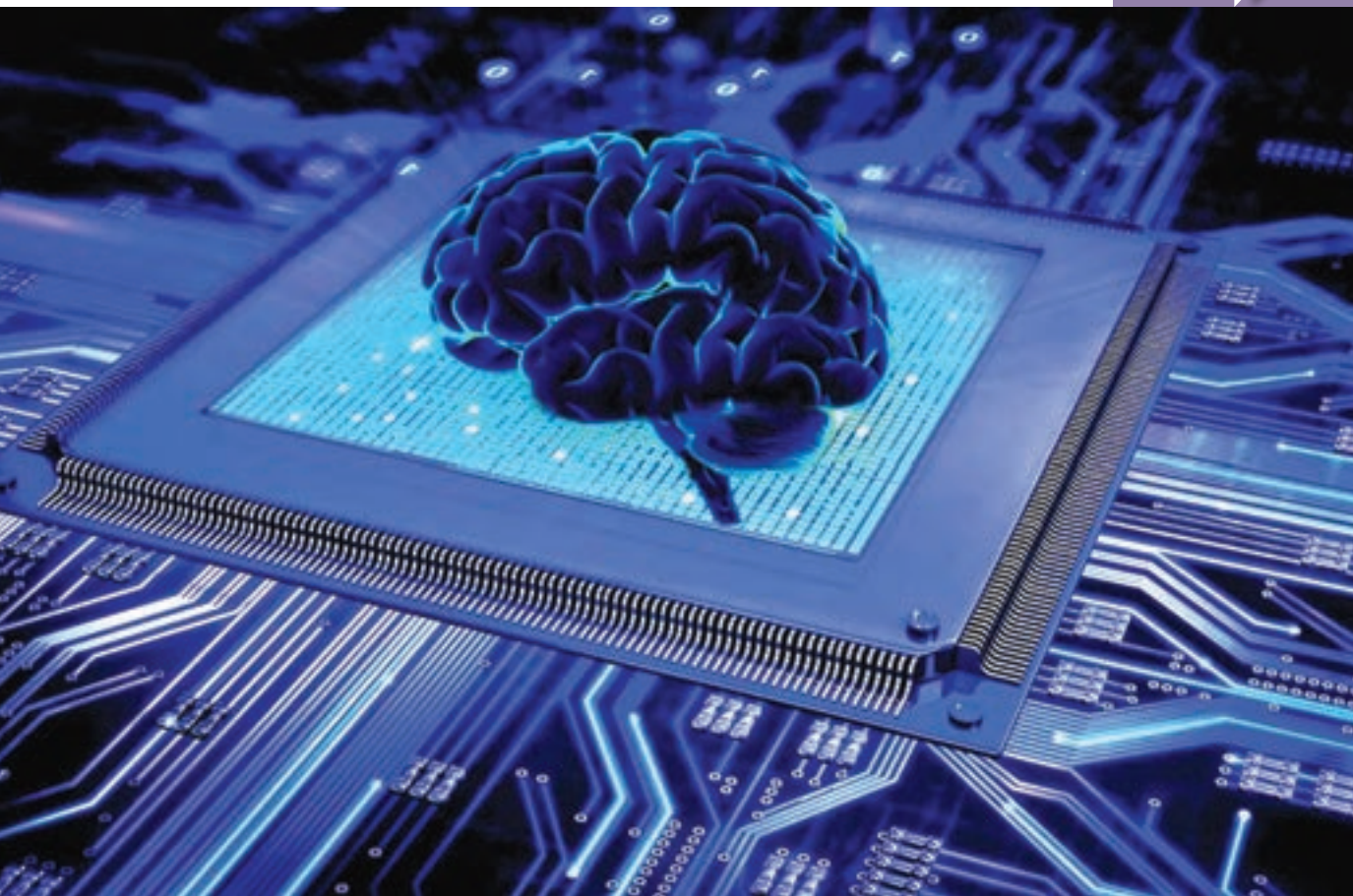


فصل اول

ماتریس و کاربردها



یکی از کاربردی‌ترین مباحث و موضوع‌های ریاضی مبحث ماتریس است. امروزه از ماتریس به عنوان ابزاری قوی در شاخه‌های دیگر ریاضیات و به‌خصوص در فیزیک کوانتوم (هایزنبرگ، اولین شخصی که ماتریس‌ها را در فیزیک به کار برد، می‌گوید: تنها ابزاری که من در مکانیک کوانتوم نیاز دارم ماتریس‌ها می‌باشند.) و در رایانه و علوم چون آمار، حسابداری و... استفاده می‌شود. ریاضیات کاربردی، در تمام گرایش‌هایش نیاز مبرم به ماتریس دارد زیرا در بیشتر موارد، حل مسائل کاربردی و عملی با حل دستگاه‌های معادلات و نامعادلات پیوند می‌خورد و حل این دستگاه‌ها با ماتریس رابطه تنگاتنگ دارد.

ماتریس‌ها و اعمال روی ماتریس‌ها

اطلاعات مربوط به ۴ تیم اول حاضر در یک سری مسابقات فوتبال که به صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود در جدول زیر آمده است :

امتیاز	مساوی	باخت	برد	
۳۰	۳	۳	۹	تیم A
۲۵	۴	۴	۷	تیم B
۲۴	۶	۳	۶	تیم C
۲۲	۴	۵	۶	تیم D

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} امتیاز & مساوی & باخت & برد \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 & 30 \\ 7 & 4 & 4 & 25 \\ 6 & 3 & 6 & 24 \\ 6 & 5 & 4 & 22 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

اگر این اطلاعات را به شکل آرایشی از اعداد و در داخل دو کروشه محصور کنیم، در این صورت یک ماتریس شامل ۴ سطر و ۴ ستون حاصل می‌شود که اگر آن را با حرف M نمایش دهیم، خواهیم داشت :

تعریف: هر نمایش مستطیلی شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A ، B و C ... نام گذاری می‌کنیم.

مثال: ماتریس A ماتریسی شامل سه سطر و چهار ستون است. این ماتریس دارای $3 \times 4 = 12$ درایه است و مثلاً عدد حقیقی $\sqrt{2}$ درایه روی سطر اول و ستون چهارم است و درایه (-7) روی سطر دوم و ستون سوم قرار دارد.

در حالت کلی اگر ماتریسی چون A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m \times n}$ و می‌خوانیم (A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ (m در n) است.) برای هر درایه ماتریس و

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 5 & 3 & -7 & 1 \\ -3 & 20 & \pi & 14 \end{bmatrix}$$

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامبلتون (۱۸۶۵-۱۸۰۵) ریاضی‌دان ایرلندی و «کیلی» ریاضی‌دان انگلیسی در نیمه اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبانی نظری این علم را کارل وایراستراس (۱۸۹۷-۱۸۱۵) و دیگران در نیمه دوم قرن نوزدهم و نیمه اول قرن بیستم پایه‌ریزی کردند.

به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه را مشخص می‌کند، یعنی درایه روی سطر i ام و ستون j ام.

ماتریس $A_{2 \times 3}$ و ماتریس $B_{m \times n}$ با درایه‌هایشان نمایش داده شده‌اند:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

درایه b_{ij} را درایه عمومی ماتریس B می‌نامیم که $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ تغییر می‌کنند. همه درایه‌های ماتریس B را می‌توان توسط درایه عمومی نمایش داد و برای اختصار می‌نویسیم $B = [b_{ij}]$.

مثال: اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ ماتریسی 2×2 باشد و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij}=5$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij}=-2$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایشان نمایش دهید.

حل: $a_{11}=a_{22}=7$ و $a_{12}=-2$ و $a_{21}=5$ پس $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} -2 & i < j \\ 7 & i = j \\ 5 & i > j \end{cases}$$

کاردرکلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A ، B ، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دو بعدی زیر آمده است این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس 3×4 و یک بار با ماتریسی 4×3 نمایش دهید.

۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن	فروشگاه A
۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن	فروشگاه B
۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن	فروشگاه C
۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن	فروشگاه D

پیراهن بلوز شلوار

$$A_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 24 & 15 & 7 \\ 26 & 19 & 11 \\ 17 & 28 & 22 \\ 12 & 31 & 35 \end{bmatrix}$$

A B C D

$$\begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

شلوار
بلوز
پیراهن

۱- اگر $m=n=1$ در این صورت ماتریس $[K]_{1 \times 1}$ را مساوی با عدد حقیقی K تعریف می‌کنیم.

■ معرفی چند ماتریس خاص

۱- اگر در ماتریس A ، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبه n ($n \times n$) می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{و} \quad C = [5]_{1 \times 1} = 5$$

در ماتریس‌های A و B قطره‌های مشخص شده را قطر اصلی این دو ماتریس می‌نامیم و اگر $i=j$ در این صورت درایه a_{ij} روی قطر اصلی قرار دارد.

۲- اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند:

$$A = [1 \ 2]_{1 \times 2}, \quad B = [2 \ -1 \ 4 \ 5]_{1 \times 4}, \quad C = [7]_{1 \times 1} = 7$$

۳- اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس ستونی می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad \text{و} \quad C = [114]_{1 \times 1} = 114$$

۴- ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند). ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۵- اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = [2]$$

ضرب عدد در ماتریس همانی

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 3 & 0 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}$$

مثل عددی ماند که در ماتریس ضرب شده است

۶- ماتریس صفر، ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس صفر 2×2 است.

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبه $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m \times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i, j, a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}] \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

مثال: اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ مساوی باشند $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \\ z-1=5 \end{cases} \Rightarrow x=6, y=3, z=6 \Rightarrow x+y+z=15$$

■ جمع ماتریس‌ها

در کاردر کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر قرار باشد شرکت تولیدکننده لباس‌ها به هریک از ۴ فروشگاه مذکور ۲۰ شلوار، ۳۰ بلوز و ۵۰ پیراهن ارسال کند در این صورت اطلاعات مربوط به تعداد لباس‌ها در هر فروشگاه به صورت زیر است:

D	C	B	A	
۱۲+۲۰	۱۷+۲۰	۲۶+۲۰	۲۴+۲۰	شلوار
۳۱+۳۰	۲۸+۳۰	۱۹+۳۰	۱۵+۳۰	بلوز
۳۵+۵۰	۲۲+۵۰	۱۱+۵۰	۷+۵۰	پیراهن

اگر این جدول را با یک ماتریس 3×4 نمایش می‌توان آن را توسط مجموع دو ماتریس که درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم جمع شده‌اند نوشت:

$$\begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix}_{3 \times 4} + \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \\ 50 & 50 & 50 & 50 \end{bmatrix}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 44 & 46 & 37 & 32 \\ 45 & 49 & 58 & 61 \\ 57 & 61 & 72 & 85 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی است چون C که از همان مرتبه A و B است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A=[a_{ij}]_{m \times n}, B=[b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

کاردرکلاس

مانند نمونه ماتریس های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+(-2) & 3+(-3) & (-1)+1 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 & (-1)+4 \\ 7+5 & 8+6 & 9+7 & (-1)+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 3 \\ 12 & 14 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

الف) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A-B = \dots$

ب) $A = [1 \ -1 \ 3 \ 7], B = [3 \ 2 \ -1 \ 4] \Rightarrow A+B = \dots$

پ) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ \sqrt{2} & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow A-B = \dots$

ت) $A = [5], B = [-7] \Rightarrow A+B = \dots$

ث) دو ماتریس 3×3 و غیر صفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.



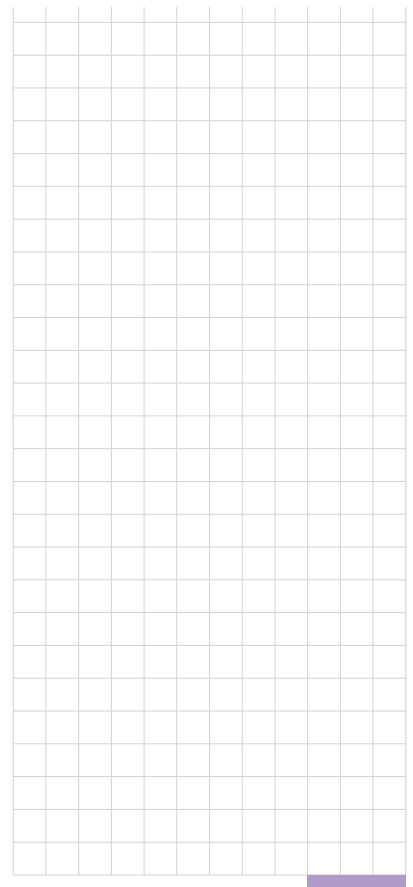
الف) $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

ب) $A+B = [4 \ 1 \ 2 \ 11]$

پ) $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 & -5 \\ \sqrt{2}+1 & 7 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

ت) $A+B = [-2] = -2$

ث) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$
 $A+(-A) = \bar{0}$



ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

تعریف: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام

درایه های ماتریس ضرب می کنیم، به عبارت دیگر می توان نوشت:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه های لباس اگر ماتریس حاصل را A بنامیم و قرار باشد در هر فروشگاه تمام سه نوع لباس تعدادشان دو برابر شود ماتریس حاصل به صورت زیر نوشته می شود:

$$B = \begin{bmatrix} 24 \times 2 & 26 \times 2 & 17 \times 2 & 12 \times 2 \\ 15 \times 2 & 19 \times 2 & 28 \times 2 & 31 \times 2 \\ 7 \times 2 & 11 \times 2 & 22 \times 2 & 35 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24+24 & 26+26 & 17+17 & 12+12 \\ 15+15 & 19+19 & 28+28 & 31+31 \\ 7+7 & 11+11 & 22+22 & 35+35 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix} = A+A=2A$$

۱- در هر حالت طرف دوم تساوی های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} -1 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب)} \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ \sqrt{2} & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\text{پ)} 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}_{4 \times 3} \quad \bullet A = \bar{0}$$

$$\text{ت)} 7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ \sqrt{2} & -1 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}_{3 \times 3} \quad v\bar{0} = \bar{0}$$

۲- هر یک از ماتریس های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

قرینه یک ماتریس: اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ماتریسی دلخواه باشد قرینه ماتریس A

را با $(-A)$ نمایش داده و از ضرب (-1) در ماتریس A به دست می آید. واضح

$$(-A) + A = \bar{0}$$

$$A + (-A) = \bar{0}$$

خواص مهم جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A, B, C ماتریس هایی $m \times n$ (هم مرتبه) و r و s اعدادی حقیقی باشند خواص زیر همگی به راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات اند:

$$\text{الف)} A + B = B + A$$

خاصیت جابه جایی

$$\text{ب)} A + (B + C) = (A + B) + C$$

خاصیت شرکت پذیری

$$\text{پ)} A + \bar{0} = \bar{0} + A = A$$

خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس ها



$$A + (-A) = (-A) + A = \overline{0} \quad \text{ت)$$

خاصیت عضو قرینه

$$\text{ث) } r(A \pm B) = rA \pm rB$$

$$\text{ج) } (r \pm s)A = rA \pm sA$$

$$\text{چ) } rA = rB, r \neq 0 \Rightarrow A = B$$

$$\text{ح) } A = B \Rightarrow rA = rB$$

$$\text{مثال: فرض کنیم } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت نشان می دهیم که $(-2)(A+B) = (-2)A + (-2)B$

$$\begin{aligned} -2(A+B) &= (-2) \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= (-2) \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+1 & 3+4 \\ (-1)+3 & 3+2 & (-5)+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-2)(1+(-2)) & (-2)(2+1) & (-2)(3+4) \\ (-2)((-1)+3) & (-2)(3+2) & (-2)((-5)+0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-2) \times 1 + (-2) \times (-2) & -2 \times 2 + (-2) \times 1 & -2 \times 3 + (-2) \times 4 \\ (-2) \times (-1) + (-2) \times 3 & -2 \times 3 + (-2) \times 2 & (-2) \times (-5) + (-2) \times 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در } \mathbb{R} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \times 1 & -2 \times 2 & -2 \times 3 \\ (-2) \times (-1) & -2 \times 3 & (-2) \times (-5) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \begin{bmatrix} (-2) \times (-2) & -2 \times 1 & -2 \times 4 \\ -2 \times 3 & -2 \times 2 & -2 \times 0 \end{bmatrix} \\ &= (-2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = (-2)A + (-2)B \end{aligned}$$

در حالت کلی اگر فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ در این صورت برای $r \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\begin{aligned} r(A \pm B) &= r([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) = r[a_{ij} \pm b_{ij}] = [r(a_{ij} \pm b_{ij})] \\ &= [ra_{ij} \pm rb_{ij}] \quad \text{توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در } \mathbb{R} \\ &= [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] \quad \text{تعریف جمع (تفاضل)} \\ &= r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}] \quad \text{تعریف ضرب عدد در ماتریس} \\ &= rA \pm rB \end{aligned}$$

کاردکلاس

۱- برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r = 3$ و $s = -2$ برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.

۲- درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد طوری که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهاى ماتریس B برابر باشند در این صورت $A \times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایه ماتریس A را در درایه نظیرش در B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی 1×1 یا عدد حقیقی حاصل می‌شود.

مثال: اگر $A = [-1 \ 2 \ 0 \ 3 \ -5]$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$A \times B = [-1 \ 2 \ 0 \ 3 \ -5] \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= [(-1) \times (-2) + 2 \times 3 + 0 \times 7 + 3 \times (-1) + (-5) \times (-2)]$$

$$= [2 + 6 + 0 + (-3) + 10] = [15] = 15$$

کاردکلاس

یک ماتریس سطری 1×3 مانند A و یک ماتریس ستونی 3×1 مانند B طوری تعریف کنید که $A \times B = -7$

ضرب ماتریس در ماتریس

اگر A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهاى ماتریس B برابر باشد) در این صورت $A_{mp} \times B_{pn}$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{mp} \times B_{pn} = C_{mn} = [c_{ij}]$ ، ماتریس C ماتریسی $m \times n$ بوده که درایه روی سطر i ام و ستون j ام در آن یعنی C_{ij} از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به دست می‌آید، یعنی



$$(r+s)A = (\varpi + (-\varrho))A = 1 \times \begin{bmatrix} 1 & \varrho \\ -1 & \varpi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varrho \\ -1 & \varpi \end{bmatrix}$$

$$rA + sA = \varpi \times \begin{bmatrix} 1 & \varrho \\ -1 & \varpi \end{bmatrix} + (-\varrho) \times \begin{bmatrix} 1 & \varrho \\ -1 & \varpi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varpi & \wp \\ -\varpi & \varrho \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\varrho & -\wp \\ \varrho & -\wp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varrho \\ -1 & \varpi \end{bmatrix}$$

$$(r-s)A = (\varpi - (-\varrho))A = 5 \times \begin{bmatrix} 1 & \varrho \\ -1 & \varpi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$rA - sA = \varpi \times \begin{bmatrix} 1 & \varrho \\ -1 & \varpi \end{bmatrix} - (-\varrho) \times \begin{bmatrix} 1 & \varrho \\ -1 & \varpi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varpi & \wp \\ -\varpi & \varrho \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varrho & \wp \\ -\varrho & \wp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$$



حل سوال ۲ کاردر کلاس صفحه ۱۷:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$(r \pm s)A = (r \pm s)[a_{ij}]_{m \times n} = [(r \pm s)a_{ij}] = [ra_{ij} \pm sa_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [sa_{ij}] = r[a_{ij}] \pm s[a_{ij}] = rA \pm sA$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix} = -7$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix} = -7$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 - 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix} = -7$$

ستون j ام B $\times$ سطر i ام A c_{ij}

$$\Rightarrow C_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

اگر فرض کنیم، $A_{3 \times 3} \times B_{3 \times 2} = C = [c_{ij}]_{3 \times 2}$ در این صورت ماتریس حاصل ضرب یعنی C ماتریسی 3×2 بوده و داریم:

$$c_{12} = A \text{ سطر اول} \times B \text{ دوم ستون} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \times 2 + 2 \times 2 + (-1) \times 5 = \dots$$

$$c_{32} = A \text{ سطر سوم} \times B \text{ دوم ستون} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = (-1) \times 2 + (-2) \times 2 + 4 \times 5 = \dots$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2-4 & 3+4-5 \\ 6-2+4 & 9+4+5 \\ -2+2+16 & -3-4+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 18 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

آیا ضرب $(B \times A)$ امکان پذیر است؟ چرا؟

خیر زیرا ضرب مولفه سوم ستون ها عددی نداریم که ضرب کنیم

کاردکلاس

۱- برای هر حالت $A \times B$ و $B \times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \Rightarrow A \times B = \dots$

ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A \times B = \dots$ ، $B \times A = \dots$

پ) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ ، $B = [2 \ 3 \ 4]_{1 \times 3} \Rightarrow A \times B = \dots$ ، $B \times A = \dots$

ت) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1+1+1 & 2+0+4 & -1+2+0 & -1+2+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 1-2+9 & 2+0+3 & 3+2-3 & -1-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2-3 & -1+0 & 1-5 \\ 4+3 & -2+0 & 2+5 \\ 6-6 & -3+0 & 3-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 7 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & -7 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2-2+3 & -2-1-2 \\ 3+0+15 & -3+0-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 18 & -13 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad B \times A = [2-3+8] = [7] = 7 \quad (\text{پ})$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -1+1+0 & 2-2+0 & -2+2+0 \\ -2+1+1 & 4-2-2 & -4+2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ت})$$

$$A \neq O, B \neq O, A \times B = \overline{O}$$

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که «اگر $a \times b = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$ » مقایسه کنید.

۲- اگر A ماتریسی 3×5 باشد در این صورت در هریک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A \times B$ و $B \times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه آن را بیابید:

الف) $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$ ب) $B = [b_{ij}]_{3 \times 5}$ پ) $B = [b_{ij}]_{5 \times 3}$
ت) $B = [b_{ij}]_{5 \times 4}$ ث) $B = [b_{ij}]_{5 \times 5}$

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

کاردکلاس

۱- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A \times B)$ و $(B \times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نتیجه

در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی .. ندارد

۲- ماتریس اسکالر $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را از چپ و راست در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ضرب کرده و حاصل ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر روبه‌رو که آن را ماتریس واحد یا همانی مرتبه n می‌نامیم، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعی مرتبه n است یعنی:

$$A_{n \times n} \times I_n = I_n \times A_{n \times n} = A_{n \times n}$$

۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ در این صورت درستی تساوی $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ را بررسی کنید.



الف) $A \times B$ ✗ $B \times A$ ✗

ب) $A \times B$ ✗ $B \times A$ ✗

پ) $A \times B = C_{۳ \times ۳}$ $B \times A = D_{۵ \times ۵}$

ت) $A \times B = C_{۳ \times ۴}$ $B \times A$ ✗

ث) $A \times B = C_{۳ \times ۵}$ $B \times A$ ✗

سوال ۱:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

سوال ۲:

$$I_r \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A \times I_r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow I_r \times A = A \times I_r$$

$$I_m \times A_{m \times n} = A_{m \times n} \quad A_{m \times n} \times I_n = A_{m \times n}$$

اگر $A \times I$ تعریف شده باشد



$$B + C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A \times (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$
$$A \times C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (A \times B) + (A \times C) = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$



$$B \times C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A \times (B \times C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(A \times B) \times C = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

در حالت کلی اگر $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ و $C = [c_{ij}]_{p \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ در این صورت ضرب ماتریس A در مجموع $(B+C)$ خاصیت توزیع پذیری یا پخشی دارد یعنی:

$$A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C)$$

۴- با همان ماتریس‌های معرفی شده در شماره (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

در حالت کلی اگر $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times k}$ و $C = [c_{ij}]_{k \times n}$ در این صورت ضرب این سه ماتریس خاصیت شرکت پذیری دارد یعنی:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$


تمرین

۱- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ ماتریسی 3×4 باشد به طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۳- دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \overline{0}$ و $B \neq \overline{0}$ ولی $AB = \overline{0}$.

۴- با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

۵- اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به صورت $A^2=AA^2$ و $A^3=AA^2$ و ... و $A^n=AA^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$ و $n > 1$) در این صورت با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^4 را بیابید.

حل تمرینات درس اول فصل اول

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 7 & i=j \\ i+j & i>j \\ i^2 & i<j \end{cases}$$

سوال ۱:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned} \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2, y = 1$$

سوال ۲:

$$z = -1 \rightarrow x + y + z = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

سوال ۳:



$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ ۱ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۶ \\ ۳۳ & ۴۸ \end{bmatrix} \Rightarrow AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

$$AC = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ ۱ & ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۶ \\ ۳۳ & ۴۸ \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad B = [b_{ij}]_{۲ \times ۲} \quad C = [c_{ij}]_{۲ \times ۲}$$

$$AB = AC = \overline{O} \not\Rightarrow B = C$$

$$AB - AC = \overline{O} \rightarrow A(B - C) = \overline{O} \not\Rightarrow \begin{cases} A = \overline{O} \\ B = C \end{cases}$$

**UPDF**

WWW.UPDF.COM

حل تمرین ۵

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^w = A^r \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$$

$$A^r = I \quad A^w = A \quad A^v = A$$

حل تمرین ۶

$$\begin{bmatrix} r & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r \\ w & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + wa & -\lambda + ra \\ b - w & -rb - r \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda + ra = 0 \rightarrow a = r \\ b - w = 0 \rightarrow b = w \end{cases}$$

۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

۷- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه هایشان نوشته و سپس $A \times B$ و $B \times A$ را به دست آورید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + 2 & i < j \end{cases}$$

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A \times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۹- اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و B ماتریسی هم مرتبه A در این صورت الف) برای $A \times B$ و $B \times A$ قوانینی تعریف کنید. ب) آیا تساوی $A \times B = B \times A$ برقرار است؟

۱۰- اگر A و B ماتریس های 3×3 و تعویض پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A + B)^T = A^T + 2AB + B^T$

ب) $(A - B)(A + B) = A^T - B^T$

۱۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل A^3 را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟



UPDF

WWW.UPDF.COM

حل تمرین ۷:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 19 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_1 b_{12} & r_1 b_{13} \\ r_2 b_{21} & r_2 b_{22} & r_2 b_{23} \\ r_3 b_{31} & r_3 b_{32} & r_3 b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

سطر اول B در r_1 ضرب می شود

سطر دوم B در r_2 ضرب می شود

سطر سوم B در r_3 ضرب می شود

ستون اول B در r_1 ضرب می شود

ستون دوم B در r_2 ضرب می شود

ستون سوم B در r_3 ضرب می شود

$$B \times A = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_2 b_{12} & r_3 b_{13} \\ r_1 b_{21} & r_2 b_{22} & r_3 b_{23} \\ r_1 b_{31} & r_2 b_{32} & r_3 b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$



UPDF

WWW.UPDF.COM

حل تمرین:

$$A = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13} \\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23} \\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33} \end{bmatrix} = rB$$

$$\Rightarrow A \times B = B \times A = rB$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13} \\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23} \\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow rB$$

$$(A + B)^T = (A + B)(A + B) = A^T + AB + BA + B^T \xrightarrow{A, B} A^T + 2AB + B^T$$

تعویض پذیرند

$$(A - B)(A + B) = A^T - AB + BA + B^T \xrightarrow{A, B} A^T - B^T$$

تعویض پذیرند

$$A^3 = A \times A^T = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^T & 0 & 0 \\ 0 & r_2^T & 0 \\ 0 & 0 & r_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & r_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس و دترمینان

وارون ماتریس‌ها

همان‌طور که در اعداد حقیقی وارون هر عدد حقیقی مانند $a (a \neq 0)$ را با $\frac{1}{a}$ نشان می‌دهیم و همواره $a \times \frac{1}{a} = 1$ (عدد یک عضو خنثی برای عمل ضرب است)

برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون B به‌طوری‌که $A \times B = B \times A = I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

از وارون ماتریس‌ها در حل دستگاه‌های معادلات استفاده خواهد شد.

مسئله: نشان دهید ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است. کافی است با توجه به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم $AB = BA = I$.

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه وارون یک ماتریس 2×2 مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (در صورت وجود)

باید ماتریسی چون $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ بیابیم طوری که $A \times B = B \times A = I$ یا

که این تساوی x, y, z, t را بر حسب a, b, c, d نتیجه

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

می‌دهد و ماتریس B یا A^{-1} به صورت

که با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس می‌توان نوشت:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

عدد $(ad-bc)$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم و با نماد $|A|$ (می‌خوانیم، دترمینان A) نشان می‌دهیم بنابراین می‌توان گفت:

نتیجه

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

تذکر: با توجه به قاعده محاسبه A^{-1} واضح است که اگر $|A| = 0$ آنگاه A^{-1} وجود ندارد. (وارون‌پذیر نیست). به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای اینکه A^{-1} وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) آن است که $|A| \neq 0$.

مثال: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

چون $|A| = 2 \neq 0$ پس A دارای وارون است (وارون‌پذیر است) و داریم

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

پاسخ به دست آمده را امتحان کنید.

حل دستگاه معادلات (دومعادله و دومجهولی) با استفاده از ماتریس وارون

یکی از کاربردهای ماتریس و ماتریس وارون در حل دستگاه‌های معادلات خطی است که ما در این درس و با استفاده از ماتریس وارون فقط به حل دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول می‌پردازیم.

آیا دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و

خیر $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA \neq I$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض باشد ماتریس

$(A^{-1})^{-1}$ را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A^{-1} = \frac{1}{8-3} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = 5 \times \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

قضیه یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس‌های 2×2 محاسبه شده است) در صورت وجود منحصر به فرد است.

اثبات: فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند ثابت می‌کنیم $B = C$

$$\text{طبق فرض: } AB = BA = I$$

$$\text{طبق فرض: } AC = CA = I$$

$$B = IB = (CA)B = C(AB)$$

$$= CI = C$$



فعالیت

دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و دستگاه را به صورت یک تساوی ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (1)$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{bmatrix} 2x + y \\ 7x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

معادله ماتریسی اخیر معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهول مفروض است.

