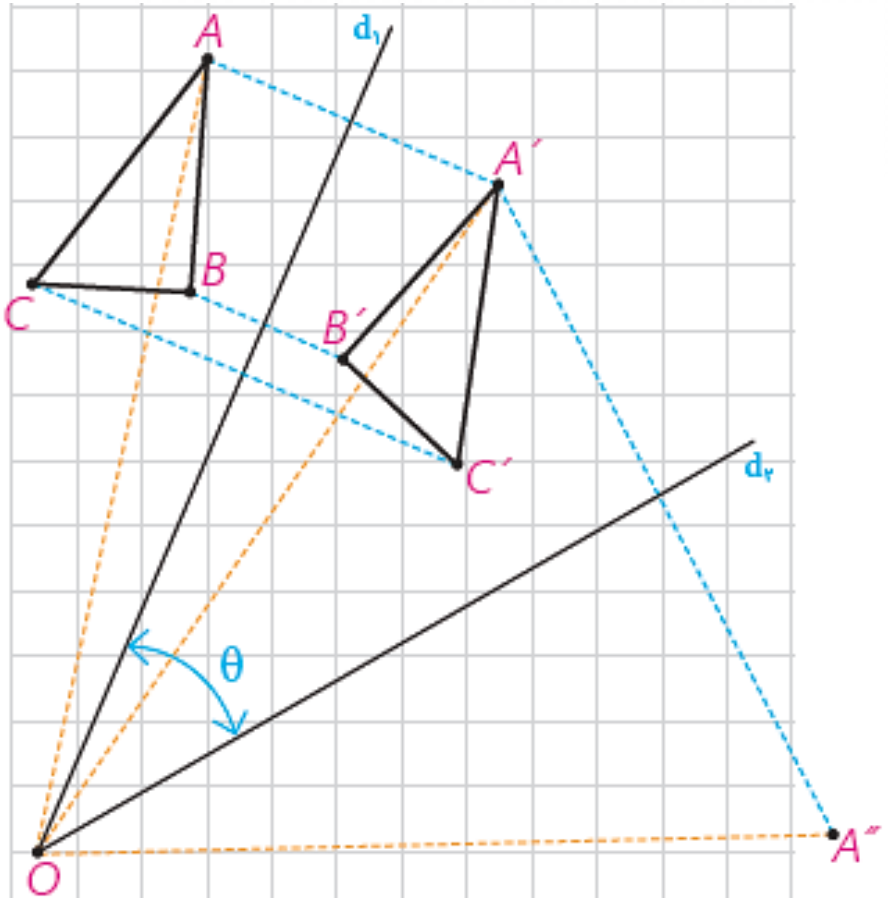
به طور مشابه (الف) $BB' = CC'' = AA'' = ۲m$

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

یک انتقال تحت بردار $\overrightarrow{AA''}$ مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ تصویر می شود در نتیجه ترکیب دو بازتاب با محورهای بازتاب موازی، یک انتقال است.

۵ــ در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویهٔ θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.

الف) نشان دهید : $\widehat{AOA''} = 2\theta$



O روی عمود منصف های AA' و $A'A''$ واقع است لذا:

$$OA = OA', OA' = OA'' \quad (\mathrm{I})$$

از طرفی با توجه به شکل چون d_1 و d_2 نیمساز های دو زاویه

AOA' و $A'OA''$ اند لذا : $(\Pi) \quad AOA'' = 2\theta$

ب) اندازهٔ $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چقدر است؟

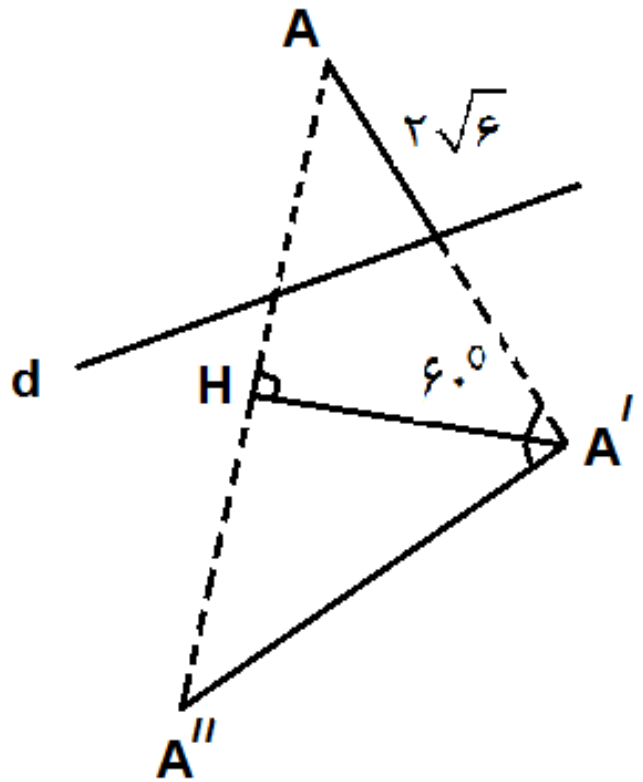
به طور مشابه

$$BOB'' = 2\theta, COC'' = 2\theta$$

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پ) یک دوران تحت زاویه 2θ و به مرکز O (نقطه برخورد دو خط d_1 و d_2) مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ دوران یافته مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است.

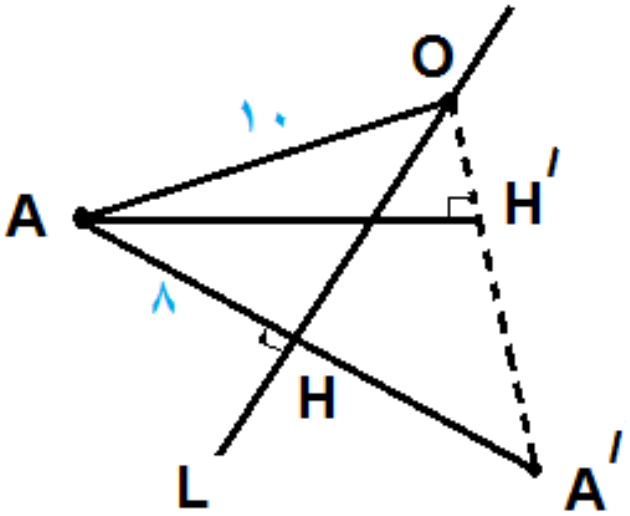
۶ــ نقطهٔ A به فاصلهٔ $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطهٔ A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' می‌نامیم. نقطهٔ A را حول نقطهٔ A' به اندازهٔ ۱۲۰ درجه دوران می‌دهیم تا نقطهٔ A'' حاصل شود. طول پاره‌خط AA'' را محاسبه کنید.



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{AA'} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴\sqrt{۶} = ۶\sqrt{۲}$$

$$AA'' = ۲AH = ۲(۶\sqrt{۲}) = ۱۲\sqrt{۲}$$

۷ــ نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA'=۱۶$ و نقطه O روی خط l و $OA=۱۰$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط OA' چقدر است؟



$$OH = \sqrt{۱۰^۲ - ۸^۲} = ۶$$

$$S_{\triangle OAA'} = \frac{۱}{۲} OH \times AA' = \frac{۱}{۲}(۶)(۱۶) = ۴۸$$

از طرفی $S_{\triangle OAA'} = \frac{۱}{۲} OA' \times AH'$ **در نتیجه** $\frac{۱}{۲}(۱۰)AH' = ۴۸$ **لذا:** $AH' = ۹/۶$

تمرینات صفحه ۵۰ و ۵۱

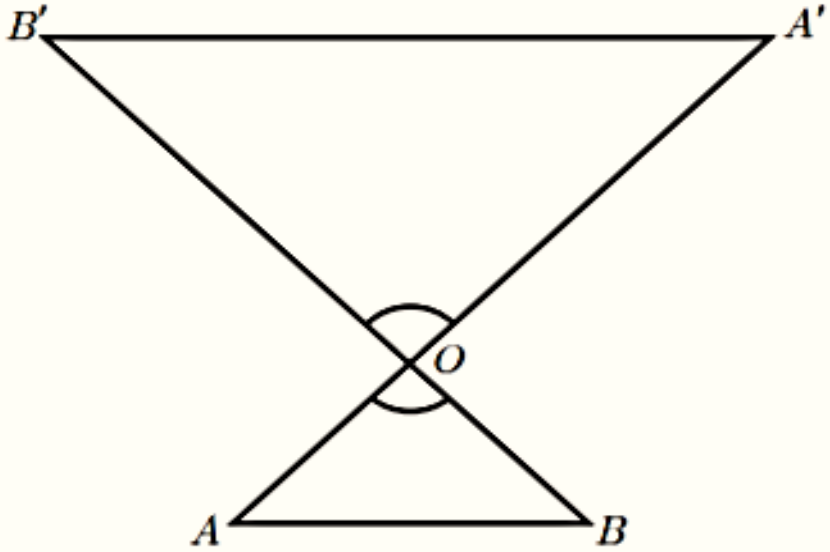
۱ــ در تجانسی با نسبت $k<0$ و مرکز تجانس O (نقطه O را خارج AB در نظر بگیرید) نشان دهید :

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

۱ الف) اگر نقاط A' و B' مجانس‌های A و B باشند داریم :

$$\begin{matrix} OA' = K.OA \\ OB' = K.OB \end{matrix} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K \Rightarrow AB \parallel A'B' \Rightarrow$$

شیب دو خط مساوی است

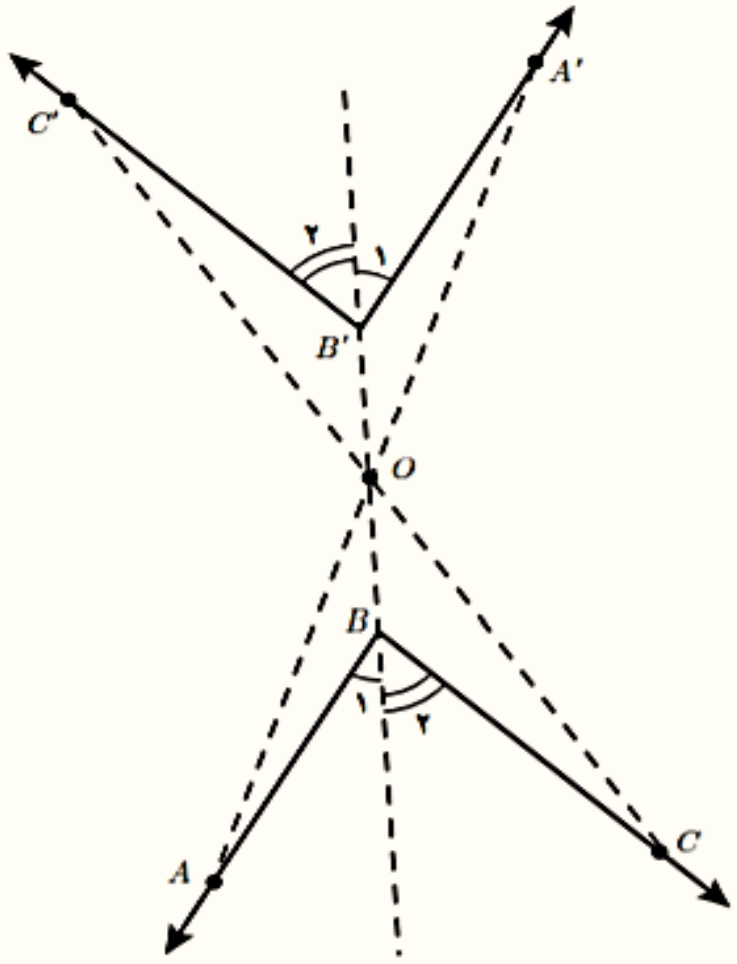


ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

ب) چون تجانس شیب‌خط را حفظ می‌کند، پس داریم :

$$AB \parallel A'B' \text{ , } BB' \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}'_1$$

$$BC \parallel B'C' \text{ , } BB' \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{B}'_2$$



از جمع طرفین دو رابطه خواهیم داشت :

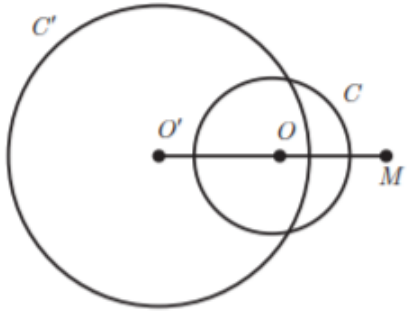
$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}'_1 + \hat{B}'_2$$

$$\hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$$

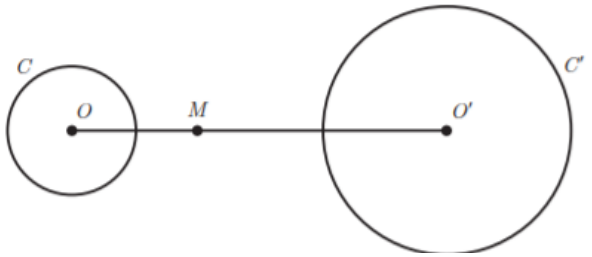
۲ــ دایره C(O,R) و نقطهٔ M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطهٔ M در هر حالت رسم کنید.

(**راهنمایی:** تصویر مرکز و یک نقطه دلخواه از دایره را تحت تجانس پیدا کنید.)

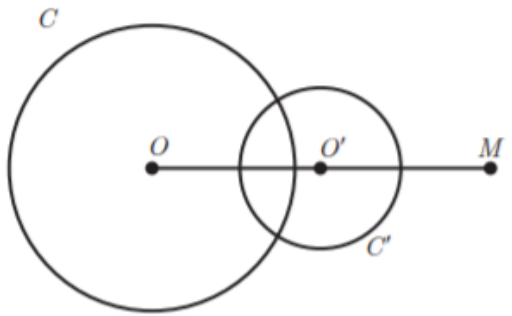
الف) $k=۲$



ب) $k=-۲$

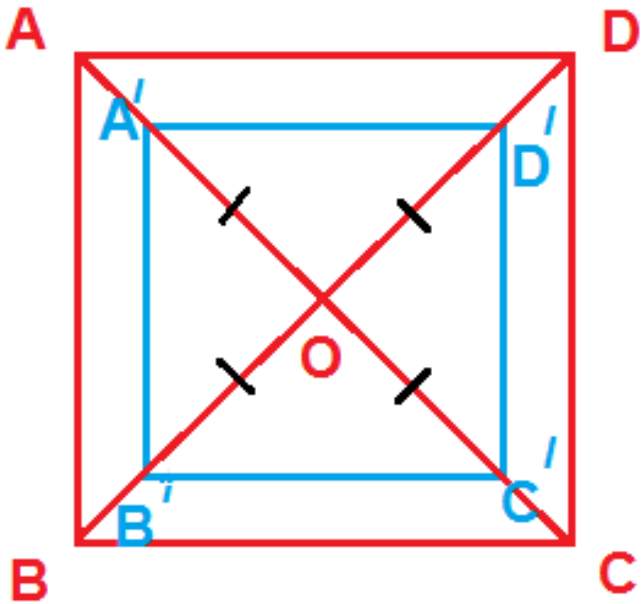


پ) $k=\frac{۱}{۲}$



۳ــ یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ و به مرکز محلی تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.

بفرض O نقطه تلاقی قطر ها مرکز یک تجانس به نسبت $k = \frac{۲}{۳}$ باشد بافرض اینکه a و a' طول اضلاع مربع و تصویرش و S و S' مساحت مربع و تصویرش باشد آنگاه داریم:

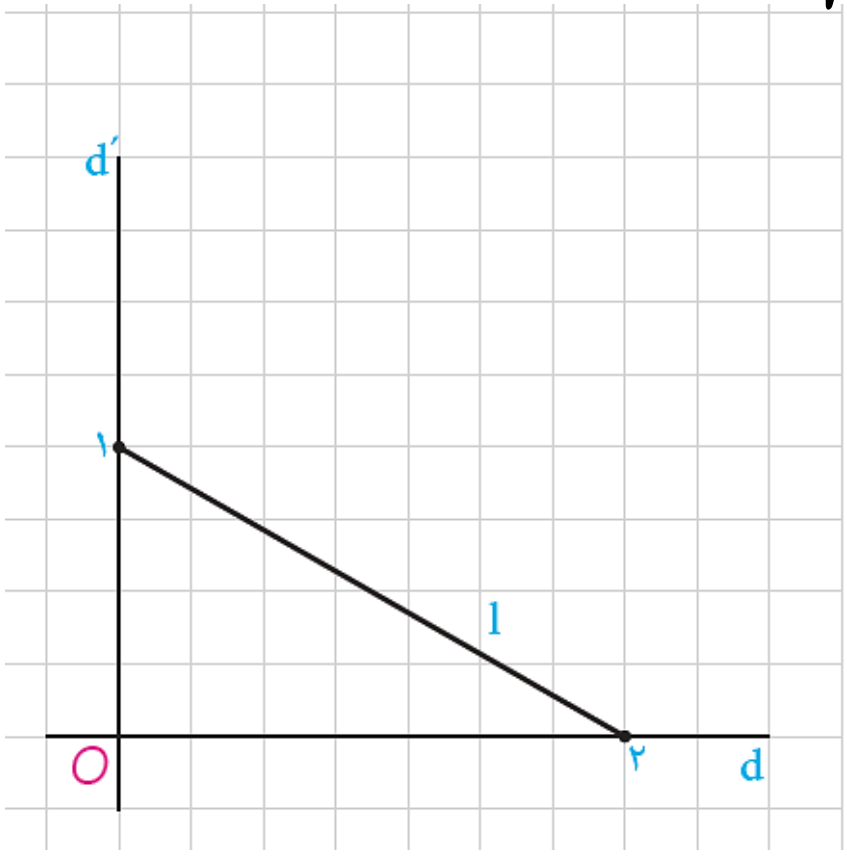


$$\frac{S'}{S} = k^{۲} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{S'}{S - S'} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{S'}{۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow S' = ۴ \Rightarrow a' = ۲$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}a' = \frac{۳}{۲}(۲) = ۳ \Rightarrow S = ۹$$

۴ــ در شکل روبه‌رو اگر خط 1 را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۷}{۴}$ تصویر کنیم و آن را $1'$ بنامیم، مساحت بین خط 1 و $1'$ و خطوط d و d' چقدر است؟

حل: اگر مساحت بین خطوط L و L' و خطوط d و d' را S و مساحت خط L و d و d' را $S_۱$ و مساحت بین L' و خطوط d و d' را $S_۲$ بنامیم آنگاه داریم:



$$S = S_۲ - S_۱ = (\frac{۷}{۴})^۲ S_۱ - S_۱ = \frac{۴۵}{۴} S_۱ = \frac{۴۵}{۴}(۱) = \frac{۴۵}{۴}$$

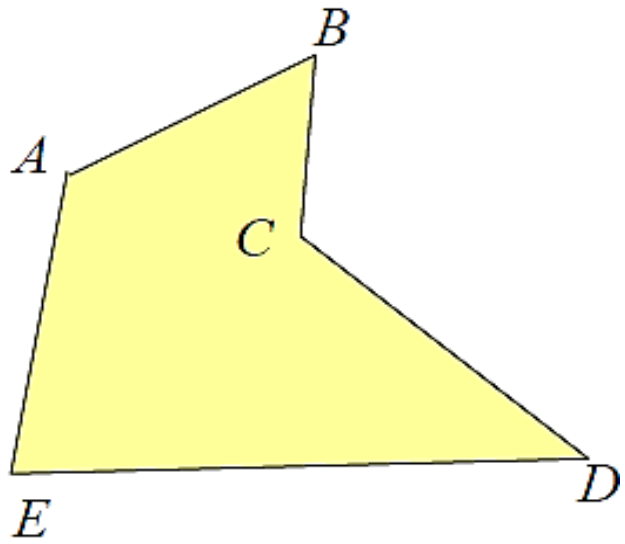
فصل دوم

درس دوم: کاربرد تبدیلات

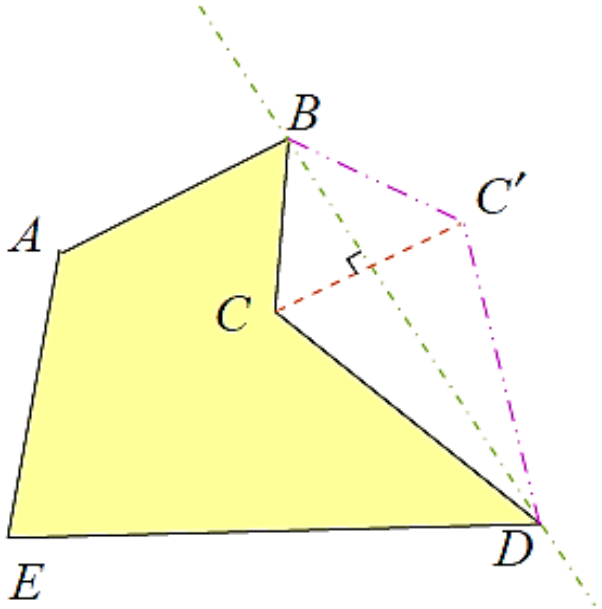
کاربرد ۱: مسائل هم پیرامونی

یکی از کاربردهای تبدیلات از جمله بازتاب، حل مسائل هم پیرامونی یا هم محیطی است. در این گونه مسائل هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چندضلعی را تغییر دهیم. برای روشن شدن موضوع مثال زیر را حل می کنیم.

مثال ۱: زمینی به شکل چند ضلعی $ABCDE$ است،با ثابت نگه داشتن تعداد و اندازهٔ اضلاع چند ضلعی، می خواهیم مساحت آن را افزایش داده و سپس دور آن حصار بکشیم چگونه این کار ممکن است؟(شکل زیر)



حل: خط گذرا از نقاط B و D را رسم می کنیم. اکنون بازتاب نقطه C را نسبت به این خط ترسیم می نماییم. پنج ضلعی $ABC'DE$ جواب مساله است.



زیرا بازتاب طولپاست لذا:

$$BC = BC', CD = C'D$$

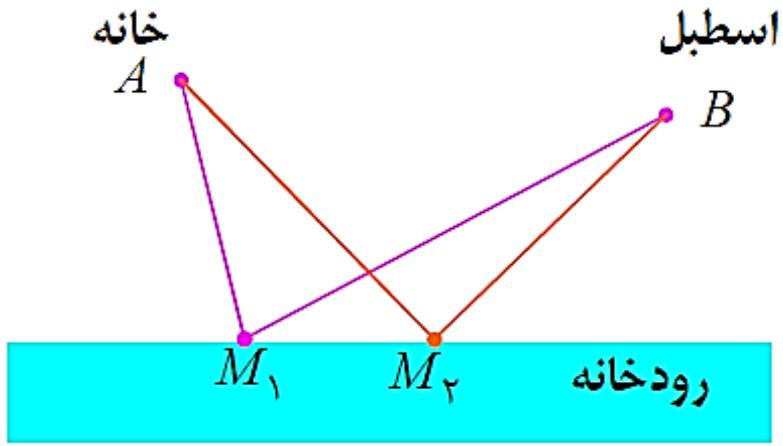
در نتیجه:

$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA$$
$$= AB + BC' + C'D + DE + EA = P_{ABC'DE}$$

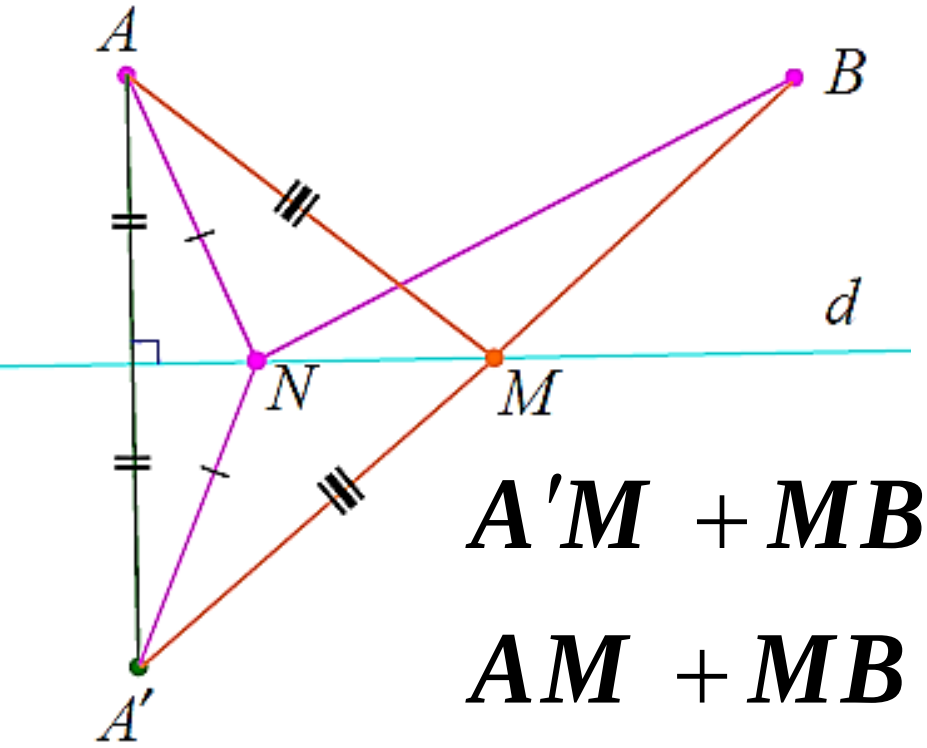
کاربرد ۲: مسائل یافتن کوتاه ترین مسیر

در کتب تاریخی هرون، ریاضی دانی است که به او دایره المعارف ریاضی و فیزیک لقب داده اند، وی در فاصله زمانی ۱۵۰ تا۲۵۰ سال قبل از میلاد حضرت عیسی (ع) در مصر زندگی می کرد. او برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد. تمامی این مثال ها متکی به این اصل می باشد که کوتاه ترین مسیر بین دو نقطه، اندازه پاره خط واصل آن دو نقطه است. به مثال های زیر توجه کنید.

مثال ۲: مردی می خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه ای که لبه مستقیمی دارد، برود و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد که همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطهٔ ساحل آب بردارد که کمترین مسافت از خانه به رودخانه و اسطبل داشته باشد؟



حل: هدف این مساله، پیدا کردن نقطه ای مانند M روی خط d طوری که $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. هرون برای حل این مساله بازتاب نقطه A را نسبت به خط d را پیدا کرد و آن را نقطه A' نامید. خط فرضی $A'B$ محور بازتاب را در نقطه مانند M قطع می کند. نقطه M جواب مساله است. زیرا اگر نقطهٔ دیگری مانند N روی خط d در نظر بگیریم با توجه به شکل در مثلث $A'NB$ بنا به قضیه نامساوی مثلث داریم:



$$A'B < A'N + NB$$

از طرفی چون:

$$A'N = AN\ , A'M = AM$$

می توان نتیجه گرفت:

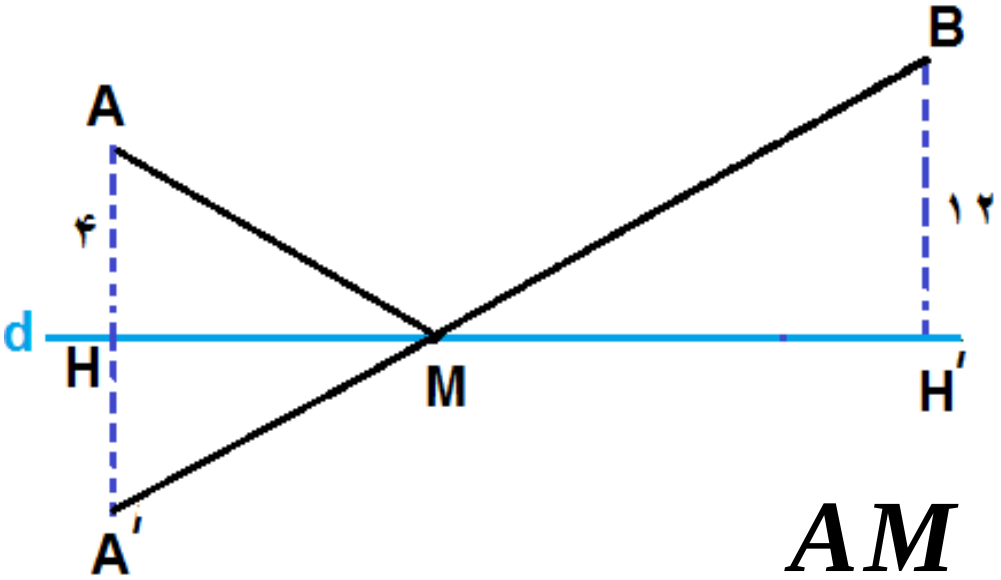
$$A'M + MB < A'N + NB \Rightarrow AM + MB < AN + NB$$

$$AM + MB < AN + NB$$

و این یعنی M نقطه برداشتن آب از رودخانه است.

مثال ۳: بفرض دو نقطه A و B به ترتیب به فاصله ۴ و ۱۲ سانتی متر از خط d باشند و نقطه M روی خط d واقع است مجموع فواصل نقطه M از نقاط A و B کمترین مقدار ممکن و برابر ۲۰ سانتی متر باشد، آنگاه فاصله نقطه A از M را بدست آورید.

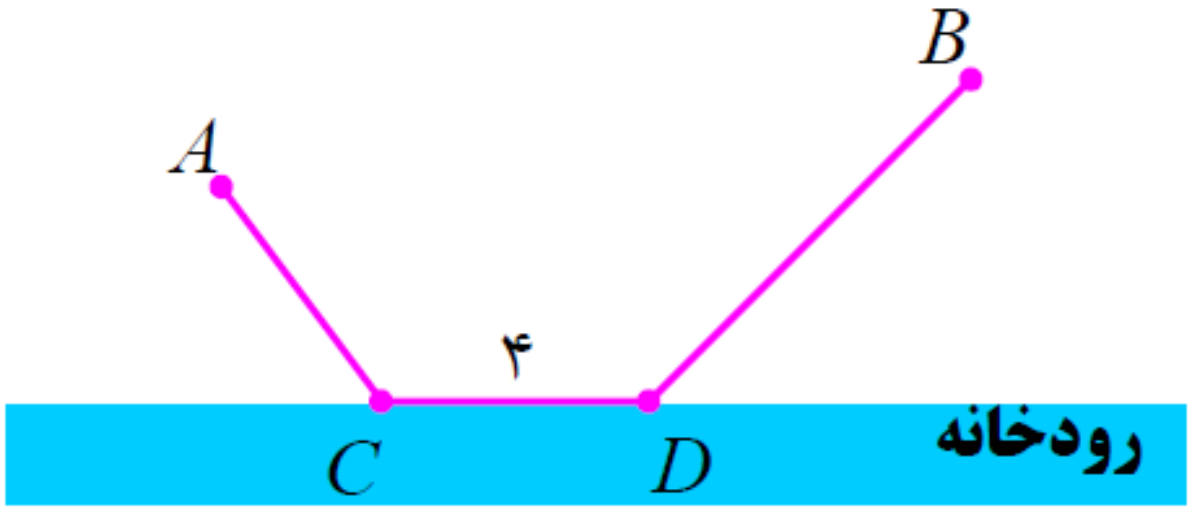
حل:



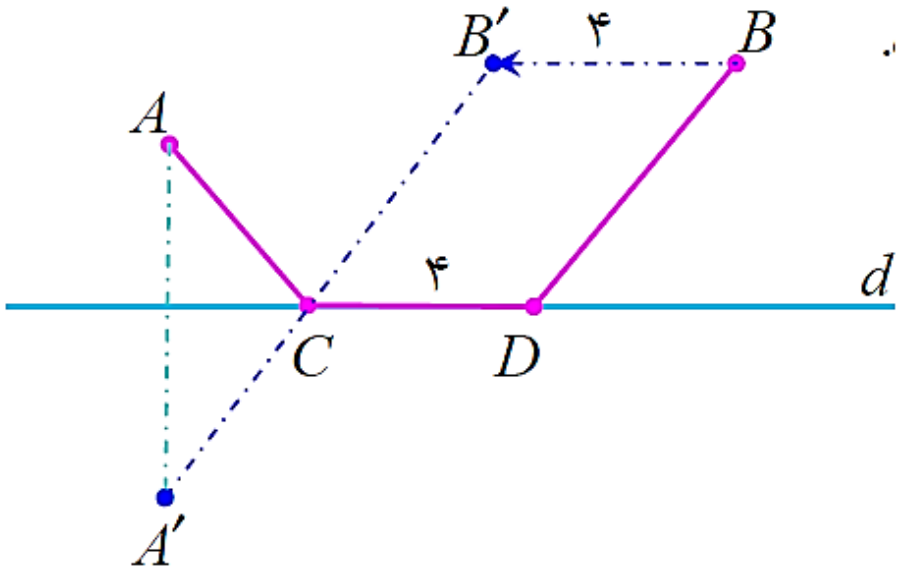
دو مثلث AHM و $BH'M$ متشابه اند و نسبت تشابه آنها برابر ۳ است.در نتیجه:

$$AM + BM = ۲۰ \Rightarrow ۴AM = ۲۰ \Rightarrow AM = ۵$$

مثال ۴: مطابق شکل روبرو، دو شهر A و B در یک طرف رودخانه واقع اند می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم، به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $ACDB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟

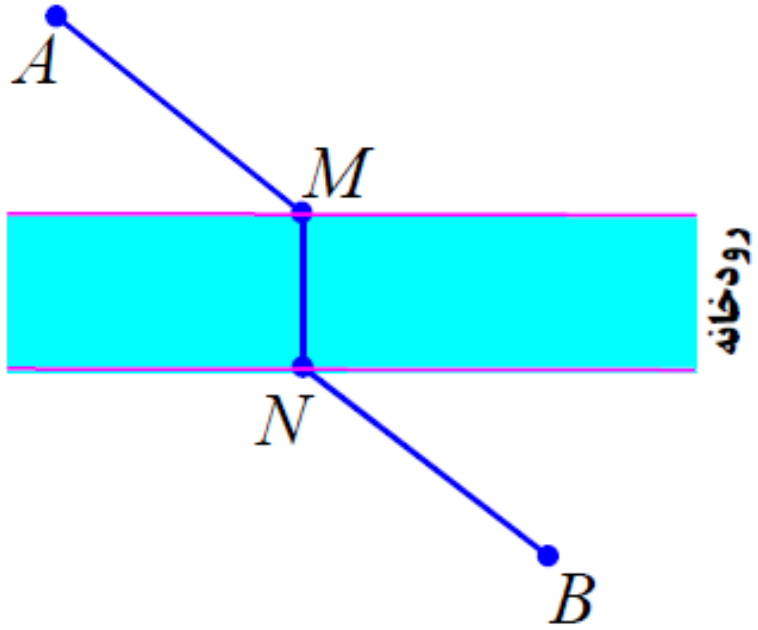


حل: ابتدا B' انتقال یافته B تحت بردار به طول ۴ کیلومتر و موازی خط ساحلی d را مشخص می کنیم. روی d نقطه C را طوری می یابیم که ACB' کوتاه ترین مسیر باشد برای این کار A' بازتاب A نسبت به خط d را به B' وصل می کنیم. C حاصل می شود حال اگر جاده ای از A به C، سپس جاده ساحلی ۴ کیلومتری از C به D و جاده سوم نیز از D به B ساخته بشود مسیر $ACDB$ کوتاه ترین مسیر ممکن است زیرا چهارضلعی $CB'BD$ متوازی الاضلاع است و در نتیجه با توجه به شکل داریم :

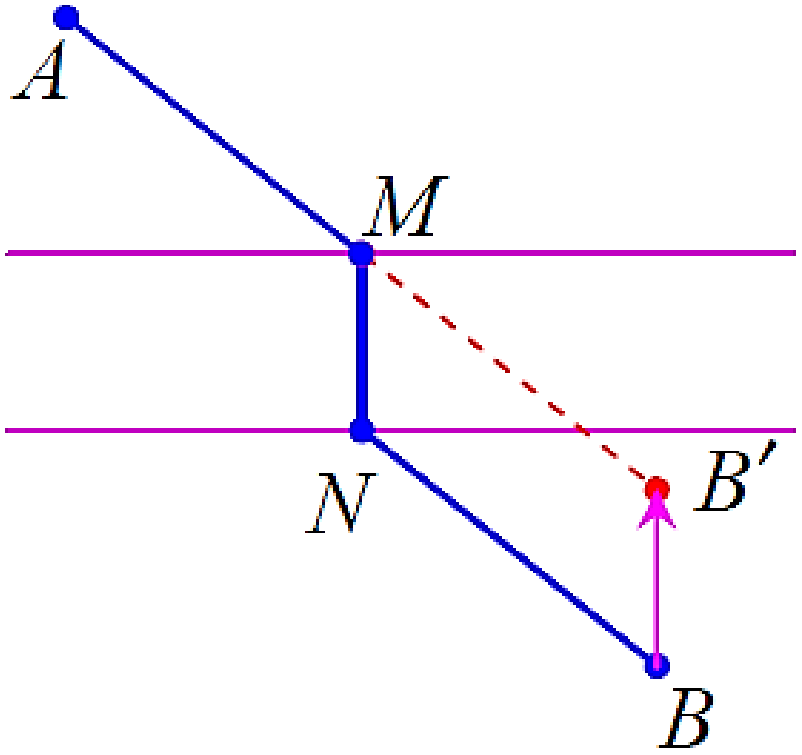


$$A'B' = A'C + CB' = AC + BD \Rightarrow A'B' + CD = AC + CD + BD$$

مثال ۵: مطابق شکل داده شده، دو شهر A و B در دو طرف رودخانه است. اگر بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم، به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، تعیین کنید که محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟



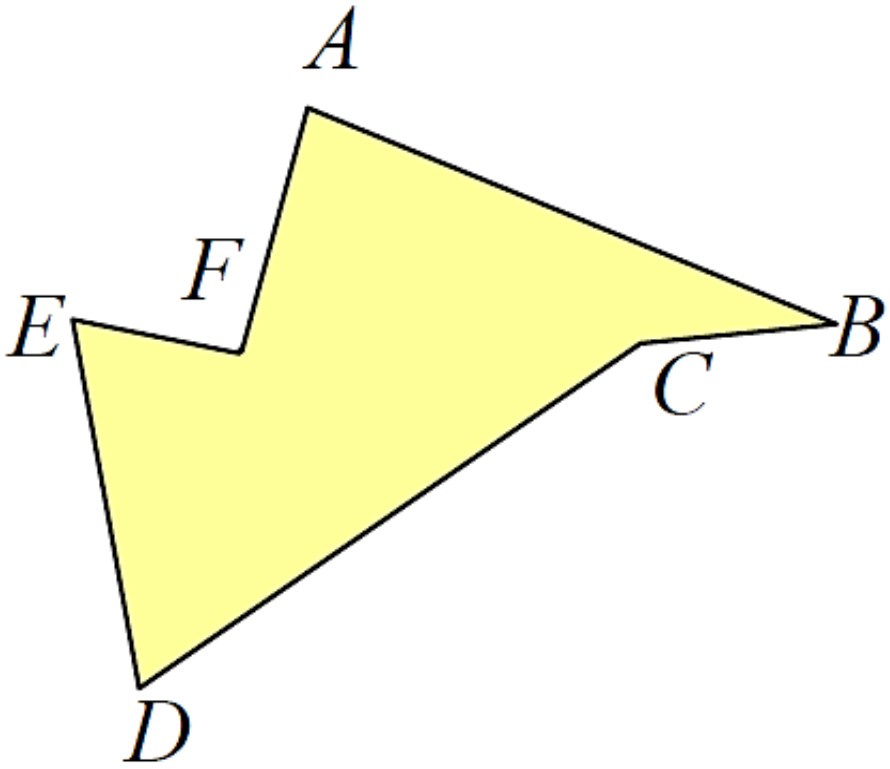
حل: ابتدا نقطه B را به اندازه عرض رودخانه و عمود بر راستای ساحل انتقال می دهیم نقطه B' بدست می آید. از B' به A وصل می کنیم، نقطه M حاصل می شود. از M ، عمود MN بر راستای رودخانه محل احداث پل است و مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر است زیرا چهارضلعی $MNBB'$ متوازی الاضلاع است و با توجه به شکل داریم:



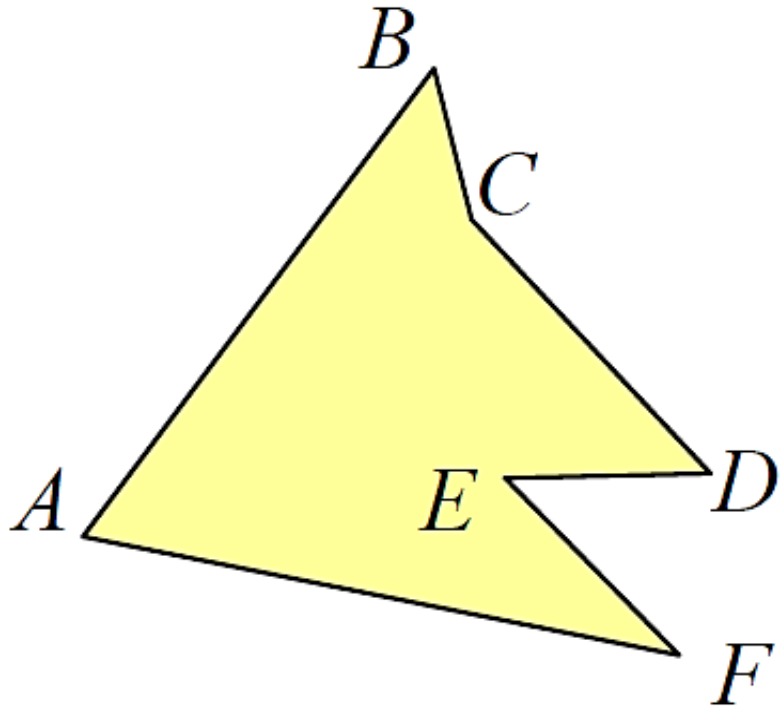
$$AB' = AM + MB' = AM + NB \Rightarrow AB' + MN = AM + MN + NB$$

تمرینات صفحه ۵۶

تمرین ۱: دور زمین هایی مطابق شکل حصار کشی شده است. چگونه می توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد.



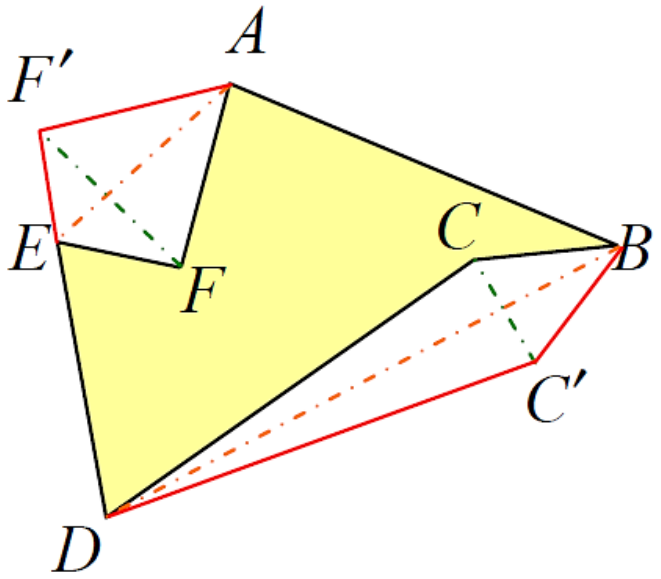
(الف)



(ب)

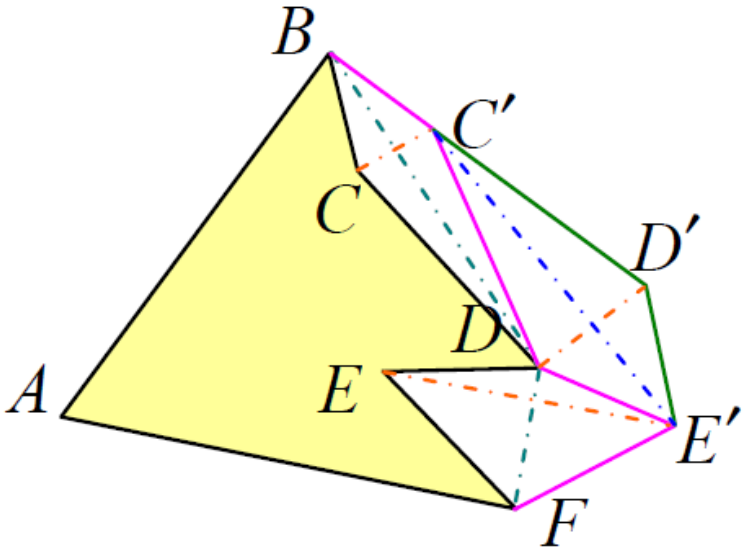
حل: مطابق روش **حل مثال (۱)** وخواص بازتاب چند ضلعی های مقعر را به محدب تبدیل می کنیم.

الف:



$$P_{(ABCDEF)} = P_{(ABC'DEF')}$$

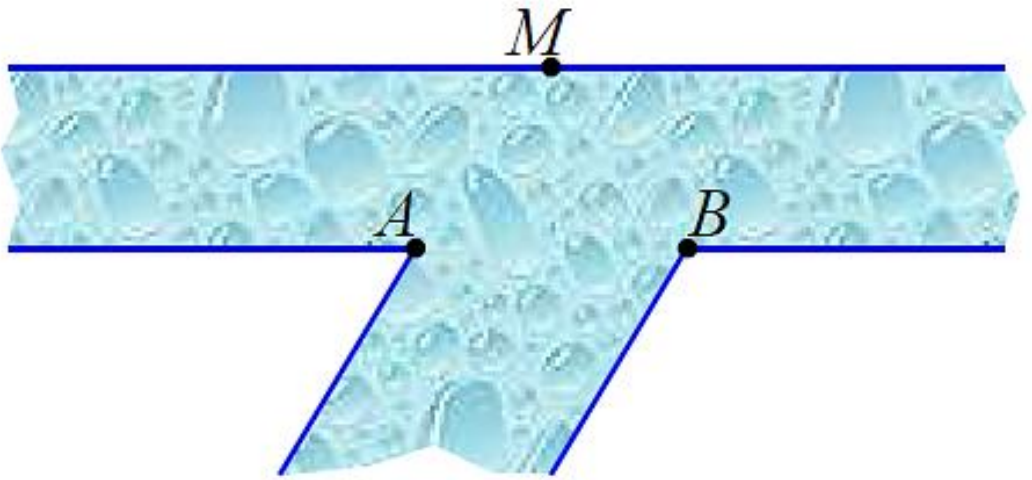
ب:



$$P_{(ABCDEF)} = P_{(ABC'D'E'F)}$$

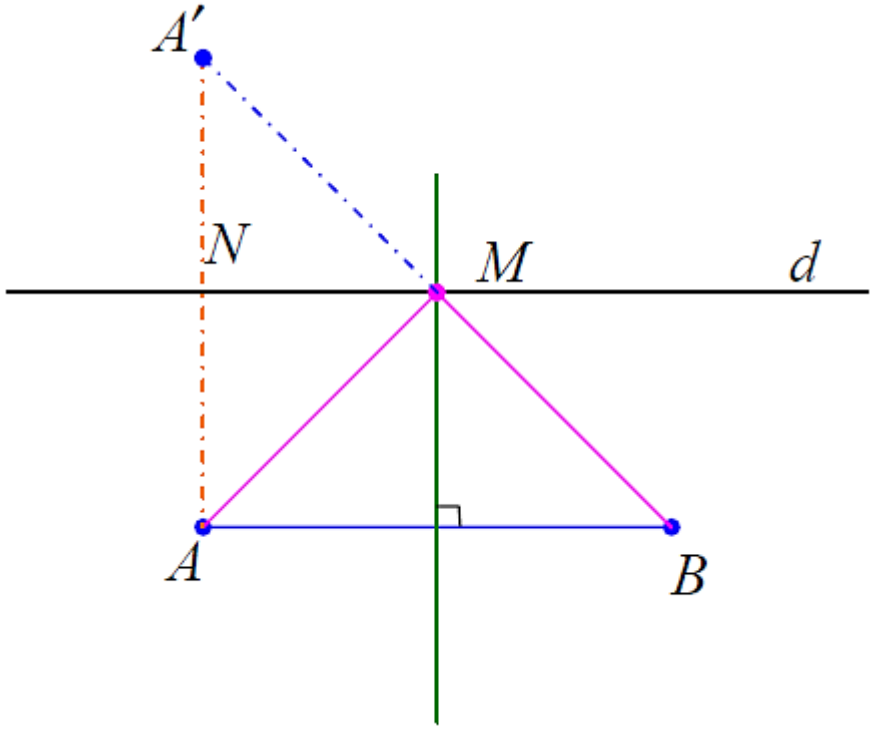
نکته: مراحل حل مسائل هم پیرامونی برای چندضلعی های مقعر وقتی که افزایش مساحت مورد نظر باشد را تا آنجایی ادامه می دهیم که چندضلعی محدب بدست آید.