۱- حال اگر فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ را ماتریس ضرایب می‌نامیم در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس A وارون دارد (وارون پذیر است) و در ثانی A^{-1} را بیابید.

$$|A| = 2 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 8 - 7 = 1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ وارون پذیر است}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

۲- معادله ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{شرکت پذیری} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

نتیجه

در حالت کلی اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه دو معادله و دو مجهول باشند در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادله ماتریسی $AX=B$ نوشته شده و در صورتی که ماتریس A وارون پذیر باشد یا $|A| \neq 0$ با ضرب A^{-1} از چپ در معادله فوق می توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \\ \Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

حل: ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و چون $|A|=2 \neq 0$ پس A^{-1} وجود دارد. با جابه جایی درایه های روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی ماتریس A و تقسیم درایه های ماتریس حاصل بر $|A|=2$ ، ماتریس A^{-1} را به دست می آوریم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{4}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تعریف تساوی ماتریس ها}} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

تذکر: هدف از حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، پیدا کردن x و y ای است که در هر دو معادله دستگاه که هر کدام معادله یک خط هستند، صدق کند و تعبیر هندسی حل دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط است.

یادآوری

در واقع یک دستگاه دو معادله دو مجهولی از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادله یک خط هستند. لذا با دیدگاه هندسی می توان گفت وقتی صحبت از جواب این دستگاه می کنیم منظور یافتن نقطه ای است که روی هر دو خط واقع شده باشد. بنابراین سه حالت زیر را برای یک دستگاه می توان در نظر گرفت:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -4x+2y=2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا می توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟ این دو خط نسبت به هم چگونه اند؟

خیر زیرا دترمینان ضرایب برابر صفر است پس ماتریس وارون پذیر نیست
دو خط دارای شیب برابرند پس موازی یکدیگرند

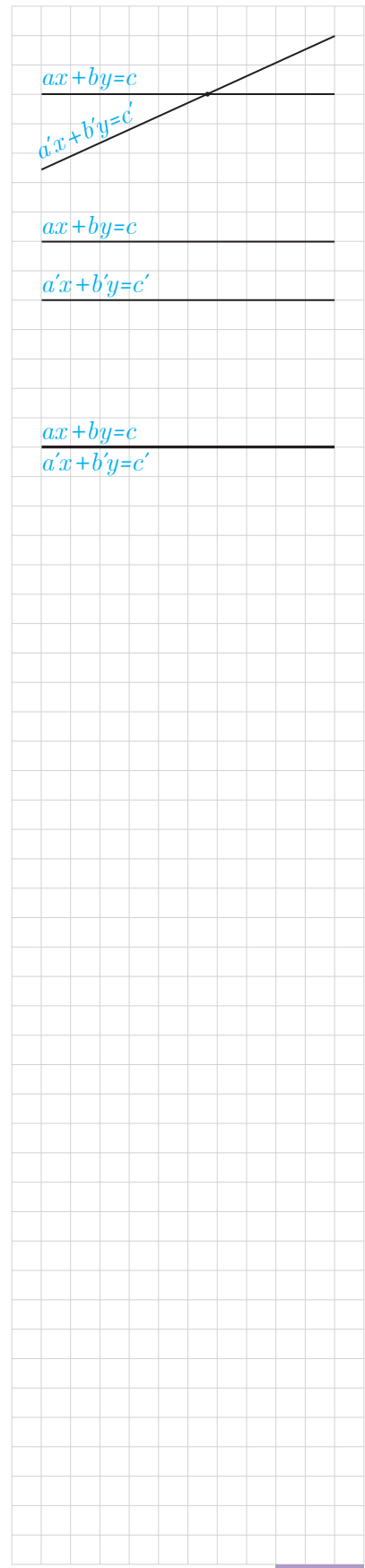
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط متقاطع اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد که مانند مثال قبل به دست می آید.

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط موازی اند و یکی از دو حالت زیر می تواند رخ دهد:

۱- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی اند و هیچ نقطه مشترکی ندارند لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۲- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی اند و روی یکدیگر واقع اند یا به عبارتی هر دو معامله یک خط را نشان می دهند؛ لذا دستگاه تعداد بی شمار جواب دارد و هر نقطه ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می کند.



نتیجه

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم در این صورت با توجه به (الف) و (ب) می توان گفت:

I) اگر $|A| \neq 0$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است (دو خط متقاطع اند).

II) اگر $|A| = 0$ در این صورت یا دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی اند) و یا اینکه دستگاه بی شمار جواب دارد (دو خط برهم منطبق هستند).

کاردکلاس

دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

۱- هریک از معادلات دستگاه معادله یک خط در صفحه است. شیب هریک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲- ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون پذیر است؟ چرا؟

۳- سؤال های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -3x + 9y = -6 \end{cases}$ پاسخ داده و اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و $|A| = 0$ برای تعداد جواب های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

سوال ۱:

$$\begin{cases} ۲x - ۳y = ۳ \Rightarrow m = \frac{۲}{۳} \\ -۴x + ۶y = ۱ \Rightarrow m = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$\frac{۲}{-۴} = \frac{-۳}{۶} \neq \frac{۳}{۱} \Rightarrow$$

دو خط با هم موازیند ولی برهم منطبق نیستند

سوال ۲:

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۲ \times ۶ - (-۳)(-۴) = ۱۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow$$

ماتریس وارون پذیر نیست



$$\begin{cases} x - 3y = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{3} \\ -3x + 9y = -6 \Rightarrow m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{-3} = \frac{-3}{9} = \frac{2}{-6}$$

دو خط ما بهم موازنند و برهم منطبق هستند

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \times 9 - (-3)(-3) = 9 - 9 = 0 \Rightarrow$$

ماتریس وارون پذیر نیست

چون دو خط برهم منطبق هستند پس دستگاه بی شمار جواب دارد

■ دترمینان و کاربردهای آن

به هر ماتریس مربعی می توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می شود. دترمینان یک ماتریس اطلاعات مفیدی راجع به خود ماتریس و خواص آن به ما خواهد داد، از جمله اینکه: وارون پذیری یک ماتریس از مقدار دترمینان آن ماتریس مشخص می شود. همان طور که ملاحظه شد، در حل دستگاه ها و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه از دترمینان استفاده می شود. دترمینان در هندسه برای محاسبه مساحت مثلث و متوازی الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار به کار می رود. به کمک دترمینان ماتریس های 3×3 می توان حجم متوازی السطوح حاصل از سه بردار را به دست آورد و نیز در محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده کرد که در این درس به بعضی از این کاربردها خواهیم پرداخت.

وقتی به تاریخ پیدایش مفهوم ماتریس برمی گردیم مشاهده می کنیم که مفهوم دترمینان که امروزه به عنوان بخشی از مفهوم ماتریس مطرح می شود، اندکی پیش از مفهوم ماتریس به وجود آمده است. نظریه دترمینان در نیمه دوم قرن هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم، با بررسی ها و پژوهش های «گابریل کرامر» ریاضی دان سوئیسی (۱۷۵۲-۱۷۰۴) در مسائل مربوط به حل و بحث دستگاه های معادلات خطی پدید می آید.

تعریف: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد ($1 \leq n \leq 3$) در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می دهیم و داریم:

(ما در این کتاب دترمینان را برای ماتریس های حداکثر از مرتبه ۳ تعریف می کنیم.)

$$\text{I) } A = [k]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = k \quad \text{II) } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$\text{III) } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(برای هر ماتریس 3×3 دلخواه می توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که همواره حاصل، عددی حقیقی و منحصر به فرد است).

در واقع دترمینان ماتریس های 2×2 را می توان تابعی در نظر گرفت که دامنه آن مجموعه ماتریس های 2×2 و هم دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است.

$$\det: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc$$

(منظور از $M_{2 \times 2}$ مجموعه ماتریس های 2×2 است).

مثال: دترمینان هریک از ماتریس های زیر را به دست آورید:

الف) $A = [-7] \rightarrow |A| = -7$

ب) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \sqrt{2}$

پ) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = [(4 \times 4) - (2 \times 8)] = 0$

$$\text{ت) } A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-1 \cdot 0) - (1 \cdot 2) = -22$$

$$\text{ث) } A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

مثال: دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را برحسب یک سطر و یک ستون دلخواه به دست آورید:

$$\text{الف) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر اول

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (0 - 12) + (0 + 6) + 2 \times (8 + 2) = (-12) + 6 + 20 = 14$$

برحسب ستون سوم

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (8 + 2) - 3 \times (4 - 2) + 0 = 20 - 6 = 14$$

تذکر: همان‌طور که در قسمت (الف) مشاهده کردید وقتی در یک ماتریس روی یک سطر یا یک ستون، درایه یا درایه‌های صفر هستند دترمینان آن ماتریس برحسب همان سطر یا ستون راحت‌تر محاسبه می‌شود.

$$\text{ب) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر دوم

$$|A| = 0 + 0 + 4 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \times (8 - 3) = -20$$

برحسب ستون اول

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 + (-3) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (0 - 16) - 3 \times (-4 - 0) = -32 + 12 = -20$$

(درایه ۲) روی سطر اول و ستون اول قرار دارد و درایه ۳ (-) روی سطر سوم و ستون اول واقع است.)

دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 11 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 13 + 6 = 19$$

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3

در این روش (فقط برای ماتریس های 3×3 قابل استفاده است). دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

مثال: دترمینان ماتریس A را بر حسب سطر سوم و با استفاده از دستور ساروس به دست آورید (کدام روش راحت تر است؟).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

بر حسب سطر سوم

$$|A| = (-1) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -1 \times (9 - 8) + 2(6 - 4) + 1 \times (4 - 3) = -1 + 4 + 1 = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (4 - 9 - 8) - (-8 - 12 + 3) = -13 + 17 = 4$$

کاردکلاس

۱- ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند. ماتریس $A \times B$ را به دست آورده و برقراری تساوی $|AB| = |A||B|$ را بررسی کنید.

۲- ماتریسی 3×3 چون A بنویسید طوری که $|A| = -6$ ، سپس ماتریس A^2 را محاسبه و $|A^2|$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 25 & 11 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = 2 \times 11 - 0 \times 25 = 22$$

$$|A| = 2 \times 4 - (-1) \times 3 = 8 + 3 = 11 \Rightarrow |AB| = |A| \times |B|$$

$$|B| = 3 \times 2 - 1 \times 4 = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A^2| = 4 \times 9 \times 1 = 36 \Rightarrow |A^2| = |A|^2$$

$$|A| = -6 \Rightarrow |A|^2 = 36$$

۳- اگر $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را بر حسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی A ، مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و $a_{11} = 4$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (4 \cdot 4 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 64$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (abc + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = abc$$

نتیجه

۱- دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با **جایگزینی اعداد روی قطر اصلی**

۲- دترمینان ماتریس مربعی صفر، **صفر**... است.

۴- اگر A ماتریسی 3×3 باشد و داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{2} = 1.00$$



تمرین

۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & & \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به دست آورید.

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^2|$ را به دست آورید.

۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(|A|^3 - 2)$ را بیابید.

۴- دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۵- ماتریسی 3×3 چون A بیاید که $|A| = 3$.

تمرین ۱:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + (-2) + (-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \end{bmatrix} = -13 \Rightarrow |AB| = -13$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

$$|BA| = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (-36 - 36 - 36) - (-36 - 36 - 36) = 0$$

$$|A| = (-2)(-3)(-5) = -30$$

$$|A^T| = |A|^T = (-30)^T = 900$$

تمرین ۲:

$$|A| = 2 \cdot |A|^2 - 5|A| \Rightarrow 2 \cdot |A|^2 - 6|A| = 0 \Rightarrow |A| (2 \cdot |A|^2 - 6) = 0$$

$$|A| = 0 \Rightarrow |A|^3 - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot |A|^2 - 6 = 0 \Rightarrow |A|^2 = \frac{3}{1} \Rightarrow |A| = \pm \sqrt{3} \Rightarrow |A|^3 - 2 = \pm (3\sqrt{3}/3) - 2$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$|A| = d \times \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} - e \times \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + f \times \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = d(bc - cb) - e(ac - ac) + f(ab - ab) = 0$$

اگر ماتریسی دارای دو سطر برابر باشد و ترینان آن صفر است

۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(2A^{-1} - 3B^{-1})$ را بیابید.

۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس A^{-1} را به دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-1}|$ مقایسه کنید.

۸- الف) ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت الف) را برای دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ بررسی کنید.

۹- برای ماتریس 2×2 مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۰- اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A| = 5$ در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

$$||A|A| = |A|^3 |A| = |A|^4 = 5^4 = 625$$

۱۱- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.

۱۲- به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

۱۳- روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

$$\text{الف) } \begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \text{ب) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$$

$$\text{پ) } \begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$$

$$۲ \times \frac{1}{۱۴} \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} - ۳ \times \frac{1}{۱۷} \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۷} & \frac{-۳}{۷} \\ \frac{-۲}{۷} & \frac{۴}{۷} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۳}{۱۷} & \frac{-۹}{۱۷} \\ \frac{۱۵}{۱۷} & \frac{۶}{۱۷} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{۸۵+۲۱}{۱۱۹} & \frac{-۵۱-۶۳}{۱۱۹} \\ \frac{-۳۴+۱۰۵}{۱۱۹} & \frac{۶۸+۴۲}{۱۱۹} \end{bmatrix} = \frac{1}{۱۱۹} \begin{bmatrix} ۱۰۶ & -۱۱۴ \\ ۷۱ & ۱۱۰ \end{bmatrix}$$



UPDF

WWW.UPDF.COM

تمرین ۷:

$$A^{-1} = \frac{1}{\kappa} \times \begin{bmatrix} \mu & -\mu \\ -\mu & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & -\frac{1}{\mu} \\ \frac{-\mu}{\kappa} & \frac{\delta}{\kappa} \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{\delta}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\kappa}$$

$$|A| = 1 \cdot \delta - \mu = \kappa$$

$$|A| \times |A^{-1}| = \kappa \times \frac{1}{\kappa} = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

**UPDF**

WWW.UPDF.COM

تمرین ۸: الف)

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \Rightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} ka & kb \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \Rightarrow |B| = (kaei + kbfg + kcdh) - (kceg + kafh + kbdi)$$

$$= k(aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi) = k|A|$$

$$\Rightarrow |B| = k|A|$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = kad - kbc = k(ad - bc) = k|A|$$

ب)

اگر یک سطر از ماتریس در عددی ضرب شود در ترمینان آن نیز در همان عدد ضرب می شود

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \Rightarrow |kA| = k^r ad - k^r bc = k^r (ad - bc) = k^r |A|$$

اگر ماتریسی در عددی ضرب شود در ترینان آن در مجذور همان عدد ضرب می شود

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} \quad |A| = 3 \times 2 - (-5) \times 4 = 6 + 20 = 26$$

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2+50}{26} \\ \frac{-4+30}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -2k - 3 \neq 0 \Rightarrow k \neq -\frac{3}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 + 10 = 13 \neq 0$$

$$\frac{3}{2} \neq \frac{-5}{1} \Rightarrow \text{دستگاه یک جواب منحصر فرد دارد}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+40}{13} \\ \frac{2+24}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}$$

$$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{2}{-4} \Rightarrow$$

دو خط برهم منطبقند پس دستگاه بی شمار جواب دارد

ب)

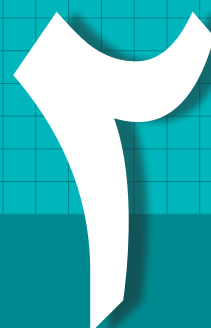
$$\frac{1}{-2} = \frac{3}{-6} \neq \frac{5}{-1} \Rightarrow$$

دو خط باهم موازیند پس دستگاه جواب ندارد

پ)

فصل دوم

آشنایی با مقاطع مخروطی

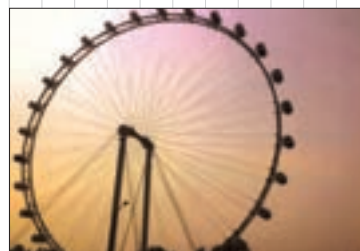


■ برج طغرل در شرق آرامگاه ابن بابویه شهرری و از آثار به جامانده از دوره سلجوقیان است. ارتفاع برج حدود ۲۰ متر است و به عقیده برخی کارشناسان این برج مانند یک ساعت آفتابی عمل می کند و می توان از روی تابش آفتاب بر روی کنگره های آن، زمان را تشخیص داد.

شکل این برج به صورت یک مخروط ناقص توخالی است و در نتیجه در ساعاتی مختلف روز خورشید به درون آن تابیده و سطح داخلی آن را تا حدودی روشن می کند. مرز بین سایه و روشنایی، بخشی از محیط یک بیضی است! (چرا؟)

آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

■ مقاطع مخروطی

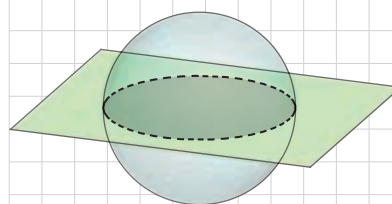
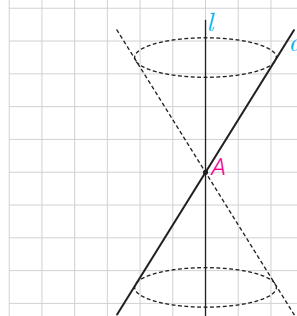


در پایه دهم با سطح مقطع صفحه با برخی اجسام هندسی آشنا شدید. فرض کنید یک کره را (مانند شکل) توسط یک صفحه قطع کنیم (برش دهیم). منظور از فصل مشترک خط و کره مجموعه نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند. به نظر شما فصل مشترک یک صفحه و یک کره چه شکلی می تواند باشد؟

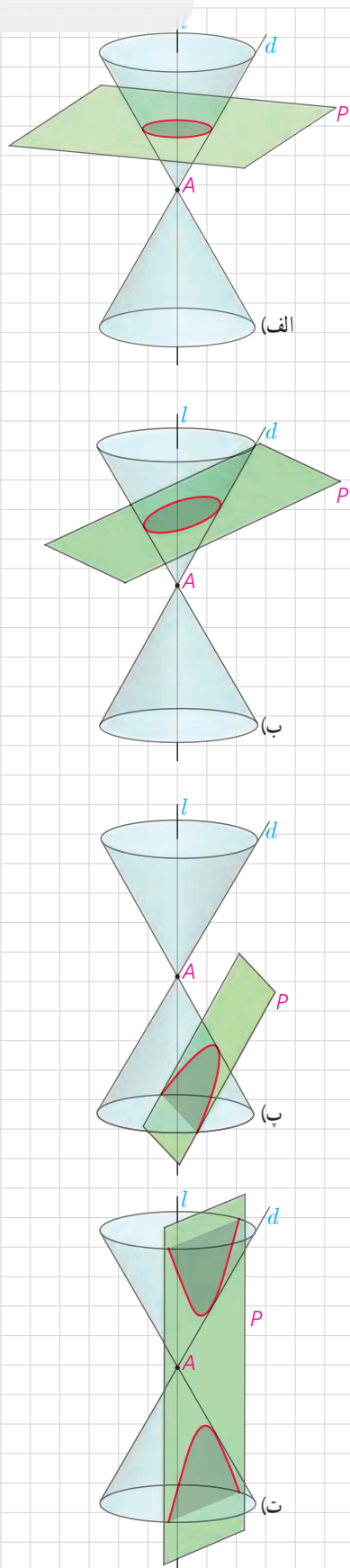
دایره توخالی - نقطه صفحه مماس باشد

رویه مخروطی: فرض کنید دو خط d و l در نقطه A (مانند شکل) متقاطع (غیرعمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می نامیم. در این حالت خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می نامیم.

حال می خواهیم به طور شهودی با فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی، با توجه به حالت های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، آشنا شویم. از تصاویر ارائه شده برای درک بهتر شکل حاصل کمک بگیرید.



الف) در حالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.
- در چه حالتی فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی تنها نقطه A خواهد بود؟



ب) در حالتی که صفحه P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.

پ) اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آنها یک خط است.)

ت) اگر صفحه P به گونه ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است. در این کتاب به تعریف دقیق و بررسی خواص هذلولی نخواهیم پرداخت.

با تعریف دایره آشنایی قبلی دارید. توجه داشته باشید که بیضی، سهمی و هذلولی نیز هر کدام تعاریف دقیق و مشخص دارند، اما اینکه چرا فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی مطابق با آنچه گفته شد دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی است، قابل اثبات است ولی ما در این کتاب به این اثبات ها نمی پردازیم. حال که با دایره، بیضی، سهمی و هذلولی (مقاطع مخروطی) به صورتی آشنای شدیم، برای تعریف دقیق این اشکال، ابتدا مفهوم مکان هندسی را معرفی می کنیم.

مکان هندسی

طریقهٔ رسم و ویژگی‌های عمود منصف یک پاره خط را از کتاب هندسهٔ ۱ به خاطر دارید. دو ویژگی زیر را یادآوری می‌کنیم:

- هر نقطه روی عمود منصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.
- هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمود منصف آن است.

اگر خط d عمود منصف پاره خط AB باشد، در این صورت

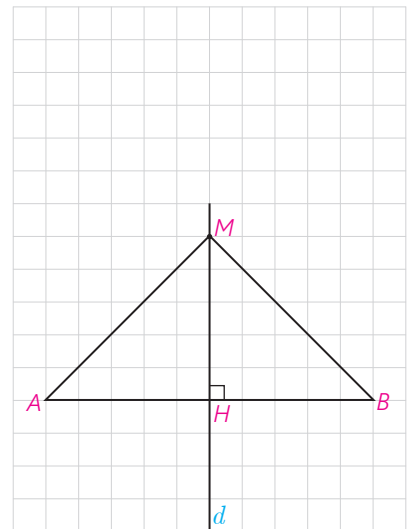
$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$$

به طور خلاصه، یک نقطه روی عمود منصف پاره خط است، اگر و تنها اگر از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد.

به عبارت معادل، می‌گوئیم عمود منصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله‌اند.

به طور کلی مفهوم مکان هندسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف: مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.



۱- فعالیت

در کتاب هندسه ۱ با ویژگی‌ها و طریقهٔ رسم نیمساز زاویه آشنا شدید. دو قضیه مهم در مورد نیمساز زاویه را یادآوری کنید:

۱- هر نقطه روی نیمساز زاویه باشد. **فاصله آن از دوضلع زاویه به یک اندازه است**

۲- هر نقطه که روی نیمساز زاویه است.

فاصله آن از دوضلع زاویه به یک اندازه باشد

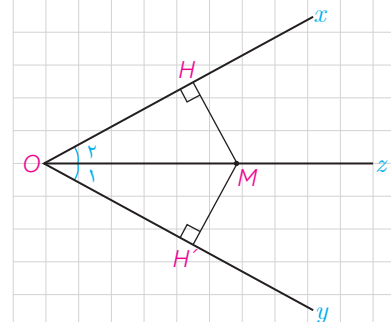
اکنون گزاره زیر را کامل کنید:

یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر **فاصله آن از دوضلع زاویه به یک اندازه باشد**

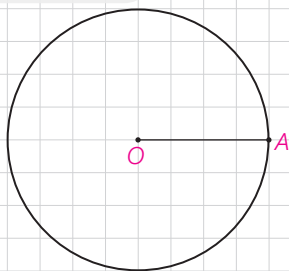
$$(\hat{O}_1 = \hat{O}_2) \quad M \in Oz \Leftrightarrow MH = MH'$$

بنابراین می‌توان گفت:

نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که



۲ فعالیت



دایره C به مرکز O و شعاع r را در نظر بگیرید.
 الف) هر نقطه دلخواه A روی دایره، از O چه فاصله‌ای دارد؟ **اندازه شعاع**
 ب) اگر B ، یک نقطه در صفحه باشد و از O به فاصله r باشد ($OB=r$) با برهان خلف نشان دهید، B روی دایره است و از الف) و ب) نتیجه بگیرید:
 $A \in C \Leftrightarrow OA=r$

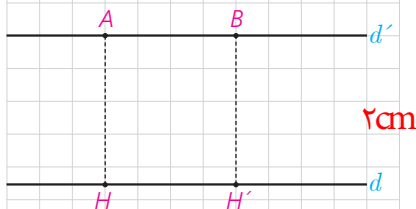
نتیجه

نقطه A روی دایره $C(O, r)$ است، اگر و فقط اگر فاصله آن تا مرکز برابر با شعاع باشد

نتیجه

دایره $C(O, r)$ مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت بفاصله ثابت باشد

۳ فعالیت



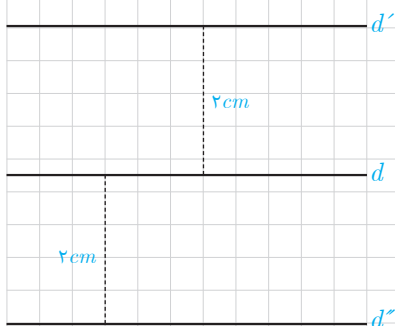
دو خط موازی d ، d' را که فاصله آنها از هم ۲ سانتی متر است، در نظر بگیرید. آیا نقطه‌های دلخواه A و B روی d' ، از خط d فاصله یکسانی دارند؟ این فاصله چقدر است؟ آیا می‌توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از d به فاصله ۲ سانتی متر باشند و روی d' نباشند؟ همه نقاطی که از d به فاصله ۲ سانتی متر واقع‌اند، روی چه شکلی قرار دارند؟ **خطی موازی با خط d در طرف دیگر**

آیا گزاره زیر درست است؟ **بله**

یک نقطه در صفحه، از خط d به فاصله ۲ سانتی متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط d' و d'' که موازی d هستند، واقع باشد.

آیا نتیجه‌گیری زیر درست است؟ **بله**

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۲ سانتی متر هستند، دو خط راست موازی d (در دو طرف آن) و به فاصله ۲ سانتی متر از آن می‌باشد.



■ مکان های هندسی مهم در صفحه :

- مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت A و B در صفحه به یک فاصله اند، عمود منصف AB است.
- مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله اند، نیمساز آن زاویه است.
- مکان هندسی نقاطی که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت k قرار دارند، دایره ای به مرکز O و به شعاع k است.
- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت k قرار دارند، دو خط موازی d ، به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.

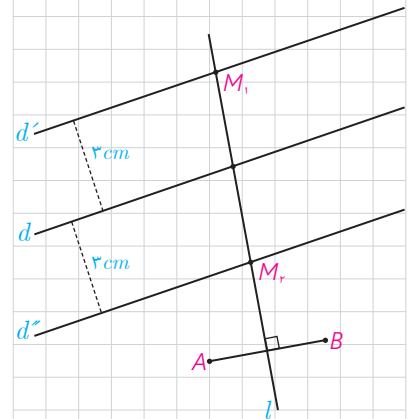
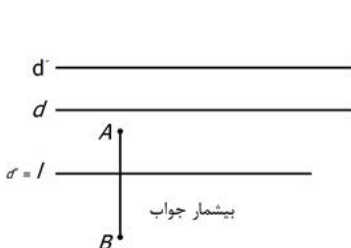
■ کاربرد مکان هندسی

یکی از مهم ترین کاربردهای مکان هندسی، ترسیم های هندسی و یافتن نقطه (یا نقاطی) است که دارای ویژگی معینی باشند. بدیهی است که اگر S_1 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_1 و S_2 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_2 باشد، $S_1 \cap S_2$ مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی P_1 و P_2 را دارند. بنابراین برای یافتن نقاطی که این دو ویژگی را داشته باشند، باید نمودارهای S_1 و S_2 را رسم کرده و نقطه (یا نقاط) برخورد آنها را به دست آورد.

مثال : دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ سانتی متر باشد.

حل : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی d به فاصله ۳ سانتی متر از آن هستند. بنابراین نقطه برخورد خط l (عمود منصف AB) و دو خط موازی d' و d'' جواب مسئله است (نقاط M_1 و M_2).

بحث در وجود جواب : اگر l یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم قطع می کند و مسئله مانند شکل، ۲ جواب دارد. اگر l با دو خط موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر l بر یکی از دو خط d' و d'' منطبق باشد، مسئله بی شمار جواب دارد.



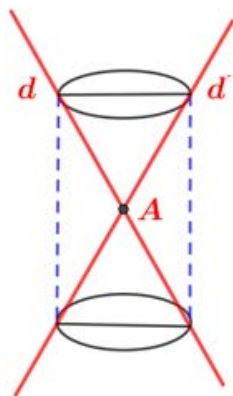


- ۱- مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید :
 الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند.
 ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس اند.
 پ) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند.
 ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی اند.

- ۲- نقاط C, B, A و D در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

- ۳- نقاط C, B, A و D در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از B و A به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).

- ۴- نقطه A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی متر و از d به فاصله ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).



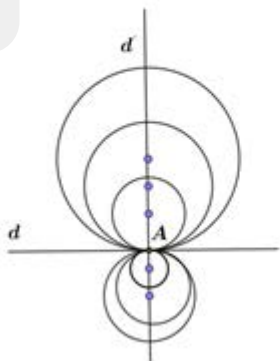
- ۵- هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟ **دو خط متقاطع**

- ۶- هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می نامیم. حال فرض کنید صفحه P ، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

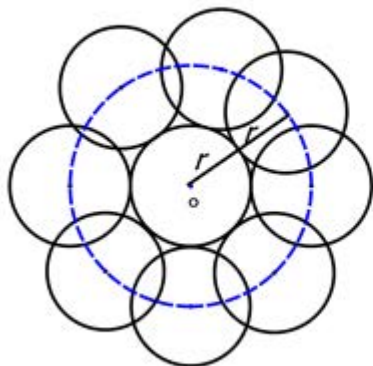


UPDF
WWW.UPDF.COM

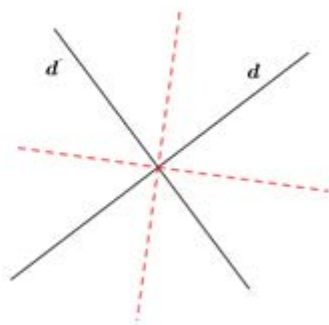
ب) روی خط عمود بر d در نقطه A (خود)



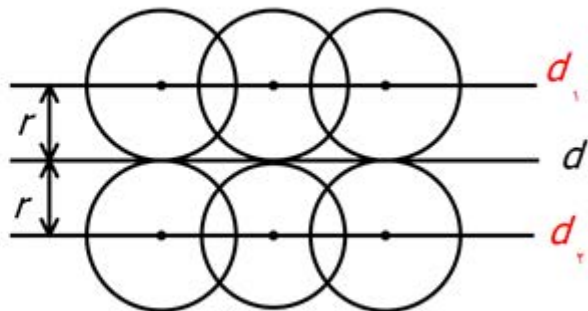
و دایره ای به مرکز O و به شعاع r



تمرین ۱ الف) دو تا نیمساز من دو خط

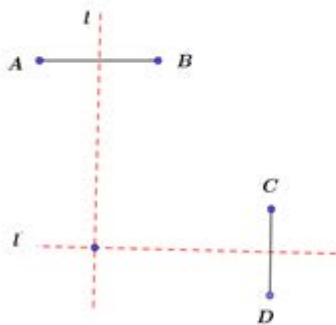


ج) دو خط موازی با خط d به فاصله r

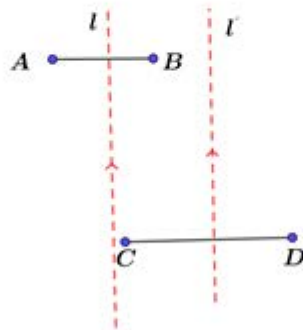


تمرین ۲: عمود منصف A, B و عمود منصف C, D را رسم می کنیم و آنها را l, l' می نامیم محل تقاطع l, l' (در صورت لزوم)

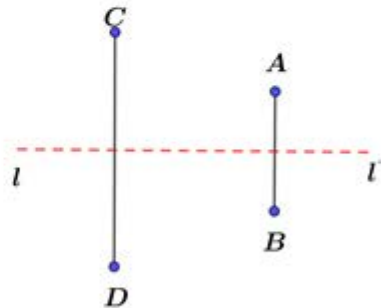
است که ممکن است یک نقطه، یا بی شمار یا هیچ نقطه ای بدست نیاید



یک جواب دارد



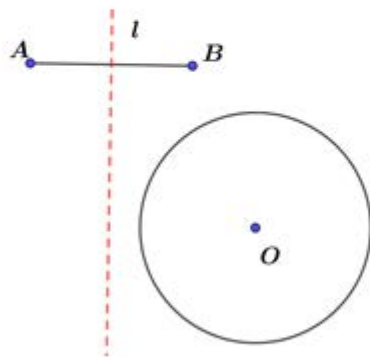
جواب ندارد



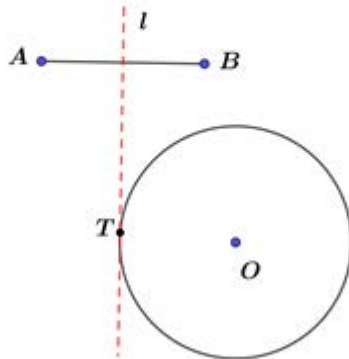
بی شمار جواب دارد

تمرین ۳: عمود منصف AB و دایره ای به مرکز O و شعاع ۳ سانتی متر را رسم می کنیم محل تقاطع (در صورت وجود)

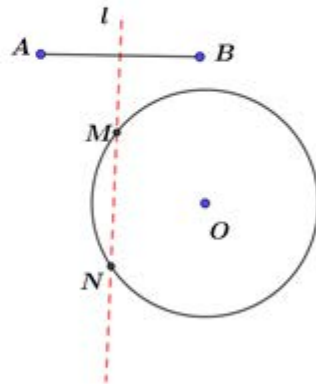
ممکن است دو نقطه، یا یک نقطه یا نقطه ای بدست نیاید.



نقطه مشترک ندارند



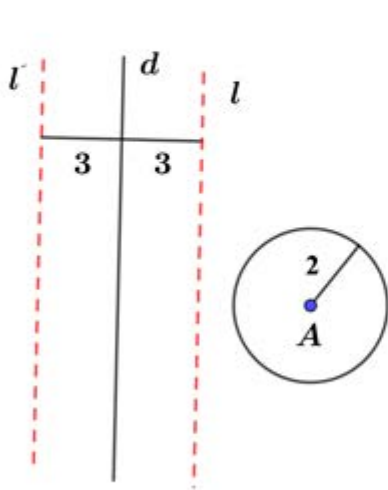
یک نقطه مشترک دارند



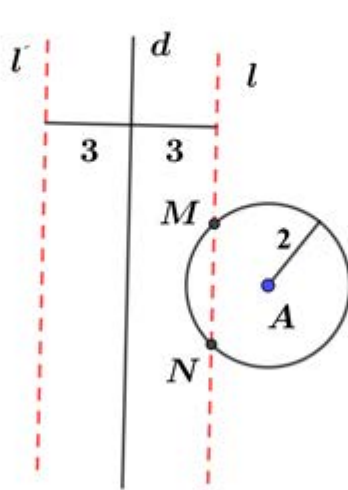
دو نقطه مشترک دارند

تمرین ۴: دایره ای به مرکز A به شعاع ۲ سانتی متر را رسم می کنیم و دو خط موازی d به فاصله ۳ سانتی متر در دو طرف آن قرار می دهیم.

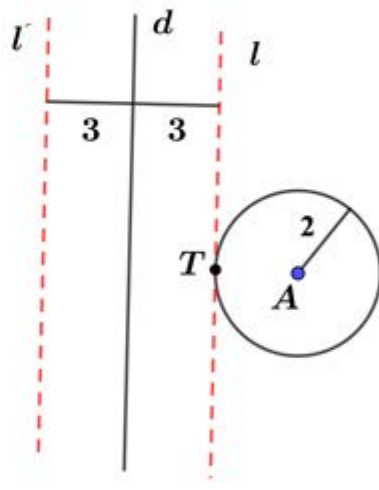
تقاطع (در صورت وجود) جواب مسأله است که ممکن است دو نقطه، یا یک نقطه یا نقطه ای نباشد.



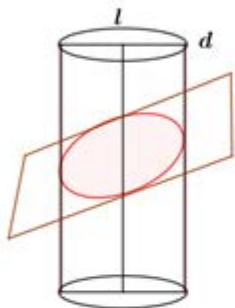
نقطه مشترک ندارند



دو نقطه مشترک دارند

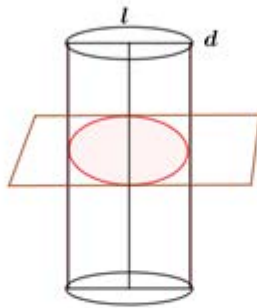


یک نقطه مشترک دارند



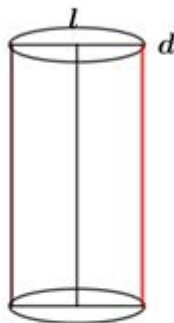
صفحه p با محور l متقاطع باشد ولی بر آن عمود نباشد که

سطح مقطع **بیضی** می شود



صفحه p عمود بر محور l باشد که سطح

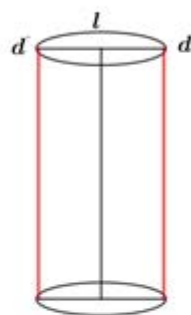
مقطع **دایره** می شود



صفحه p بر سطح استوانه تماس

باشد (یک خط به فاصله شعاع

استوانه از l)



صفحه p از l بگذرد (دو خط موازی با

l به فاصله شعاع استوانه از l)

دایره

معروف ترین مقطع مخروطی، دایره است و چنانچه قبلاً دیدیم، دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله ای ثابت (شعاع دایره) واقع اند. حال می خواهیم ویژگی های دایره را به صورت تحلیلی در دستگاه مختصات دوبعدی با هم مرور کنیم.

— معادله دایره: دایره $C(O', r)$ را در دستگاه مختصات xoy در نظر می گیریم. اگر $O'(\alpha, \beta)$ مرکز دایره باشد و $A(x, y)$ یک نقطه دلخواه روی آن باشد، با توجه به تعریف دایره، همواره $O'A = r$ و با توجه به دستور تعیین فاصله بین دو نقطه می توان نوشت:

$$|O'A| = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

و این معادله دایره ای به مرکز (α, β) و شعاع r است، که به آن معادله استاندارد دایره نیز می گوئیم.

مثال: معادله دایره ای به مرکز $O'(2, -1)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.

حل: به کمک دستور بالا معادله استاندارد دایره فوق نوشته می شود:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

اگر در این معادله، $y = 0$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور x به دست می آید:

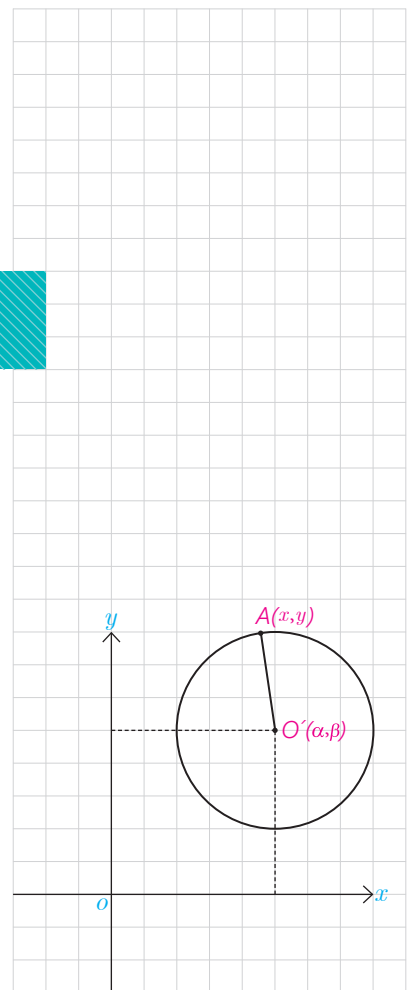
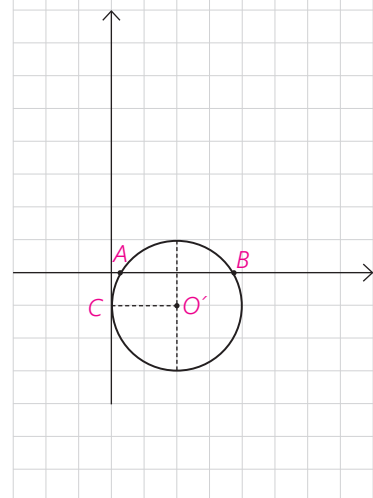
$$(x - 2)^2 + 1 = 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = 3$$

$$\Rightarrow x - 2 = \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

لذا دایره فوق محور x را در نقاط $A(2 - \sqrt{3}, 0)$ و $B(2 + \sqrt{3}, 0)$ قطع می کند و

اگر در معادله دایره، $x = 0$ قرار دهیم نقاط برخورد با محور y پیدا می شوند:

$$x = 0 \Rightarrow (y + 1)^2 = 0 \Rightarrow y = -1$$



بنابراین دایره فوق محور y ها را فقط در یک نقطه $C(0, -1)$ قطع می کند و می دانیم که اگر یک خط دایره ای را فقط در یک نقطه قطع کند، در آن نقطه بر آن مماس است. پس همان طور که در شکل هم دیده می شود، دایره در نقطه C بر محور y ها مماس است. در معادله دایره می توانیم به کمک اتحادها، عبارت های درجه دوم را ساده کنیم، مثلاً در معادله فوق داریم :

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$$

که این معادله را معادله ضمنی دایره می نامیم.

— تبدیل معادله ضمنی دایره به معادله استاندارد :

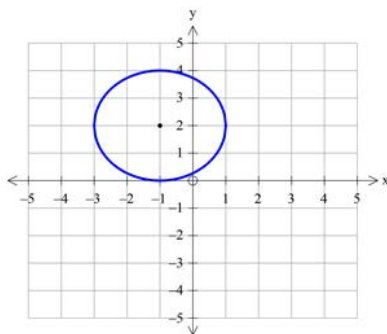
در حالت کلی معادله ای به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ممکن است معادله دایره ای باشد. برای این منظور عبارت های $x^2 + ax$ و $y^2 + by$ را به مربع کامل تبدیل می کنیم.

مثال: مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ را به دست آورید.

حل:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = -1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow O'(-1, 2), r=2$$



۱ فعالیت

می خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ را در حالت کلی به دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید :

$$\left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right) + c = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

$$\Rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه ای درباره a, b, c به دست می آید؟

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \rightarrow a^2 + b^2 > 4c$$

رابطهٔ ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2 + b^2 > 4c$ باشد و اگر $a^2 + b^2 < 4c$ باشد، این معادله هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند و اگر $a^2 + b^2 = 4c$ باشد، این معادله تنها یک نقطه به مختصات $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ را در صفحه مشخص می‌کند (چرا؟)

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ y = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

نتیجه

با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می‌توان معادلهٔ آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادلهٔ دایره می‌توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

کاردرکلاس

۱- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ و شعاع آن ۳ واحد باشد.

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

۲- معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r به چه صورت است؟

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

۳- کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها را به دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$

ب) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$

~~$4 + 9 = 16$~~ **خ (ب)**

ج) $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 2 = 0$

مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-2, -1)$ مرکز آن و $M(1, 1)$ یک نقطه از آن باشد.

روش دوم:

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2$$

$$\xrightarrow{M(1, 1)} 3^2 + 2^2 = r^2$$

$$\rightarrow r^2 = 13$$

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$$

حل: مرکز دایره را داریم، پس باید طول شعاع آن را داشته باشیم تا معادلهٔ آن را بنویسیم. روشن است که $OM = r$ پس طول OM را به دست می‌آوریم:

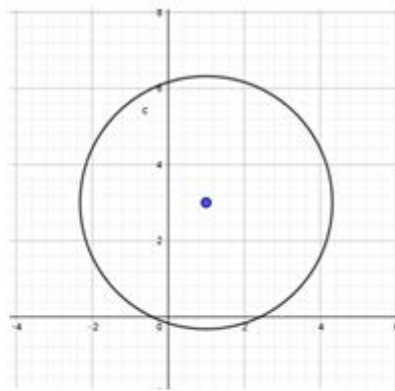
$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{13}$$

و معادله دایره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$$

✓ (الف)

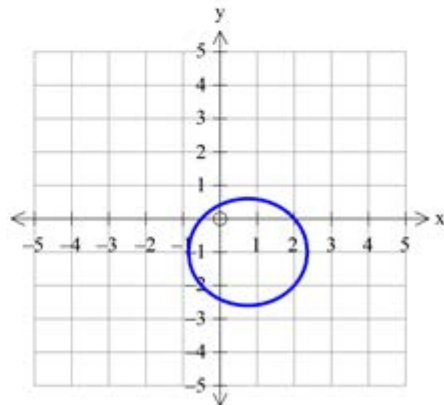
$$a^2 + b^2 > r^2 \rightarrow 16 + 36 > 16 \rightarrow 0 \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right|, r = \frac{\sqrt{16+36}}{2} = \sqrt{13}$$



✓ (ب)

$$\rightarrow x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y - 1 = 0$$

$$a^2 + b^2 > r^2 \rightarrow \frac{9}{4} + 4 > 16 \rightarrow 0 \left| \begin{array}{c} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{array} \right|, r = \frac{\sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{2} = \frac{\sqrt{25}}{4} = \frac{5}{4}$$



۲ فعالیت

معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(1, -1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله $3x - 4y + 3 = 0$ مماس باشد.

۱- با توجه به آنچه از هندسه ۲ به یاد دارید، شعاع دایره در نقطه تماس (H) بر خط عمود است.

۲- طول شعاع دایره برابر است با فاصله مرکز دایره از خط d .

۳- به کمک دستور فاصله نقطه از خط داریم: $r = OH = \frac{|\dots\dots\dots|}{\sqrt{\dots\dots\dots}}$

۴- معادله دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می‌نویسیم:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$$

کاردکلاس

معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(0, 1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

(راهنمایی: می‌دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند.)

$$OB=R=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{2} \quad (x-0)^2 + (y-1)^2 = \frac{1 \cdot 2}{4}$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(-1, 1)$ بوده و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ از مماس بیرونی باشد.

حل: مختصات مرکز و شعاع دایره فوق را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \Rightarrow O'(1, -1), r' = \sqrt{2}$$

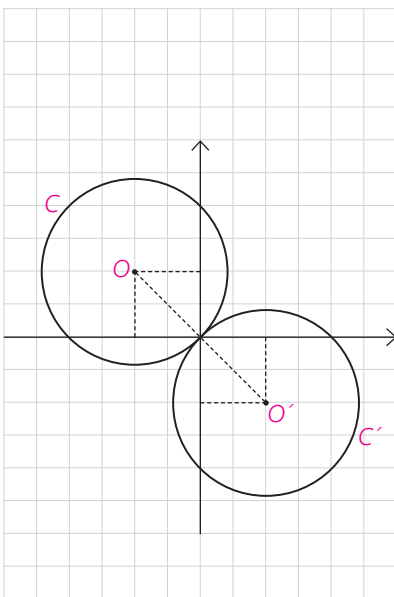
و چنانچه از هندسه ۲ می‌دانیم اگر $d = OO'$ طول خط‌المركزین دو دایره مماس خارج باشد، بنابراین داریم:

$$d = OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d = 2\sqrt{2} = r + \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره C را می‌نویسیم:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$



۳ فعالیت

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و با دایره $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد.

$$x^2+y^2-4x-6y=3 \rightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9-13=3 \rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=16$$

$$\rightarrow O(2,3), r=4$$

۱- معادله دایره فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

$$(x-2)^2+(y-3)^2=16 \Rightarrow O'(2,3), r'=4$$

۲- طول خط مرکزین دو دایره را به دست می آوریم:

$$d=OO'=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

۳- با توجه به آنچه از هندسه ۲ می دانیم، داریم:

$$d=|r-r'| \Rightarrow |r-4|=2\sqrt{2} \Rightarrow r-4=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r=4 \pm 2\sqrt{2}$$

۴- با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می نویسیم:

$$(x-0)^2+(y-1)^2=(4 \pm 2\sqrt{2})^2$$

$$(4 \pm 2\sqrt{2})^2=16+8 \pm 16\sqrt{2}=24 \pm 16\sqrt{2}$$

چرا مسئله دو جواب دارد؟

$$x^2+y^2-2y-23 \mp 16\sqrt{2}=0$$

چون برای شعاع دو مقدار پیدا شده است

کاردرکلاس

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

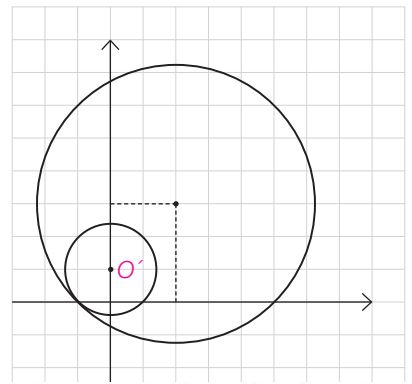
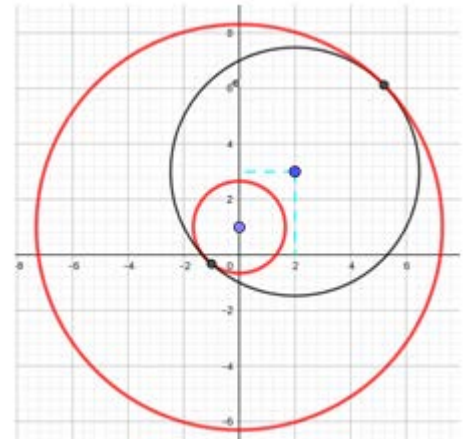
الف) $x^2+y^2-4x-6y=3$, $x^2+y^2-10x-14y+73=0$

ب) $x^2+y^2-2x=1$, $x^2+y^2=1$

ج) $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2-2x+2y+1=0$

د) $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-8x-4y+19=0$

(راهنمایی: مختصات مرکز و طول شعاع‌های هر دو دایره را به دست آورده و پس از تعیین طول خط مرکزین از اطلاعات خود از هندسه ۲ استفاده کنید.)





$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 13 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 13 = 13 \rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

$$\rightarrow O(2, 3), r = 4$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0 \rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 - 73 = 0 \rightarrow (x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 1$$

$$\rightarrow O'(5, 7), r' = 1$$

$$OO' = \sqrt{(2-5)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \quad OO' = r + r' \rightarrow \text{دو دایره ماس خارج هستند}$$

ب

$$x^2 + y^2 - 2x = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 1 = 1 \rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2$$

$$\rightarrow O(1, 0), r = \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow O'(0, 0), r' = 1$$

$$OO' = \sqrt{(1-0)^2} = 1 \rightarrow |r - r'| < OO' < r + r' \rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند}$$

$$x^r + y^r = 9 \rightarrow O(0,0), r=3$$

$$x^r + y^r - rx + ry + 1 = 0 \rightarrow x^r - rx + 1 + y^r + ry + 1 - r + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^r + (y+1)^r = 1 \\ \rightarrow O'(1,-1), r'=1$$

$$OO' = \sqrt{(0-1)^r + (0+1)^r} = \sqrt{r} \quad OO' < r - r' \rightarrow \text{دو دایره متداخل هستند}$$

6

$$x^p + y^p = 4 \rightarrow O(0,0), r=2$$

$$x^p + y^p - 4x - 4y + 19 = 0 \rightarrow x^p - 4x + 19 + y^p - 4y + 4 - 2 \cdot 0 + 19 = 0 \rightarrow (x-4)^p + (y-2)^p = 1 \\ \rightarrow O'(4,2), r'=1$$

$$OO' = \sqrt{(0-4)^p + (0-2)^p} = \sqrt{2 \cdot 0} = 2\sqrt{0} \quad OO' > r + r' \rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند}$$

۴ فعالیت

می‌خواهیم وضعیت خط به معادله $x+y=4$ و دایره $x^2+y^2-2y-3=0$ را تعیین کنیم.

روش اول: از معادله خط، $y=4-x$ را در معادله دایره جایگزین می‌کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه‌های برخورد از معادله حاصل به دست می‌آید):

$$x^2 + (4-x)^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow 2x^2 - 10x + 13 = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 104 = -4 < 0$$

با ساده کردن معادله حاصل و تعیین علامت Δ ، نشان دهید معادله فوق ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش دوم: معادله دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصله مرکز دایره از خط را بیابید. چگونه تشخیص می‌دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

با رسم شکل خط و دایره در یک دستگاه مختصات، درستی نتیجه گیری‌تان را ببینید.

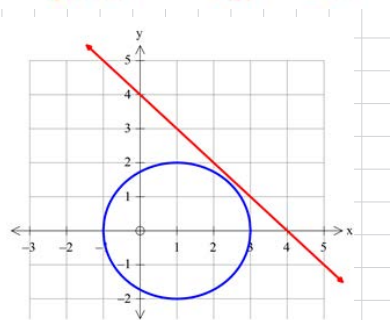
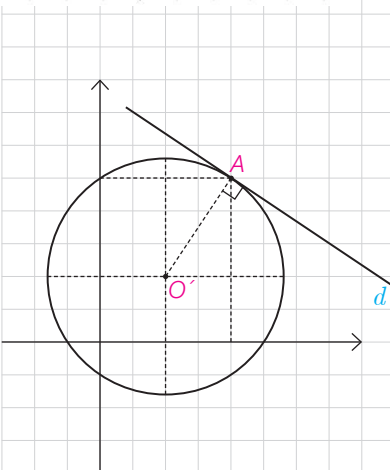
سؤال: اگر در معادله حاصل از برخورد خط و دایره، $\Delta > 0$ یا $\Delta = 0$ شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت‌ها فاصله مرکز دایره از خط چگونه است؟

مثال: در نقطه $A(2,3)$ روی دایره $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است، با تعیین مختصات مرکز دایره شیب OA را تعیین می‌کنیم و از آنجا شیب مماس را به دست آورده و معادله آن را تعیین می‌کنیم.

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow O(1,1) \Rightarrow m_{OA} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow$$

$$m_d = -\frac{1}{2} \Rightarrow y-3 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow \text{معادله مماس } d: y = -\frac{1}{2}x + 4$$



تمرین

۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که :

الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x+4y=0$ مماس باشد.

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ و تری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

۲- حدود a را طوری به دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله دایره باشد.

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \rightarrow 9 + 25 - 4a > 0 \rightarrow 34 - 4a > 0 \rightarrow a < \frac{17}{2}$$

۳- وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

۴- وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-2x=4$

ب) $x^2+(y-1)^2=1$, $(x-1)^2+y^2=1$

ج) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

د) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-2y+9=0$

۵- نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۶- وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $3x+4y=0$, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

ب) $x+y=2$, $x^2+y^2=2$

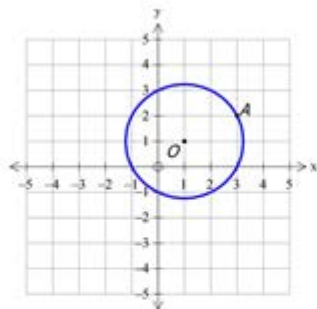
ج) $x+y=1$, $x^2+y^2-2x-2y=2$



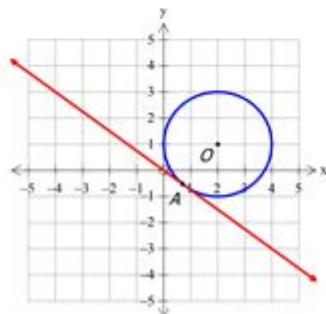
UPDF

WWW.UPDF.COM

حل تمارين صفحة ٤٦



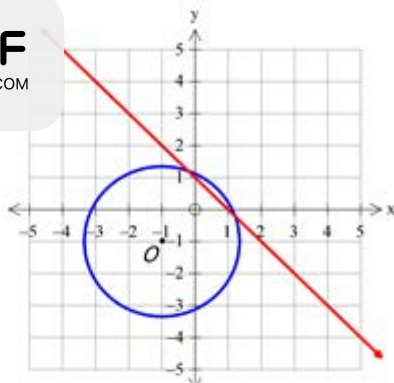
تمرين ١: الف) $r = OA = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$



ب) $r = \frac{|3(2) + 4(1) + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$
 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$



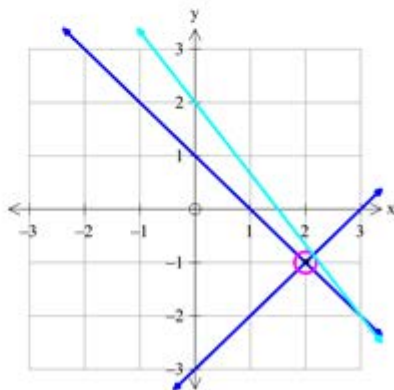
UPDF
WWW.UPDF.COM



$$OH = \frac{|-1-1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$r^2 = 1^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{11}{2}$$



$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2, y = -1$$

$$O(2, -1)$$

$$r = \frac{|2(2) + (-1) - 6|}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{10}$$



$$0 \mid \begin{array}{l} \alpha \\ 1\alpha - 1 \end{array}$$

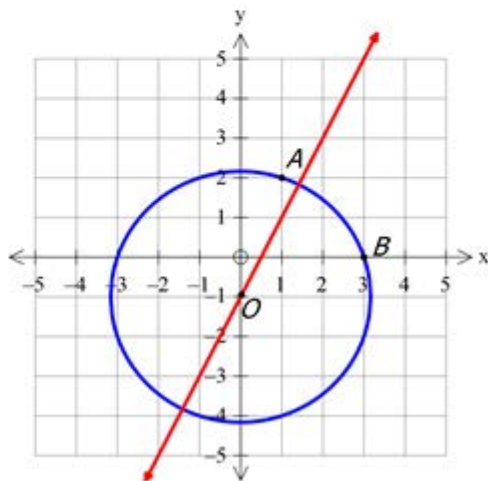
$$OA = OB = r = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (1\alpha - 1 - 1)^2} = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (1\alpha - 2)^2}$$

$$\cancel{\alpha^2} - 2\alpha + 1 + \cancel{1\alpha^2} - 1\cancel{2\alpha} + 4 = \cancel{\alpha^2} - 2\alpha + 4 + \cancel{1\alpha^2} - 2\alpha + 1$$

$$-1\cancel{2\alpha} + 1\cancel{0} = -1\cancel{0}\alpha + 1\cancel{0} \rightarrow \alpha = 0$$

$$0(0, -1) \Rightarrow OA = OB = r = \sqrt{1}$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 1$$



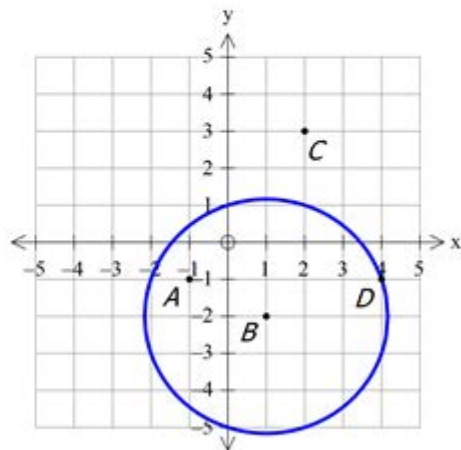
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -5 \end{cases} \quad r = \frac{\sqrt{4 + 16 + 20}}{2} = \sqrt{10}$$

$$OA = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} < r \rightarrow \text{نقطه درون دایره است}$$

$$OB = \sqrt{0 + 0} = 0 < r \rightarrow \text{نقطه روی مرکز دایره است}$$

$$OC = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26} > r \rightarrow \text{نقطه بیرون دایره است}$$

$$OD = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} = r \rightarrow \text{نقطه روی محیط دایره است}$$



$$x^2 + y^2 = 4 \quad O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} r = 2$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 4 \quad O' \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} r' = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 0^2 - 4(-4)} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$OO' = 1 \rightarrow |2 - \sqrt{5}| < 1 < 2 + \sqrt{5} \rightarrow |r - r'| < OO' < r + r' \rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند}$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad O \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} r = 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad O' \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} r' = 1$$

$$OO' = \sqrt{2} \rightarrow |1-1| < \sqrt{2} < 1+1 \rightarrow |r - r'| < OO' < r + r' \rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند}$$