تمرین ۲: می خواهیم کنار رودخانه ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله M را در نقطه ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق ها هنگام طی مسیر $MABM$ کوتاه ترین مسیر را طی کنند؟



حل:

روش اول) محل دو اسکله A و B معلوم است. به روش هرون بازتاب نقطه A را نسبت به ساحل رودخانه در سمت مقابل (خط d)را رسم می کنیم و آن را A' می نامیم. خط واصل از A' به B و d در M متقاطع اند پس AMB کوتاه ترین مسیر می باشد.



زیرا:

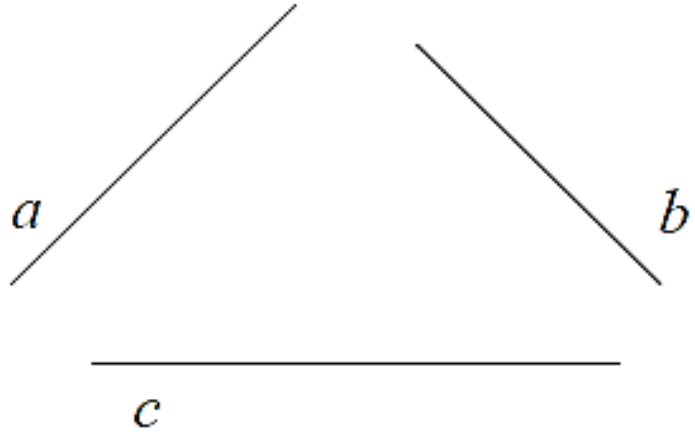
$$A'B = A'M + MB = AM + MB$$

در نتیجه محل احداث اسکله نقطه M است.

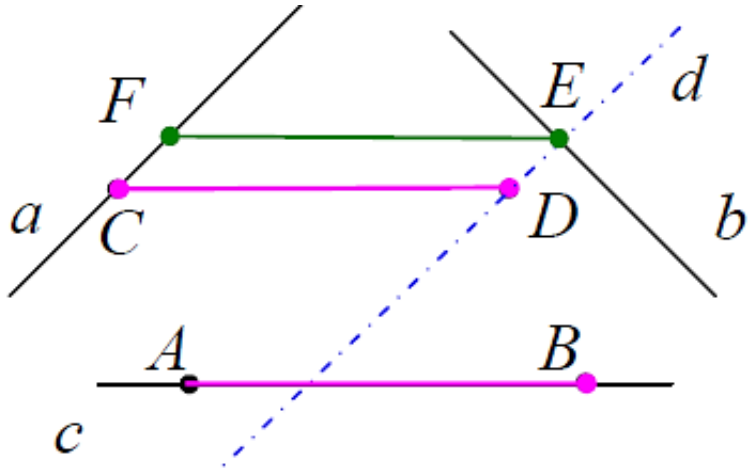
روش دوم) برای تعیین محل احداث اسکله M ، کافی است عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم. محل برخورد این عمود منصف با ساحل رودخانه در سمت مقابل (خط d) جواب مساله است. زیرا هر نقطه روی عمود منصف پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است. لذا طبق مفاهیم بازتاب مسیر $MABM$ دارای کمترین فاصله است.

لازم به ذکر است که روش عمود منصف زمانی درست است که AB موازی d باشند.

تمرین ۳: سه خط دو به دو ناموازی a و b و c در صفحه مفروض اند. پاره خطی به طول ۵ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی a و b قرار گرفته و موازی c باشد.



حل: ابتدا روی c پاره خطی ۵ سانتی متری، به نام AB در نظر می گیریم. تصویر a تحت انتقال بردار $\overrightarrow{AB}$ را d می نامیم که b را در نقطه E قطع می کند. اگر E را تحت بردار $\overrightarrow{BA}$ انتقال دهیم خط a را در نقطه F قطع می کند پاره خط EF جواب مساله است.

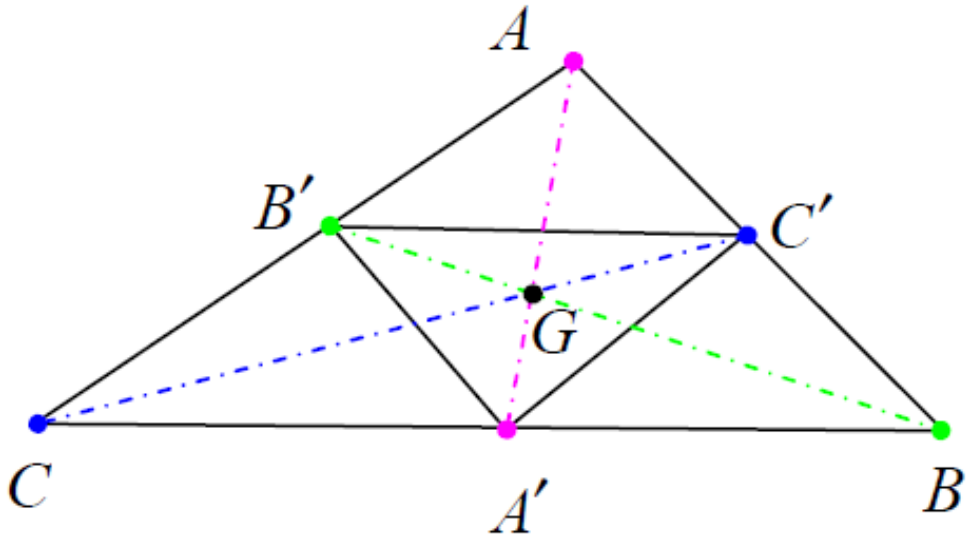


تمرین۴: فرض کنید G مرکز ثقل مثلث ABC باشد و همچنین مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K = -\frac{۱}{۲}$ باشد.

الف) جایگاه راس های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

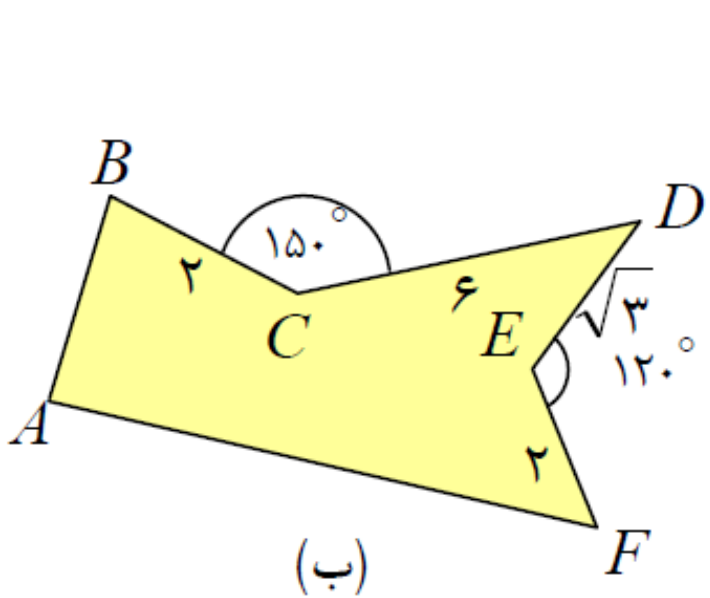
ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

حل: الف) نقطه A' وسط BC و همچنین نقطه B' وسط AC و نقطه C' وسط AB قرار دارند. با توجه به خاصیت مرکز ثقل می دانیم که $GA' = \frac{۱}{۲}GA$، پس نقطه A' مجانس نقطه A به مرکز نقطه G و نسبت تجانس $K = -\frac{۱}{۲}$ است. این موضوع را می توان به همین ترتیب برای نقاط B' و C' در نظر گرفت.

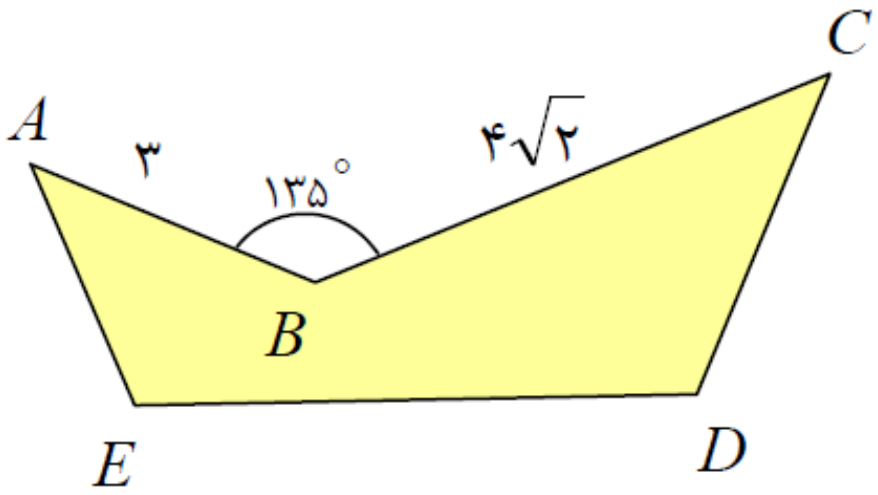


ب) با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث $A'B'C'$ $\frac{۱}{۴}$ برابر مساحت مثلث ABC است.

تمرین ۵: دو زمین به صورت شکل های زیر داریم، می خواهیم بدون آنکه محیط این زمینها تغییر کند، مساحتشان را افزایش دهیم در هرقسمت، میزان افزایش مساحت زمین را حساب کنید.



(ب)

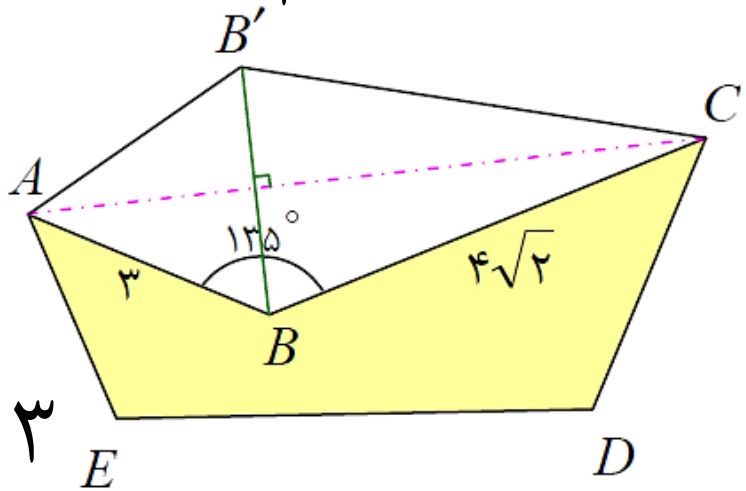


(الف)

حل:

میزان افزایش مساحت شکل الف

$$= ۲S_{ABC} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴\sqrt{۳} \sin(۱۳۵°) = ۱۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۲$$

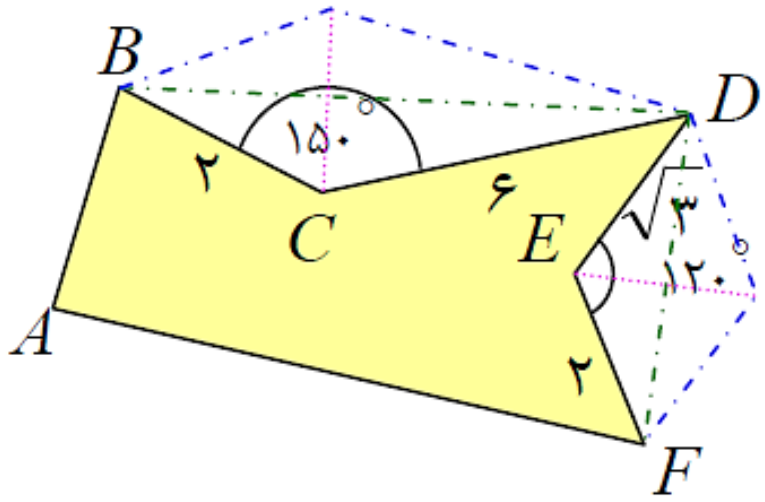


$$S_{BDC} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times \sin(۱۵۰°) \Rightarrow ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۳$$

$$S_{DEF} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times \sqrt{۳} \sin(۱۲۰°) \Rightarrow \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

میزان افزایش مساحت شکل ب

$$= ۲(S_{BDC} + S_{DFE}) = ۲(۳ + \frac{۳}{۲}) = ۹$$



فصل سوم

درس اول: قضیه سینوس ها

قضیه سینوس ها

یادآوری: در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ که در راس A قائمه است اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد آنگاه داریم:

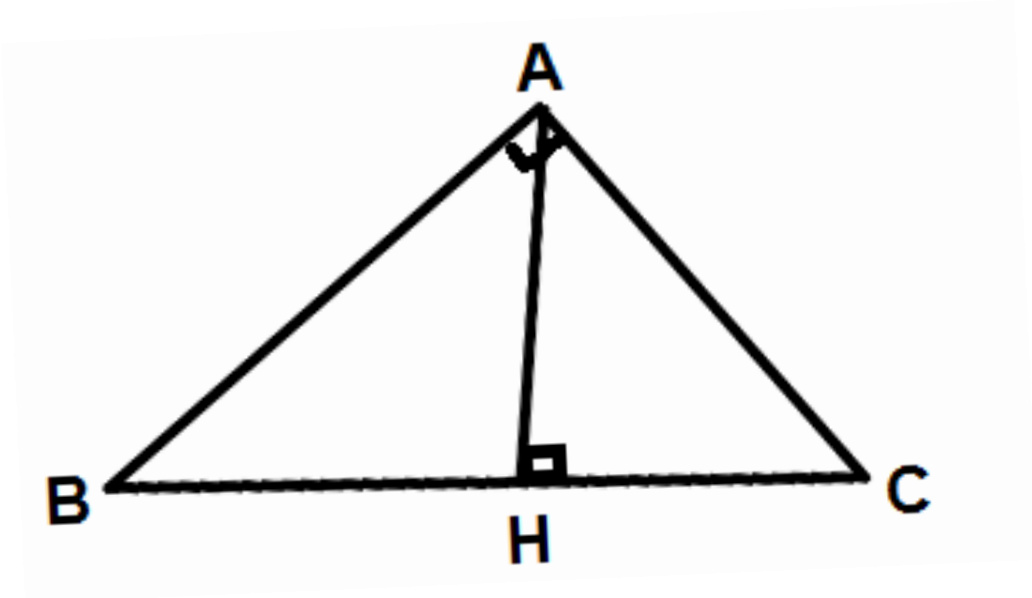
۱) $AB^{۲} = BH \times BC$

۲) $AC^{۲} = CH \times BC$

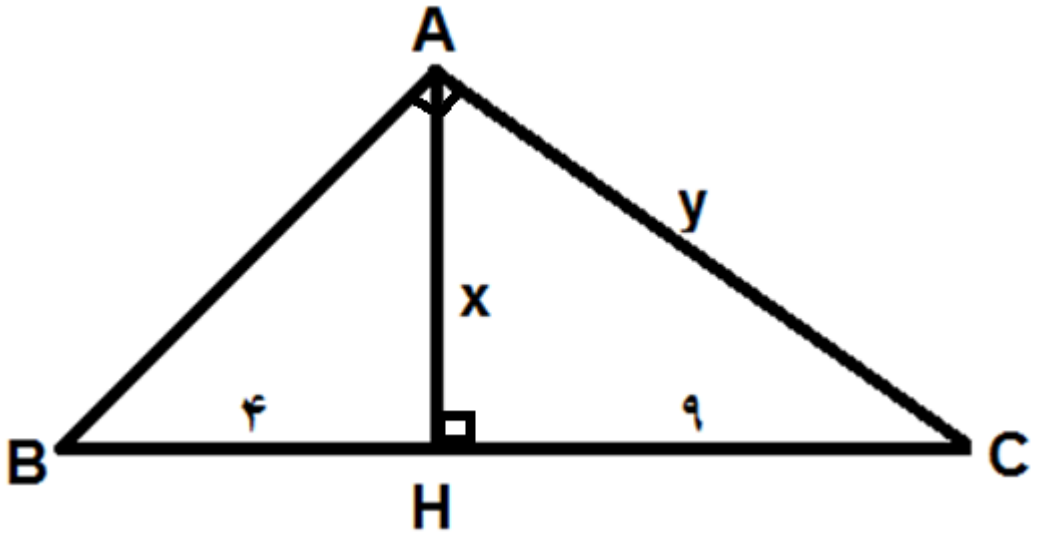
۳) $AH^{۲} = BH \times CH$

۴) $AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲}$ (رابطه فیثاغورث)

۵) $AB \times AC = BC \times AH$



مثال ۱: در مثلث قائم الزاویه زیر مقادیر x و y را بدست آورید.

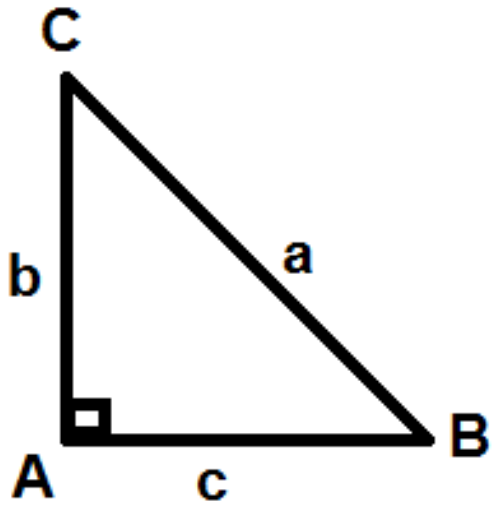


$$AH^{۲} = BH \times HC \Rightarrow x^{۲} = ۴ \times ۹ \Rightarrow x = ۶$$

$$y^{۲} = CH \times BC = ۹ \times ۱۳ \Rightarrow y = ۳\sqrt{۱۳}$$

قضیه ۱: در مثلث قائم الزاویه نسبت هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع برابر است با اندازه وتر.

اثبات: بفرض مثلث $\overset{\Delta}{A}BC$ در راس A قائمه باشد در این صورت با توجه به شکل :

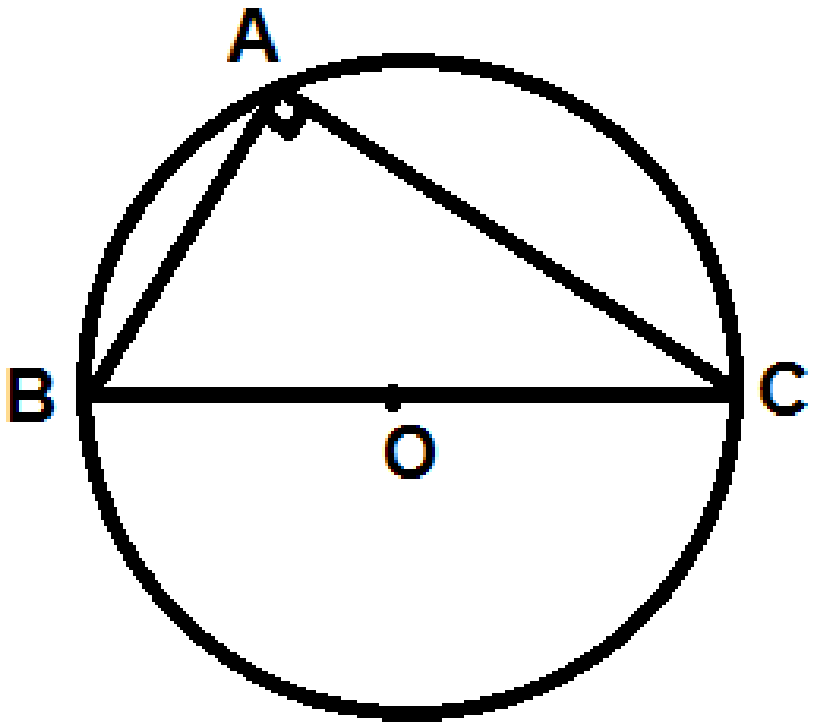


$$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a$$

$$\sin A = \sin ۹۰^\circ = ۱ \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a$$

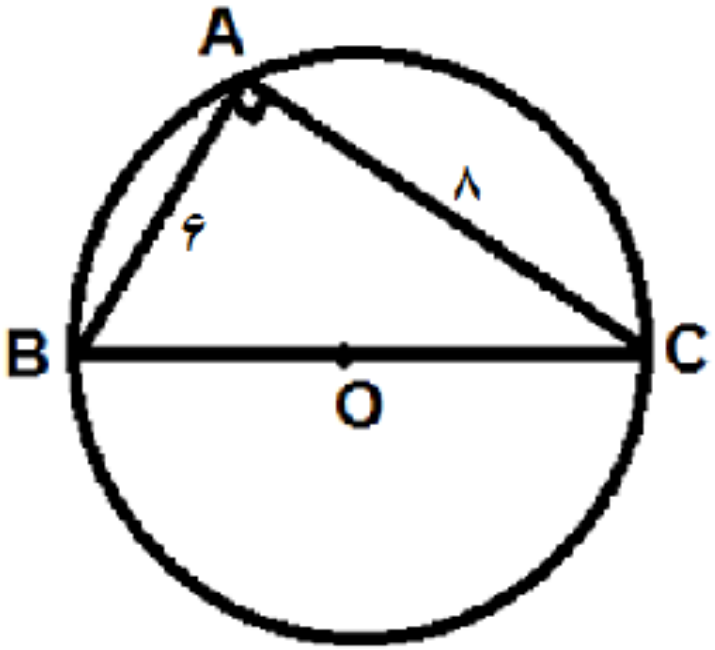
قضیه ۲: در مثلث قائم الزاویه نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث.



اثبات: می دانیم عمود منصف های اضلاع هر مثلث قائم الزاویه در وسط وتر همرس اند لذا مرکز دایره محیطی مثلث قائم الزاویه وسط وتر خواهد بود لذا قطر دایره محیطی برابر اندازه وتر خواهد بود
درنتیجه طبق قضیه ۱:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

مثال ۲: در مثلث قائم الزاویه ای اندازه اضلاع زاویه قائمه ۶ و ۸ سانتی اند شعاع دایره محیطی مثلث را بدست آورید.