ب:

$$x^r + y^r = 1 \quad O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} r=1$$

$$x^r + y^r - \mu\sqrt{p}x - \mu\sqrt{p}y + \Delta = 0 \quad O' \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} r' = \frac{1}{p} \sqrt{1\lambda + 1\lambda - p} = p$$

$$OO' = \sqrt{\frac{1\lambda}{p} + \frac{1\lambda}{p}} = \sqrt{q} = \mu \rightarrow \mu = 1 + p \rightarrow OO' = r + r' \rightarrow \text{دو دایره تماس خارج هستند}$$

ج:

$$x^r + y^r = 1 \quad O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} r=1$$

$$x^r + y^r - \mu x - \mu y + q = 0 \quad O' \begin{vmatrix} \mu \\ 1 \end{vmatrix} r' = \frac{1}{p} \sqrt{\mu^2 + \mu^2 - \mu^2} = 1$$

$$OO' = \sqrt{q+1} = \sqrt{1} = 1 \rightarrow \sqrt{1} > 1+1 \rightarrow OO' > r+r' \rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند}$$



UPDF

WWW.UPDF.COM

تمرین ۵: روش اول به روش حل دستگاه

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\begin{cases} 1+1-a-b+c=0 \\ 1+1+a+b+c=0 \\ 1+9+a-\mu b+c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a-b+c=-\mu & (1) \\ a+b+c=-\mu & (2) \\ a-\mu b+c=-10 & (3) \end{cases} \xrightarrow{(1)+(2)} c=-\mu \xrightarrow{(2),(3)} \begin{cases} a+b-\mu=-\mu \\ a-\mu b-\mu=-10 \end{cases} \Rightarrow a=-\mu, b=\mu$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - \mu x + \mu y - \mu = 0} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad r = \frac{1}{\mu} \sqrt{1^2 + 1^2 + \mu} = \mu$$

$$\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad m_{OB} = \text{تعریف نشده} \rightarrow m = 0$$

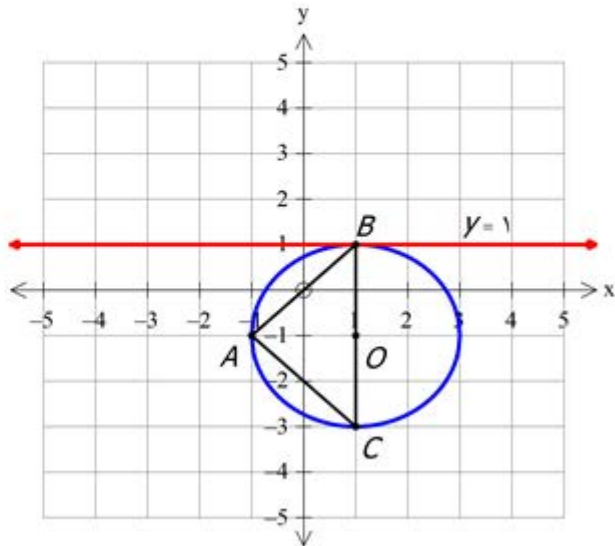
مماس

$$\xrightarrow[y=y_B]{m=0} y=1 \quad \text{معادله مماس در B}$$

معادله خط گذرانده از B

روش دوم به روش رسم

$$O \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad r = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{2}$$



$$A \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad M \begin{cases} \frac{-1+1}{\mu} = 0 \\ \frac{-1+1}{\mu} = 0 \end{cases} \quad m_{AB} = \frac{1+1}{1+1} = 1 \rightarrow m' = -1 \rightarrow y - 0 = -1(x - 0) \rightarrow y = -x \quad (1)$$

$$A \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 1 \\ -\mu \end{vmatrix} \quad N \begin{cases} \frac{-1+1}{\mu} = 0 \\ \frac{-1+\mu}{\mu} = -\mu \end{cases} \quad m_{AC} = \frac{-1+\mu}{-1-1} = -1 \rightarrow m' = 1 \rightarrow y + \mu = 1(x - 0) \rightarrow y = x - \mu \quad (2)$$

(1) و (2) عمود منصف های وترهای AB, AC هستند (اقطار دایره)

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad OA = r = \sqrt{(1+1)^2 + (-1+1)^2} = \mu$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \mu^2 \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - \mu x + \mu y - \mu = 0}$$



$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 - 28} = 1$$

$$d = \frac{|3(2) + 4(2)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{14}{5} > 1 \quad d > r \quad \text{غیر متقاطع}$$

روش دوم:

$$3x + 4y = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{4}y$$

$$\left(-\frac{3}{4}y\right)^2 + y^2 - 4\left(-\frac{3}{4}y\right) - 4y + 7 = 0 \xrightarrow{\times 4} 16y^2 + 9y^2 + 12y - 16y + 28 = 0$$

$$25y^2 + 12y + 28 = 0 \rightarrow \Delta = 144 - 4 \times 25 \times 28 < 0$$

جواب ندارد پس خط و دایره هیچکدام را قطع نمی کنند



$$\begin{cases} x + y = p \\ x^r + y^r = p \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad r = \sqrt{p}$$

$$d = \frac{|1(0) + 1(0) - p|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{p} \quad d = r \quad \text{خط بردایره مماس است}$$

روش دوم:

$$x + y = p \rightarrow x = p - y$$

$$(p - y)^r + y^r = p \rightarrow y^r + y^r - r y + r = p \rightarrow r y^r - r y + p = 0 \rightarrow y^r - r y + 1 = 0$$

$$\rightarrow (y - 1)^r = 0 \rightarrow y = 1$$

معادله ریشه مضاعف دارد پس خط بردایره مماس است

ج) روش اول:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right| \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 8} = 2$$

$$d = \frac{|1(1) + 1(1) - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad d < r \quad \text{خط و دایره متقاطع اند}$$

روش دوم:

$$x + y = 2 \rightarrow y = 2 - x$$

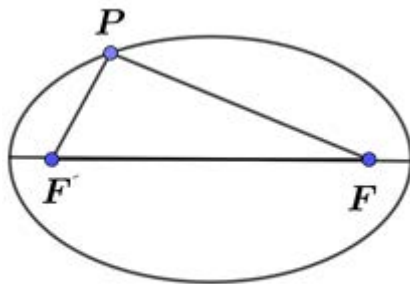
$$x^2 + (2 - x)^2 - 2x - 2(2 - x) = 2 \rightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0$$

چون ca مختلف علامه هستند پس معادله دو ریشه متمایز دارد یعنی خط و دایره دو نقطه مشترک دارند

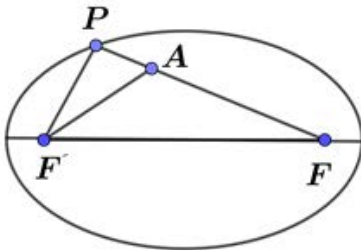
بیضی و سهمی

بیضی

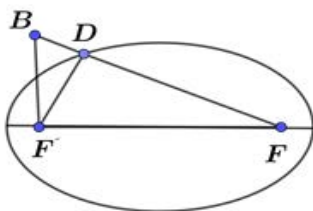
۱ فعالیت



$$FF' < FP + F'P$$



$$\begin{aligned} \triangle PAF': AF' &< PF' + PA \\ AF' + AF &< PF' + PA + AF \\ AF' + AF &< PF' + PF = 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \triangle BDF': BF' + BD &> DF' \\ BF' + BD + DF &> DF' + DF \\ BF' + BF &> DF' + DF = 1 \end{aligned}$$

یک تکه نخ در نظر گرفته و دوسر آن را مطابق شکل در دو نقطه F و F' ثابت کنید. فرض کنید طول نخ l باشد و $l > FF'$ یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی‌ای به گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دوطرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که بیضی نام دارد.

۱- یک نقطه دلخواه روی شکل رسم شده در نظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از دو نقطه ثابت F و F' برابر چیست؟

۲- یک نقطه دلخواه مانند A در درون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه ثابت F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه مورد نظر از F و F' کوچکتر از l است.

(راهنمایی: پاره خط FA را از سمت A امتداد دهید تا بیضی را قطع کند. سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

۳- یک نقطه دلخواه مانند B بیرون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه مورد نظر از F و F' بزرگتر از l است. (راهنمایی: اگر نقطه D محل برخورد FB با بیضی باشد، $F'D$ را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

۴- از مراحل (۱) تا (۳) متوجه وجود چه ویژگی مشترکی در همه نقاط بیضی شدید که هیچ نقطه دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟



۵- با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو **نقطه ثابت** یک مقدار **ثابت** است.

دو نقطه ثابتی که با توجه به آنها، بیضی را به دست آوردیم و آنها را F و F' نامیدیم کانون های بیضی نام دارند.

۲ فعالیت

بیضی مقابل را در نظر بگیرید. AA' قطر بزرگ (قطر کانونی) و BB' قطر کوچک بیضی نامیده می شود. F و F' کانون های بیضی هستند و نقطه O ، وسط پاره خط FF' ، مرکز بیضی است. فرض کنید اندازه پاره خط های OA ، OB و OF را به ترتیب با a ، b و c نمایش دهیم. بنابراین فاصله دو کانون بیضی برابر $2c$ است.

۱- در ترسیم بیضی با نخ و مداد دو وضعیتی را که مداد در نقاط A و A' قرار می گیرد در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که $FA = F'A'$ و از آن نتیجه بگیرید $OA' = OA = a$ و لذا اندازه قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.

$$FA + F'A = F'A' + FA'$$

$$FA + FA + 2c = F'A' + F'A' + 2c$$

$$2FA = 2F'A' \rightarrow FA = F'A'$$

ب) نشان دهید طول نخ مورد نظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

$$OA - c = OA' - c \Rightarrow OA = OA' = a \Rightarrow AA' = 2a \rightarrow AF + AF' = 1 \rightarrow AF + A'F = 1 \rightarrow AA' = 1$$

۲- الف) در رسم بیضی وضعیتی را که مداد در نقطه B قرار دارد در نظر بگیرید و نشان

$$BF + BF' = 2a \Rightarrow BF = a \Rightarrow BF' = OB' + OF' \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \quad b^2 + c^2 = a^2 \text{ دهید}$$

ب) با انجام همین کار برای نقطه B' نتیجه بگیرید $OB'^2 + c^2 = a^2$

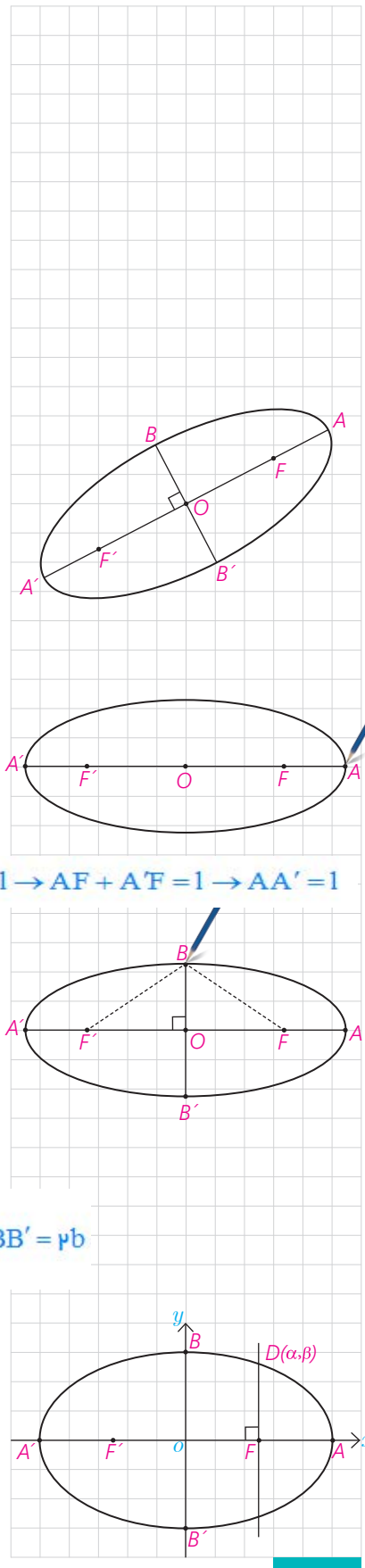
$$B'F + B'F' = 2a \Rightarrow B'F = a \Rightarrow B'F' = OB' + OF' \Rightarrow a^2 = OB'^2 + c^2$$

و با توجه به آن نتیجه بگیرید $OB' = OB = b$ و لذا اندازه قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = OB'^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = OB'^2 \Rightarrow b = OB' \Rightarrow BB' = 2b$$

کاردکلاس

۱- مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر c است. اگر خطی که در نقطه F بر AA' عمود کرده ایم بیضی را در نقطه D قطع کرده باشد، مختصات D را به دست آورید.



$$D \begin{vmatrix} 1 \\ \beta \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad A' \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad F \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$DF + DF' = \mu a$$

$$\sqrt{(1-1)^2 + (\beta-0)^2} + \sqrt{(1+1)^2 + (\beta-0)^2} = \mu \times 1$$

$$|\beta| + \sqrt{1 + \beta^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \beta^2} = 1 - |\beta| \Rightarrow 1 + \beta^2 = 1 - 2|\beta| + \beta^2 \Rightarrow 2|\beta| = 0 \Rightarrow |\beta| = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$|\beta| = 1 \Rightarrow \beta = \pm 1$$

$$\boxed{D \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}} \quad D' \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \text{غ ق ق}$$

۳ فعالیت

در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای a و c بیضی موردنظر را رسم می کنیم. می دانیم که $0 \leq c \leq a$ و لذا $0 \leq \frac{c}{a} \leq 1$ دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر $\frac{c}{a}$ دارد. در رسم بیضی به صورت تقریبی ابتدا دو کانون F و F' را به فاصله $2c$ از هم در نظر بگیرید، سپس نقاط A و A' را بر خط FF' به گونه ای انتخاب کنید که فاصله A تا F و فاصله A' تا F' برابر $a-c$ و اندازه AA' برابر $2a$ باشد، سپس با استفاده از رابطه $b^2 = a^2 - c^2$ نقاط B و B' را مشخص کنید و بیضی را به طور تقریبی رسم کنید :

$$1- \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{4} ; a = 4 \text{ و } c = 1$$

$$2- \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{4} ; a = 8 \text{ و } c = 2$$

$$3- \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2} ; a = 2 \text{ و } c = 1$$

$$4- \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2} ; a = 4 \text{ و } c = 2$$

$$5- \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{4} ; a = 4 \text{ و } c = 3$$

$$6- \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{4} ; a = 8 \text{ و } c = 6$$

با توجه به آنچه دیدید هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به یک نزدیک شود شکل بیضی کشیده تر شده و شکل بیضی به پاره خط نزدیک تر می شود و هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به صفر نزدیک شود کشیدگی شکل بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیک تر می شود. به این سبب مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامیم.

- در حالتی که $\frac{c}{a} = 1$ بیضی تبدیل به یک پاره خط و در حالتی که $\frac{c}{a} = 0$ بیضی تبدیل به یک دایره می شود. چرا؟

$$\frac{c}{a} \rightarrow 0 \Rightarrow c \rightarrow 0 \Rightarrow a \rightarrow b \Rightarrow a \approx b \Rightarrow$$

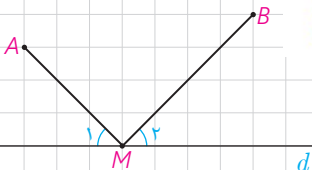
شکل به دایره شبیه می شود

$$\frac{c}{a} \rightarrow 1 \Rightarrow c \rightarrow a \Rightarrow c \approx a \Rightarrow b \rightarrow 0 \Rightarrow$$

بیضی به پاره خط شبیه می شود

یادآوری

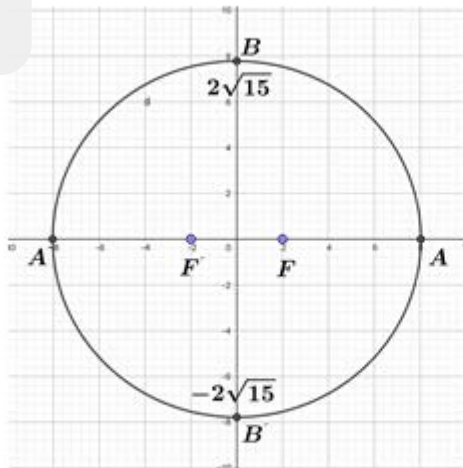
در پایه یازدهم دیدیم که کوتاه ترین مسیر از نقطه A به نقطه B و با عبور از نقطه ای از خط d ، از نقطه ای مانند M روی خط d می گذرد، به گونه ای که دوزاویه ایجاد شده M_1 و M_2 باهم برابرند.





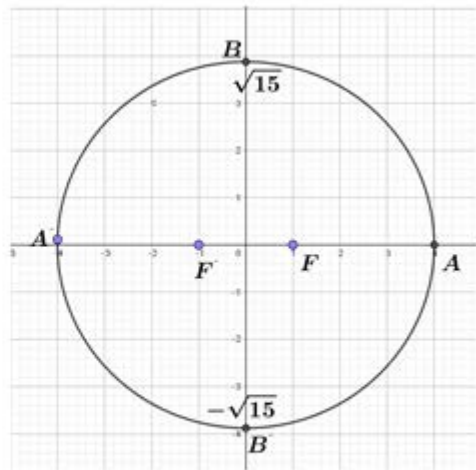
UPDF

WWW.UPDF.COM



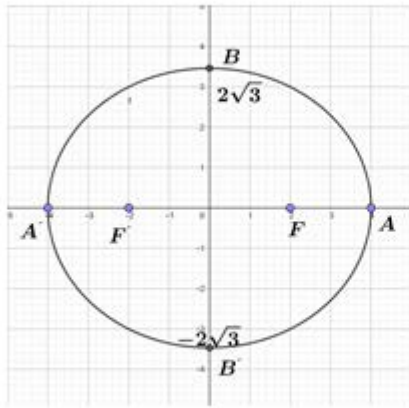
$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 4 = 32 \rightarrow b = 4\sqrt{2}$$

۲



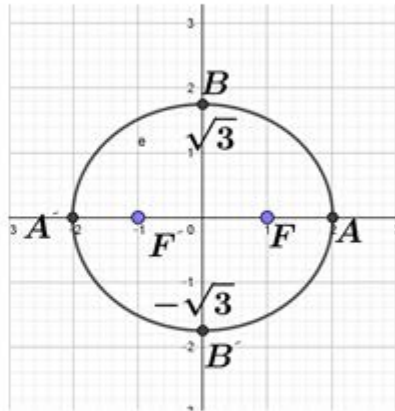
$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 1 = 15 \rightarrow b = \sqrt{15}$$

۱



$$b^2 = c^2 - a^2 = 1^2 - 9 = -8 \rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

۴



$$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3 \rightarrow b = \sqrt{3}$$

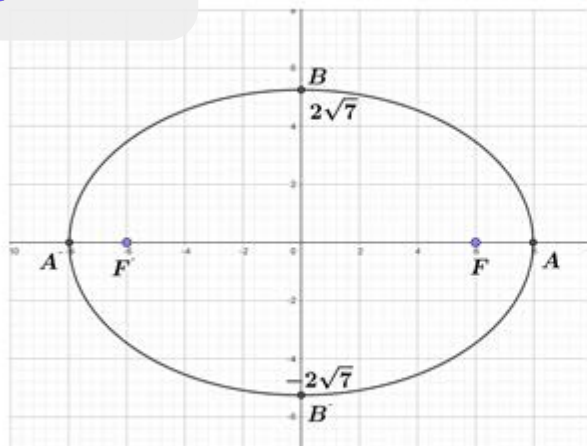
۳



UPDF

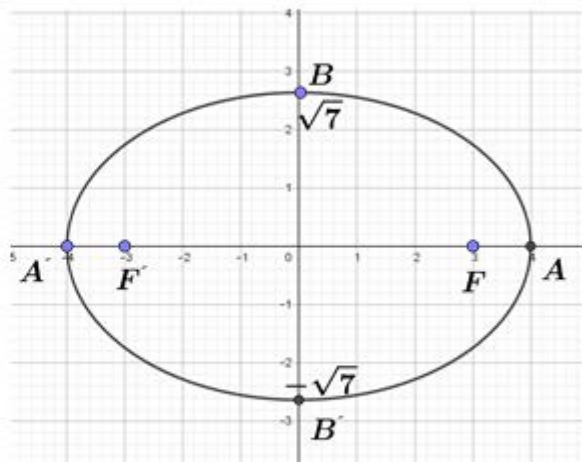
WWW.UPDF.COM

٩



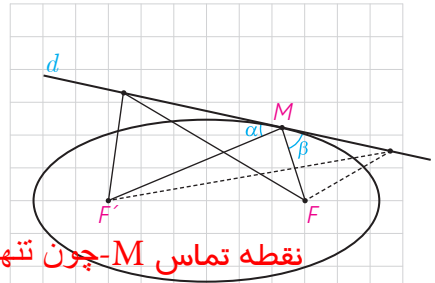
$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow b = 3\sqrt{3}$$

٥



$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7 \rightarrow b = \sqrt{7}$$

۴ فعالیت



فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطه M بر بیضی مماس باشد.
۱- مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

نقطه تماس M - چون تنها نقطه M از خط d است که روی بیضی قرار دارد و بقیه نقاط خارج بیضی هستند
۲- دو زاویه α و β نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

بهم برابرند طبق یادآوری صفحه قبل

۳- با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

از کانون - نور به خط راست حرکت می کند یعنی اگر پرتو بتواند از بدنه بیضی رد شود از نقطه قرینه کانون دیگر نسبت به خط مماس می گذرد.
سهمی

با سهمی در سال‌های گذشته تا حدی آشنا شده‌ایم. اکنون قصد داریم آن را به عنوان یک شکل هندسی مورد بررسی قرار دهیم.

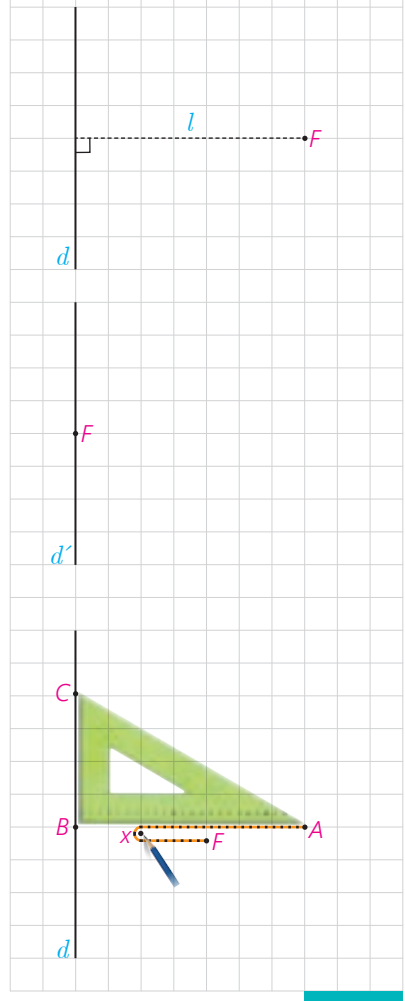
۵ فعالیت

یک خط ثابت مانند d و یک نقطه ثابت مانند F خارج آن در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله F از خط d برابر l باشد.

- یک نقطه بیابید که فاصله آن از خط d و نقطه F یکسان باشد.

- آیا می‌توانید نقطه دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از نقطه F خطی موازی خط d رسم کنید و آن را d' بنامید. تمام نقاط واقع بر خط d' فاصله‌شان از خط d برابر l است. حال توضیح دهید چگونه می‌توانید نقاطی بر خط d' بیابید که از نقطه F و خط d به یک فاصله باشند.

به مرکز F و شعاع l کمانی می‌زنیم تا خط d را در دو نقطه قطع کند.
- اگر مسئله پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه باشد که به فاصله یکسانی از خط d و نقطه F قرار دارند، آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط مورد نظر ارائه می‌گردد.



فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا مانند شکل به نام‌های A ، B و C باشند. یک سر یک تکه نخ به طول AB را در رأس A از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطه F ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع BC بر خط d واقع باشد و نقطه F بر ضلع AB قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به گونه‌ای به نخ گیر دهید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشد. در این حالت فاصله نقطه‌ای که نوک قلم در آن قرار دارد از خط d و از نقطه F نسبت به هم چگونه است؟

$$Ax + xB = AB$$

$$Bx = xF$$

مساوی است

حال در حالتی که ضلع BC کماکان بر خط d واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع AB چسبیده باشد و هر دو تکه نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطه در حال حرکت نوک مداد را در هر حالت با X نمایش دهیم. پاره خط‌های BX و FX هر کدام نمایانگر چه خصوصیتی از نقطه X هستند و بین آنها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟

توضیح دهید که با ادامه این کار نقاطی که توسط مداد رسم می‌شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟ (دقت کنید که گونیا را با منطبق کردن ضلع BC بر خط d در هر دو طرف نقطه F می‌توان حرکت داد.)

شکل حاصل از فعالیت قبل سهمی نام دارد. در این حالت نقطه F را کانون سهمی و خط d را خط هادی سهمی می‌نامیم و اگر از F بر خط d خطی عمود رسم کنیم سهمی را در نقطه‌ای قطع می‌کند که به آن رأس سهمی می‌گوییم. حال با توجه به آنچه دیدیم می‌توان گفت:

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

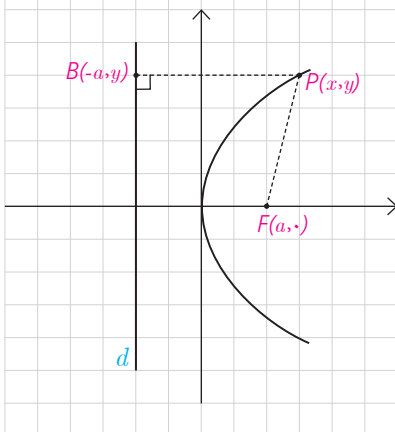
■ معادله سهمی

با توجه به آنچه گفته شد با سهمی به صورت هندسی آشنا شدیم. حال به دنبال این هستیم که برای یک سهمی داده شده معادله آن را به دست آوریم؛ یعنی معادله‌ای به دست آوریم که مختصات هر نقطه از سهمی در آن معادله صدق کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در معادله صدق کند روی سهمی موردنظر باشد. دقت کنید که این کار را فقط برای سهمی‌هایی انجام می‌دهیم که خط هادی آنها موازی با یکی از محورهای مختصات باشد.

۶ فعالیت

۱- فرض کنید نقطه $F(a, 0)$ ، که در آن a مثبت است، کانون سهمی و خط هادی d موازی محور y ها به معادله $x = -a$ باشد و نقطه $P(x, y)$ نقطه‌ای دلخواه واقع بر سهمی باشد. داریم: $|PF| = |PB|$. چرا؟
بنابراین

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+a)^2 + (y-y)^2}$$



با به توان ۲ رساندن دو طرف و ساده کردن عبارات خواهیم داشت: $y^2 = 4ax$

دقت کنید که a برابر با فاصله کانون تا رأس سهمی و همچنین فاصله رأس سهمی تا خط هادی است و فاصله کانون تا خط هادی برابر $2a$ است. در این حالت عدد مثبت a را فاصله کانونی سهمی می نامند و چنان که دیده می شود خطی که از کانون به خط هادی سهمی عمود می شود که در اینجا محور x هاست محور تقارن سهمی است که به آن محور کانونی سهمی یا محور سهمی هم می گوئیم.

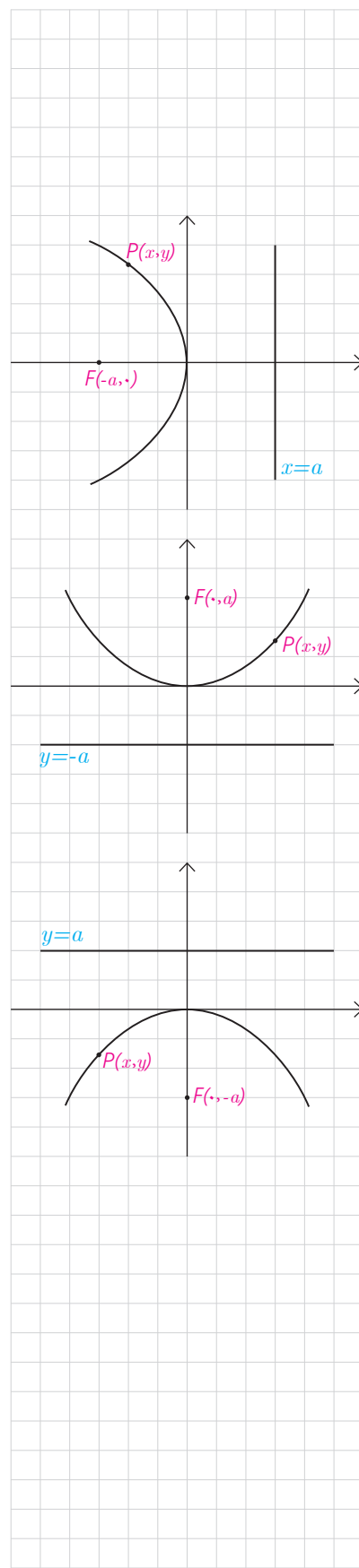
۲- در حالتی که خط هادی d موازی محور y ها به معادله $x = a$ باشد ولی کانون $F(-a, 0)$ در سمت چپ آن قرار داشته باشد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله سهمی به صورت $y^2 = -4ax$ است. در این حالت محور x ها محور سهمی است.

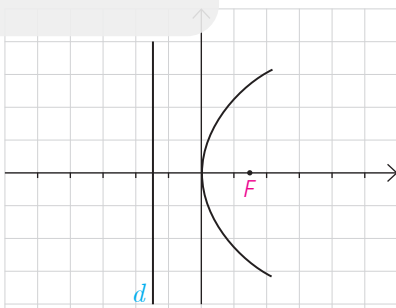
۳- در حالتی که خط هادی d موازی محور x ها به معادله $y = -a$ و کانون $F(0, a)$ در بالای آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله سهمی به صورت $x^2 = 4ay$ است. در این حالت محور y ها محور سهمی است. (در واقع این معادله همان $y = \frac{1}{4a}x^2$ است که در پایه دهم به عنوان معادله سهمی با آن آشنا شدید)

۴- در حالتی که خط هادی d موازی محور x ها به معادله $y = a$ و کانون $F(0, -a)$ در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادله سهمی به صورت $x^2 = -4ay$ است. در این حالت محور y ها محور سهمی است.

مطالب فوق درباره سهمی با رأس واقع در مبدأ مختصات را می توان در جدول زیر خلاصه کرد.

معادله سهمی ($a > 0$)	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$y^2 = 4ax$	$(a, 0)$	$x = -a$	محور x	رو به راست
$y^2 = -4ax$	$(-a, 0)$	$x = a$	محور x	رو به چپ
$x^2 = 4ay$	$(0, a)$	$y = -a$	محور y	رو به بالا
$x^2 = -4ay$	$(0, -a)$	$y = a$	محور y	رو به پایین





مثال: معادله $y^2 = 6x$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نمایید.

حل: این معادله یک سهمی است که دهانه آن روبه راست است و محور آن محور x هاست. با قرار دادن $a = 4$ داریم $6 = 4a$. لذا کانون آن $F(\frac{3}{4}, 0)$ و خط هادی آن موازی محور y ها و به معادله $x = -\frac{3}{4}$ است و رأس آن مبدأ مختصات است. شکل تقریبی آن به صورت مقابل است.

انتقال (محورها)

دیدیم که $y^2 = 4ax$ معادله یک سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات، کانون آن $F(a, 0)$ ، خط هادی آن موازی محور y ها به معادله $x = -a$ ، محور آن محور x ها (خط $y = 0$) و دهانه آن رو به راست است. حال با توجه به آنچه درباره انتقال می دانیم می توان گفت معادله $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ معادله همان سهمی است که به اندازه h به سمت راست (در صورت منفی بودن h به سمت چپ) و به اندازه k به سمت بالا (در صورت منفی بودن k به سمت پایین) انتقال یافته است. لذا رأس آن به مختصات (h, k) ، کانون آن $F(a+h, k)$ ، خط هادی آن موازی محور y ها به معادله $x = -a+h$ ، محور آن خط $y = k$ و دهانه آن کماکان روبه راست است.

دهانه سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادله سهمی
رو به راست	خط $y=k$	$x = -a+h$	$(a+h, k)$	$(y-k)^2 = 4a(x-h)$
رو به چپ	خط $y=k$	$x = a+h$	$(-a+h, k)$	$(y-k)^2 = -4a(x-h)$
رو به بالا	خط $x=h$	$y = -a+k$	$(h, a+k)$	$(x-h)^2 = 4a(y-k)$
رو به پایین	خط $x=h$	$y = a+k$	$(h, -a+k)$	$(x-h)^2 = -4a(y-k)$

همان طور که گفته شد رأس این سهمی ها نقطه ای به مختصات (h, k) است. لذا این حالت ها، حالت های کلی معادلات است که با قراردادن $(h, k) = (0, 0)$ به حالت های خاص، که در جدول قبل مطرح شد، خواهیم رسید. معادلات سهمی را در جدول فوق، معادلات استاندارد یا متعارف می گوئیم.

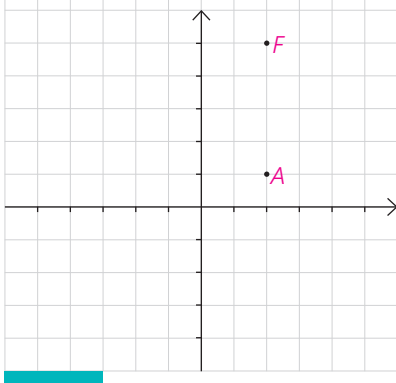
مثال: معادله سهمی به رأس $A(2, 1)$ و کانون $F(2, 5)$ را بیابید و معادله خط هادی آن را بنویسید.

حل: با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت:

(۱) $a = 4$ (چرا؟) فاصله طولی AF ، چهار واحد است

(۲) معادله خط هادی آن $y = -3$ است. چرا؟

$$y = 1 - 4 = -3$$





(۳) دهانه سهمی روبه بالا است. چرا؟ چون F بالای A واقع شده است

لذا معادله آن به صورت $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ است و خواهیم داشت :

$$(x-2)^2 = 16(y-1)$$

مثال: مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس $A(4,6)$ و خط هادی $x=9$

بنویسید.

حل: با توجه به جایگاه رأس و خط هادی سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت :

$$a = 5 \quad (1) \quad \text{چرا؟}$$

$$9-4=5$$

(۲) کانون آن به مختصات $F(-1,6)$ است، چرا؟ $F(4-5,6) \rightarrow F(-1,6)$

(۳) دهانه سهمی رو به چپ است. چرا؟ چون F سمت چپ راس واقع شده است

لذا معادله آن به صورت $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ است و خواهیم داشت :

$$(y-6)^2 = -20(x-4)$$

■ تبدیل معادله یک سهمی به صورت متعارف

چهار حالت معادله سهمی را که در جدول دوم مطرح شد، ۴ حالت شناخته شده (متعارف) در نظر می گیریم. اما در سال های قبل معادلاتی با عنوان معادله سهمی مطرح شدند که برخی از آنها در ظاهر به شکل معادلات مطرح شده در جدول نبودند. به طور مثال در پایه دهم معادله ای به صورت $y = x^2 + 3x + 5$ معادله یک سهمی نامیده شد. دقت کنید که ویژگی معادله سهمی این است که نسبت به یکی از دو متغیر x و y از درجه ۱ و نسبت به دیگری از درجه ۲ است. در ادامه نشان می دهیم معادله مطرح شده قابل تبدیل به یکی از ۴ حالت متعارف خواهد بود.

مثال: معادله یک سهمی به صورت $y = x^2 + 3x + 5$ داده شده است. آن را به یکی از

حالت های متعارف تبدیل کنید و کانون و خط هادی و محور سهمی را مشخص نمایید.

حل: داریم $x^2 + 3x = y - 5$

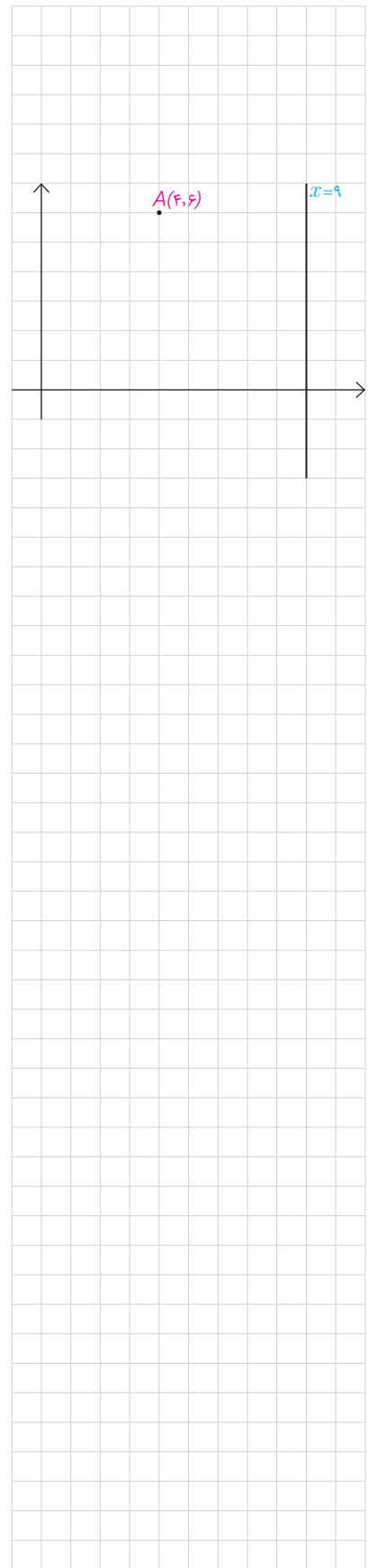
$$\Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = y - 5 + \frac{9}{4} \Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = y - \frac{11}{4}$$

لذا معادله یک سهمی است که دهانه آن رو به بالا، رأس آن $(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4})$ و $4a=1$

و در نتیجه $a = \frac{1}{4}$ است. بنابراین $F = (h, a+k) = (-\frac{3}{2}, 3)$ کانون آن و خط هادی آن

به معادله $y = -a + k = \frac{5}{4}$ است. معادله محور سهمی به صورت $x = h = -\frac{3}{2}$ است.

با روش مشابه آنچه در مثال دیدید معادلات سهمی ها را می توان به یکی از حالات استاندارد نوشت.



رسم سهمی

رسم دقیق یک منحنی توسط نرم افزارهای ریاضی انجام می گیرد. طبیعی است که در رسم منحنی ها با کاغذ و قلم، شکل حاصل شکل تقریبی منحنی مورد نظر خواهد بود. برای رسم یک سهمی ابتدا معادله آن را به صورت استاندارد می نویسیم و با توجه به آن، مختصات رأس سهمی، مقدار a (فاصله کانونی)، مختصات F (کانون) و خط هادی آن را به دست می آوریم و نیز درمی یابیم که دهانه سهمی رو به کدام طرف است. یکی از مهم ترین نقاطی که باید در رسم سهمی جایگاه آن را مشخص نماییم، رأس سهمی است. اگر کانون سهمی را نیز مشخص نماییم در این صورت خطی که از رأس و کانون سهمی عبور می کند محور تقارن سهمی است. حال اگر خطی را که در نقطه F بر محور تقارن سهمی عمود است رسم کنیم و روی آن دو نقطه، مثلاً B و B' را که به فاصله a از F هستند مشخص نماییم، در این صورت نقاط B و B' بر سهمی واقع اند. چرا؟

حال با داشتن رأس و دو نقطه دیگر از سهمی و دانستن شکل کلی آن می توان شکل سهمی را به صورت تقریبی رسم کرد. قبل از رسم می توان نقاط برخورد منحنی با محوره های مختصات را نیز مشخص نمود.

مثال: نمودار معادله $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ را رسم کنید.

حل: ابتدا معادله را به حالت استاندارد تبدیل می کنیم

$$y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1$$

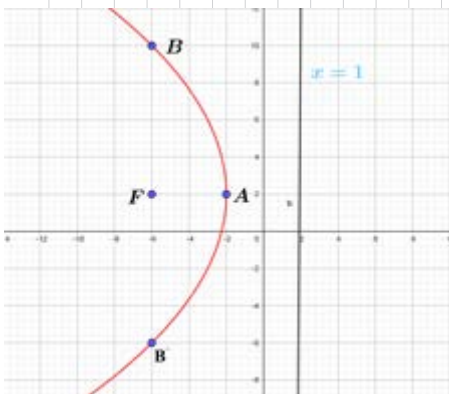
$$\Rightarrow (y - 1)^2 = -8(x + 1)$$

لذا معادله فوق یک سهمی با رأس $A(h, k) = (-1, 1)$ است که دهانه آن رو به چپ

است. داریم: $-4a = -8 \Rightarrow a = 2$ و بنابراین $F(-a + h, k) = (-3, 1)$

و معادله خط هادی آن به صورت $x = a + h = 1$ است.

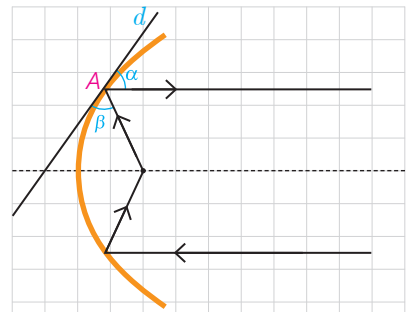
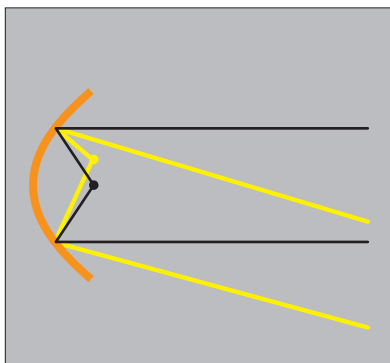
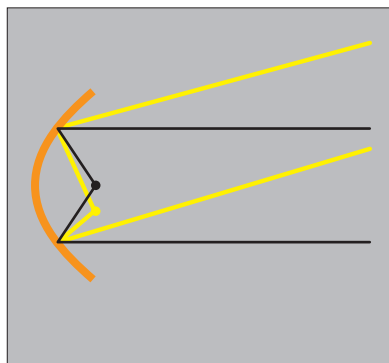
در این صورت نقاط B و B' که هم طول با F و به فاصله $a = 2$ از F باشند یعنی $B(-3, 5)$ و $B'(-3, -3)$ نیز بر سهمی واقع اند. فاصله هریک از آنها را از کانون و خط هادی بررسی کنید. حال با وصل کردن نقاط B و A و B' به صورت یک منحنی و ادامه آن، شکل تقریبی سهمی مورد نظر را به دست آورید.



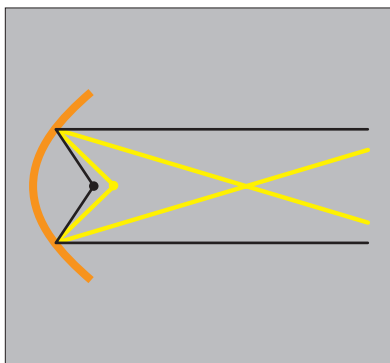
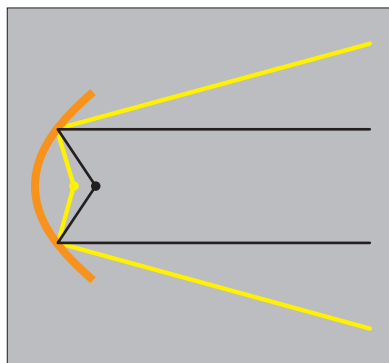
■ ویژگی بازتابندگی سهمی ها و کاربردهای آن

یکی از ویژگی های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. درواقع اگر خط d بر سهمی مماس و نقطه A نقطه تماس آن باشد زاویه های α و β برابرند. از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به طور مثال چراغ جلوی اتومبیل ها را معمولاً به گونه ای می سازند که جداره پشت لامپ به حالت سهمی باشد و جنس آینه ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می دهند. در این صورت حتی شعاع های نوری که به عقب تابیده می شوند پس از برخورد به جداره سهمی پشت لامپ به صورت شعاع هایی موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می یابند و روشنایی بیشتری به وجود می آورند.

با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین تر، شعاع های نور کماکان موازی باهم (نه موازی با محور) اما روبه بالا یا پایین خارج می شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می کنند.



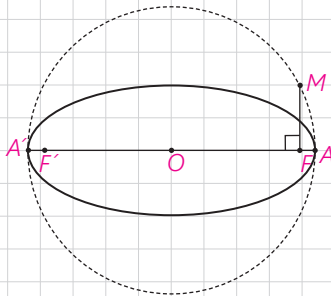
اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب تر قرار گیرد شعاع های نور باهم موازی خارج نمی شوند.



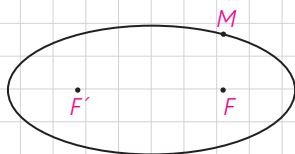


۱- دو نقطه A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:
(الف) در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

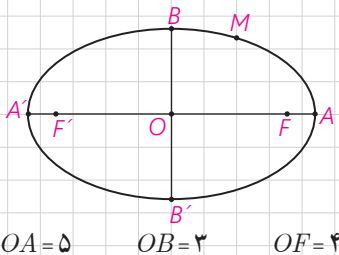
(ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



۲- قطر دایره C ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



۳- در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$

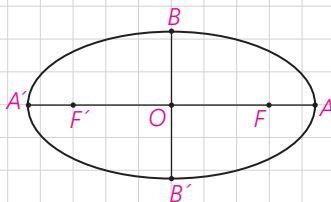


۴- نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

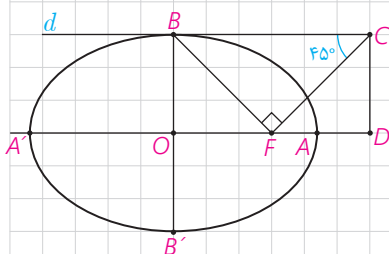
(الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

(ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

(ج) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.



۵- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه FBF' چند درجه است؟

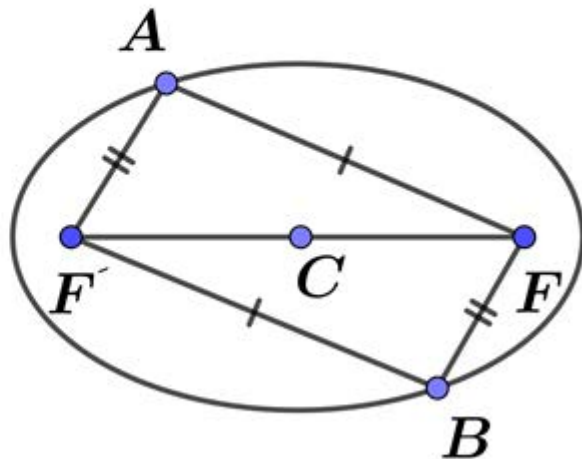


۶- در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر‌اند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آنرا در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $\hat{BCF} = 45^\circ$ ، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} AF' + AF = 2a \\ BF' + BF = 2a \\ BF = AF' \end{array} \right\} \Rightarrow AF = BF'$$

چهارضلعی که اضلاع آن دو به دو مساوی باشند

متوازی الاضلاع است پس $AF \parallel BF'$



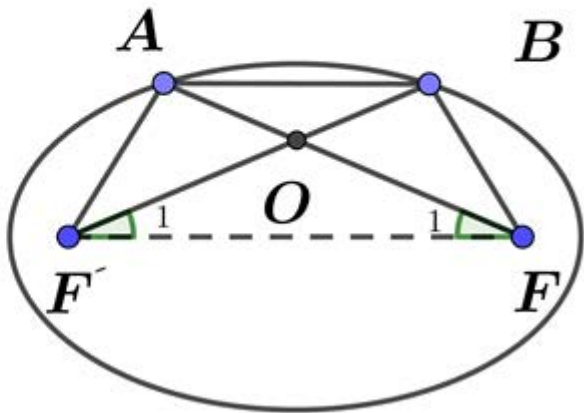


$$\left. \begin{array}{l} AF' + AF = 2a \\ BF' + BF = 2a \\ BF = AF' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AFF' \cong \triangle BFF'$$

$$\Rightarrow AF = BF', \angle F_1 = \angle F'_1$$

$$\Rightarrow \triangle OFF'$$

متساوی الساقین است

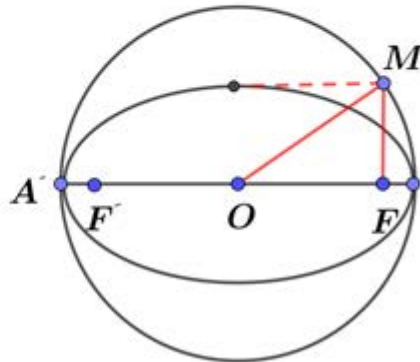


تمرین ۲:

$$OA = a, OF = c, OM = R = a$$

$$\triangle OMF: OM^v = OF^v + FM^v \rightarrow a^v = c^v + FM^v$$

$$\left. \begin{array}{l} c^v = a^v - FM^v \\ c^v = a^v - b^v \end{array} \right\} \Rightarrow FM = b$$



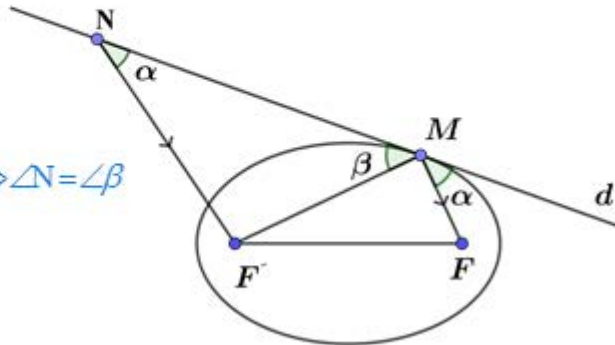


در بیضی و خط مماس

$$\angle \alpha = \angle \beta$$

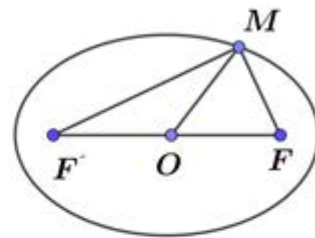
$$\left. \begin{array}{l} \angle \alpha = \angle \beta \\ MF \parallel NF', d \text{ مورب} \Rightarrow \angle N = \angle \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \angle N = \angle \beta$$

$$\triangle FMN: \angle N = \angle \beta \Rightarrow FM = FN$$



$$OM = OF = OF'$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \rightarrow c = ۴ = OF = OF'$$



ب) در مثلثی که میانه نظیر یک ضلع آن نصف آن ضلع باشد قائم الزاویه است در رأس روبرو به ضلع نصف شده است.

ج)

$$x + y = ۲a = ۱۰ \Rightarrow y = ۱۰ - x$$

$$x^2 + y^2 = FF'^2 = ۸^2 \Rightarrow x^2 + (۱۰ - x)^2 = ۶۴ \Rightarrow ۲x^2 - ۲۰x + ۳۶ = ۰ \Rightarrow x^2 - ۱۰x + ۱۸ = ۰$$

$$x_1, x_2 = ۵ \pm \sqrt{۷}$$

$$x = ۵ + \sqrt{۷} \Rightarrow y = ۵ - \sqrt{۷} \Rightarrow MF' = ۵ + \sqrt{۷}, MF = ۵ - \sqrt{۷}$$

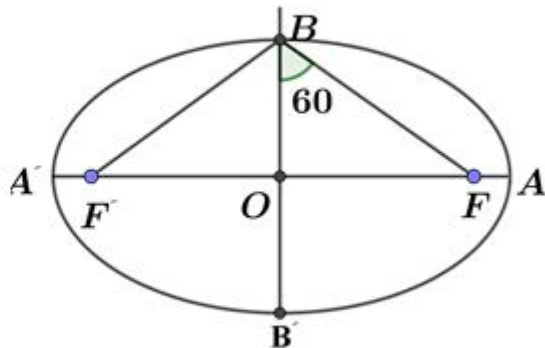
$$x = ۵ - \sqrt{۷} \Rightarrow y = ۵ + \sqrt{۷}$$

$$a = \sqrt{3}b$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 3b^2 - b^2 = 2b^2 \rightarrow c = \sqrt{2}b$$

$$\tan(\angle BOF) = \frac{OF}{OB} = \frac{\sqrt{2}b}{b} = \sqrt{2} = \tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BOF = 45^\circ \rightarrow \boxed{\angle BOF' = 90^\circ}$$



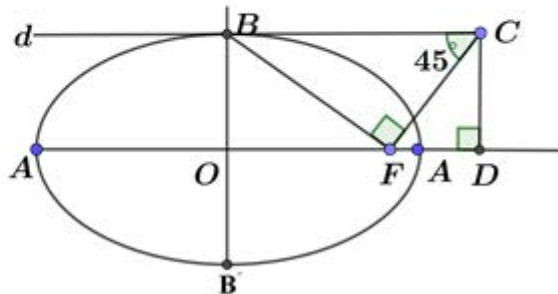
تمرین ۶:

$$AF = a - c$$

$$FD = b = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{c^2} = c$$

$$AD = FD - FA = c - (a - c) = 2c - a$$

$$\rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{2c - a}{a - c}$$



۷- سهمی $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته رآن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

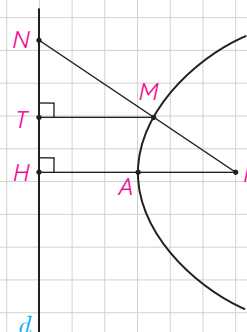
۸- مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) را به دست آورید.

۹- معادله سهمی را بنویسید که $S(1, 2)$ رأس و $F(1, -2)$ کانون آن باشد.

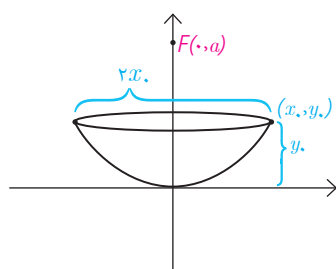
۱۰- سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۱- سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

۱۲- در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M عمود MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$

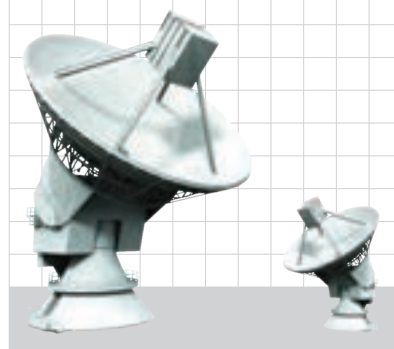


۱۳- یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و عدد حاصل را بر گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است.



دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.

۱۴- فرض کنید از مثلث ABC ، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.



$$y'' + ry = rx \rightarrow y'' + ry + r = rx + r \rightarrow (y+r)' = r(x+r)$$

سپهمی افقی و دهانه به راست

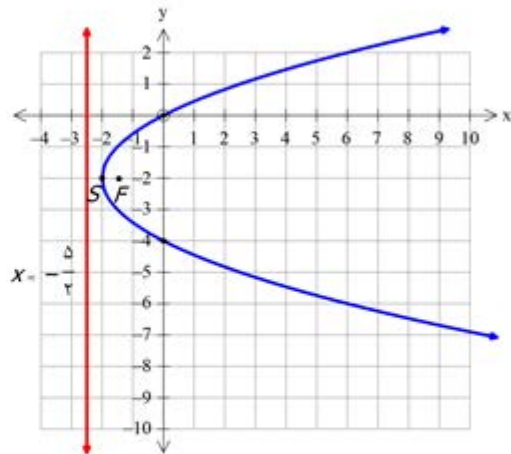
$$S \begin{cases} r \\ -r \end{cases} \quad ra = r \rightarrow a = \frac{1}{r} \rightarrow F \begin{cases} \alpha + a = -r + \frac{1}{r} = -\frac{r}{r} \\ \beta = -r \end{cases}$$

$$x = \alpha - a = -r - \frac{1}{r} = -\frac{5}{r} \quad \text{خط هادی}$$

$$x = 0 \rightarrow y'' + ry = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -r \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \end{vmatrix}$$

نقاط برخورد با محور y ها





$$y = ax^r + bx + c = a \left(x + \frac{b}{ra} \right)^r - \frac{b^r}{ra} + c = a \left(x + \frac{b}{ra} \right)^r + \frac{-b^r + rac}{ra}$$

$$y - \frac{-b^r + rac}{ra} = a \left(x + \frac{b}{ra} \right)^r \rightarrow \frac{1}{a} \left(y - \frac{-b^r + rac}{ra} \right) = \left(x + \frac{b}{ra} \right)^r$$

سهمی قائم

$$S \left| \begin{array}{c} -\frac{b}{ra} \\ \frac{b^r - rac}{ra} \end{array} \right| \quad rap = \frac{1}{a} \rightarrow p = \frac{1}{ra} \rightarrow F \left| \begin{array}{c} -\frac{b}{ra} \\ \frac{b^r - rac}{ra} + \frac{1}{ra} \end{array} \right|$$

$$S \left| \begin{array}{c} 1 \\ p \end{array} \right|, F \left| \begin{array}{c} 1 \\ -p \end{array} \right| \Rightarrow -p = p + a \rightarrow a = -p$$

$$(x-1)^r = -1 \cdot (y-p)$$

چون عرض تغییر کرده پس سهمی قائم است

$$y^r = r(x-1) \quad S \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$ra = r \rightarrow a = 1 \rightarrow F = O \begin{vmatrix} \alpha + a = 1 + 1 = r \\ \beta = 0 \end{vmatrix}$$

$$(x-r)^r + (y-0)^r = 9 \rightarrow x^r + y^r - rx - 9 = 0$$

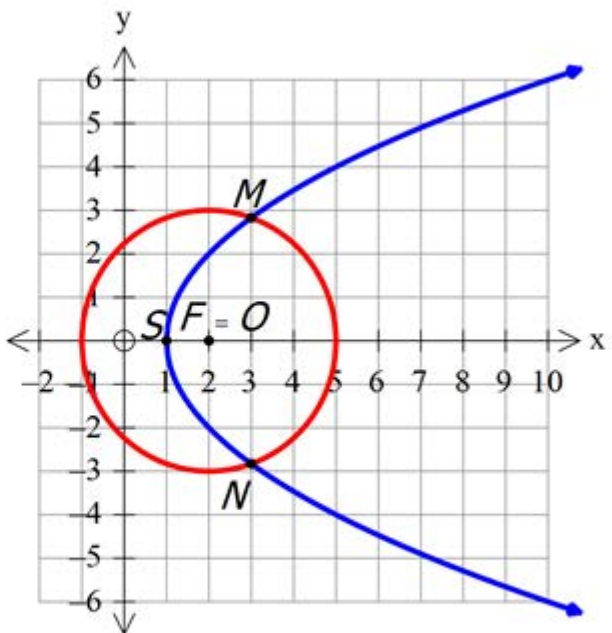
$$\begin{cases} y^r = rx - r \\ y^r = -x^r + rx + 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow rx - r = -x^r + rx + 9 \Rightarrow x^r = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$x = 3 \rightarrow y^r = 6 \rightarrow y = \pm 2\sqrt{r}$$

$$x = -3 \rightarrow y^r = -12$$

$$M \begin{vmatrix} 3 \\ 2\sqrt{r} \end{vmatrix} \quad N \begin{vmatrix} 3 \\ -2\sqrt{r} \end{vmatrix}$$

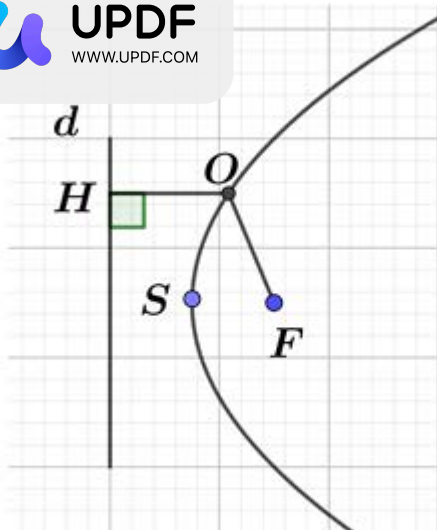


تمرین ۱۱: چون دایره بر خط d مماس است و به منظور از F می‌گذرد

پس $OH = OF = r$ یعنی فاصله مرکز دایره از این دو برابر است

و طبق تعریف سهمی، O (مرکز) دایره بر روی سهمی واقع است.