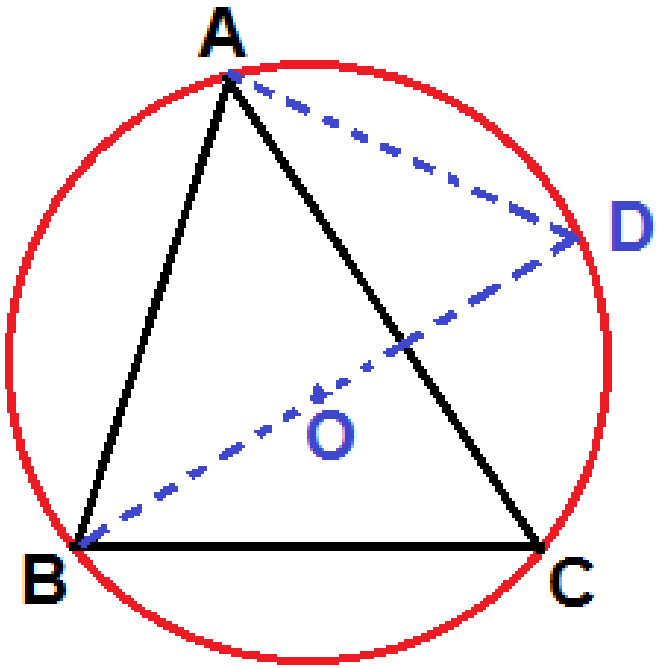


$$a^{۲} = ۶^{۲} + ۸^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow a = ۱۰$$

$$a = ۲R \Rightarrow ۲R = ۱۰ \Rightarrow R = ۵$$

قضیه ۳: (تعمیم قضیه ۲) در هر مثلث نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث.

اثبات: حالت اول) مثلث دلخواه $\overset{\triangle}{ABC}$ که در آن $A < ۹۰^\circ$ باشد در نظر گرفته و دایره محیطی آن را رسم می کنیم اگر O مرکز این دایره باشد با توجه به شکل:



$$D = C \,, B\hat{A}D = ۹۰^\circ$$

بنابراین داریم:

$$\sin C = \sin D = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{۲R} = \frac{c}{۲R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = ۲R$$

و به طور مشابه:

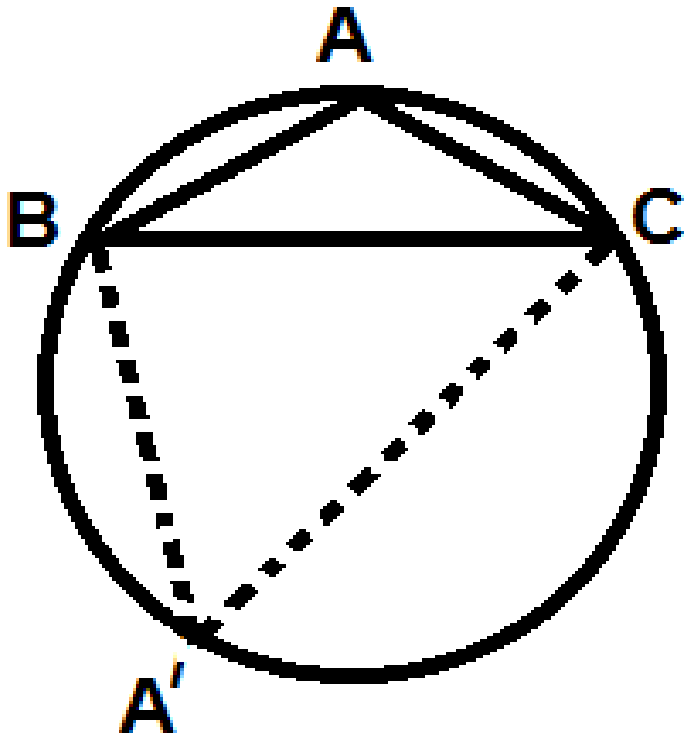
حالت دوم) مثلث $\overset{\Delta}{A B C}$ که در آن $A > ۹۰^\circ$ باشد را با دایره محیطی اش در نظر می گیریم با توجه به شکل:

$$A + A' = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \sin A = \sin A'$$

$$A = ۱۸۰ - A' \Rightarrow \sin A = \sin(۱۸۰ - A') = \sin A'$$

حال چون در مثلث $\overset{\Delta}{A' B C}$ زاویه A' حاده است بنابر این قسمت قبل:

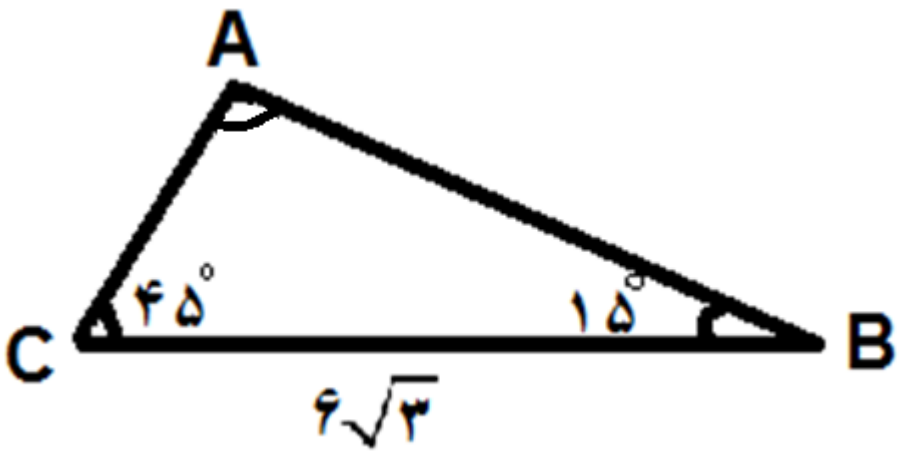
$$\frac{a}{\sin A'} = ۲R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = ۲R$$



لذا در هر مثلث دلخواه $\overset{\Delta}{A B C}$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

مثال ۳: در شکل زیر اندازه ضلع AB را بدست آورید



$$A = ۱۸۰ - (B + C) = ۱۲۰^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin C} = ۲R \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۲R \quad *$$

$$\frac{BC}{\sin A} = ۲R \Rightarrow \frac{۶\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۲R \quad **$$

$$* \text{ و } ** \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۶\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow AB = \frac{۶\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۶\sqrt{۲}$$

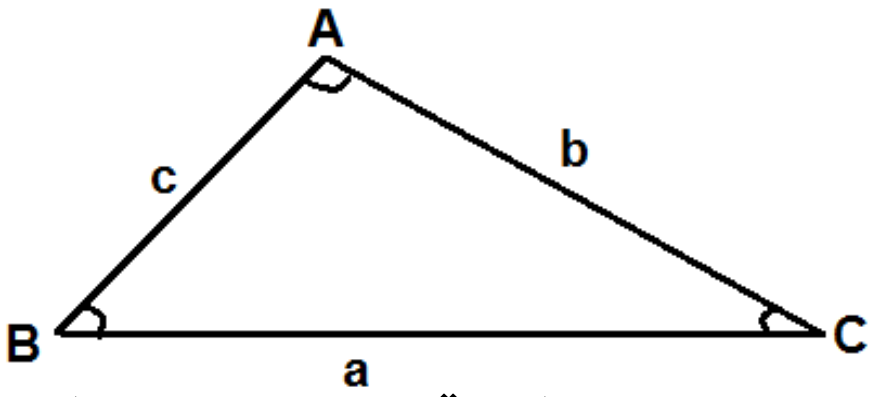
قضیه ۴: (قضیه سینوس ها) در مثلث $\triangle ABC$ با اضلاع $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ داریم :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

که در آن R شعاع دایره محیطی مثلث است.

اثبات: این موضوع در قضیه ۳ اثبات شده است.

مثال ۴: در مثلث $\overset{\triangle}{A}B C$ اگر $BC = ۱۰$، $A = ۱۲۰^\circ$ و $AC = \frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ باشد آنگاه اندازه شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زاویه های B و C را بدست آورید.



حل: با توجه به شکل و مفروضات مساله $a = ۱۰$ و $C = \frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ و در نتیجه بنابه قضیه سینوس ها

$$\frac{a}{\sin A} = ۲R \Rightarrow ۲R = \frac{۱۰}{\sin ۱۲۰^\circ} = \frac{۱۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲۰}{\sqrt{۳}} = R = \frac{۱۰}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\frac{b}{\sin B} = ۲R \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{۲۰}{\sqrt{۳}} \Rightarrow$$

$$\sin B = \frac{b\sqrt{۳}}{۲۰} = \frac{\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳} \times \sqrt{۳}}{۲۰} = \frac{۱۰\sqrt{۲}}{۲۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow B = ۴۵^\circ, B = ۱۳۵^\circ$$

حال چون

$$A = ۱۲۰^\circ$$

$$B = ۴۵^\circ$$

در نتیجه:

$$C = ۱۵^\circ$$

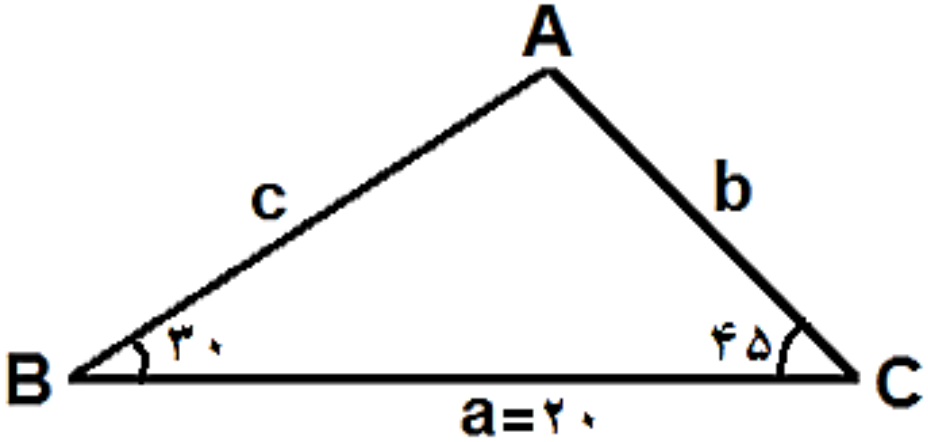
تمرینات صفحه ۶۵

۱) ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{A B C}$ که در راس A قائمه باشد و با فرض اینکه AH ارتفاع وارد بر وتر به طوریکه $AH = h_a$ آنگاه:

$$\frac{۱}{h_a^{۲}} = \frac{۱}{b^{۲}} + \frac{۱}{c^{۲}}$$

طرف دوم تساوی $= \frac{c^{۲}+b^{۲}}{b^{۲}c^{۲}} = \frac{a^{۲}}{b^{۲}c^{۲}} = \frac{a^{۲}}{(ah_a)^{۲}} = \frac{۱}{h_a^{۲}}$

۲) دو ایستگاه رادار، که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع اند. اگر هواپیما را با زاویه های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده باشند، آنگاه فاصله هواپیما را از دو ایستگاه بدست آورید.



حل: بفرض A نقطه فرضی باشد که هواپیما در آن واقع است باتوجه به شکل:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{۲۰}{\sin ۱۰۵^\circ}=\frac{b}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{c}{\sin ۴۵^\circ}\Rightarrow\frac{۲۰}{۰/۹۶}=\frac{b}{۰/۵}=\frac{c}{۰/۷}$$

$$\Rightarrow b=\frac{۱۰}{۰/۹۶}=۱۰/۴۲, c=\frac{۱۴}{۰/۹۶}=۱۴/۶$$

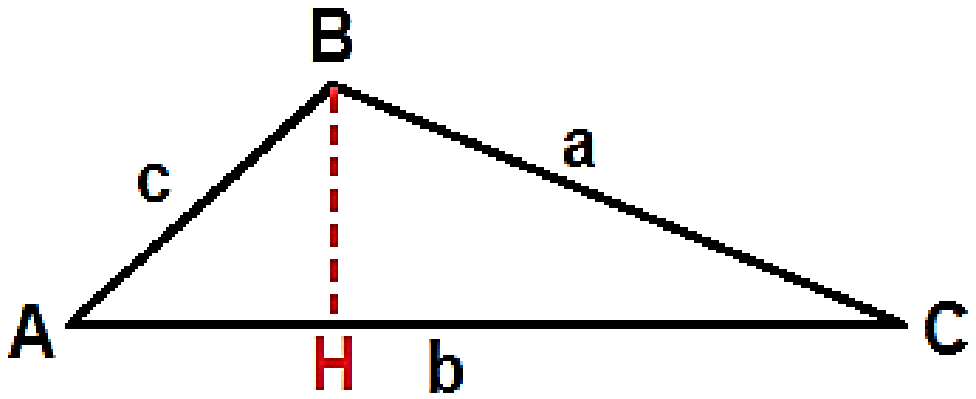
فصل سوم

درس دوم: قضیه کسینوس ها

قضیه کسینوس ها

هدف از این درس این است که در هر مثلث با داشتن اندازه دو ضلع مثلث و زاویه بین آن دو ضلع اندازه ضلع سوم را نیز بتوانیم محاسبه کنیم.

قضیه ۱: (قضیه کسینوس ها) در هر مثلث مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها.



اثبات: باید در مثلث $\overset{\triangle}{A\,B\,C}$ ثابت کنیم:

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A$$

بدین منظور در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ اگر فرض کنیم $A < ۹۰^\circ$ و ارتفاع AH را رسم کنیم داریم:

$$\cos A = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = c.\cos A, CH = b - c.\cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = c.\sin A$$

بنا به رابطه فیثاغورث در مثلث $\overset{\Delta}{BCH}$ میتوان نوشت:

$$BC^۲ = BH^۲ + HC^۲ \Rightarrow a^۲ = c^۲\sin^۲ A + (b - c\cos A)^۲$$

$$= c^۲\sin^۲ A + b^۲ + c^۲\cos^۲ A - ۲bc\cos A$$

$$= b^۲ + c^۲(\sin^۲ A + \cos^۲ A) - ۲bc\cos A$$

$$= b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$$

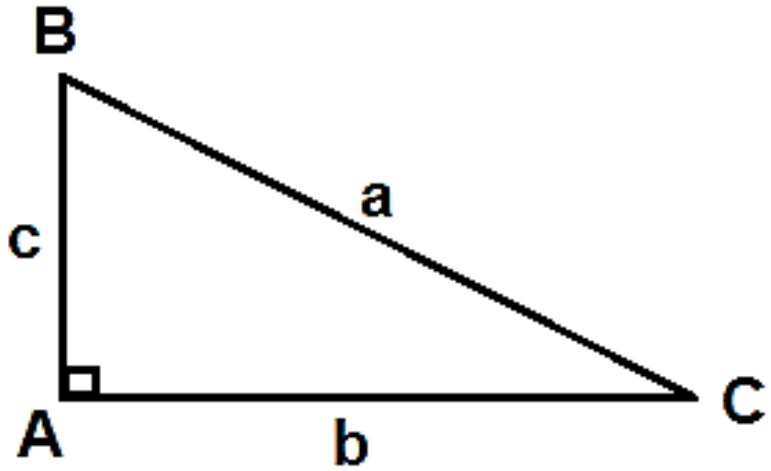
و در حالتی که $A > ۹۰^\circ$ باشد اثبات به طور مشابه است.

همچنین، به طور مشابه میتوان اثبات کرد که:

$$\begin{cases} b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos B \\ c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C \end{cases}$$

مثال ۱: قضیه فیثاغورث را از قضیه کسینوس ها نتیجه بگیرید.

بفرض در شکل مقابل $A = ۹۰^\circ$ باشد نشان می دهیم:



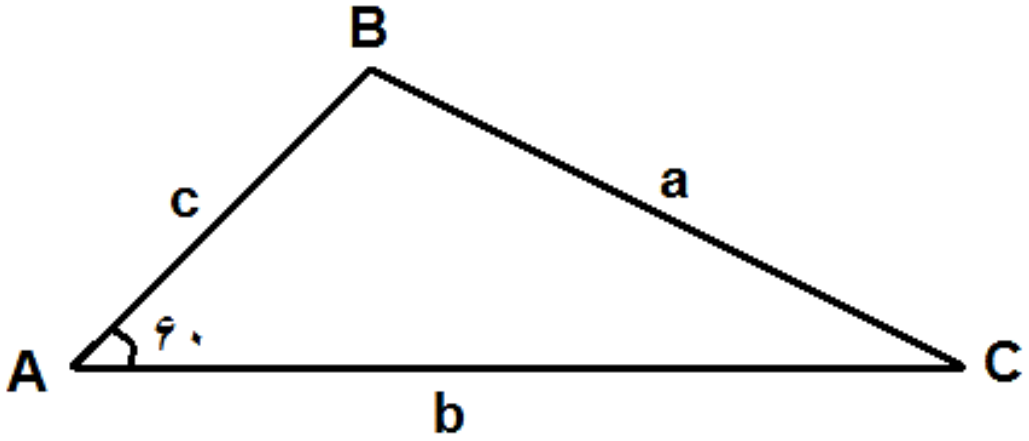
$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$

بدین منظور مطابق قضیه کسینوس ها داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos ۹۰^\circ = b^۲ + c^۲$$

مثال ۲: در مثلث $\hat{A}BC$ اگر $AB = ۲\sqrt{۲}$ ، $AC = \sqrt{۶} + \sqrt{۲}$ و $A = ۶۰^\circ$ باشد آنگاه:

الف) طول ضلع BC را بدست آورید.



حل: بنابر قضیه کسینوس ها:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$$

$$= (\sqrt{۶} + \sqrt{۲})^۲ + (۲\sqrt{۲})^۲ - ۲(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})(۲\sqrt{۲})(\frac{۱}{۲})$$

$$= ۶ + ۲ + ۲\sqrt{۱۲} + ۸ - ۲\sqrt{۱۲} - ۴$$

$$= ۱۲ \Rightarrow a = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۳}$$

ب) اندازه زاویه های C و B را بدست آورید.

حل: طبق قضیه سینوس ها:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}\Rightarrow\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{\sin B}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

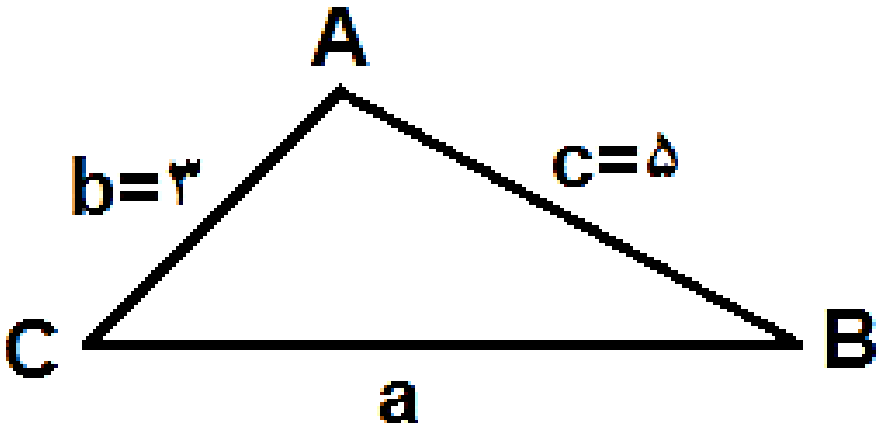
$$\Rightarrow \sin C=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow C=۴۵^\circ \quad , \quad C=۱۳۵^\circ$$

غیر قابل قبول

$$B=۱۸۰-(۶۰+۴۵)=۷۵^\circ$$

مثال ۳: در مثلث $\triangle ABC$ اگر $A = ۱۲۰^\circ$، $AB = ۵$ و $AC = ۳$ باشد آنگاه محیط و مساحت مثلث را بدست آورید.



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$$

$$= (۳)^۲ + (۵)^۲ - ۲(۳)(۵)\cos ۱۲۰^\circ$$

$$= ۹ + ۲۵ - ۲(۱۵)(-\frac{۱}{۲}) = ۴۹ \Rightarrow a = ۷$$

$$۲P = a + b + c = ۷ + ۵ + ۳ = ۱۵$$

$$S = \frac{۱}{۲}bc\ \sin A = \frac{۱}{۲}(۳)(۵)\sin ۱۲۰^\circ$$

$$= \frac{۱۵}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴}$$

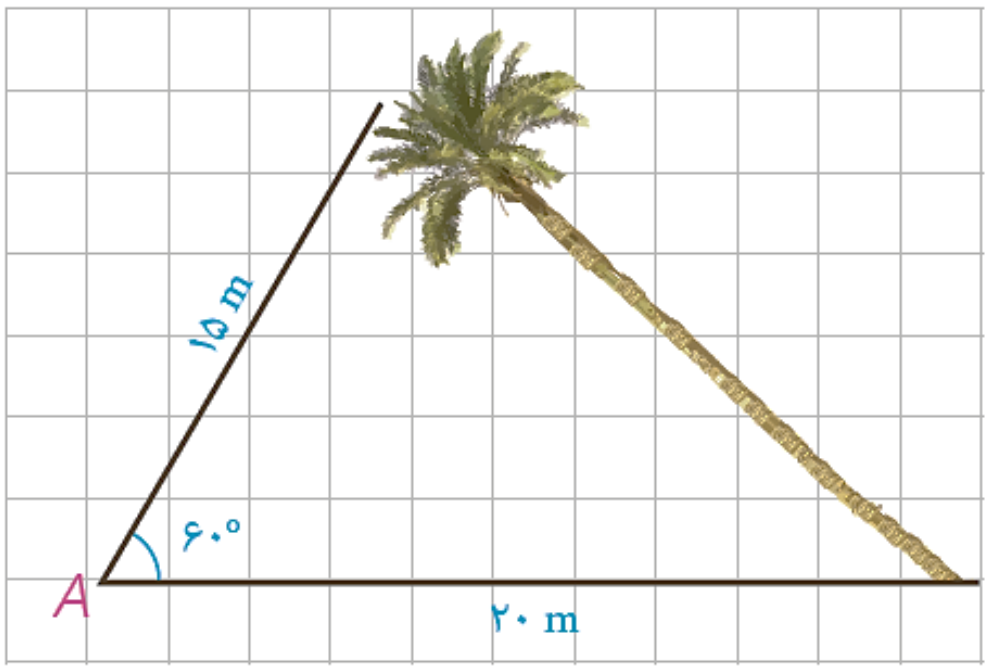
تمرینات صفحه ۶۸ و ۶۹

۱ــ یک درخت کج از نقطهٔ A روی زمین، که در فاصلهٔ ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویهٔ 60° دیده می‌شود. اگر فاصلهٔ A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است :