د سهمی مکان هندسی مراکز دایره‌ای است که بر خط d مماس و از نقطه F خارج خطی می‌گذرد.



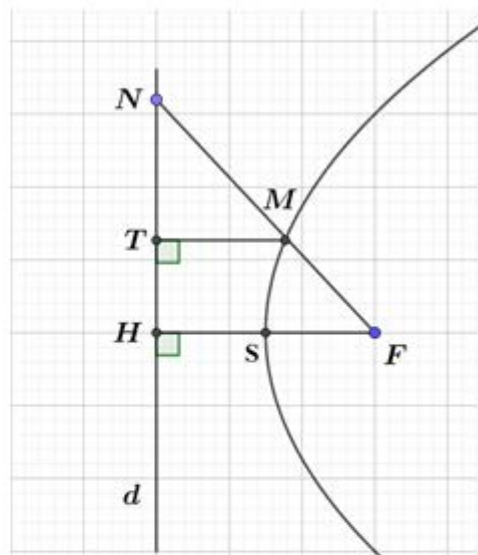
$$PF = SH$$

$$\triangle NMT \sim \triangle NFH \Rightarrow \frac{NM}{NF} = \frac{MT}{FH}$$

$$\Rightarrow \frac{NM}{NF} = \frac{MF}{PF} \longrightarrow \frac{NM}{MF} = \frac{NF}{PF} \quad (1)$$

$$MT \parallel FH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{NF}{PF} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times P} \frac{NF}{FS} = \frac{PNT}{TH}$$



تمرین ۱۳: با توجه به شکل معادله سهمی قائم بصورت زیر است:

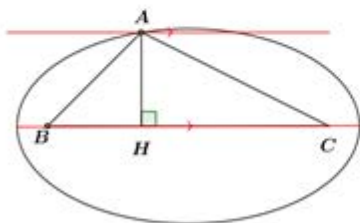
$$(X - o)^2 = 4a(y - o) \Rightarrow x^2 = 4ay$$

نقطه ای روی سهمی $(x_o, y_o) \xrightarrow{\quad} x_o^2 = 4ay_o \Rightarrow a = \frac{x_o^2}{4y_o}$

طریقه رسم بیضی با داشتن BC (کانونها به فاصله BC از هم قرار دارند) وسط آنها را O مرکز بیضیدر نظر گرفته. از دو طرف به اندازه $(p-c)$ یعنی نصف محیط منهای نصف BC روی امتداد BC انتخاب کرده تادور آن بیضی پدید آیند. با داشتن a, c می توان b را هم محاسبه کرد و بیضی را رسم کرد.

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = (p-c)^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{p^2 - pc}$$

$$AB + AC + BC = 2p \rightarrow AB + AC = 2p - BC \Rightarrow 2a = 2p - BC$$

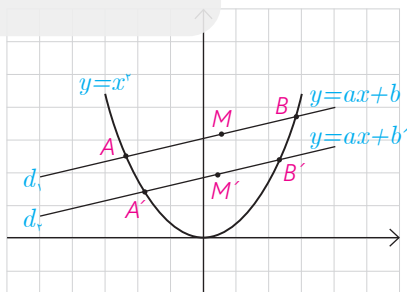


اگر $AH < h$ باشد مسئله ۴ تا جواب دارد

اگر $AH = h$ باشد مسئله ۳ تا جواب دارد

اگر $AH > h$ باشد مسئله جواب ندارد

بیضی با کانون های B, C و راس A نقطه ایی از بیضی که قطر بزرگ بیضی $2a$ است رسم می کنیم خط موازی BC به فاصله AH از آن رسم می کنیم.



۱۵- سهمی $y = x^r$ و دو خط موازی $d_1: y = ax + b$ و $d_2: y = ax + b'$ را که با سهمی متقاطع اند، در نظر بگیرید.

الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y = x^r$ باشد.

$$\begin{cases} y = x^r \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow x^r = ax + b \rightarrow x^r - ax - b = 0$$

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M را به دست آورید.

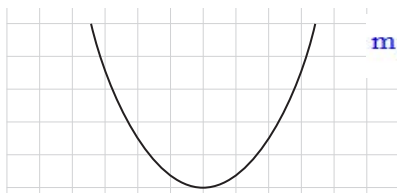
$$x_1 + x_2 = S = a \Rightarrow M \left(\frac{\frac{a}{r}}{2}, \frac{a \left(\frac{a}{r} \right) + b}{2} \right) \Rightarrow M \left(\frac{\frac{a}{r}}{2}, \frac{a^{\frac{r}{2}} + rb}{2} \right)$$

پ) مراحل الف) و ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه M' (نقطه وسط پاره خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) به دست آورید.

$$x_1 + x_2 = S = a \Rightarrow M' \left(\frac{\frac{a}{r}}{2}, \frac{a \left(\frac{a}{r} \right) + b'}{2} \right) \Rightarrow M' \left(\frac{\frac{a}{r}}{2}, \frac{a^{\frac{r}{2}} + rb'}{2} \right)$$

$$\begin{cases} y = x^r \\ y = ax + b' \end{cases} \Rightarrow x^r = ax + b' \rightarrow x^r - ax - b' = 0$$

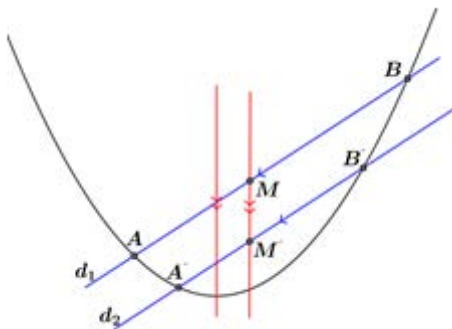
ت) خط MM' نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟



$$m_{MM'} = \text{تغریف نشده} \Rightarrow MM' \parallel oy$$

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

ابتدا دو خط d_1, d_2 را رسم می‌کنیم بطوریکه سهمی را قطع کند اوساط را M, M' می‌نامیم MM' موازی محور تقارن است. از راس S موازی MM' رسم می‌کنیم که محور تقارن است.



۳

فصل سوم

بردارها



■ بنابه گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی غیر هم‌راستا با خط فرود می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند بردارهای نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار گیرد. به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند.

معرفی فضای $\mathbb{R}^2$

با صفحه و دستگاه مختصات دو بعدی آشنایی داریم و می دانیم هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند (a, b) که $a, b \in \mathbb{R}$ مشخص می شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه را مشخص می کند. با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به صورت زوج مرتب (x, y) نمایش می دهند در این صورت مجموعه $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ شامل همه نقاط صفحه می باشد و آن را با $\mathbb{R}^2$ نمایش می دهند، یعنی:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

همچنین با معادله خط در صفحه آشنایی دارید و می دانید که حالت کلی آن به صورت $ax + by = c$ است که در آن $a, b, c \in \mathbb{R}$ و a و b هم زمان صفر نیستند).

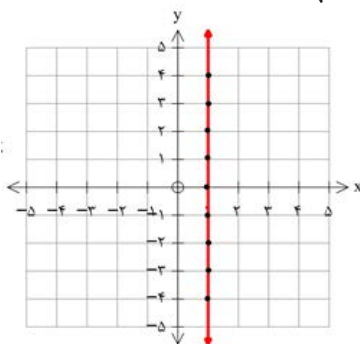
به طور کلی هر وقت گفته می شود رابطه یا معادله ای نمودار G را مشخص می کند یعنی مختصات هر نقطه از نمودار G در آن رابطه یا معادله صدق می کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در رابطه یا معادله مذکور صدق کند روی نمودار G قرار دارد.

با توجه به آنچه گفته شد می خواهیم در $\mathbb{R}^2$ یا همان صفحه، با داشتن برخی روابط شکل های متناظر با آنها را و یا برعکس با داشتن برخی شکل ها، روابط مرتبط با آنها را مشخص نماییم.

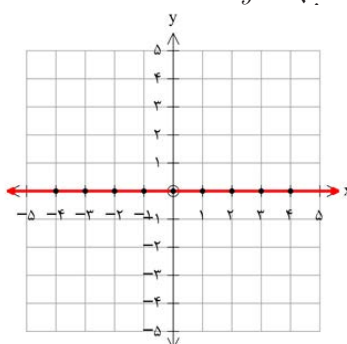
کاردرکلاس

۱- برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.

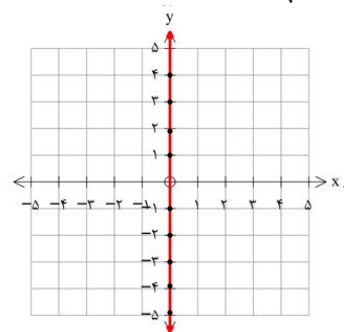
(ب) $x = 1$



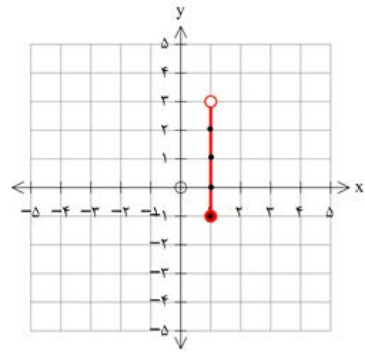
(ب) $y = 0$



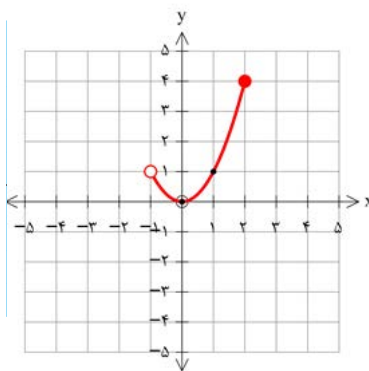
(الف) $x = 0$



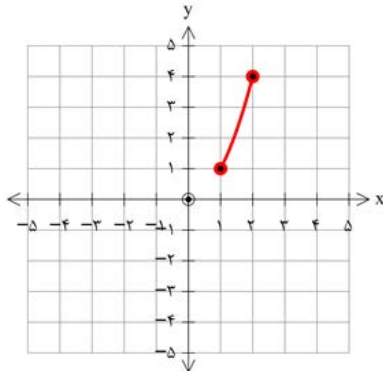
ت) $x=1$, $-1 \leq y < 3$



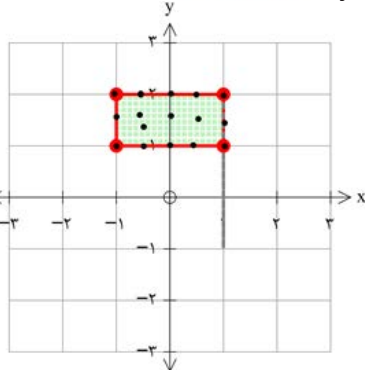
ث) $y=x^2$, $-1 < x \leq 2$



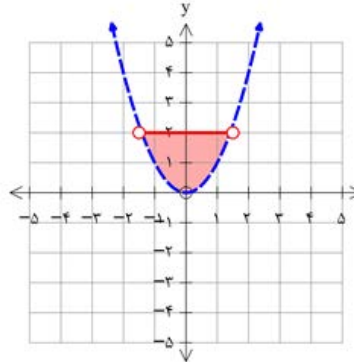
ج) $y=x^2$, $1 \leq x \leq 2$



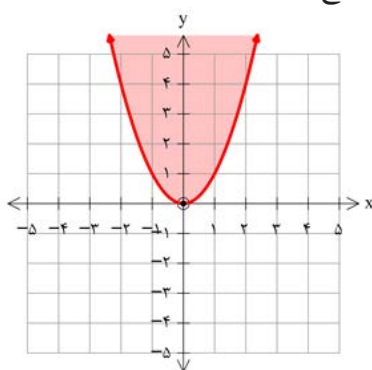
د) $1 \leq y \leq 2$, $-1 \leq x \leq 1$



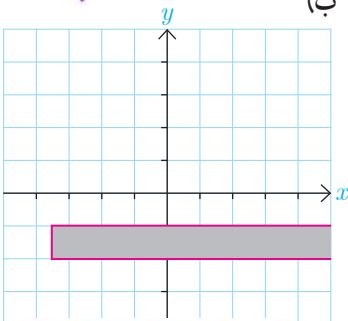
ه) $x^2 < y \leq 2$



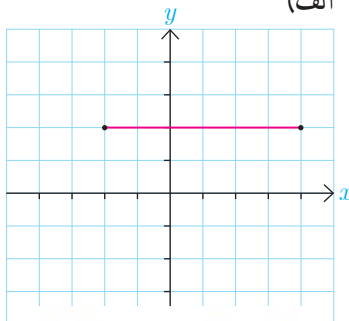
و) $y \geq x^2$



ز) $x \geq \frac{-y}{2}$, $-2 \leq y \leq -1$



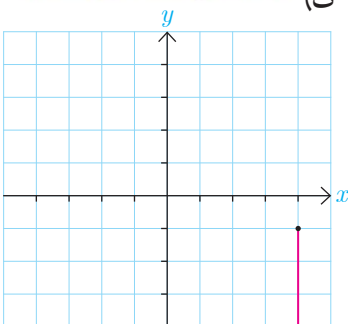
ح) $y=2$; $-2 \leq x \leq 4$



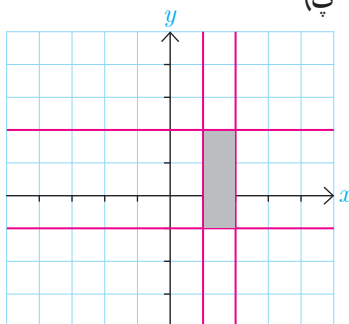
(الف)

۲- در هریک از شکل های روبه رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی های دیگری که از شکل دریافت می کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.^۱

ط) $x=4$, $-4 \leq y \leq -1$



ث) $1 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$



(ب)

۱- صرفاً ناحیه هایی مدنظر است که مرزهای آنها خطوط موازی محورهای مختصات باشد.

حال به سراغ فضای $\mathbb{R}^3$ می‌رویم. ابتدا با مختصات یک تناظر بین مجموعه نقاط فضای $\mathbb{R}^3$ و مجموعه تمام سه‌تایی‌های (a,b,c) که در آن $a,b,c \in \mathbb{R}$ برقرار می‌نماییم و سپس ارتباط بین برخی معادلات (یا روابط) و شکل‌های مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. باید توجه داشته باشیم از آنجا که ما دستگاه مختصات سه بعدی را در صفحه که خود دو بعدی است رسم می‌کنیم لذا در این حالت برای تصویر بسته شکل‌ها باید از قدرت تجسم خود کمک بگیریم.

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

مشابه $\mathbb{R}^2$ می‌توان مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) که در آنها x,y,z اعداد حقیقی‌اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای $\mathbb{R}^3$ می‌گویند.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

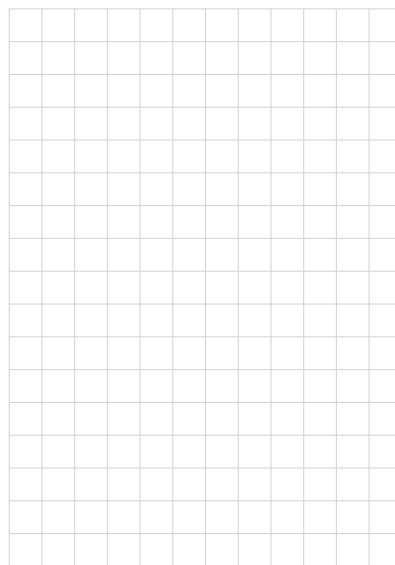
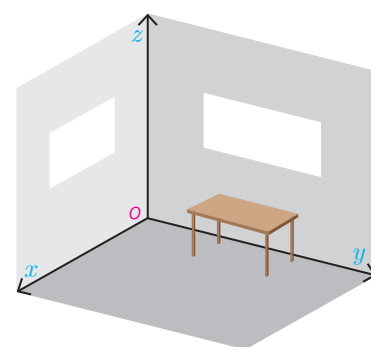
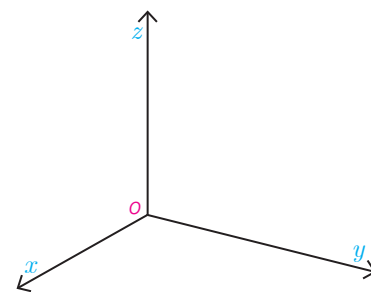
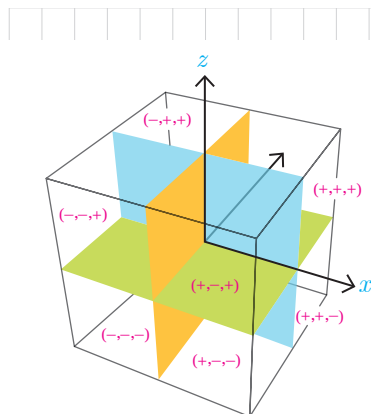
به یاد می‌آوریم که برای نمایش نقاط $\mathbb{R}^2$ از یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود برهم x و y استفاده می‌شود. به طور مشابه می‌توان فضای $\mathbb{R}^3$ را نیز با استفاده از یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دو به دو عمود برهم که در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند نمایش داد. این محل تقاطع، مبدأ مختصات دستگاه می‌باشد و فاصله در امتداد هر سه محور با یک واحد طول سنجیده می‌شود. وضعیت سه محور دو به دو عمود برهم شبیه به فصل مشترک دو دیوار و کف یک اتاق می‌باشد که در شکل دیده می‌شود و در واقع تشکیل یک کنج^۱ می‌دهند.

محورهای Ox ، Oy و Oz به ترتیب محور x ، محور y و محور z نامیده می‌شوند. محورهای فوق تشکیل دهنده سه صفحه می‌باشند. صفحات مختصات عبارت‌اند از صفحه xy (کف اتاق) شامل محور x و y ، صفحه yz (دیوار سمت راست) شامل محور y و z ، صفحه xz (دیوار سمت چپ) شامل محور x و z و z و z ، صفحه xy (نقطه O) در از محورها با پیکان مشخص شده است. اگر محورها را از مبدأ مختصات (نقطه O) در خلاف جهت ادامه دهیم تا مقادیر منفی برای محورها ظاهر شوند آنگاه این دستگاه $\mathbb{R}^3$ به هشت ناحیه که چهار ناحیه آن بالای صفحه xy و چهار ناحیه دیگر زیر صفحه xy هستند تقسیم می‌شود. چهار ناحیه بالای صفحه xy مطابق با شماره گذاری استاندارد یک دستگاه $\mathbb{R}^2$ شماره گذاری می‌شوند.

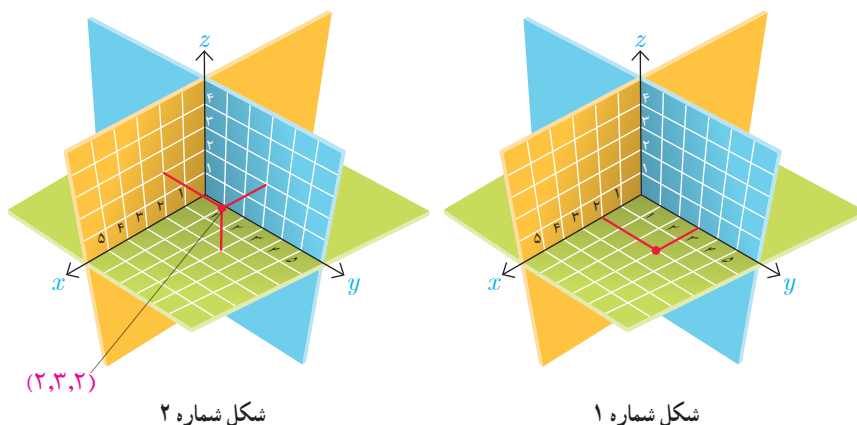
شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	-	+	+
۳	-	-	+
۴	+	-	+
۵	+	+	-
۶	-	+	-
۷	-	-	-
۸	+	-	-

مثلاً ناحیه‌ای که در آن مقادیر روی هر سه محور مثبت هستند ناحیه شماره ۱ می‌باشد. به طریق مشابه چهار ناحیه پایین صفحه xy از ۵ تا ۸ شماره گذاری می‌شوند. شماره هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل‌ها و جدول روبه‌رو مشخص شده‌اند.

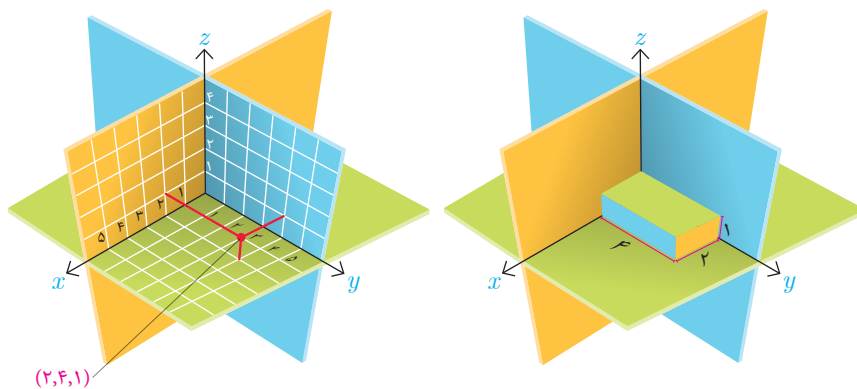
۱- از برخورد سه صفحه دوه‌دو متقاطع، یک کنج تشکیل می‌شود.



برای نمایش سه تایی مرتب (x_0, y_0, z_0) در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^3$ کافی است ابتدا همانند شکل ۱ نقطه (x_0, y_0) را در صفحه xy بیابیم و سپس ارتفاع آن را به اندازه z_0 در راستای موازی با محور z ها (یعنی به طور عمودی) تغییر دهیم تا شکل شماره ۲ حاصل شود.



در واقع، می توان سه نقطه به طول های x_0, y_0, z_0 به ترتیب بر روی محورهای x, y, z در نظر گرفت و سپس صفحه گذرنده از x_0 و موازی با صفحه yz ، صفحه گذرنده از y_0 و موازی با صفحه xz و صفحه گذرنده از z_0 و موازی با صفحه xy را در نظر بگیریم. محل تقاطع این سه صفحه یک نقطه به طول x_0 ، عرض y_0 و ارتفاع z_0 است که نمایش دهنده سه تایی مرتب (x_0, y_0, z_0) می باشد. مثلاً نقطه P در شکل زیر متناظر با سه تایی مرتب $(2, 4, 1)$ است.



همچنین نقطه O که مبدأ مختصات است متناظر سه تایی مرتب (ϕ, θ, ψ) می باشد.

دو نقطه $P = (x, y, z)$ و $Q = (x_1, y_1, z_1)$ را برهم منطبق گوئیم و می نویسیم $P = Q$ هرگاه مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی $x = x_1, y = y_1, z = z_1$.

برای یافتن فاصله یک نقطه از $\mathbb{R}^3$ مانند $P = (x, y, z)$ از مبدأ مختصات کافی است از نقطه P عمودی بر صفحه xy رسم کرده و پای عمود را P' بنامیم. در این صورت با توجه به شکل مقابل از قضیه فیثاغورس طول پاره خط OP' به صورت زیر محاسبه می شود.

$$|OP'| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

اکنون در مثل قائم الزاویه OPP' از قضیه فیثاغورس برای محاسبه طول وتر OP استفاده می کنیم. پس داریم:

$$|OP| = \sqrt{|OP'|^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

رابطه فوق را می توان با توجه به شکل برای فاصله دو نقطه دلخواه از $\mathbb{R}^3$ مانند $P = (x, y, z)$ و $Q = (x_1, y_1, z_1)$ به صورت زیر تعمیم داد.

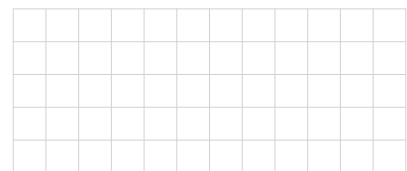
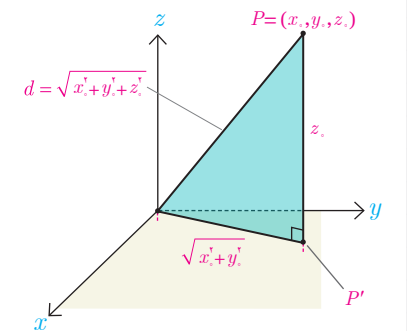
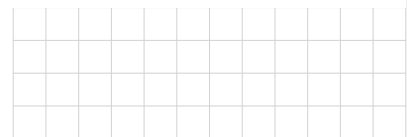
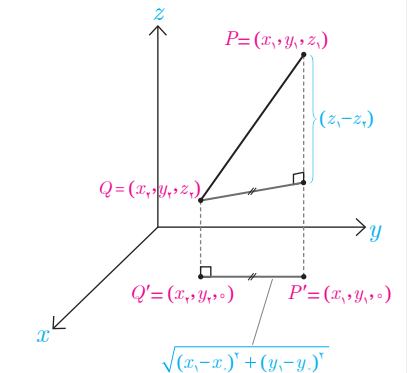
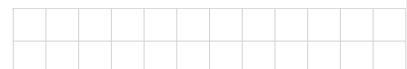
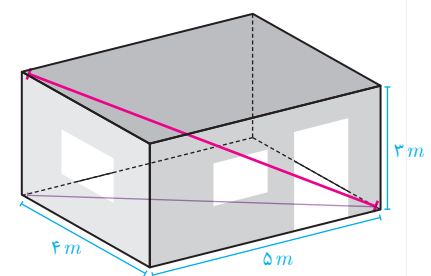
$$|PQ| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

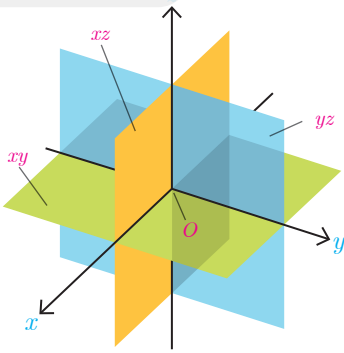
مثال: در این شکل اتاقی به طول ۵ متر و عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر مشاهده می شود. طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه مقابلش چقدر است؟

$$\text{قطر اتاق} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \Rightarrow \text{قطر مستطیل کف اتاق} = \sqrt{41 + 3^2} = 5\sqrt{2}$$

حال که با دستگاه مختصات سه بعدی آشنا شدیم با داشتن برخی معادلات یا روابط به بررسی نمودارهای مربوط به آنها و یا برعکس، با داشتن برخی نمودارها به بررسی رابطه یا معادله مربوط به آنها می پردازیم.

مثال: فرض کنید معادله $x = 0$ داده شده باشد و ما بخواهیم شکل یا نمودار مربوط به آن را مشخص کنیم. با توجه به آنچه گفته شد باید تمام نقاطی را مشخص کنیم که در این معادله صدق می کنند و این یعنی تمام نقاطی که مؤلفه اول آنها یعنی x برابر صفر باشد. همواره با داشتن چنین معادلاتی باید دقت کنید که فضای مورد نظر در مسئله $\mathbb{R}^2$ است یا $\mathbb{R}^3$.





قبلاً در کار کلاس دیدیم که شکل مربوط به این معادله در $\mathbb{R}^2$ محور y هاست. حال می‌خواهیم تمام نقاطی از $\mathbb{R}^3$ را مشخص نماییم که مؤلفه اول آنها برابر صفر است، یعنی تمام سه تایی‌هایی به صورت $(0, y, z)$ به طوری که $y, z \in \mathbb{R}$. همان‌گونه که دیده می‌شود مقدار y و z هرچه باشد در صورتی که مؤلفه اول صفر باشد آن نقطه در معادله مذکور صدق می‌کند و به عبارتی برای یافتن نقاطی که در معادله $x=0$ صدق می‌کنند در انتخاب مقادیر y و z آزاد هستیم. مثلاً نقاط $(0, -1, 5)$ و $(0, 1, 2)$ ، $(0, 0, 0)$ ، $(0, -3, -1)$ همگی در معادله صدق می‌کنند. تمام این نقاط در معادله $x=0$ صدق می‌کنند و این همان صفحه yz است.

۱ فعالیت

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله $x=0$ در $\mathbb{R}^3$ تمام نقاط صفحه yz است (به عبارتی $x=0$ معادله صفحه yz است) و دیدیم که نقاط مختلفی با y و z های دلخواه (مؤلفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه yz به دنبال نقاطی باشیم که مؤلفه سوم آنها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر $x=0$ شرط $z=0$ را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه yz سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای آنها $z=0$ باشد.)

۱- مختصات چند نقطه را که در رابطه $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ صدق کنند را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

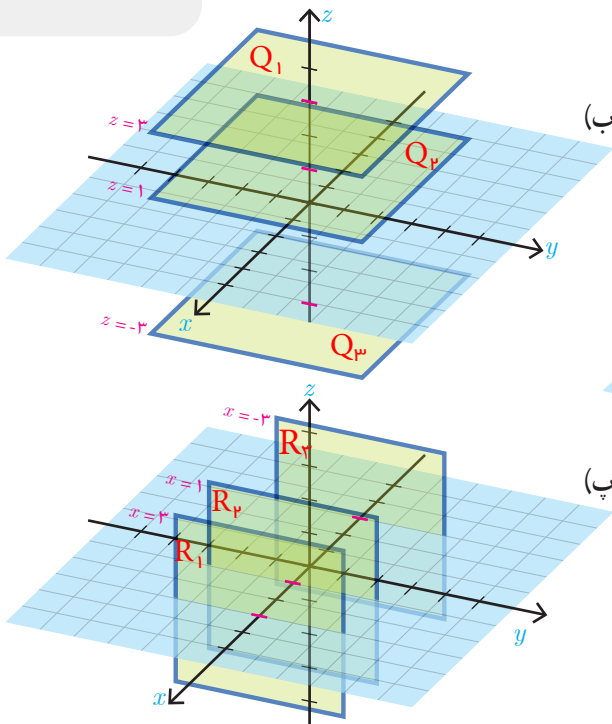
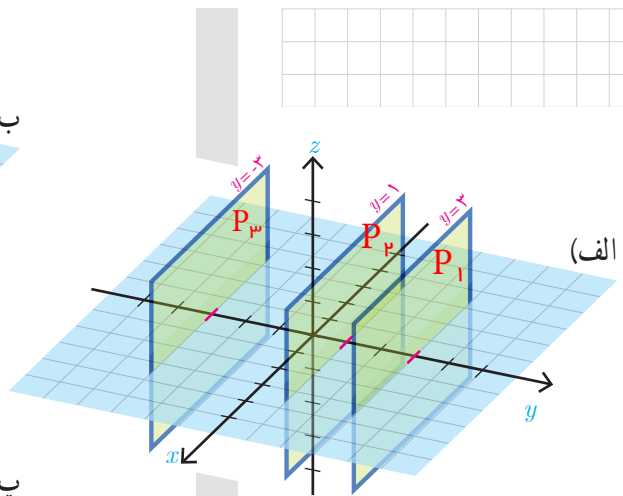
۲- نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله $x=0$ دارد؟

همان محور y هاست اما $x=0$ همان صفحه yz است که شامل محور y ها نیز می‌باشد

مثال: روی صفحه $z=1$ نقاط $A=(1, 2, 1)$ و $B=(2, 2, 1)$ و $C=(3, 2, 1)$ را در نظر می‌گیریم، مؤلفه دوم هر سه نقطه برابر ۲ است. اگر روی صفحه مزبور ($z=1$) تمام نقاطی که مؤلفه دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم یک خط تشکیل می‌دهند (نمودار آن یک خط است به معادلات $\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$)

کاردرکلاس

۱- در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.



۲- وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=1, x=3, x=-3, y=1, y=4, y=-4, z=1, z=2, z=-2$ هستند^۱.

(الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

(ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار دارند.

(پ) معادلات مربوط به هر یک از یال‌های این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که یال‌ها پاره خط‌اند و نه خط)

(ت) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

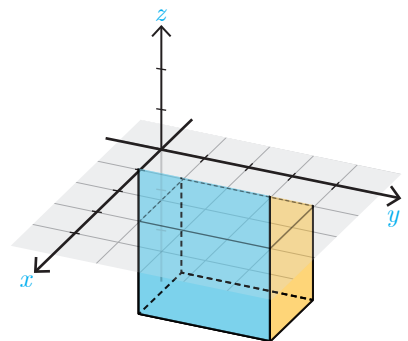
(ث) روابط مشخص‌کننده یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص‌کننده پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید.

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

(ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه‌ای را بیابید که روی یکی از وجه‌های آن و غیر واقع بر یال‌ها باشد.

(چ) شرط اینکه نقطه‌ای درون این مکعب یا روی یکی از وجه‌های آن باشد چیست؟

(ح) روابطی را بنویسید که مشخص‌کننده حجم محدود شده به درون و روی سطح مکعب داده شده باشند.



۱- طرح چنین سؤال‌هایی تنها برای سطوحی که هر مرز آن موازی با یکی از محورهای مختصات است و حجم‌هایی که هر وجه آنها موازی با یکی از صفحات دستگاه مختصات است، مجاز می‌باشد.

$$p_1: y = \omega \rightarrow (-\gamma, \omega, -\epsilon) \in p_1, (o, \omega, 1) \in p_1$$

$$p_\gamma: y = 1 \rightarrow (-1, 1, \Delta) \in p_\gamma, (\nu, 1, \epsilon) \in p_\gamma$$

$$p_\omega: y = -\omega \rightarrow (\Delta, -\omega, -1) \in p_\omega, (1, -\omega, \nu) \in p_\omega$$

ب)

$$Q_1: z = \omega \rightarrow (1, \nu, \omega) \in Q_1, (\epsilon, -1, \omega) \in Q_1$$

$$Q_\gamma: z = 1 \rightarrow (\omega, 1, 1) \in Q_\gamma, (-\Delta, \nu, 1) \in Q_\gamma$$

$$Q_\omega: z = -\omega \rightarrow (\gamma, \epsilon, -\omega) \in Q_\omega, (-1, o, -\omega) \in Q_\omega$$

پ)

$$R_1: x = \omega \rightarrow (\omega, -1, \epsilon) \in R_1, (\omega, \epsilon, 1) \in R_1$$

$$R_\gamma: x = 1 \rightarrow (1, 1, 1) \in R_\gamma, (1, \epsilon, \gamma) \in R_\gamma$$

$$R_\omega: x = -\omega \rightarrow (-\omega, 1, \nu) \in R_\omega, (-\omega, o, \Delta) \in R_\omega$$



$$-(\mu, \mu, 0) - (\mu, 1, 1) - (\mu, \mu, 0) - (\mu, \mu, -\mu) - (\mu, \mu, \mu)$$

کار و نکات ۲: الف)

$$-(1, 1, 0) - (\mu, \mu, 1) - (1, \mu, -\mu)$$

ب)

پ)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ -\mu \leq z \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \mu \\ -\mu \leq z \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = 1 \\ -\mu \leq z \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ -\mu \leq z \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = -\mu \\ 1 \leq y \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = \mu \\ 1 \leq y \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \mu \\ z = -\mu \\ 1 \leq y \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \mu \\ z = \mu \\ 1 \leq y \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = \mu \\ 1 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \mu \\ z = \mu \\ 1 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \mu \\ z = -\mu \\ 1 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = -\mu \\ 1 \leq x \leq \mu \end{cases}$$



$$\begin{matrix} (3, 1, 2) & (1, 4, 2) & (3, 4, 2) \\ (3, 1, -2) & (1, 4, -2) & (3, 4, -2) \end{matrix}$$

ت

$$\begin{matrix} \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = 2 \end{cases} & \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = -2 \end{cases} & \begin{cases} x = 1 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases} & \begin{cases} x = 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases} & \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ y = 1 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases} & \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ y = 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases} \end{matrix}$$

ث

ج نقطه $(2, 3, 1)$ درون مکعب و نقطه $(1, 2, 0)$ روی وجه قرار دارد

چ درون مکعب: یک کلام از مختصات مساوی ندارد و این دو عدد داده شده باشد

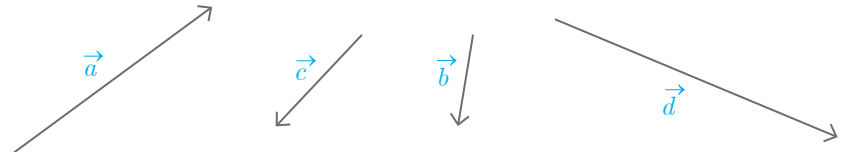
روی یک وجه: یکی از مختصات مساوی داشته باشد و دو نامی مختصات دیگرین دو عدد و دو متغیر داخ شده باشد

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

ح

بردارها در $\mathbb{R}^2$

در سال‌های گذشته با بردارها در صفحه آشنا شدید. هر پاره خط جهت‌دار مانند AB در شکل مقابل، یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن A و انتهای آن B می‌باشد. این بردار را با $\vec{AB}$ و اندازه آن را با $|\vec{AB}|$ نشان می‌دهند. اغلب جهت سهولت، بردارها را با حروف کوچک لاتین مانند $\vec{a}$ و اندازه طول آن را با $|\vec{a}|$ نمایش می‌دهند. در شکل زیر چند بردار مختلف رسم شده‌اند. در این کتاب از هر دو شیوه نگارش، بسته به زمینه مورد بحث استفاده می‌گردد.



دو بردار را مساوی یا همسنگ گوئیم هرگاه اندازه و جهت آنها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. در شکل مقابل بردارها با هم مساوی هستند. همواره می‌توان هر بردار را با برداری مساوی آن، که از مبدأ مختصات شروع می‌شود یکی دانست، چراکه جهت و اندازه آنها برابر است.

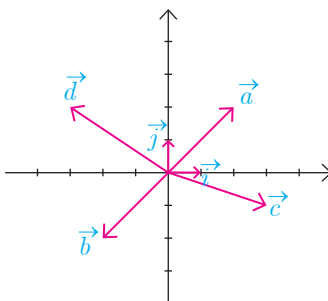
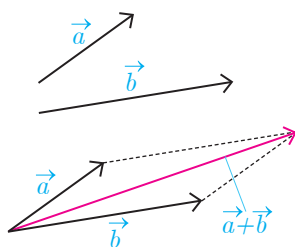
واضح است که می‌توان بی‌شمار بردار دیگر که مساوی هستند را در صفحه در نظر گرفت. به این بردارهای برابر، در اصطلاح، بردارهای هم‌ارز گفته می‌شود.

برای سهولت معمولاً برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات باشد را به عنوان نماینده بردارهای همسنگ در نظر می‌گیرند. مثلاً در شکل قبل بردار قرمز رنگ نماینده همه بردارهای همسنگ $\vec{a}$ می‌باشد. به همین جهت معمولاً ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر می‌گیرند.

با توجه به اینکه ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر گرفته‌ایم، مؤلفه‌های یک بردار با مختصات نقطه انتهایی آن برابر می‌شود. بنابراین هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس. از این رو هر بردار مانند $\vec{a}$ را با زوج مرتبی که انتهای بردار را مشخص می‌کند نمایش می‌دهند. یعنی $\vec{a} = (a_1, a_2)$ که مختصات انتهایی بردار $\vec{a}$ می‌باشد.

$$\vec{c} = (3, -1)$$

مثال: بردارهای $\vec{a} = (2, 2)$ ، $\vec{b} = (-2, -2)$ و $\vec{c} = (2, -1)$ ، $\vec{d} = (-3, 2)$ ، $\vec{i} = (1, 0)$ و $\vec{j} = (0, 1)$ در دستگاه مختصات روبه‌رو رسم شده‌اند.



از سال‌های قبل به یاد می‌آوریم که جمع دو بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ از روش متوازی‌الاضلاع به صورت زیر به دست می‌آید و به آن برابری دو بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ می‌گویند.

و نیز اگر داشته باشیم $\vec{a} = (a_1, a_2)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2)$ می‌توان نوشت:

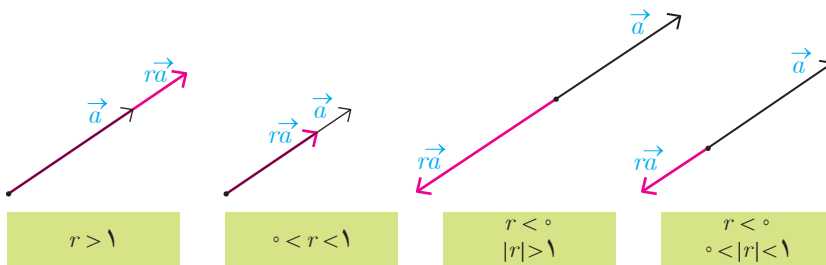
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

همچنین اگر $r \in \mathbb{R}$ و $\vec{a}$ یک بردار باشد، آنگاه بردار $r\vec{a}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2)$$

می توان نشان داد دو بردار $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ همواره با هم موازی اند و برعکس اگر دو بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است.

در شکل های زیر وضعیت دو بردار $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ در حالت های مختلف نشان داده شده اند.



به طور خاص وقتی $r = -1$ بردار $-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$ حاصل می شود که آن را قرینه بردار $\vec{a}$ می نامند. با توجه به تعریف قرینه یک بردار می توان برای تفاضل دو بردار نوشت:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

به نظر شما تعبیر هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

جمع اولی با قرینه دومی

معمولاً مبدأ مختصات را به عنوان بردار صفر در نظر می گیرند و با $\vec{O} = (0, 0)$ نمایش می دهند.

با توجه به اینکه ابتدای هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2)$ را می توان مبدأ مختصات در نظر گرفت، با استفاده از رابطه فاصله دو نقطه از صفحه، اندازه (طول) بردار $\vec{a}$ به صورت زیر به دست می آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

بردارها، کاربردهای فراوانی در محاسبات مهندسی و نیز مدل سازی ها دارند. به طور نمونه بنا به گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می دهد. یکی از سخت ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی اریب (غیر هم راستا) با خط فرود (مسیر باند فرود) می وزد. در این شرایط خلبان می بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار



گیرد (به شکل زیر رجوع کنید). به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند. بردارها برای مدل‌سازی وضعیت فرود هواپیما در چنین شرایطی بسیار مناسب می‌باشند. اکنون به مثال بعد در این رابطه دقت کنید.



هواپیما در حال نزدیک شدن به باند فرود



اولین برخورد هواپیما با باند فرود

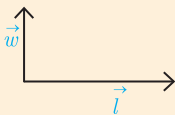


هواپیما بر روی باند فرود و در حال کاهش سرعت

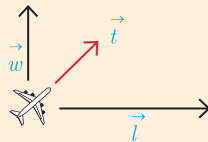


توقف کامل

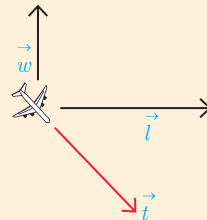
مثال: فرض کنید مسی‌رفرود (خط فرود) در جهت بردار $\vec{l}$ و حداکثر نیروی قابل کنترل در لحظه فرود با اندازه این بردار برابر باشد. همچنین باد نیرویی در جهت بردار $\vec{w}$ به هواپیما وارد می‌کند. در هریک از دو وضعیت زیر خلبان، هواپیما را در هنگام فرود در جهت کدام بردارهای داده شده می‌تواند قرار دهد، به طوری که یک فرود ایمن داشته باشد یعنی برآیند نیروی محرکه $\vec{t}$ و نیز $\vec{w}$ در جهت $\vec{l}$ باشد.



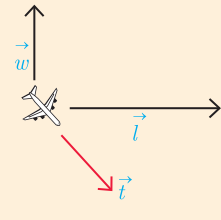
الف



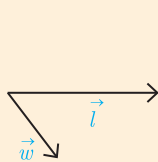
الف-۱



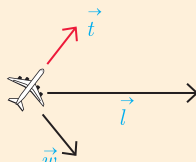
الف-۲



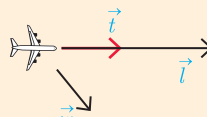
الف-۳



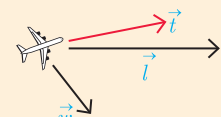
ب



ب-۱



ب-۲



ب-۳

پاسخ: در مورد وضعیت الف براین بردارهای $\vec{w}$ (نیروی باد) و $\vec{i}$ (نیروی محرکه هواپیما) به صورت زیر است.

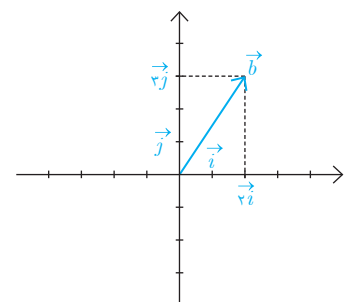
الف-۱	الف-۲	الف-۳
بردار برآیند در جهت $\vec{i}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از بالای باند)	بردار برآیند در جهت $\vec{i}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار برآیند در جهت $\vec{i}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{i}$ است. بنابراین $\vec{i}$ فرود ایمن است.

در مورد وضعیت ب براین بردارهای $\vec{w}$ (نیروی باد) و $\vec{i}$ (نیروی محرکه هواپیما) به صورت زیر است.

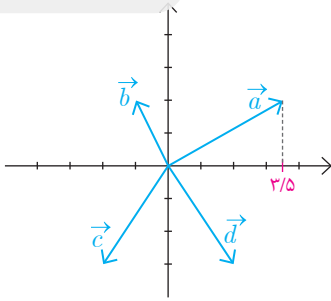
ب-۱	ب-۲	ب-۳
بردار برآیند در جهت $\vec{i}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{i}$ است. بنابراین فرود ایمن است.	بردار برآیند در جهت $\vec{i}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار برآیند در جهت $\vec{i}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)

معمولاً بردار به طول واحد در جهت محور x ها را با $\vec{i}$ و بردار به طول واحد در جهت مثبت محور y ها را با $\vec{j}$ نمایش می دهند. در شکل مقابل بردار $\vec{i} = (1, 0)$ و $\vec{j} = (0, 1)$ و نیز بردار $\vec{b} = (2, 3)$ به صورت حاصل جمع مضاربی از $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ نمایش داده شده اند. به طور کلی می توان هر بردار دلخواه مانند $\vec{a} = (a_1, a_2)$ را به صورت زیر نمایش داد.

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$



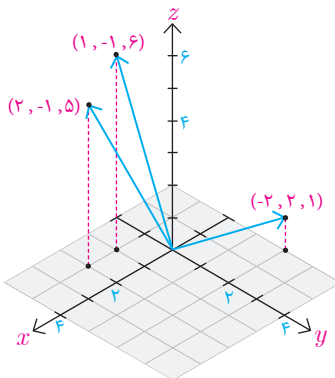
کاردکلاس



- ۱- در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده است.
- (الف) مختصات بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را یافته و آن را رسم کنید.
- (ب) قرینه بردارهای $\vec{c}$ و $\vec{b}$ را رسم کرده و مختصات آنها را به دست آورید.
- (ج) مؤلفه‌های بردارهای $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{d} - \vec{c}$ را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هر یک را به دست آورید.
- (د) هریک از بردارهای $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{d} - \vec{c}$ را بر حسب بردارهای واحد $\vec{i}, \vec{j}$ به دست آورید.

■ بردارها در $\mathbb{R}^3$

مشابه بردارهای $\mathbb{R}^2$ می‌توان به هر نقطه از $\mathbb{R}^3$ ، برداری که از مبدأ شروع می‌شود نظیر کرد. مثلاً فرض کنید $A = (a_1, a_2, a_3)$ نقطه‌ای غیر از مبدأ $\mathbb{R}^3$ باشند. در این صورت پاره‌خط جهت داری که از مبدأ مختصات یعنی $O = (0, 0, 0)$ شروع شده و در نقطه A پایان می‌یابد یک بردار در $\mathbb{R}^3$ را مشخص می‌کند و آن را با $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ نشان می‌دهیم. در بردار $\vec{a}$ مقادیر a_1, a_2, a_3 را مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ می‌گویند. همچنین قرارداد می‌کنیم که مبدأ مختصات یعنی $O = (0, 0, 0)$ نمایشگر بردار $\vec{O} = (0, 0, 0)$ است که بردار صفر نامیده می‌شود. به عنوان مثال در شکل مقابل، چند بردار در $\mathbb{R}^3$ نمایش داده شده است.



■ طول بردار در $\mathbb{R}^3$

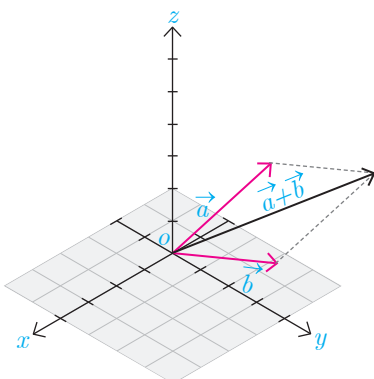
با توجه به رابطه فاصله دو نقطه از $\mathbb{R}^3$ ، طول هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ در $\mathbb{R}^3$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

■ حاصل جمع دو بردار در $\mathbb{R}^3$

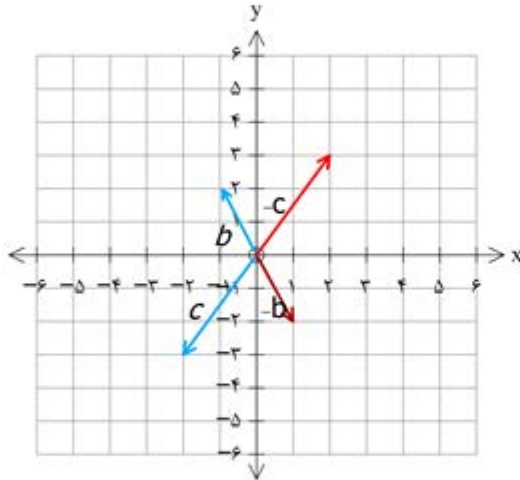
حاصل جمع دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر تعریف می‌شود که به آن بردار برابند نیز می‌گویند.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$



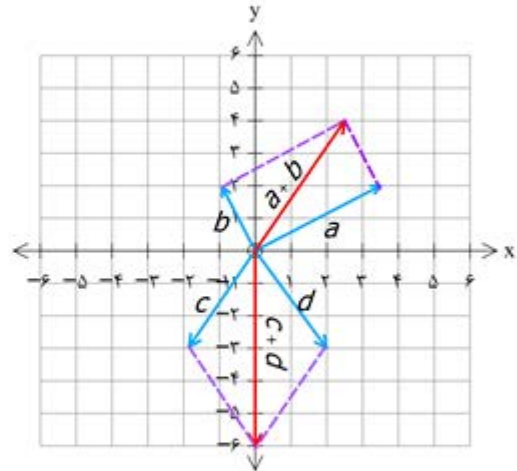
این شکل بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ را در دستگاه $\mathbb{R}^3$ نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل روبه‌رو پیداست برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{a}, \vec{b}$ می‌توان روش متوازی الاضلاع را در صفحه‌ای که از آن دو بردار می‌گذرد به کار برد و بردار برابند $\vec{a} + \vec{b}$ را یافت.

ب

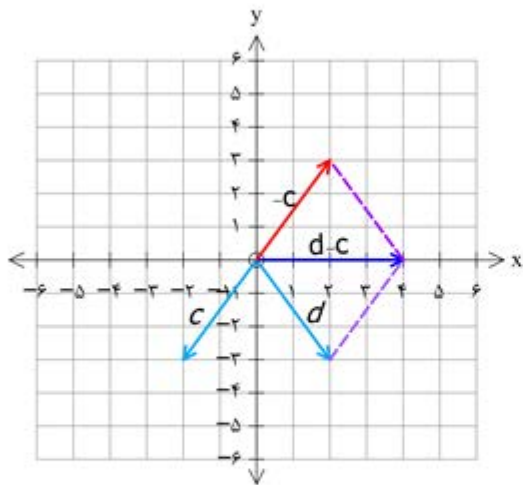
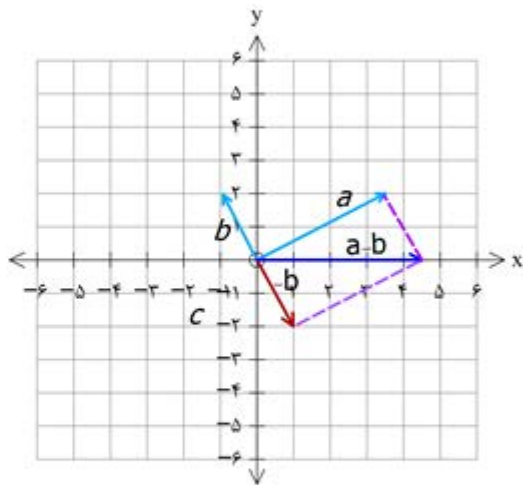


$$\vec{c} = (-1, -2) \Rightarrow -\vec{c} = (+1, +2)$$

$$\vec{b} = (-1, +2) \Rightarrow -\vec{b} = (+1, -2)$$



$$\vec{a} + \vec{b} = (3/2, 2) + (-1, 2) = (2/2, 4)$$



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (2/1, 1) + (1, -1) = (3/1, 0) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 3/1$$

$$\vec{d} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c}) = (1, -2) + (1, 2) = (2, 0) \Rightarrow |\vec{d} - \vec{c}| = 2$$

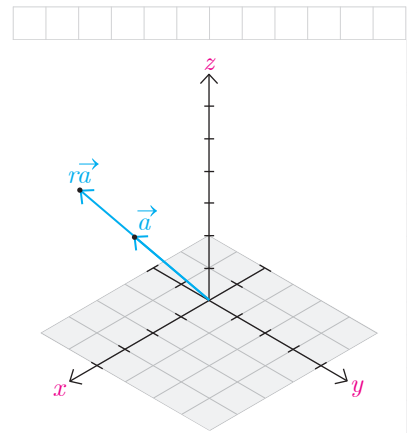
$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= (\nu / \Delta, \nu) = \nu / \Delta \vec{i} + \nu \vec{j} & \vec{b} &= (-1, \nu) = -\vec{i} + \nu \vec{j} & \vec{c} &= (-\nu, -\nu) = -\nu \vec{i} - \nu \vec{j} \\
 \vec{d} &= (+\nu, -\nu) = \nu \vec{i} - \nu \vec{j} & \vec{a} + \vec{b} &= (\nu / \Delta, \nu) = \nu / \Delta \vec{i} + \nu \vec{j} & \vec{a} - \vec{b} &= (\nu / \Delta, 0) = \nu / \Delta \vec{i} \\
 \vec{d} - \vec{c} &= (\nu, 0) = \nu \vec{i}
 \end{aligned}$$

برای هر عدد حقیقی r ، حاصل ضرب r در بردار $\vec{a}$ را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2, a_3)$$

این شکل دو بردار $\vec{a}$ ، $r\vec{a}$ که در آن $r > 1$ را نشان می دهد.

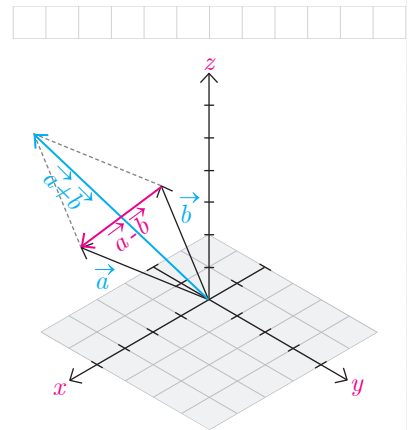
آیا راستای $\vec{a}$ ، $r\vec{a}$ با هم متفاوت اند؟



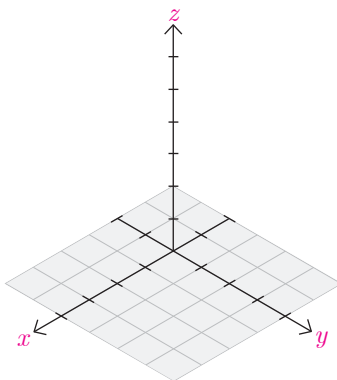
به طور خاص بردار $-\vec{a}$ را که با $-\vec{a}$ نشان می دهند قرینه $\vec{a}$ می گویند یعنی $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$. این بردار هم اندازه با $\vec{a}$ (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می باشد. اکنون تفاضل بردار $\vec{b}$ از $\vec{a}$ یعنی $\vec{a} - \vec{b}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

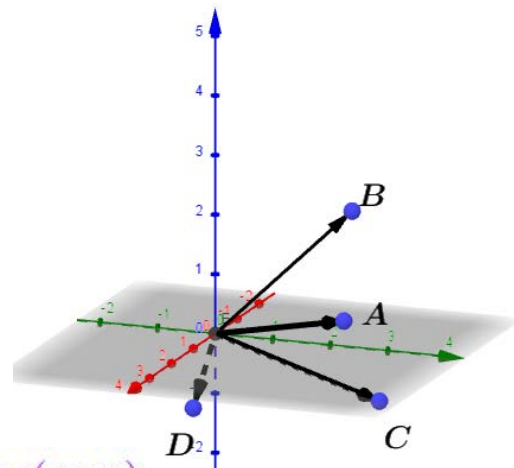
در شکل بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و قرینه آن و نیز $\vec{a} - \vec{b}$ نمایش داده شده اند.



کاردکلاس



نقاط $A = (2, 3, 1)$ ، $B = (-1, 2, 2)$ و $C = (3, 4, 0)$ را در یک دستگاه $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید، اگر بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ با نقاط انتهایی به ترتیب A, B, C, D باشند آنگاه آنها را در دستگاه فوق نشان دهید و هریک از بردارهای زیر را به دست آورید.



$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2, 3, 1) + (-2, 4, 4) = (0, 7, 5)$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (2, 3, 1) + [(-1, 2, 2) + (3, 4, 0)] = (2, 3, 1) + (2, 6, 2) = (4, 9, 3)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = [(2, 3, 1) + (-1, 2, 2)] + (3, 4, 0) = (1, 5, 3) + (3, 4, 0) = (4, 9, 3)$$

$$-2(\vec{b} + \vec{c}) = -2[(-1, 2, 2) + (3, 4, 0)] = -2(2, 6, 2) = (-4, -12, -4)$$

$$-2\vec{b} - 2\vec{c} = -2(-1, 2, 2) - 2(3, 4, 0) = (2, -4, -4) + (-6, -8, 0) = (-4, -12, -4)$$

■ خواص جمع بردارها

در کار در کلاس قبل درستی برخی روابط و اعمال بین بردارها را بررسی کردیم. به طور کلی اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ سه بردار دلخواه و $\vec{O}=(0,0,0)$ بردار صفر و نیز r و s دو عدد حقیقی باشند روابط زیر همواره برقرارند.

$$1- \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی جمع})$$

$$2- \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{خاصیت شرکت‌پذیری در جمع})$$

$$3- \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{O} \quad (\text{عضو قرینه})$$

$$4- \vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{a} \quad (\text{عضو خنثی})$$

$$5- r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

$$6- (r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$

$$7- (rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$$

$$8- \text{اگر } \vec{b} = r\vec{a} \text{ آنگاه } |\vec{b}| = |r| |\vec{a}| \quad (|r| \text{ قدر مطلق } r \text{ است})$$

■ بردارهای یکه

با بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}$ در صفحه $\mathbb{R}^2$ به ترتیب در جهت محور x ها و y ها آشنا شدید. به طور مشابه در $\mathbb{R}^3$ بردارهای زیر را با طول واحد در جهت محورهای مختصات $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیرند.