الف) طول درخت

ب) زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

پ) فاصلهٔ نوک درخت از زمین

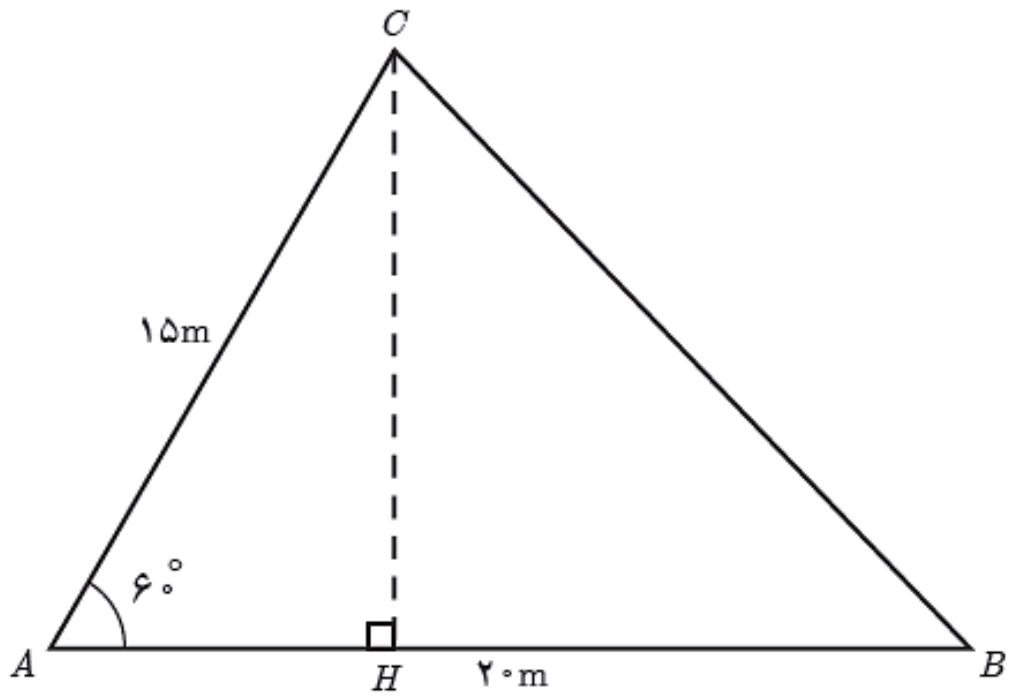


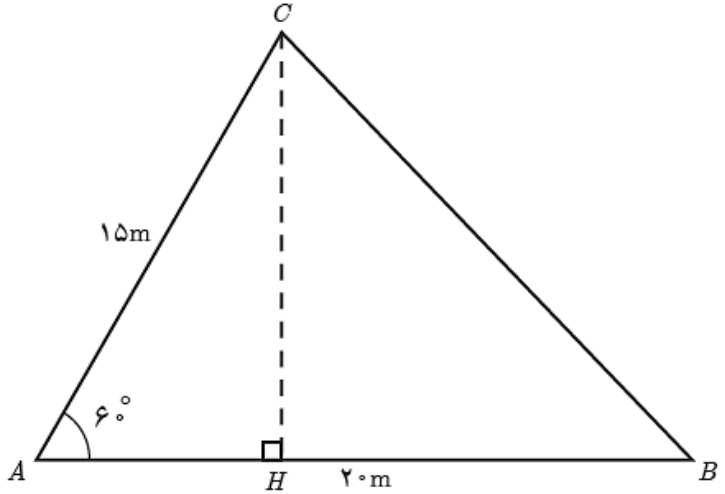
الف)

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} - ۲AB.AC.\cos A$$

$$BC^{۲} = ۲۰^{۲} + ۱۵^{۲} - ۲\times ۲۰ \times ۱۵ \times \cos ۶۰ \Rightarrow$$

$$BC^{۲} = ۴۰۰ + ۲۲۵ - ۳۰۰ = ۳۲۵ \ , \ BC = \sqrt{۳۲۵} = ۵\sqrt{۱۳}$$ طول درخت (m)





ب) قسمت ب سؤال را می‌توان به دو روش حل کرد :

روش اوّل) استفاده از قضیه سینوس‌ها

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{۱۵}{\sin B}=\frac{۵\sqrt{۱۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow\sin B=\frac{۱۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۵\sqrt{۱۳}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۳}}\simeq ۰/۷۲$$

$$\Rightarrow \sin B\simeq ۰/۷۲\xrightarrow{\text{به کمک ماشین‌حساب}}\hat{B}\simeq ۴۶^\circ$$

روش دوم) استفاده از قضیه کسینوس‌ها

$$۱۵^۲=۲۰^۲+(۵\sqrt{۱۳})^۲-۲\times۲۰\times(۵\sqrt{۱۳}).\cos B\Rightarrow ۲۲۵=۴۰۰+۳۲۵-۲۰۰\sqrt{۱۳}\cos B\Rightarrow$$

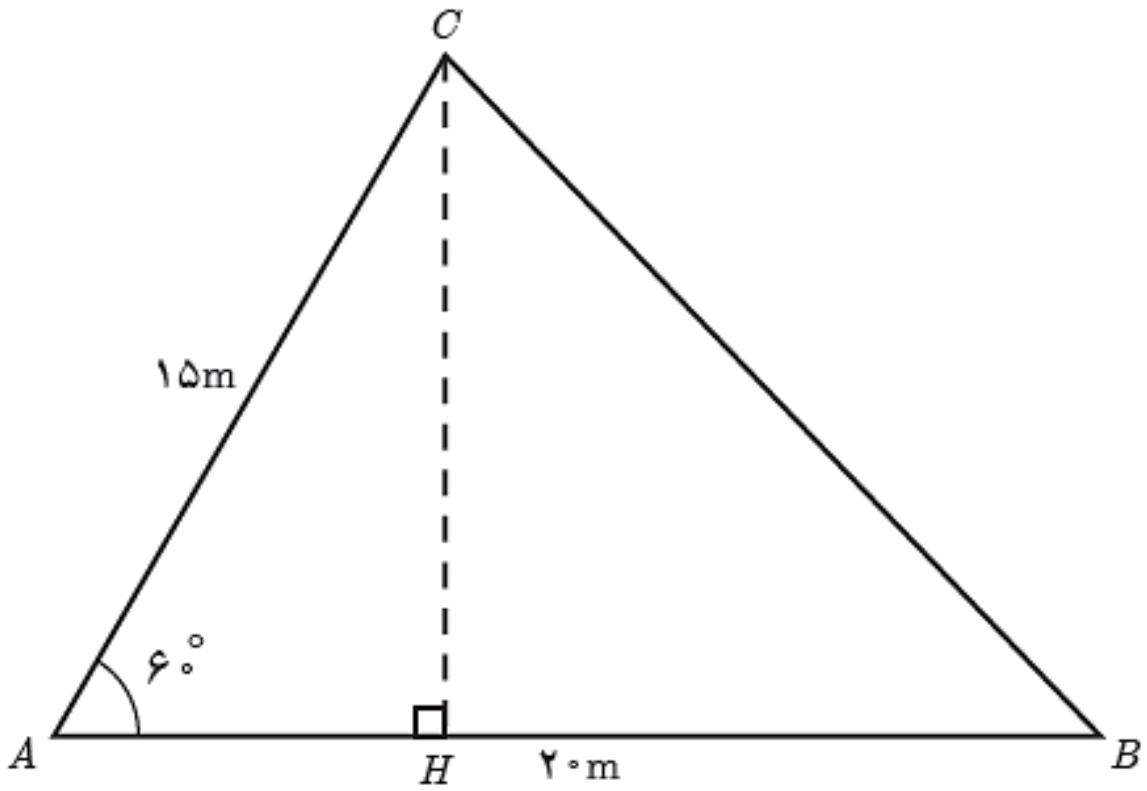
$$۲۰۰\sqrt{۱۳}\cos B=۵۰۰\Rightarrow\cos B=\frac{۵}{۲\sqrt{۱۳}}\times\frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۲۶}\simeq ۰/۶۹$$

$$\cos B\simeq ۰/۶۹\xrightarrow{\text{به کمک ماشین حساب}}\hat{B}\simeq ۴۶^\circ$$

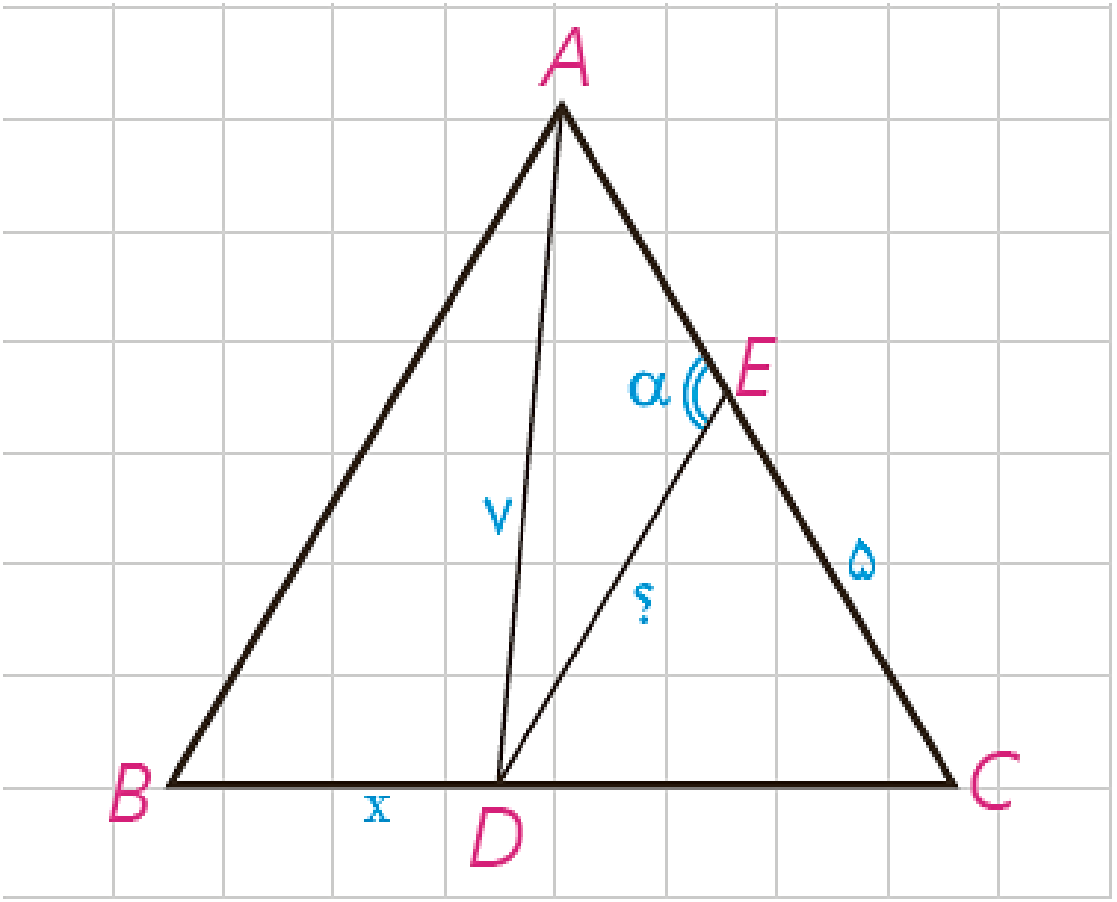
پ)

$$\sin A = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۱۵ = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$$

فاصله نوک درخت از زمین



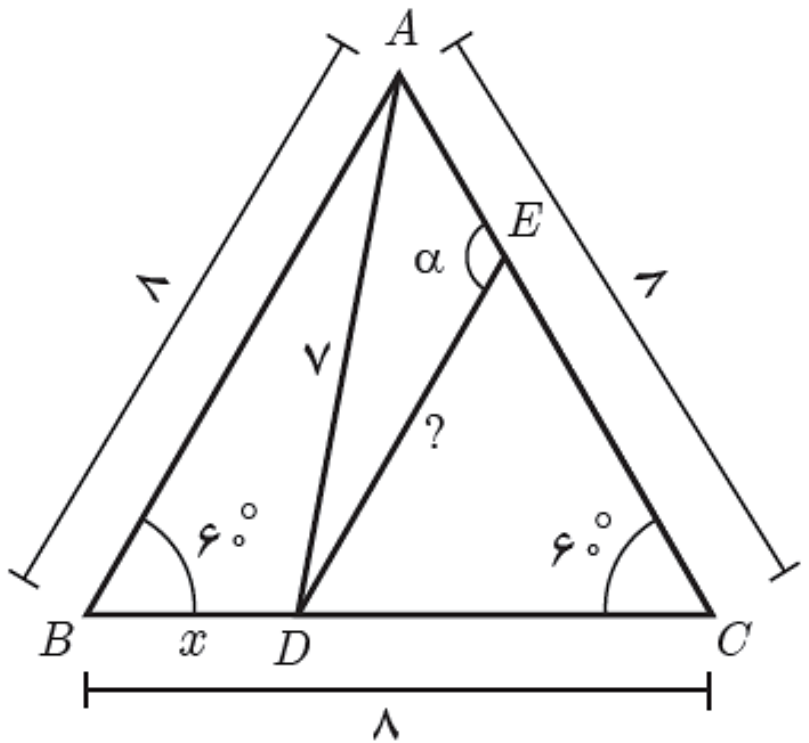
۲ــ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطهٔ D ، که به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟(CD >BD) نقطهٔ E ، که به فاصلهٔ ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازهٔ زاویهٔ AED چند درجه است؟



$\overset{\Delta}{ABD}$, $۷^۲ = ۸^۲ + x^۲ - ۲ \times ۸ \times x \times \cos ۶۰^\circ$

$۴۹ = ۶۴ + x^۲ - ۸x \Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۵) = ۰$

$$\begin{cases} x = ۳ \\ x = ۵ \end{cases} \xrightarrow{CD>BD} x = ۳ \text{ ق ق} \Rightarrow DC = ۸-۳ = ۵$$



برای به‌دست آوردن فاصله نقطه E از D، دو روش مطرح می‌شود :

روش اول)

$$EC = DC = ۵ \Rightarrow E\overset{\Delta}{D}C \text{ متساوی‌الساقین} \ , \ \hat{C} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{E} = \hat{D} = \frac{۱۸۰ - ۶۰}{۲} = ۶۰^\circ \Rightarrow$$

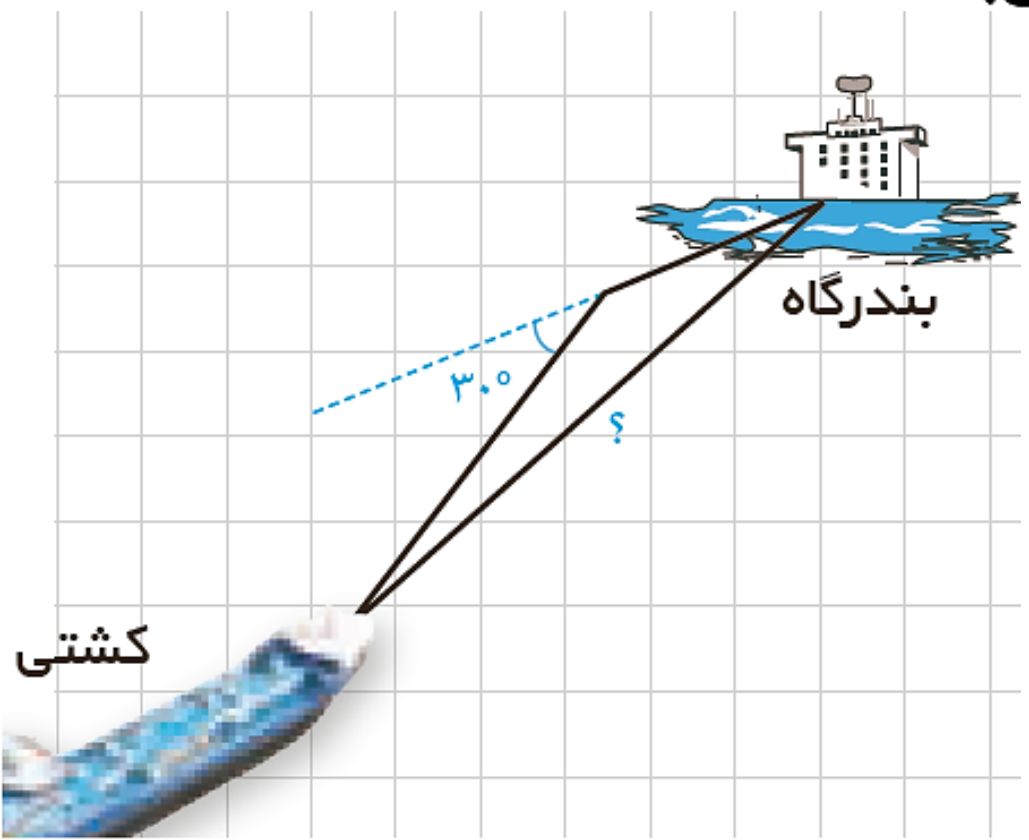
$$E\overset{\Delta}{D}C \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow ED = ۵$$

روش دوم)

$$ED^۲ = ۵^۲ + ۵^۲ - ۲ \times ۵ \times ۵ \times \cos ۶۰^\circ = ۲۵ + ۲۵ - ۲۵ = ۲۵ \Rightarrow ED = ۵$$

$$A\hat{E}D = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰^\circ$$

۳ــ یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 30° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصلهٔ بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

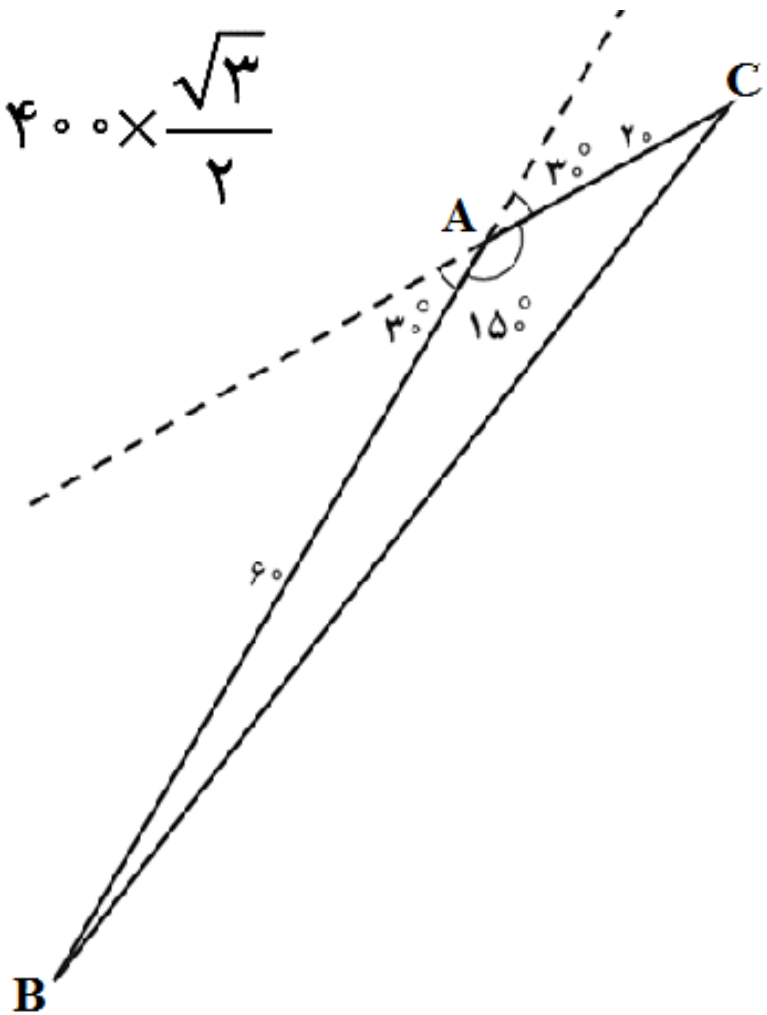


$$d = V.t \Rightarrow \begin{cases} AB = ۶۰ \times ۱ = ۶۰\ km \\ AC = ۴۰ \times ۰/۵ = ۲۰ km \end{cases}$$

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC\,.\,AB\,.\,\cos ۱۵۰^\circ$$

$$BC^۲ = ۶۰^۲ + ۲۰^۲ - ۲ \times ۶۰ \times ۲۰ \times \cos(۱۸۰ - ۳۰) = ۳۶۰۰ + ۴۰۰ + ۲۴۰۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

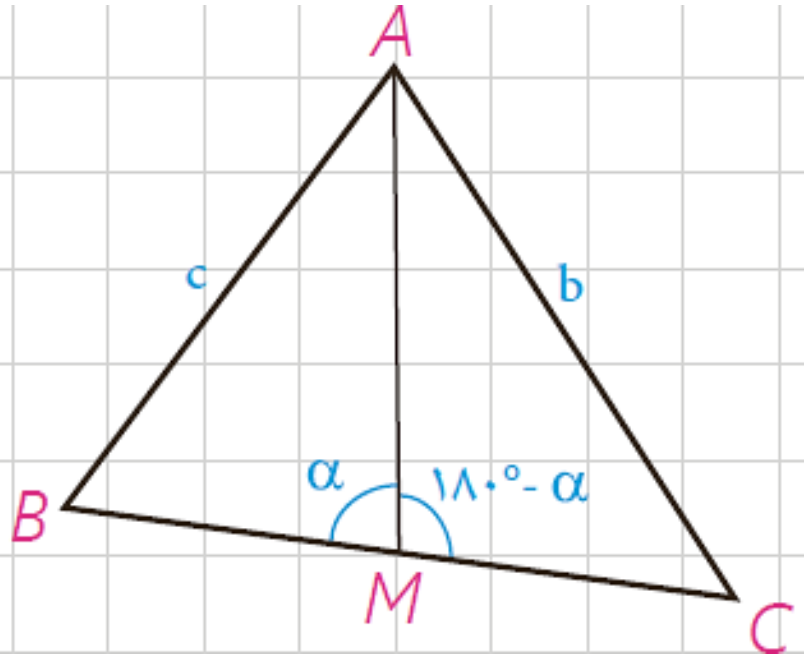
$$= ۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳} \Rightarrow BC = \sqrt{۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳}} \simeq ۷۷/۹۶$$

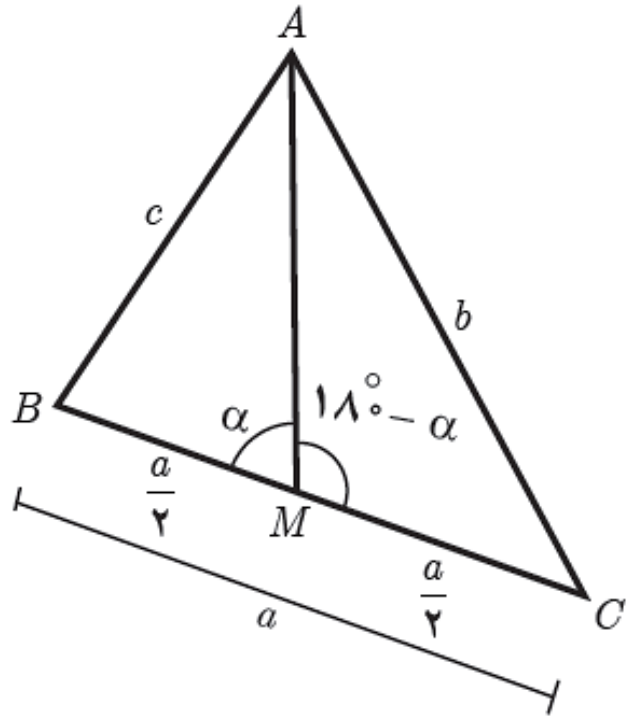


۴ــ در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{۲}$). با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$ (قضیهٔ میانه‌ها)

در حالت خاص AB=۴ و AC=۶ و BC=۸، طول میانه AM را به‌دست آورید.





$$\Delta AMC,\ b^{۲} = AM^{۲} + (\frac{a}{۲})^{۲} - ۲\times AM \times \frac{a}{۲} \times \overbrace{\cos(۱۸۰-\alpha)}^{-\cos\alpha} \quad ①$$

$$\Delta AMB,\ c^{۲} = AM^{۲} + (\frac{a}{۲})^{۲} - ۲\times AM \times \frac{a}{۲} \times \cos\alpha \quad ②$$

طرفین تساوی‌های ۱ و ۲ را با یکدیگر جمع می‌کنیم. اکنون داریم :

$$b^{۲} + c^{۲} = ۲AM^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲}$$ (قضیه میانه‌ها)

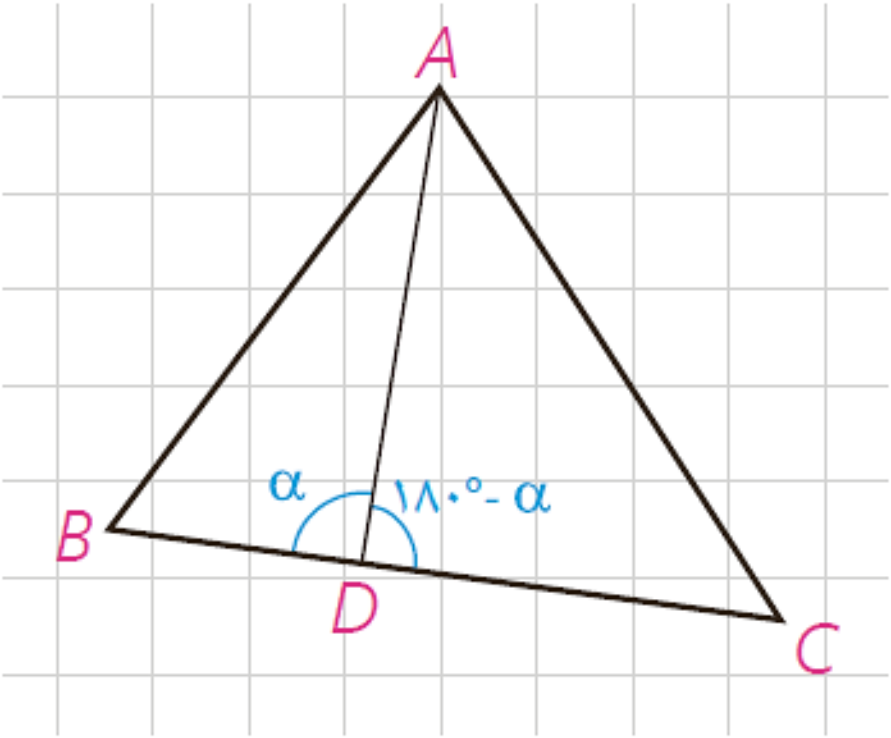
حالت خاص؛ $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۸$

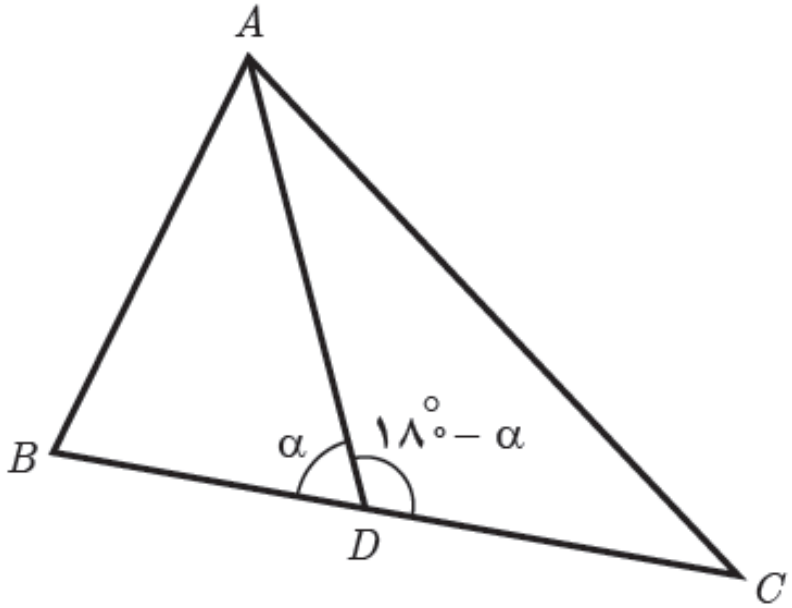
$$۶^{۲} + ۴^{۲} = ۲AM^{۲} + \frac{۸^{۲}}{۲} \Rightarrow ۳۶ + ۱۶ = ۲AM^{۲} + ۳۲ \Rightarrow ۲AM^{۲} = ۲۰ \Rightarrow AM^{۲} = ۱۰ \Rightarrow AM = \sqrt{۱۰}$$

۵ــ در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$AB^2 . DC + AC^2 . DB = AD^2 . BC + DB . DC . BC$ (قضیهٔ استوارت)

به کمک قضیهٔ استوارت، درستی قضیهٔ میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.





می‌دانیم :

$$\Delta ADB\,,\ AB^{۲} = AD^{۲} + BD^{۲} - ۲AD.BD.\cos\alpha \quad ①$$

$$\Delta ADC\,,\ AC^{۲} = AD^{۲} + DC^{۲} - ۲AD.DC.\underbrace{\cos(۱۸۰ - \alpha)}_{-\cos\alpha} \quad ②$$

طرف راست : $AB^{۲}.DC + AC^{۲}.DB \overset{\text{جایگذاری}}{\underset{۱\text{ و }۲}{=}}$

$$(AD^{۲}+BD^{۲}-۲AD.BD.\cos\alpha).DC + (AD^{۲} + DC^{۲} + ۲AD.DC.\cos\alpha).DB =$$

$$AD^{۲}.DC + BD^{۲}.DC - ۲\,\cancel{AD.BD}\,.\cancel{DC.}\cos\alpha + AD^{۲}.DB + DC^{۲}.DB + ۲\,\cancel{AD.DC}\,.\cancel{DB.}\cos\alpha =$$

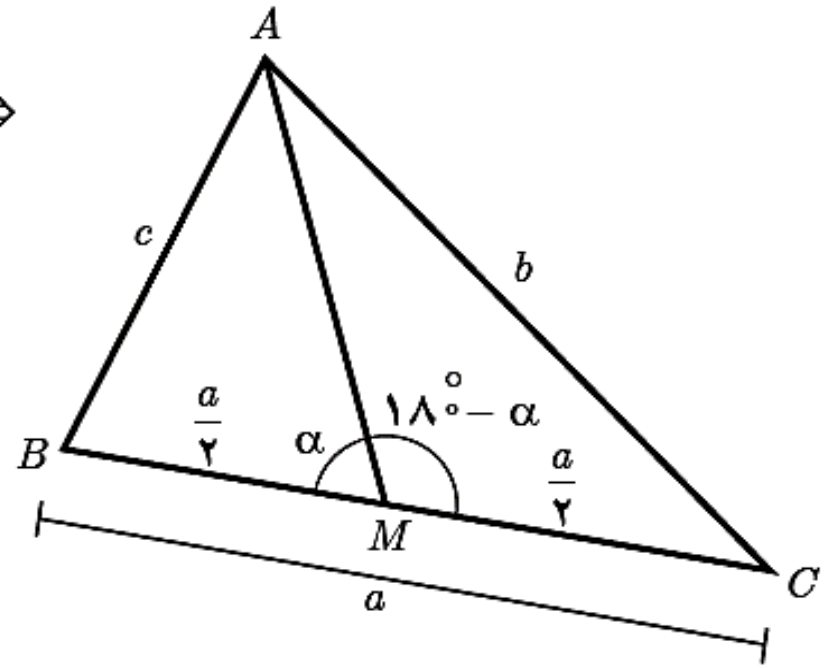
$$= AD^{۲}(DC + DB) + BD.\,DC(BD + \mathrm{DC}) = AD^{۲}.\,BC + BD.\,DC.\,BC$$

به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه می‌گیریم،چون AM میانه است پس

$$BM = MC = \frac{a}{۲}$$

قضیه استوارت : $AB^۲ \,.\, MC + AC^۲ .\, MB = AM^۲ .\, BC + BM .\, MC .\, BC \xrightarrow{BM=MC=\frac{a}{۲}}$

$$c^۲ .\frac{a}{۲} + b^۲ .\frac{a}{۲} = AM^۲ .a + \frac{a}{۲}.\frac{a}{۲}.a \Rightarrow$$



قضیه میانه‌ها :

$$\frac{\not ۲}{\not ۲}(c^۲ + b^۲) = \frac{\not ۲}{\not ۲}(۲ .AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}) \Rightarrow b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

۶ـ **تمرین ۲** را بار دیگر، این‌بار به کمک قضیهٔ استوارت حل کنید.

قضیه استوارت در مثلث ABC : $۸^۲ \times DC + ۸^۲ \times BD = ۷^۲ \times ۸ + BD \,.\, DC \times ۸ \Rightarrow$

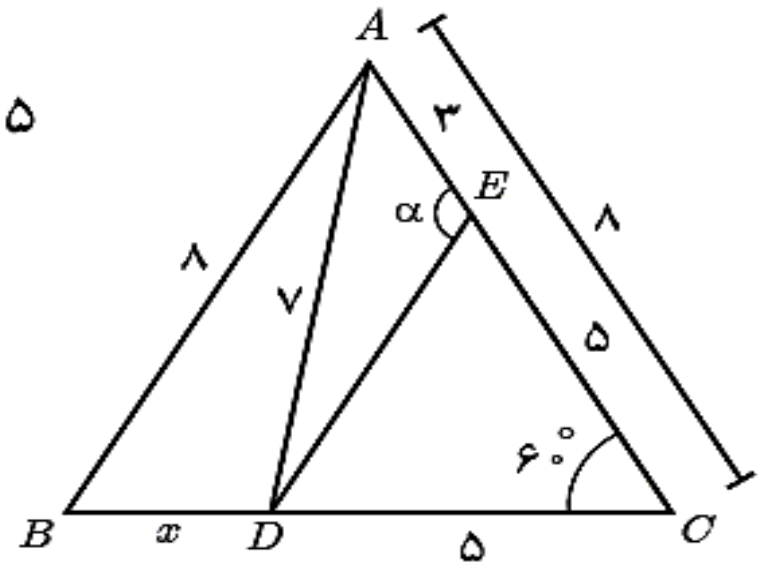
$$۸^۲(\underbrace{DC+BD}_{۸}) = ۷^۲ \times ۸ + BD\,.(۸-BD) \times ۸ \xrightarrow{\div ۸}$$

$$۶۴ = ۴۹ + ۸BD - BD^۲ \Rightarrow BD^۲ - ۸BD + ۱۵ = ۰ \Rightarrow$$

$$(BD-۳)(BD-۵)=۰ \Rightarrow \begin{matrix} BD=۳ \\ BD=۵ \end{matrix} \xrightarrow{DC>BD} \begin{matrix} BD=۳ \\ DC=۸-۳=۵ \end{matrix}$$

قضیه استوارت در مثلث ADC : $۵^۲ \times ۳ + ۷^۲ \times ۵ = DE^۲ \times ۸ + ۳ \times ۵ \times ۸ \Rightarrow ۷۵ + ۲۴۵ = ۸DE^۲ + ۱۲۰ \Rightarrow$

$$۸DE^۲ = ۲۰۰ \Rightarrow DE^۲ = \frac{۲۰۰}{۸} = ۲۵ \Rightarrow DE = \sqrt{۲۵} = ۵$$

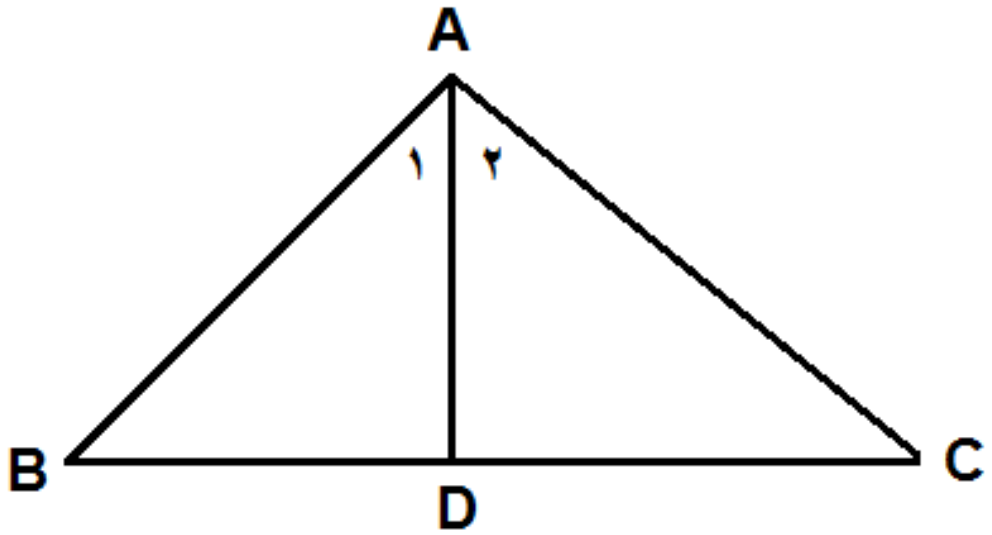


فصل سوم

درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

قضیه نیمساز های زاویه های داخلی

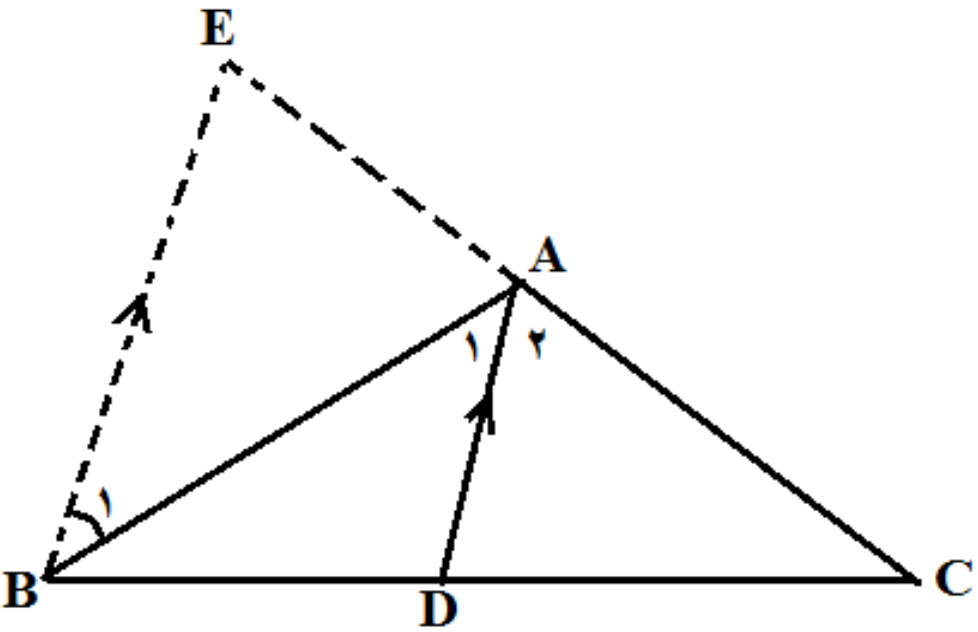
قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع مقابل به آن زاویه را نسبت اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند.



فرض: $A_۱ = A_۲$

حکم: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

اثبات: مطابق شکل از B خطی موازی نیمساز زاویه A (یعنی AD) رسم می کنیم تا امتداد ضلع AC را در نقطه ای مانند E قطع کند.



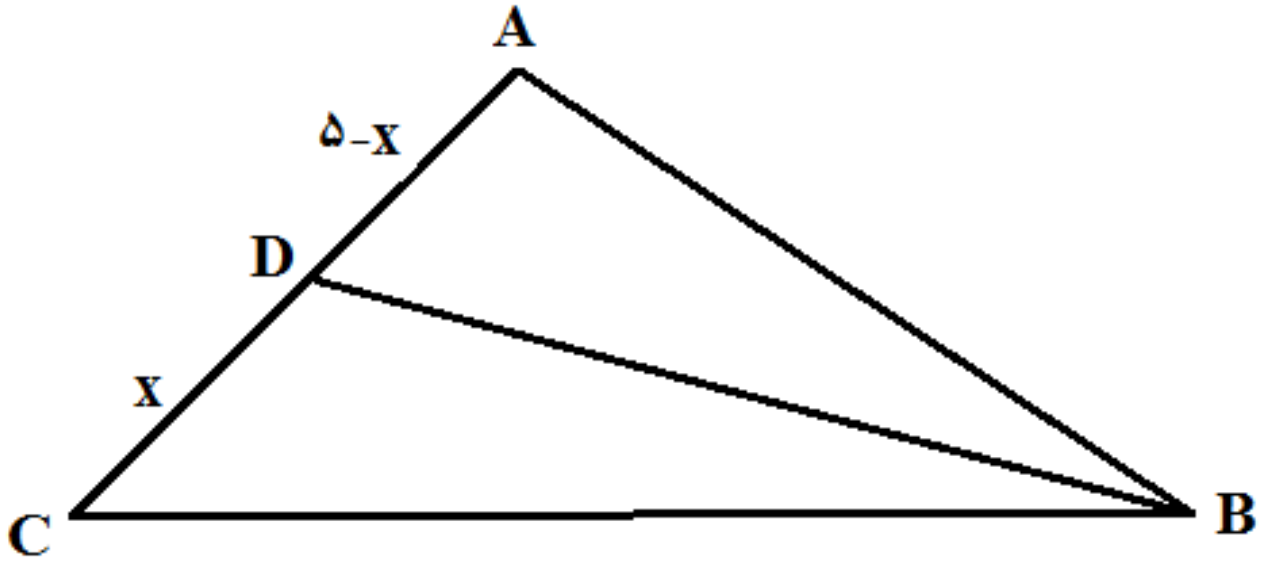
در مثلث $\overset{\Delta}{EBC}$ بنا به قضیه تالس داریم:

$$AD \parallel BE \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AE}{AC} \quad *$$

از طرفی $A_۱ = B_۱$ و $A_۲ = E$ لذا $E = B_۱$ در نتیجه $AE = AB$ **

$$*و** \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AD}$$

مثال ۱: در مثلث $\triangle ABC$ با فرض $AB = ۷$ و $AC = ۵$ و $BC = ۸$ طول دو قطعه ای را بدست آورید که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می کند.



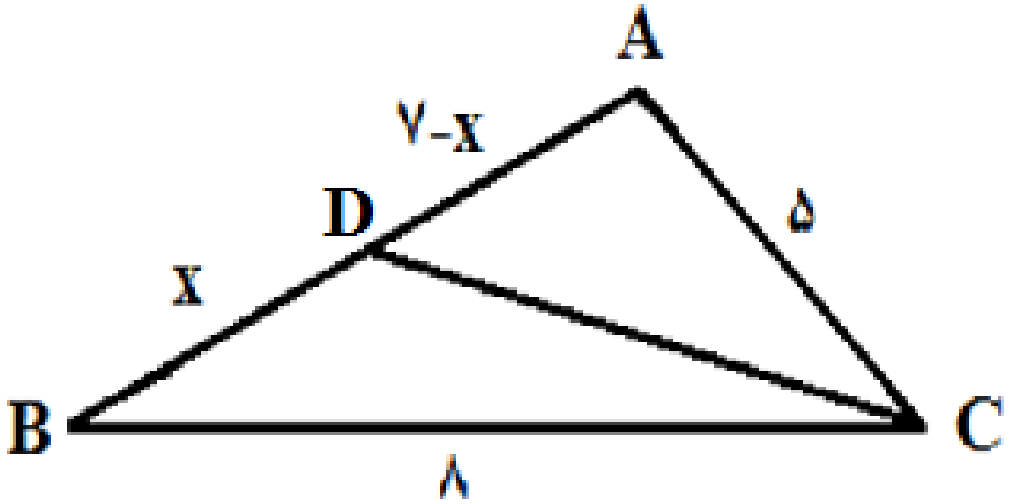
حل: با توجه به قضیه قبل:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{۵ - x}{x} = \frac{۷}{۸}$$

$$۷x = ۴۰ - ۸x \Rightarrow x = \frac{۴۰}{۱۵} = \frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{۸}{۳} \; , \; AD = \frac{۷}{۳}$$

مثال ۲: در مثال قبلی طول دو قطعه ای را بدست آورید که نیمساز C روی ضلع AB ایجاد می کند.



حل: بنا به نیمساز ها چون CD نیمساز است لذا:

$$\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow\frac{x}{۷-x}=\frac{۸}{۵}$$

$$۵x=۵۶-۸x\Rightarrow ۱۳x=۵۶\Rightarrow x=\frac{۵۶}{۱۳}$$

در نتیجه $AD=\frac{۳۵}{۱۳},BD=\frac{۵۶}{۱۳}$

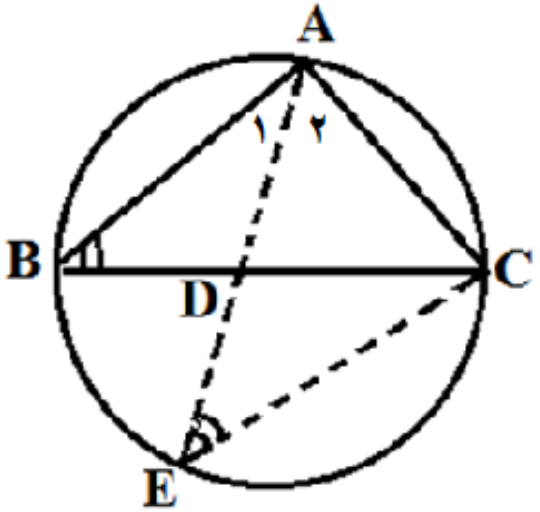
محاسبه طول نیمساز های زاویه های داخلی مثلث

با استفاده از قضیه زیر می توان طول نیمساز هر زاویه داخلی را در هر مثلث محاسبه نمود.

قضیه ۲: در هر مثلث مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند.

فرض: $A_1 = A_2$ **حکم:** $AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$

اثبات: دایره محیطی مثلث ABC **را رسم می کنیم که با توجه به شکل امتداد نیمساز زاویه** A **دایره را در نقطه** E **قطع می کند. در نتیجه:**



در دو مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{AEC}$ داریم:

$$\begin{cases} B = E \\ A_1 = A_2 \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{AEC} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BD}$$

در نتیجه:

$$AB \times AC = AD \times AE \Rightarrow AB \times AC = AD \times (AD + DE)$$

$$\Rightarrow AB \times AC = AD^2 + AD \times DE$$

$$\Rightarrow AD^2 = AB \times AC - AD \times DE$$

از طرفی بنا به رابطه های طولی در دایره داریم:

$$AD \times DE = BD \times DC$$

لذا خواهیم داشت:

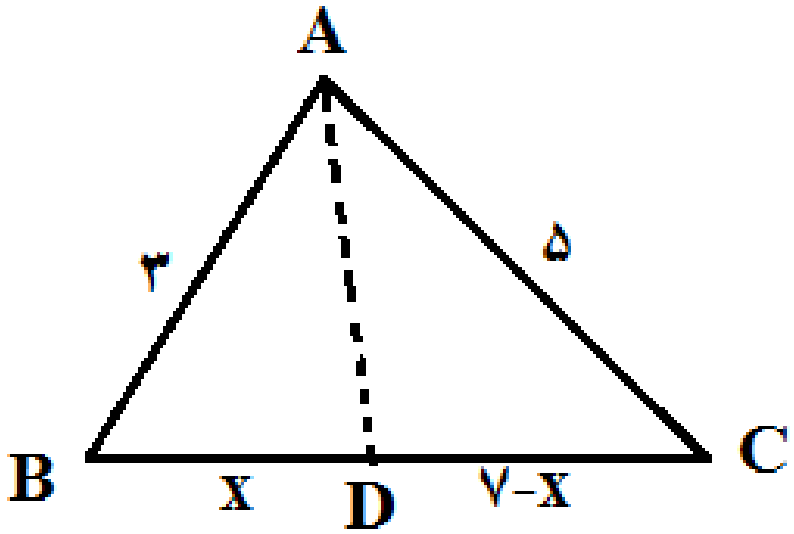
$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

مثال ۳: در مثلثی به طول اضلاع ۳، ۵ و ۷ طول نیمساز بزرگترین زاویه را بدست آورید.

حل: بزرگترین زاویه روبه رو بزرگترین ضلع است

لذا با توجه به شکل زاویه A بزرگترین است

در نتیجه باید طول نیمساز زاویه A را بدست آوریم:



$$AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۷-x} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow ۵x = ۲۱ - ۳x \Rightarrow ۸x = ۲۱ \Rightarrow x = \frac{۲۱}{۸}$$

$$BD = \frac{۲۱}{۸}, DC = ۷ - \frac{۲۱}{۸} = \frac{۳۵}{۸}$$

$$AD^{۲} = AB \times AC - BD \times DC = (۳)(۵) - (\frac{۲۱}{۸})(\frac{۳۵}{۸}) = \frac{۲۲۵}{۶۴} \Rightarrow AD = \frac{۱۵}{۸}$$

تمرینات صفحه ۷۲

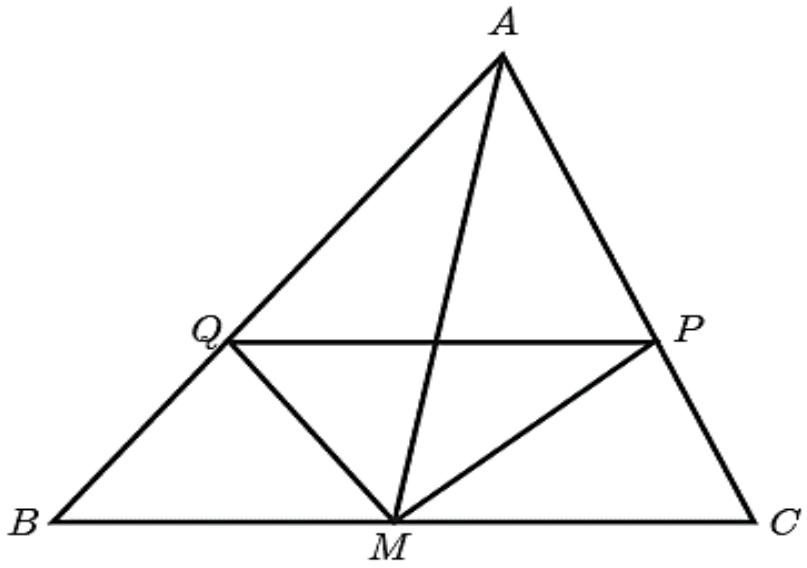
۱ــ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید : PQ||BC

MP نیمساز زاویه AMC و MQ نیمساز زاویه AMB است : فرض و M وسط BC $(MB = MC)$

حکم : $PQ \| BC$

حل)

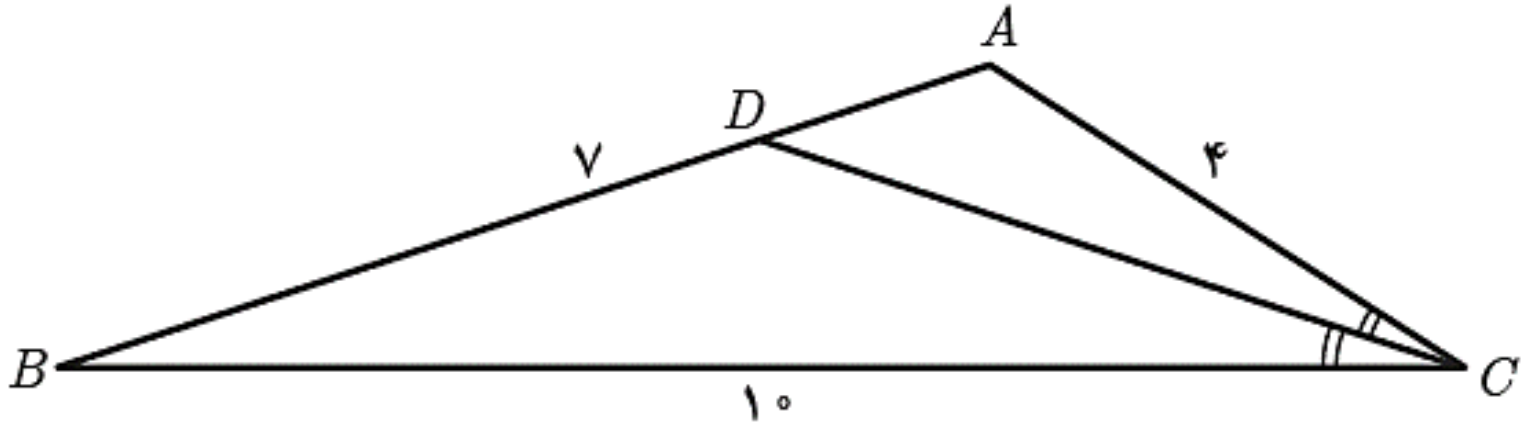
$$\left.\begin{array}{l} MP \text{ نیمساز زاویه } AMC \text{ است} \Rightarrow \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AP}{PC} \\ MQ \text{ نیمساز زاویه } AMB \text{ است} \Rightarrow \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AQ}{QB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \| BC$$



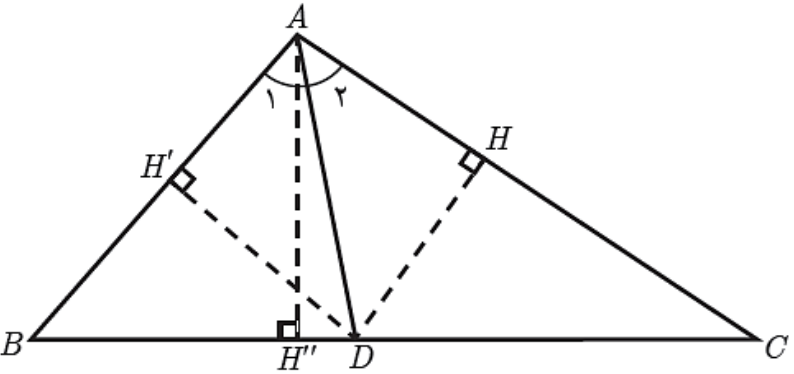
۲ــ در مثلث ABC، $AB=۷$ و $AC=۴$ و $BC=۱۰$ است. طول نیمساز زاویهٔ داخلی C را به‌دست آورید.

CD نیمساز زاویه C است: $\frac{۴}{۱۰}=\frac{AD}{DB}\Rightarrow\frac{۴+۱۰}{۱۰}=\frac{AD+DB}{DB}$

$$\frac{۱۴}{۱۰}=\frac{۷}{DB}\Rightarrow DB=\frac{۷\times۱۰}{۱۴}=۵ \text{ و } AD=۷-۵=۲$$



۳ــ با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید :



الف) چرا $DH = DH'$ ؟

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times ....}{\frac{۱}{۲}DH \times ....} = \frac{....}{....} \qquad (۱)$$

ب)

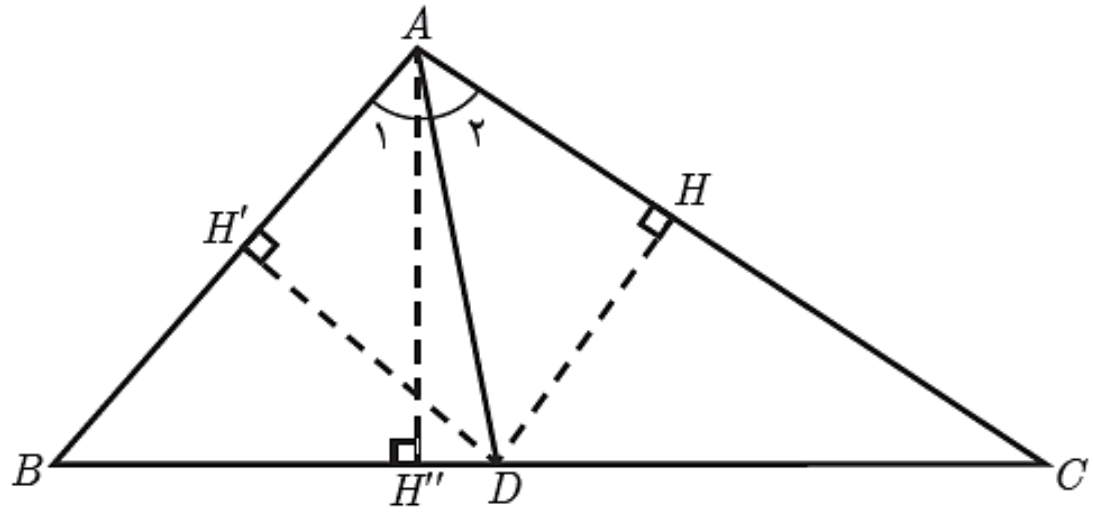
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times ....}{\frac{۱}{۲}CD \times ....} = \frac{....}{....} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود : $\frac{....}{....} = \frac{....}{....}$

الف) چون نقطه D روی نیمساز زاویه A قرار دارد. طبق خاصیت نیمساز، از دو ضلع زاویه A به یک فاصله است؛ یعنی $DH = DH'$

ب)

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} &= \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times AB}{\frac{۱}{۲}DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (۱) \\ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} &= \frac{\frac{۱}{۲}BD \times AH''}{\frac{۱}{۲}CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (۲) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



فصل سوم

درس چهارم: قضیه هرون

درس چهارم
قضیه هرون برای محاسبه مساحت مثلث

هدف از این قضیه این است که با داشتن هر ضلع مثلث مساحت مثلث را محاسبه کنیم و منظور از S و P در این درس به ترتیب اندازه مساحت و اندازه نصف محیط مثلث است.

ضمنا اثبات این قضیه جزء اهداف آموزشی این کتاب نمی باشد.

قضیه ۱: (قضیه هرون) در مثلث ABC به اضلاع a ، b و c مساحت مثلث از فرمول زیر بدست می آید.

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مثال ۱: مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به طول a را به کمک دستور (قضیه) هرون بدست آورید.

$$P = \frac{۳a}{۲} \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{۳a}{۲}\left(\frac{۳a}{۲}-a\right)\left(\frac{۳a}{۲}-a\right)\left(\frac{۳a}{۲}-a\right)} = \sqrt{\frac{۳a^{۴}}{۱۶}} = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$$

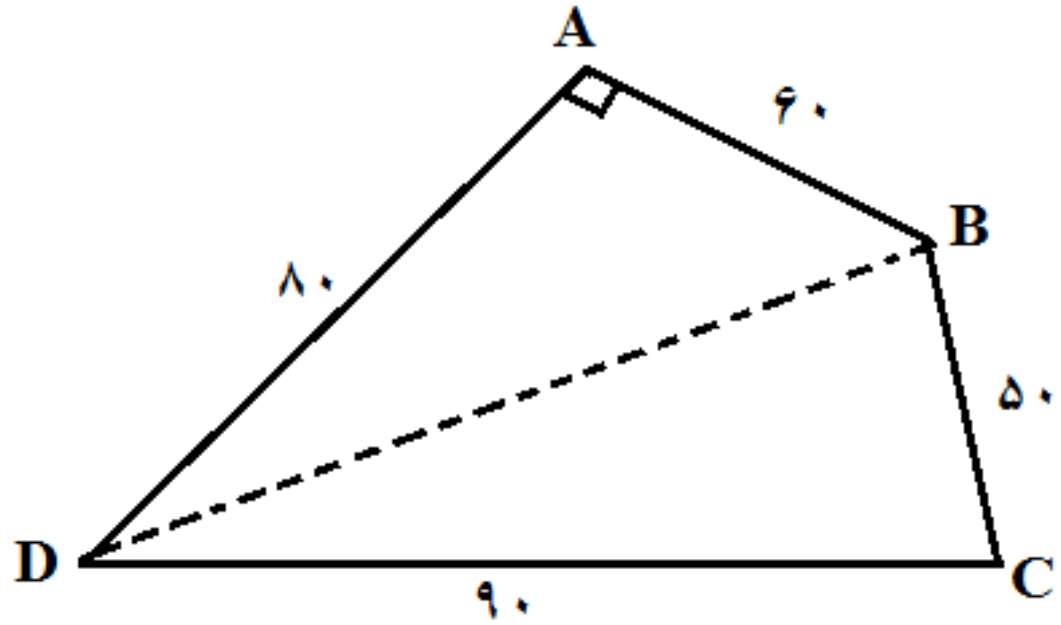
مثال ۲: مساحت مثلثی به اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را به کمک دستور هرون به دست آورید.

$$۲P = ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ \Rightarrow P = ۲۱$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$= \sqrt{۲۱ \times ۶ \times ۷ \times ۸} = \sqrt{۳^۲ \times ۷^۲ \times ۴^۲} = ۳ \times ۷ \times ۴ = ۸۴$$

مثال ۳: چهارضلعی $ABCD$ که در آن $A = ۹۰^\circ$ است یک زمین کشاورزی را نشان می دهد مساحت این زمین را بدست آورید(اندازه هر ضلع بر حسب متر)



$$S_{\triangle ABD} = \frac{۶۰ \times ۸۰}{۲} = ۲۴۰۰$$

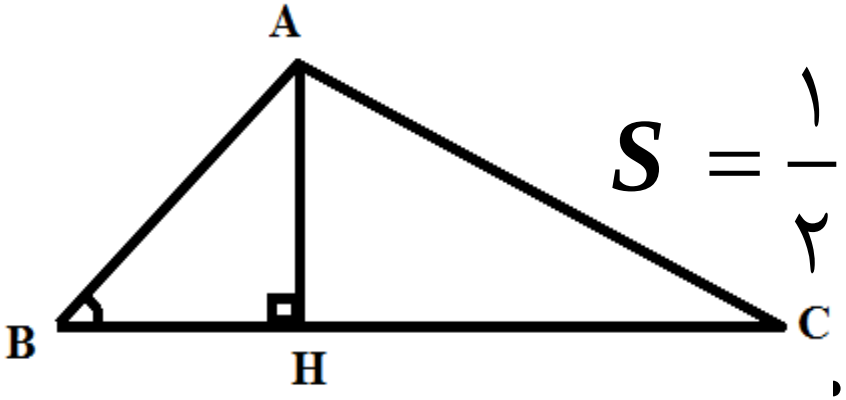
$$BD = \sqrt{۶۰^۲ + ۸۰^۲} = ۱۰۰$$

$$S_{\triangle BCD} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۱۲۰ \times ۲۰ \times ۳۰ \times ۷۰} = ۶۰۰\sqrt{۱۴}$$

$$S = ۲۴۰۰ + ۶۰۰\sqrt{۱۴} \simeq ۴۶۵۰ m^۲$$

لذا مساحت زمین به صورت روبرو است:

قضیه ۲: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها.



اثبات: در شکل زیر ثابت می کنیم: $S = \frac{۱}{۲} BC \times AB \sin B$

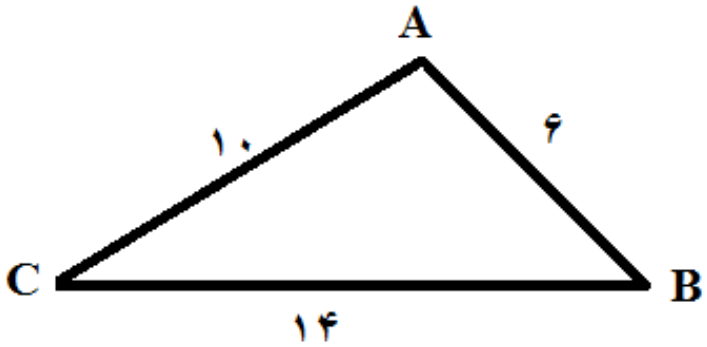
بدین منظور؛ $\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \sin B$

از طرفی می دانیم: $S = \frac{۱}{۲} BC \times AH \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} AB \times BC \sin B$

و به طور مشابه می توان اثبات کرد:

$$S = \frac{۱}{۲} AB \times AC \sin A \ , \ S = \frac{۱}{۲} AC \times BC \sin C$$

مثال ۴: مساحت مثلث $\triangle ABC$ به اضلاع ۶ و ۱۰ و ۱۴ را به روش هرون بدست آورید سپس با استفاده از آن اندازه A را حساب کنید.(با توجه به شکل)



$$۲P = ۶+۱۴+۱۰ = ۳۰ \Rightarrow P = ۱۵$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۱۵\times۱\times۵\times۹} = ۱۵\sqrt{۳}$$

از طرفی؛

$$S = \frac{۱}{۲}AB \times AC \sin A \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۶)(۱۰)\sin A = ۱۵\sqrt{۳}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow A = ۱۲۰^\circ \text{ یا } A = ۶۰^\circ$$

اما $A = ۶۰^\circ$ غیر قابل قبول است زیرا در غیر این صورت یکی از زاویه های B و C باید از ۶۰° بیشتر باشد که با توجه به اضلاع این مثلث در شکل عملا غیر ممکن است لذا باید $A = ۱۲۰^\circ$ باشد.

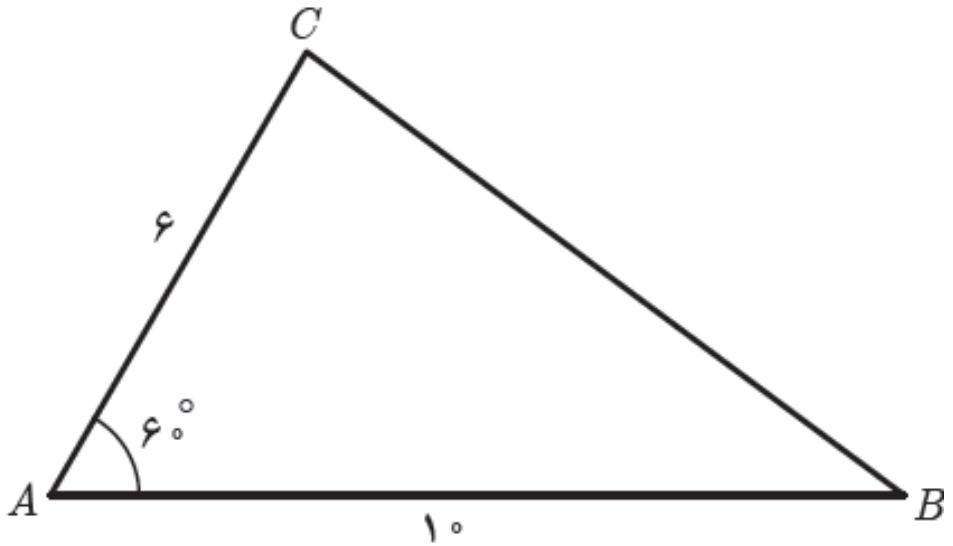
تمرینات صفحه ۷۵ و ۷۶

۱ــ در مثلث ABC، AB=۱۰، AC=۶ و $\hat{A}=۶۰^\circ$. الف) طول BC را به‌دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار sinB را پیدا کنید.

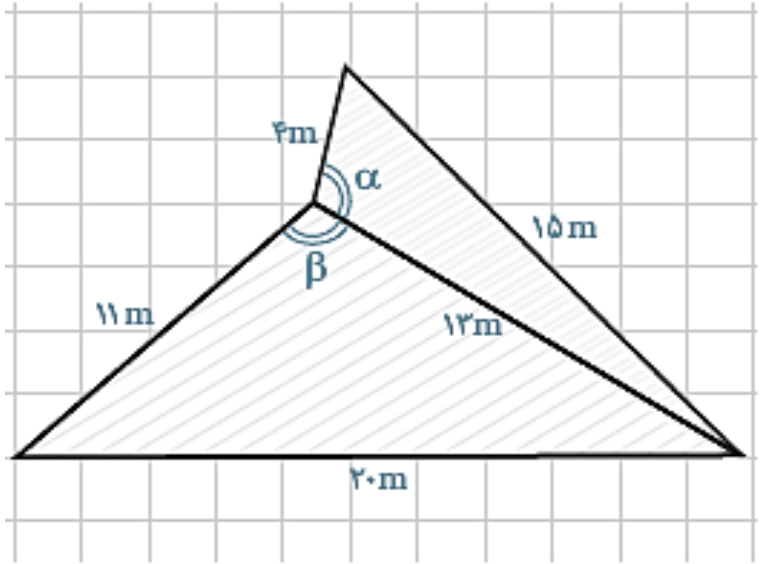
الف) $BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC.AB\cos A = ۶^۲ + ۱۰^۲ - ۲\times ۶\times ۱۰\times \frac{۱}{۲} = ۳۶ + ۱۰۰ - ۶۰ = ۷۶$

$BC = \sqrt{۷۶} = ۲\sqrt{۱۹}$

ب) $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}\times AC\times AB\times \sin A = \frac{۱}{۲}\times ۶\times ۱۰\times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$



پ) $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{۶}{\sin B} = \frac{۲\sqrt{۱۹}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow \sin B = \frac{۶\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۹}}\times \frac{\sqrt{۱۹}}{\sqrt{۱۹}} = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$



۲ــ دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟

نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد.

$(\alpha=\beta)$

$$P_1 = \frac{۴+۱۵+۱۳}{۲} = ۱۶ \qquad S_1 = \sqrt{۱۶\times۱۲\times۱\times۳} = ۲۴$$

$$P_2 = \frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲} = ۲۲ \qquad S_2 = \sqrt{۲۲\times۱۱\times۹\times۲} = ۶۶$$

کل $S = ۲۴ + ۶۶ = ۹۰$

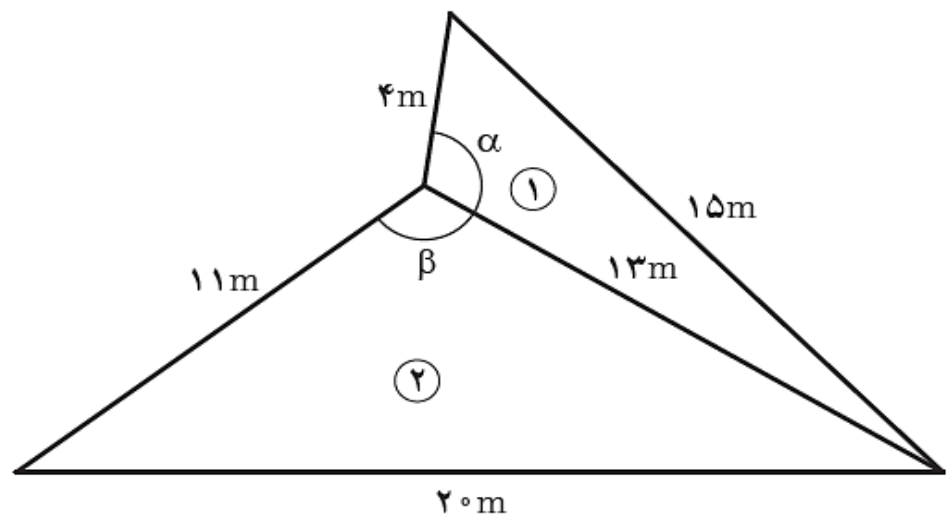
$$۱۵^۲ = ۴^۲ + ۱۳^۲ - ۲\times۴\times۱۳\times\cos\alpha \Rightarrow ۲۲۵ = ۱۶ + ۱۶۹ - ۱۰۴\cos\alpha$$

$$\Rightarrow -۱۰۴\cos\alpha = ۴۰ \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{۴۰}{۱۰۴} = -\frac{۵}{۱۳} \qquad ۱$$

$$۲۰^۲ = ۱۱^۲ + ۱۳^۲ - ۲\times۱۱\times۱۳\times\cos\beta \Rightarrow ۴۰۰ = ۱۲۱ + ۱۶۹ - ۲۸۶\cos\beta$$

$$\Rightarrow -۲۸۶\cos\beta = ۱۱۰ \Rightarrow \cos\beta = \frac{۱۱۰}{-۲۸۶} = -\frac{۵}{۱۳} \qquad ۲$$

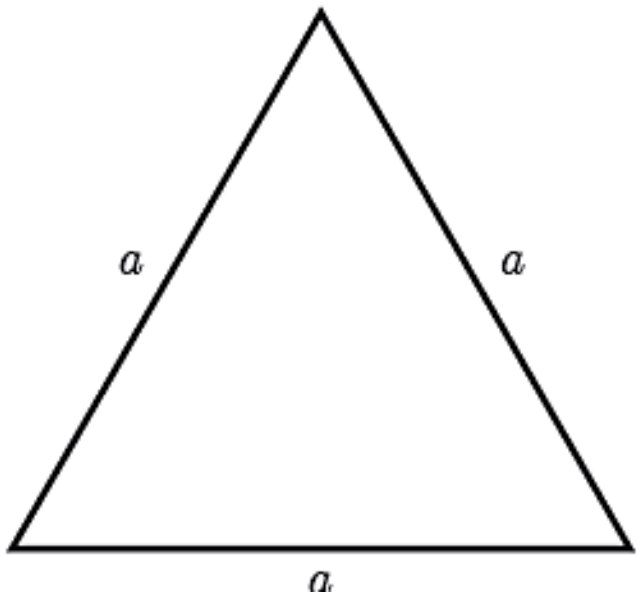
$$\overset{۱و۲}{\Rightarrow} \alpha = \beta$$



۳ـ دستور محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به‌دست آورید.

$$P = \frac{۳a}{۲}$$

$$S = \sqrt{\frac{۳a}{۲}(\frac{۳a}{۲}-a)(\frac{۳a}{۲}-a)(\frac{۳a}{۲}-a)} = \sqrt{\frac{۳a}{۲}(\frac{۳a}{۲}-a)^{۳}} = \sqrt{\frac{۳a}{۲}\times\frac{a^{۳}}{۸}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$



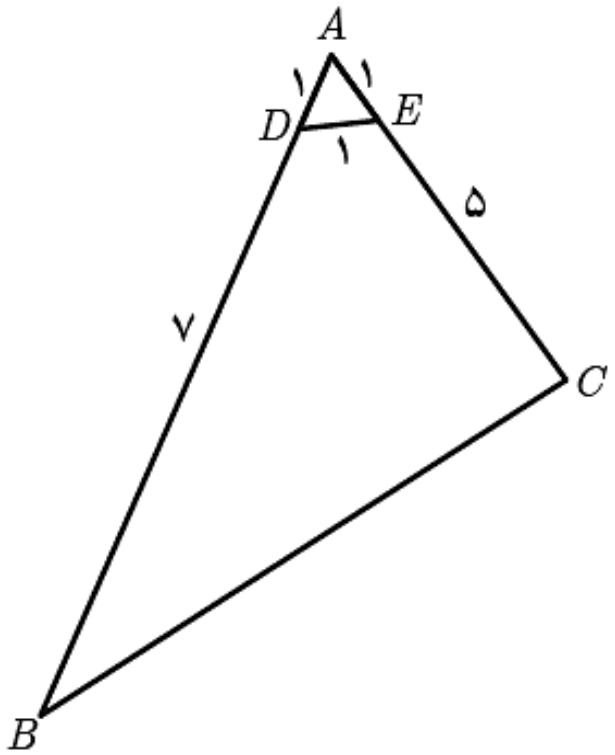
۴ــ در شکل **زیر** ، اولاً طول BC را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.

$A\hat{D}E \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$ متساوی الاضلاع

$$BC^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ - ۲\times ۸\times ۶\times \cos ۶۰ = ۶۴ + ۳۶ - ۴۸ = ۵۲ \qquad BC = \sqrt{۵۲} = ۲\sqrt{۱۳}$$

$$S_{DECB} = S_{A\hat{B}C} - S_{A\hat{D}E} = (\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۶\times \sin ۶۰^\circ) - \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۱^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۸\times ۶\times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$= ۴۸\frac{\sqrt{۳}}{۴} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$



۵ــ در شکل صفحه بعد AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبهٔ طول نیمساز زاویهٔ A به‌دست آورید.

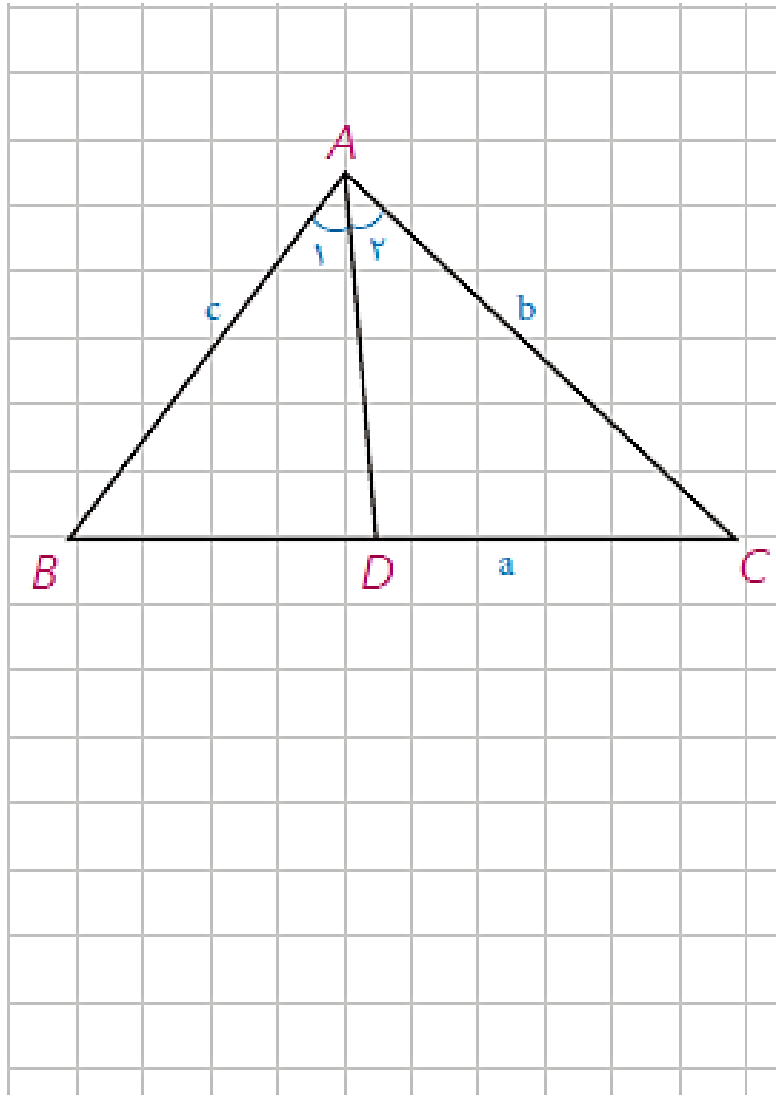
$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD} \Rightarrow$

$$\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A=\frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots\times\sin\frac{A}{۲}+\frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots\times\sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.AC.\sin A=AD.\sin\frac{A}{۲}(\cdots+\cdots)$$

$$\Rightarrow AD=\frac{AB.AC.\sin A}{(\cdots+\cdots)\sin\frac{A}{۲}}=\frac{۲AB.AC.\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}{(\cdots+\cdots)\sin\frac{A}{۲}}$$

$$\Rightarrow AD=\cdots\cdots \Rightarrow \quad (\text{نیمساز رأس A})\ d_a=\frac{۲bc.\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$$



حل: با نوشتن مساحت مثلث ABC به‌صورت مجموع مساحت‌های دو مثلث ABD و ADC، دستور دیگری برای محاسبه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث به‌دست می‌آید.

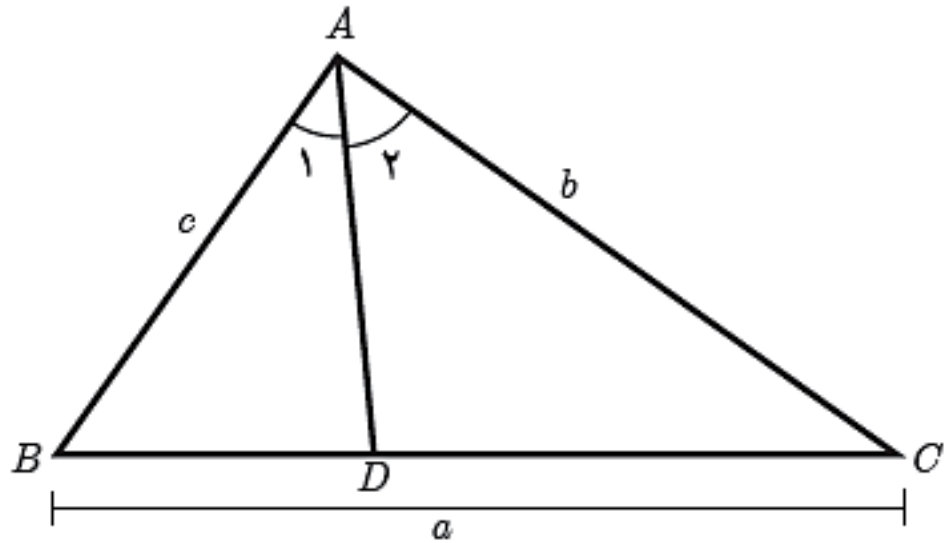
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{۱}{۲} AB.AC.\sin A = \frac{۱}{۲} AB.AD.\sin\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲} AC.AD.\sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.AC.\sin A = AD.\sin\frac{A}{۲}(AB + AC)$$

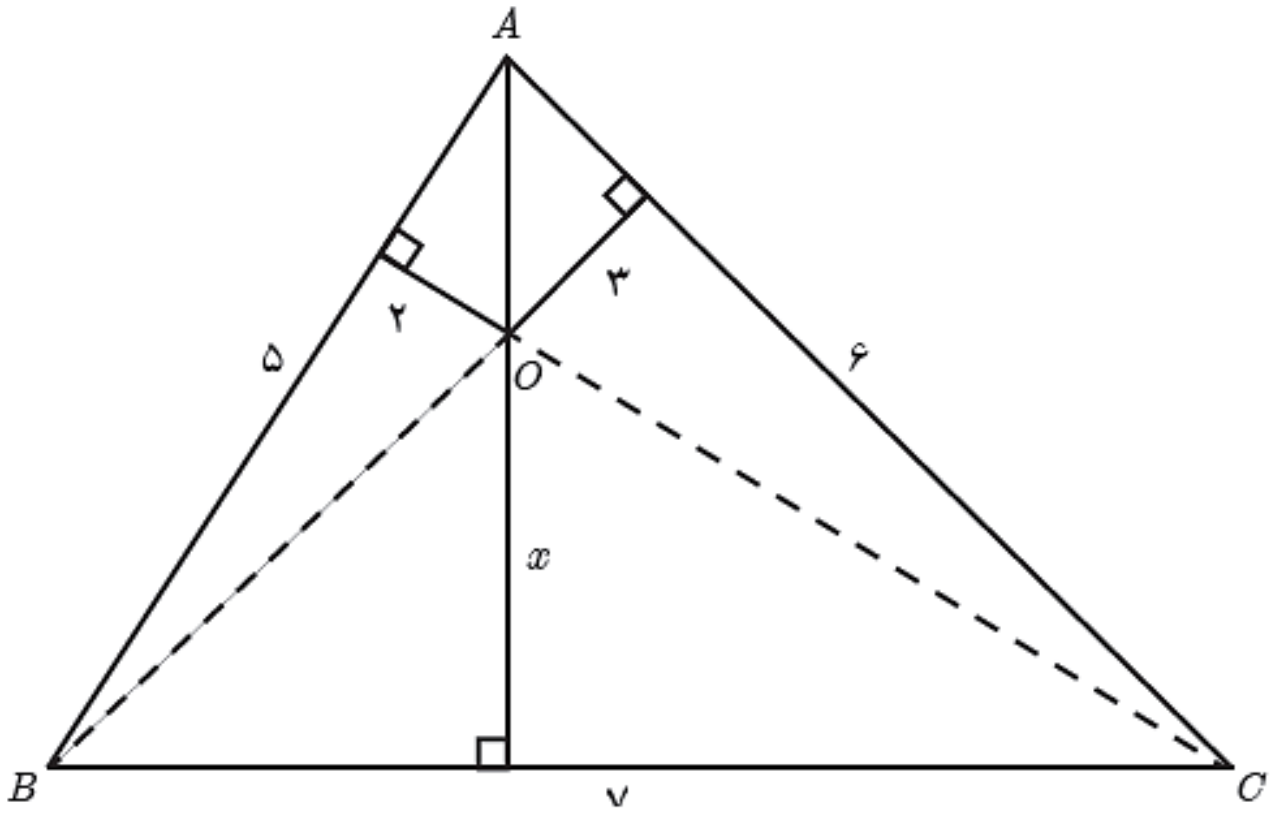
$$\Rightarrow AD = \frac{AB.AC.\sin A}{(AB+AC).\sin\frac{A}{2}} = \frac{2AB.AC.\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}{(AB+AC).\sin\frac{A}{2}} \Rightarrow AD = \frac{2AB.AC.\cos\frac{A}{2}}{AB+AC}$$

$$\Rightarrow (A \text{ نیمساز رأس}) \; d_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

$$(B \text{ نیمساز رأس}) = d_b = \frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c} \qquad (C \text{ نیمساز رأس}) = d_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$



۶ــ در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصلهٔ ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟



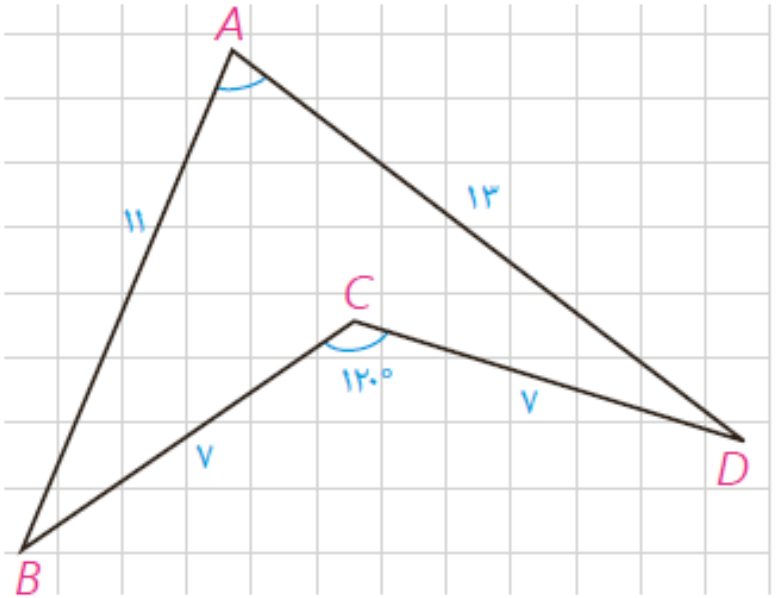
حل: با نوشتن مساحت مثلث ABC به‌صورت مجموع مساحت‌های سه مثلث AOB و BOC و COA، فاصله نقطه O از رأس بزرگ‌تر به دست می‌آید.

$$P = \frac{۵+۶+۷}{۲} = ۹ \qquad S = \sqrt{۹\times۴\times۳\times۲} = ۶\sqrt{۶}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{AOB}} + S_{\overset{\Delta}{BOC}} + S_{\overset{\Delta}{COA}} = \frac{۱}{۲}\times۲\times۵ + \frac{۱}{۲}\times۳\times۶ + \frac{۱}{۲}\times۷\times x = ۱۴ + \frac{۷}{۲}x$$

$$\Rightarrow ۶\sqrt{۶} = ۱۴ + \frac{۷}{۲}x \Rightarrow \frac{۷}{۲}x = ۶\sqrt{۶} - ۱۴ \Rightarrow ۷x = ۱۲\sqrt{۶} - ۲۸ \Rightarrow x = \frac{۱۲\sqrt{۶} - ۲۸}{۷}$$

۷ــ در شکل، اولاً اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.



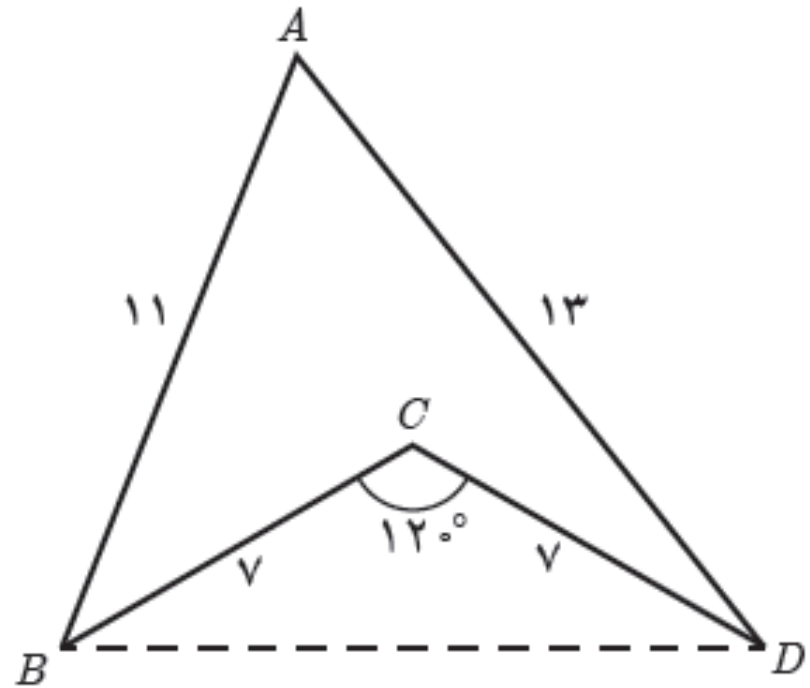
$$BD^2 = 7^2 + 7^2 - 2\times 7\times 7\times \cos 120^\circ = 49 + 49 + 98\times \frac{1}{2} = 98 + 49 = 147,\ BD = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$$

$$BD^2 = 11^2 + 13^2 - 2\times 11\times 13\times \cos A \Rightarrow 121 + 169 - 286\cos A = 147 \Rightarrow 143 = 286\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{143}{286} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{CBD} = \frac{1}{2}\times 11\times 13\times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2}\times 7\times 7\times \underbrace{\sin 120^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{143\sqrt{3}}{4} - \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{94\sqrt{3}}{4}$$

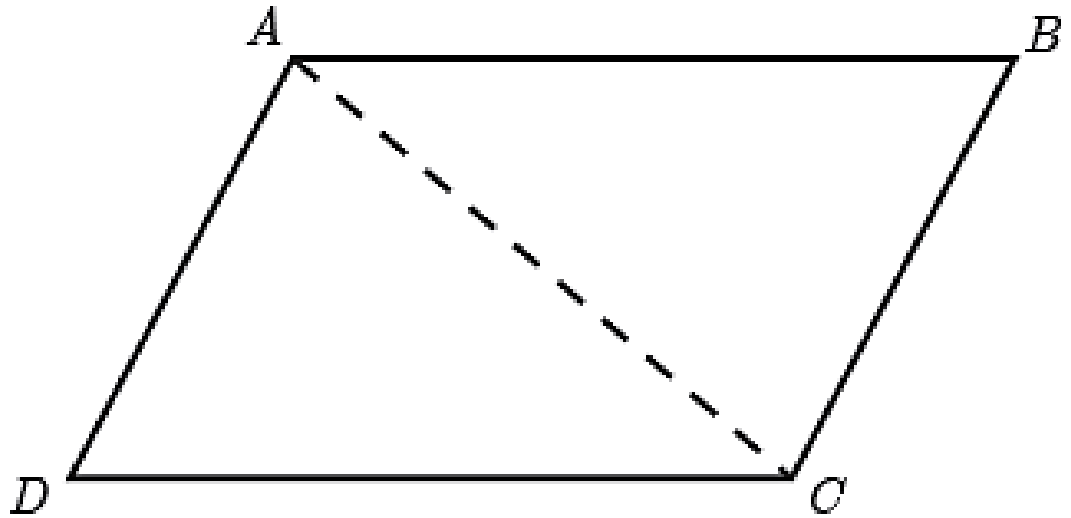


۸ــ ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

حل: با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{aligned} S_{ADC} &= \frac{۱}{۲} AD.DC.\sin D \\ S_{ABCD} &= ۲ \times S_{ADC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{ABCD} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times AD.DC.\sin D$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AD.DC.sinD$$



۹ــ به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A} > ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ > b^۲ + c^۲$

ب) $\hat{A} < ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ < b^۲ + c^۲$

پ) $\hat{A} = ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$

الف) اگر $\hat{A} > ۹۰^\circ$ آنگاه $a^۲ > b^۲ + c^۲$

$$\left.\begin{array}{r} \hat{A} > ۹۰^\circ \Rightarrow \cos A < ۰ \\ -۲bc < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow -۲bc\cos A > ۰ \qquad ①$$

از طرفی طبق قضیه کسینوس‌ها داریم :

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \xrightarrow{①} a^۲ > b^۲ + c^۲$$

بالعکس؛ اگر $a^۲ > b^۲ + c^۲$ باشد آنگاه $\hat{A} > ۹۰^\circ$

طبق فرض $a^۲ > b^۲ + c^۲$ است. از طرفی طبق قضیه کسینوس‌ها داریم $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$

پس :

$$a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A > b^۲ + c^۲ \Rightarrow -۲bc\cos A > ۰$$

$$\Rightarrow CosA < ۰ \Rightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ$$

ب) اگر $\hat{A}<۹۰^\circ$ آنگاه $a^۲<b^۲+c^۲$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}<۹۰^\circ \Rightarrow \cos A>۰ \\ -۲bc<۰\end{array}\right\} \Rightarrow -۲bc\cos A<۰ \quad ①$$

از طرفی طبق قضیه کسینوس‌ها داریم :

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A \xrightarrow{①} a^۲<b^۲+c^۲$$

بالعکس) اگر $a^۲<b^۲+c^۲$ آنگاه $\hat{A}<۹۰^\circ$

$$a^۲<b^۲+c^۲ \xrightarrow[\text{کسینوس‌ها}]{\text{قضیه}} b^۲+c^۲-۲bc\cos A<b^۲+c^۲ \Rightarrow -۲bc\cos A<۰$$

$$\Rightarrow \cos A>۰ \Rightarrow \hat{A}<۹۰^\circ$$

پ) اگر $\hat{A}=۹۰^\circ$ آنگاه $a^۲=b^۲+c^۲$

$$\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow \cos A=\cos ۹۰^\circ=۰ \Rightarrow -۲bc\cos A=۰ \quad (۱)$$

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A \xrightarrow{(۱)} a^۲=b^۲+c^۲$$

بالعکس: اگر $a^۲=b^۲+c^۲$ آنگاه $\hat{A}=۹۰^\circ$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \xrightarrow[\text{کسینوس‌ها}]{\text{قضیه}} b^۲+c^۲-۲bc\cos A=b^۲+c^۲ \Rightarrow -۲bc\cos A=۰ \Rightarrow \cos A=۰ \Rightarrow \hat{A}=۹۰^\circ$$

۱۰ــ به کمک نتیجهٔ تمرین ۹، حاده(تند)، قائمه یا منفرجه(باز) بودن زاویهٔ A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید :

الف) $AB=۱۰$, $AC=۶$, $BC=۹$

ب) $AB=۸$, $AC=۴$, $BC=۹$

پ) $AB=۸$, $AC=۱۵$, $BC=۱۷$

حل: کمک نتیجه تمرین ۹، حاده، قائمه یا منفرجه بودن زاویه A در هر یک از مثلث‌ها مشخص می‌شود.

الف) $AB=۱۰$ و $AC=۶$ و $BC=۹$

$$\left.\begin{aligned} a^۲ &= ۹^۲ = ۸۱ \\ b^۲ + c^۲ &= ۶^۲ + ۱۰^۲ = ۳۶ + ۱۰۰ = ۱۳۶ \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} < ۹۰^\circ$$

ب) $AB=۸$ ، $AC=۴$ ، $BC=۹$

$$\left.\begin{aligned} a^۲ &= ۹^۲ = ۸۱ \\ b^۲ + c^۲ &= ۴^۲ + ۸^۲ = ۱۶ + ۶۴ = ۸۰ \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ$$

پ) $AB=۸$ ، $AC=۱۵$ ، $BC=۱۷$

$$\left.\begin{aligned} a^۲ &= ۱۷^۲ = ۲۸۹ \\ b^۲ + c^۲ &= ۱۵^۲ + ۸^۲ = ۲۲۵ + ۶۴ = ۲۸۹ \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

پایان

گروه ریاضی استان خراسان رضوی