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$$

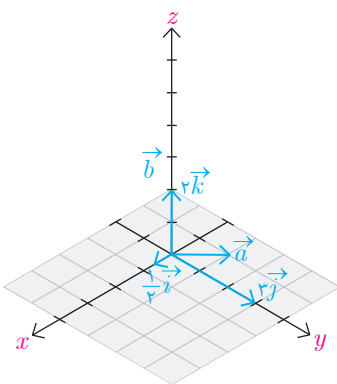
به این ترتیب $\vec{i}$ بردار یکه در جهت محور طول‌ها، $\vec{j}$ بردار یکه در جهت محور عرض‌ها و $\vec{k}$ بردار یکه در جهت محور ارتفاع‌ها می‌باشند.

همچنین با استفاده از روابط بین بردارها به سادگی می‌توان نشان داد که هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ به صورت ترکیبی از بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ قابل بیان است. در واقع داریم:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

مثال: بردار $\vec{a} = (\frac{1}{4}, 3, 2)$ را برحسب بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ و نشان دهید.

$$\vec{a} = \frac{1}{4}\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

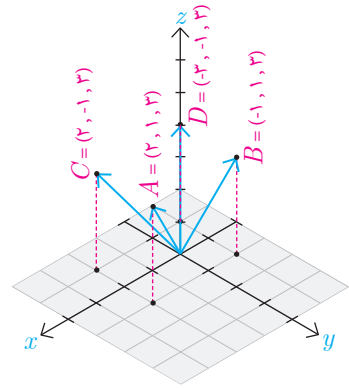


تمرین

۱- چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده اند. $ABDC$

(الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

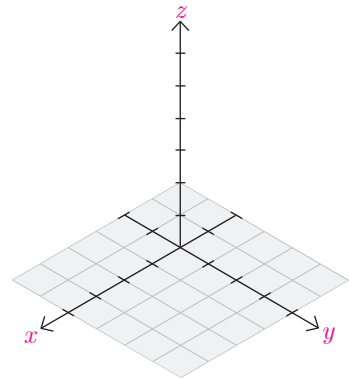
(ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم مساحت و موازی هستند را بنویسید. $ABDC$



۲- نقاط با مختصات $P = (1, 0, 1)$, $Q = (0, -1, -2)$, $R = (3, 0, -1)$ و $S = (-2, -2, -2)$ را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.

۳- در سؤال قبل طول پاره خط‌های PQ , RQ و PS را بیابید.

۴- فرض کنید $P = (x_0, y_0, z_0)$ و $Q = (x_1, y_1, z_1)$. مختصات نقطه M وسط پاره خط PQ را بیابید.



۵- در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

(الف) $\vec{a} = (-\frac{1}{3}, 0, 2)$ ، $\vec{b} = (\sqrt{2}, 1, 1)$ ، $r = 3$ ، $r\vec{a} - \vec{b} = ?$

(ب) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ، $\vec{b} = (3, 1, -1)$ ، $r = -1$ ، $r\vec{a} + \vec{b} = ?$

(ج) $\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} - \vec{k}$ ، $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{a} + \vec{b} = ?$

(د) $\vec{a} = 5\vec{k} + \vec{j}$ ، $\vec{b} = -\vec{k} + \vec{i}$ ، $r = \frac{1}{5}$ ، $r\vec{a} + \vec{b} = ?$

۶- طول بردار $\vec{a}$ را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

الف)

$$A = (1, 1, 1) \quad B = (-1, 1, 1) \quad C = (1, -1, 1) \quad D = (-1, -1, 1)$$

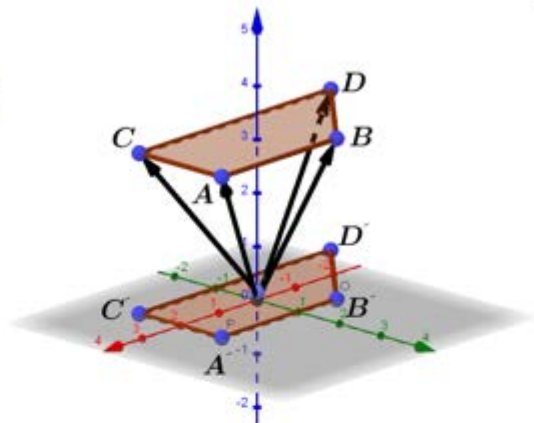
$$AB = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad BD = \begin{cases} -1 \leq x \leq -1 \\ y = x + 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$DC = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad CA: \begin{cases} x = 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$A' = (1, 1, 0) \quad B' = (-1, 1, 0) \quad C' = (1, -1, 0) \quad D' = (-1, -1, 0)$$

$$A'B' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad B'D' = \begin{cases} -1 \leq x \leq -1 \\ y = x + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$D'C' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \quad C'A': \begin{cases} x = 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

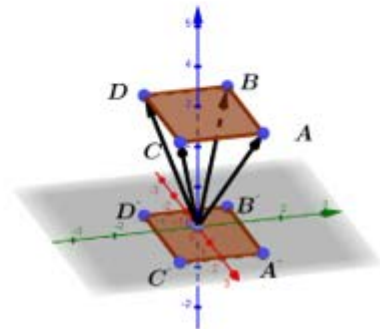


ب)

پاسخ تمرین ۱ اگر مختصات نقطه D را تغییر دهیم یعنی به صورت $D = (-1, -1, 3)$ باشد

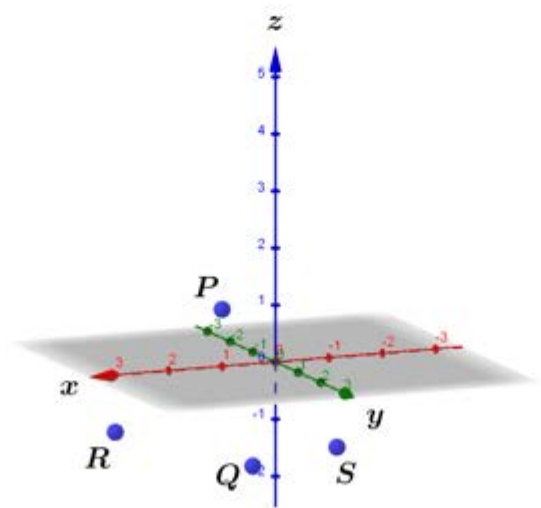
$$A = (2, 1, 3) \quad B = (-1, 1, 3) \quad C = (2, -1, 3) \quad D = (-1, -1, 3)$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} & BD &= \begin{cases} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases} \\ CD &= \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} & AC &= \begin{cases} x = 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow ABCD = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases}$$



$$A' = (2, 1, 0) \quad B' = (-1, 1, 0) \quad C' = (2, -1, 0) \quad D' = (-1, -1, 0)$$

$$\begin{aligned} A'B' &= \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} & B'D' &= \begin{cases} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases} \\ C'D' &= \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} & A'C' &= \begin{cases} x = 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow A'B'C'D' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$



**UPDF**

WWW.UPDF.COM

تمرین ۳:

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - 0)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$$

$$RQ = \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2 + (z_Q - z_R)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (-1 - 0)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$$

$$PS = \sqrt{(x_S - x_P)^2 + (y_S - y_P)^2 + (z_S - z_P)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-2 - 0)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 9} = \sqrt{22}$$

تمرین ۴:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}, y_M = \frac{y_P + y_Q}{2}, z_M = \frac{z_P + z_Q}{2} \Rightarrow M = \left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}, \frac{z_P + z_Q}{2} \right)$$



$$\bar{b} = 3\left(\frac{-1}{3}, 0, 2\right) - (\sqrt{2}, 1, 1) = (-1, 0, 6) - (\sqrt{2}, 1, 1) = (\sqrt{2} - 1, -1, 5)$$

تمرین ۵: الف)

$$r\bar{a} + \bar{b} = -1(3, 2, -1) + (3, 1, -1) = (-3, -2, 1) + (3, 1, -1) = (0, -1, 0)$$

ب)

$$\bar{a} + \bar{b} = (\sqrt{2}, 0, -1) + (0, 3, 1) = (\sqrt{2}, 3, 0)$$

ج)

$$r\bar{a} + \bar{b} = \frac{1}{\Delta}(0, 1, \Delta) + (1, 0, -1) = \left(0, \frac{1}{\Delta}, 1\right) + (1, 0, -1) = \left(1, \frac{1}{\Delta}, 0\right)$$

د)



$$\vec{a} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{3} \right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 0^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{1+3}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

تمرین ۶: الف)

$$\vec{a} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, -1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$$

ب)

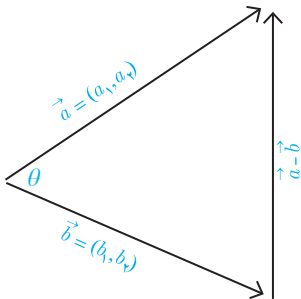
$$\vec{a} = (\sqrt{2}, 0, -1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

ج)

$$\vec{a} = (0, 1, \sqrt{2}) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{0+1+2} = \sqrt{3}$$

د)

ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها



فرض کنید دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2)$ همانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم زاویه بین این دو بردار (θ) را پیدا کنیم.

برای این منظور بردار تفاضل $\vec{a} - \vec{b}$ را نیز در این شکل رسم کرده‌ایم تا مثلی به طول اضلاع زیر به دست آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها که سال گذشته آموخته‌اید می‌توان نوشت.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \quad (1)$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

از طرفی صورت کسر فوق را می‌توان با توجه به اندازه‌های اضلاع مثلث که قبلاً محاسبه شده‌اند به صورت زیر ساده کرد.

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(2a_1b_1 + 2a_2b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

پس عبارت (۱) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(رابطه فوق برای حالتی که دو بردار هم راست باشند نیز برقرار است.)

با محاسبه عبارت سمت راست و حل معادله مقدار $0 \leq \theta \leq \pi$ به دست می آید.

کمیتی که در صورت این کسر سمت راست است را معمولاً با $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نشان می دهند و به آن حاصل ضرب داخلی یا حاصل ضرب نقطه ای دو بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ می گویند. بنابراین می توان نوشت.

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

همچنین از روابط فوق معلوم است که

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

به طور مشابه حاصل ضرب داخلی دو بردار در $\mathbb{R}^3$ نیز قابل تعریف است.

تعریف: اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند؛ در این صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

با اثباتی مشابه قبل می توان نشان داد که اگر $0 \leq \theta \leq \pi$ زاویه بین دو بردار ناصفر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ در $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

از تعریف ضرب داخلی واضح است که اگر یکی از دو بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ صفر باشند آنگاه $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ هر چند که در این حالت زاویه θ بین دو بردار تعریف نمی شود.

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (2, -1, 2)$ و $\vec{b} = (1, -1, 0)$ را پیدا می کنیم.

حل: ابتدا ضرب داخلی دو بردار را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \times 1) + (-1 \times -1) + (2 \times 0) = 3$$

از طرفی اگر $0 \leq \theta \leq \pi$ زاویه بین دو بردار باشد خواهیم داشت:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 3 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cos \theta \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

■ خواص ضرب داخلی

۱- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ خاصیت جابه جایی

اثبات: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}$

۲- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

اثبات: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$

۳- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ خاصیت شرکت پذیری

اثبات: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$

$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$

$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3$

$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

۴- برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a$ و b برهم عمود هستند

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

۵- $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0, \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

۶- $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ (نامساوی کشی شوارتز) منظور از $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ قدر مطلق مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ است.

$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \left| |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \right| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$

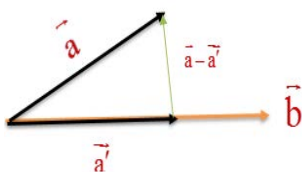
که در آخرین نامساوی از $|\cos \theta| \leq 1$ استفاده شده است.

■ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$

دو بردار غیر صفر $\vec{a}, \vec{b}$ را که زاویه بین آنها θ است با فرض $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ در نظر می گیریم. می خواهیم تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ که آن را با $\vec{a}'$ نمایش داده ایم به دست آوریم. از روی شکل مشخص است که برای یک r حقیقی $\vec{a}' = r \vec{b}$. با توجه به اینکه بردار تفاضل $\vec{a}$ از $\vec{a}'$ بر بردار $\vec{b}$ عمود است. خواهیم داشت:

$(\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (\vec{a} - r \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - r \vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow r = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$

$$\begin{aligned} & |(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)| \\ &= |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \\ &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



بنابراین بردار تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ به صورت زیر به دست می آید.

$$\vec{a}' = r \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

مثال: تصویر قائم بردار $\vec{a} = (2, -1, 2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (1, -1, 0)$ بیابید.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + (2)(0) = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{3}{2} \vec{b} = \frac{3}{2} (1, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

کاردرکلاس

۱- تصویر بردار $i = (1, 0, 0)$ بر امتداد بردار $j = (0, 1, 0)$ را بیابید.

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0 \quad \vec{j}^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

$$P_{\vec{j}} \vec{i} = \frac{\vec{i} \cdot \vec{j}}{\vec{j}^2} \vec{j} = \frac{0}{1} (0, 1, 0) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

۲- نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می شود.

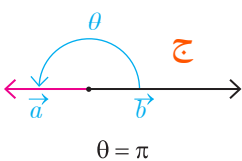
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$P_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{0}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = 0 (b_1, b_2, b_3) = \vec{0}$$

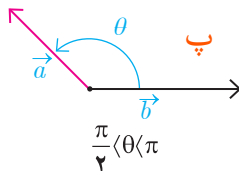
۳- نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ می شود.

۴- هر یک از حالات زیر را با شکل های داده شده نظیر کنید.

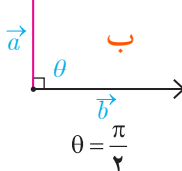
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \quad \text{ج}$$



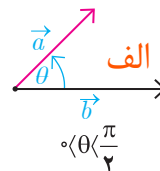
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \quad \text{ت}$$



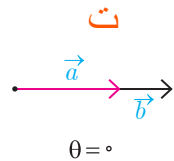
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \text{پ}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{ب}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad \text{الف}$$



الف) هرگاه a, b موازی و هم جهت باشند پس $\theta = 0$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 0^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \times 1 = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$P_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = |\vec{a}| \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \xrightarrow{\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = 1} P_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| = \vec{a}$$

بردار $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ برداری به طول ۱ می باشد که هم جهت با $\vec{b}$ است

ب) هرگاه a, b موازی و درخلاف جهت هم باشند پس $\theta = \pi$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \pi \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \times (-1) = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$P_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{-|\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = |\vec{a}| \frac{-\vec{b}}{|\vec{b}|} \xrightarrow{\frac{-\vec{b}}{|\vec{b}|} = 1} P_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| = \vec{a}$$

بردار $\frac{-\vec{b}}{|\vec{b}|}$ برداری به طول ۱ می باشد که درخلاف جهت با $\vec{b}$ است

ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. می توان ضرب دو بردار را به گونه ای تعریف کرد که حاصل ضرب آنها همواره یک بردار باشد.

تعریف: فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند. ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a} \times \vec{b}$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار غیر صفر و θ زاویه بین آنها باشد اندازه بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ می شود:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_3^2 b_1^2$$

$$+ a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1)^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta = (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta)^2$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

بنابراین

از هندسه سال قبل می دانیم که سمت راست عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که اندازه اضلاع آن برابر $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ است.

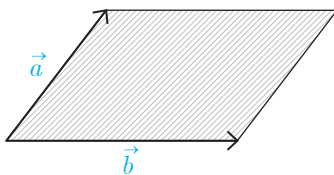
مثال: بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. حاصل $\vec{i} \times \vec{j}$ و $\vec{j} \times \vec{i}$ را به دست آورید.

$$\vec{i} \times \vec{j} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0)$$

$$= ((0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(0), (1)(1) - (0)(0)) = (0, 0, 1) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0)$$

$$= ((1)(0) - (0)(0), (0)(1) - (0)(0), (0)(0) - (1)(1)) = (0, 0, -1) = -\vec{k}$$



همان طور که مشاهده شد حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ برابر با بردار $\vec{k}$ شد که بر هر دوی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ عمود می باشد. ضرب خارجی دارای خواص زیر می باشد.

خاصیت ۱: فرض کنید $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند. در این صورت

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

این خاصیت گویای این مطلب است که $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ بنابراین با توجه به آنچه تاکنون به دست آمده است می توان گفت ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی الاضلاع ایجاد شده توسط آن دو بردار است. در واقع می توان نشان داد که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار بر صفحه شامل آن دو بردار عمود است. اثبات این خاصیت در ادامه می آید.

اثبات:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

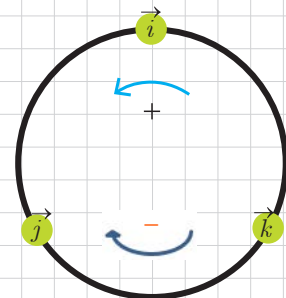
$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

می توان نشان داد که برای سه برداری که $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ روابط زیر برقرار است:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

معمولاً این روابط را به صورت نمودار چرخشی نیز نمایش می دهند.



$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{خاصیت ۲:}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \text{خاصیت ۳:}$$

$$r \vec{a} \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times r \vec{b} \quad \text{خاصیت ۴: اگر } r \text{ عددی حقیقی باشد، آنگاه:}$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ داریم:} \quad \text{خاصیت ۵: برای سه بردار}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \text{خاصیت ۶: دو بردار غیر صفر } \vec{a}, \vec{b} \text{ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر}$$

$$|\vec{a}|, |\vec{b}| \neq 0$$

اثبات:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

■ حجم متوازی السطوح

اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه می توان به کمک آنها متوازی السطوحی همانند شکل زیر تولید کرد.

همان طور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی بردار $\vec{b} \times \vec{c}$ یعنی

$$\text{ارتفاع} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شده پس مساحت آن برابر است با $|\vec{b} \times \vec{c}|$. با استفاده از دترمینان نیز می توان مساحت متوازی الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر به دست آورد:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت } S = |\vec{b} \times \vec{c}|$$

بهتر است به این شکل نوشته شود

بنابراین حجم متوازی السطوح به صورت زیر به دست می آید:

$$\text{حجم متوازی السطوح} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = |\vec{b} \times \vec{c}| \left| \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \right| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

از شکل فوق واضح است که اگر سه بردار در یک صفحه قرار بگیرند آنگاه حجم متوازی السطوح برابر صفر است و از رابطه بالا نیز این مطلب قابل اثبات است. لذا در این حالت خاص نیز حجم متوازی السطوح برابر است با $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$. حجم متوازی السطوح پدید آمده توسط سه بردار $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ، $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ با استفاده از دترمینان زیر نیز به دست می آید.

$$K = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{حجم} = V = |K|$$

$$\text{یا } K = a \cdot (b \times c)$$

اگر $K = 0$ در این صورت چه نتیجه ای می گیرید؟ سه بردار در یک صفحه واقعند

مثال: حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ، $\vec{b} = (0, 1, 1)$ و $\vec{c} = (1, 0, 1)$ تولید می شود.

حل: با استفاده از ضرب خارجی b در بردار c به دست می آید.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (1, 1, -1)$$

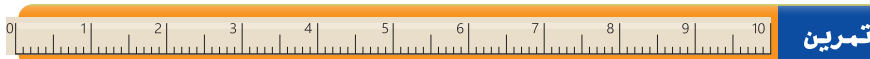
بنابراین حجم متوازی السطوح به دست می آید.

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1)| = |1 + 1 + 0| = 2$$

پیش‌تر اشاره شد که اگر سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح و نیز $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ برابر صفر می‌شود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می‌شود.

مثال: آیا بردارهای $\vec{a} = (2, 3, -1)$ ، $\vec{b} = (1, -1, 3)$ ، $\vec{c} = (1, 9, -1)$ در یک صفحه‌اند؟
حل: برای این منظور کافی است $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ را به دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی‌السطوح تولیدشده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (-16, 14, 10) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -32 + 42 - 10 = 0 \Rightarrow \text{سه بردار در یک صفحه هستند.}$$



تمرین

۱- برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به دست آورید.

الف) $\vec{b} = i$ ، $\vec{a} = (2, -1, 2)$ ب) $\vec{b} = (2, 3, 1)$ ، $\vec{a} = (3, 2, 1)$
ج) $\vec{b} = (-1, 2, 4)$ ، $\vec{a} = (1, 1, 0)$

۲- فرض کنید $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ را محاسبه کنید.

۳- سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.

۴- اگر $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ ، $\vec{b} = (3, -4, 2)$ و $\vec{a} = (1, -3, 4)$ باشند آنگاه تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.

۵- برداری عمود بر دو $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ ، $\vec{a} = (1, -3, 2)$ بردار پیدا کنید.

۶- سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷- بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{b}| = 26$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

C **B**
۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (3, 5, 7)$ ، $b = (5, 5, 0)$ ، $A = (-4, 0, 4)$ داده شده است را بیابید.



تمرین: الف

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (2, -1, 2) \\ \bar{b} &= (1, 0, 0) \end{aligned} \xrightarrow[\bar{b}^T = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1]{\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times 0 = 2} P_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b} = \frac{2}{1} (1, 0, 0) = (2, 0, 0)$$

ب

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (2, 3, 1) \\ \bar{b} &= (3, 2, 1) \end{aligned} \xrightarrow[\bar{b}^T = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14]{\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 13} P_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b} = \frac{13}{14} (3, 2, 1) = \left(\frac{39}{14}, \frac{13}{7}, \frac{13}{14} \right)$$

ج

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (1, 1, 0) \\ \bar{b} &= (-1, 2, 4) \end{aligned} \xrightarrow[\bar{b}^T = (-1)^2 + 2^2 + 4^2 = 21]{\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \times (-1) + 1 \times 2 + 0 \times 4 = 1} P_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b} = \frac{1}{21} (-1, 2, 4) = \left(\frac{-1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{4}{21} \right)$$

**UPDF**

WWW.UPDF.COM

تمرین ۲) روش اول

$$|\bar{a}| = \mu, |\bar{b}| = 1, |\bar{c}| = \mu$$

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0} \xrightarrow{(\bar{a})} \bar{a}^{\mu} + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} = \bar{0}$$

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0} \xrightarrow{(\bar{b})} \bar{a}\bar{b} + \bar{b}^{\mu} + \bar{b}\bar{c} = \bar{0}$$

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0} \xrightarrow{(\bar{c})} \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}^{\mu} = \bar{0}$$

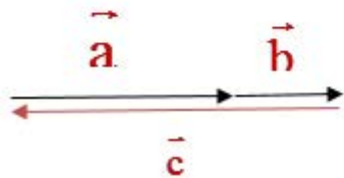
$$\left. \begin{array}{l} \bar{a}^{\mu} + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} = \bar{0} \\ \bar{a}\bar{b} + \bar{b}^{\mu} + \bar{b}\bar{c} = \bar{0} \\ \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}^{\mu} = \bar{0} \end{array} \right\} \bar{a}^{\mu} + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}^{\mu} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}^{\mu} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \bar{a}^{\mu} + \bar{b}^{\mu} + \bar{c}^{\mu} + \mu\bar{a}\bar{b} + \mu\bar{b}\bar{c} + \mu\bar{a}\bar{c} = \bar{0} \Rightarrow \underbrace{\mu^{\mu} + 1^{\mu} + \mu^{\mu}}_{1\text{f}} + \mu(\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c} = -\gamma$$



روش دوم تمرین ۲:

$$|\vec{a}| = ۲, |\vec{b}| = ۱, |\vec{c}| = ۳$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 0 = ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲$$

$$\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \pi = ۱ \times ۳ \times (-۱) = -۳ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = ۲ + (-۳) + (-۶) = -۷$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \pi = ۲ \times ۳ \times (-۱) = -۶$$

روش سوم تمرین ۲:

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \cdot \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \underbrace{۲\vec{a} \cdot \vec{b} + ۲\vec{b} \cdot \vec{c} + ۲\vec{a} \cdot \vec{c}}_{۱۴} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -۷$$

**UPDF**

WWW.UPDF.COM

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = \vec{i} \\ \vec{b} = \vec{j} \\ \vec{c} = \vec{k} \end{array} \right\}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} \quad \cancel{\vec{j} = \vec{k}}$$

تمرین ۳:

تمرین ۴:

$$\vec{m} = \vec{b} + \vec{c} = (\mu - 1, -\nu + 1, \nu + \nu) = (\nu, -\mu, \nu)$$

$$\vec{m} \cdot \vec{a} = (1)(\nu) + (-\mu)(-\mu) + (\nu)(\nu) = \nu + 9 + \nu\mu = 35$$

$$|\vec{m}|^2 = \nu^2 + (-\mu)^2 + \nu^2 = 14 + 9 + \mu\nu = 149$$

$$P_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a} = P_{\vec{m}} \vec{a} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{a}}{|\vec{m}|^2} \vec{m} = \frac{35}{149} (\nu, -\mu, \nu) = \frac{\nu}{149} (\nu, -\mu, \nu) = \left(\frac{10}{149}, -\frac{15}{149}, \frac{30}{149} \right)$$



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 13\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \Rightarrow \vec{c} = (13, 1, -5), \vec{c} \perp \vec{b}, \vec{c} \perp \vec{a}$$

$$\vec{a} = (1, 1, 1) \quad \vec{b} = (2, 2, 2) \quad \vec{c} = (3, 3, 3)$$

$$\underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{\vec{0}} = \underbrace{\vec{a} \times \vec{c}}_{\vec{0}} = \vec{0} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

با توجه به مثال نقض بالا، قاعده حذف همواره برقرار نیست

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b} - \vec{c}| \sin \theta = 0$$

اگر بخواهیم $\vec{b} = \vec{c}$ در نظر بگیریم

$$\xrightarrow{\quad} \begin{cases} |\vec{a}| \neq 0 \\ \sin \theta \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \not\parallel \vec{b} - \vec{c} \end{cases}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow ۷۲ = ۳ \times ۲۶ \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{۷۲}{۸۴} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{۲}{۳}\right)^2 = \frac{۵}{۹} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = ۳ \times ۲۶ \times \left(\pm \frac{\sqrt{۵}}{۳}\right) = \pm ۲۶\sqrt{۵}$$

$$\vec{AB} = (۲, ۰, -۷) \quad \vec{AC} = (-۷, -۵, -۳)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & ۰ & -۷ \\ -۷ & -۵ & -۳ \end{vmatrix} = -۳۵\mathbf{i} + ۵۵\mathbf{j} - ۱۰\mathbf{k} \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-۳۵)^2 + ۵۵^2 + (-۱۰)^2} = \sqrt{۴۳۵۰}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{۴۳۵۰} = \frac{۵\sqrt{۱۷۴}}{۲}$$

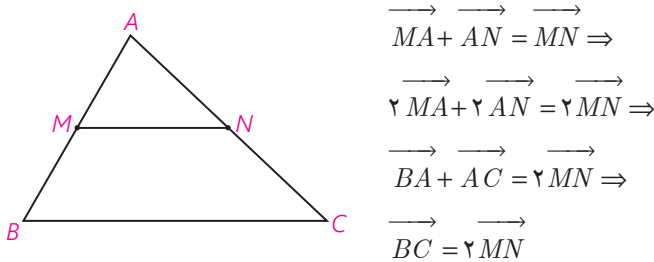


(خواندنی)

در این فصل با بردارها و خواص جالبی از آنها آشنا شدید. جالب است بدانید بردارها در حل بسیاری از مسائل هندسی که در سال‌های گذشته با آنها آشنا شده‌اید می‌توانند کاربرد داشته باشند و اثبات برخی قضایا را راحت‌تر می‌کنند. در ادامه چند مثال از این گونه مسائل آورده شده است که مطالعه آنها به علاقه‌مندان پیشنهاد می‌گردد.

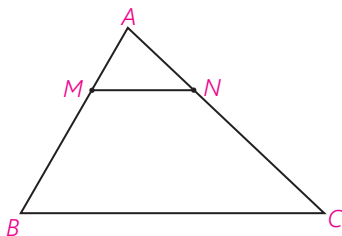
مثال ۱: ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

اثبات:



$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{MN} \Rightarrow \\ 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AN} &= 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} &= 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \\ \overrightarrow{BC} &= 2\overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

پس طول BC دو برابر طول MN است و چون BC مضربی از MN است لذا BC موازی MN است.



مثال ۲: در مثلث ABC ، $MN \parallel BC$ ثابت کنید:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

(قضیه تالس)

اثبات: فرض کنیم $BA = K \cdot MA$ و $AC = K' \cdot AN$ و $BC = K'' \cdot MN$

بنابراین:

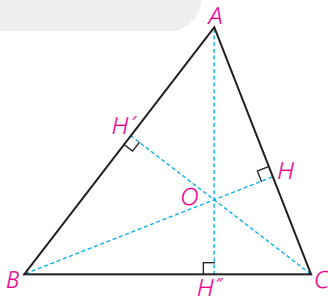
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= K \cdot \overrightarrow{MA}, \quad \overrightarrow{AC} = K' \cdot \overrightarrow{AN}, \quad \overrightarrow{BC} = K'' \cdot \overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{MN}, \quad \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \\ K \cdot \overrightarrow{MA} + K' \cdot \overrightarrow{AN} &= K'' \cdot \overrightarrow{MN} = K''(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) = \\ K'' \cdot \overrightarrow{MA} + K'' \cdot \overrightarrow{AN} &\Rightarrow (K - K'') \overrightarrow{MA} + (K' - K'') \cdot \overrightarrow{AN} = \vec{0} \end{aligned}$$

ولی $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{AN}$ بردارهایی در راستا و جهت‌های مختلف‌اند، پس مجموع آنها نمی‌تواند صفر شود مگر آنکه:

$$K - K'' = K' - K'' = 0$$

و در نتیجه: $K = K' = K''$ و از آنجا حکم ثابت می‌شود.

مثال ۳: ثابت کنید در هر مثلث، سه ارتفاع در یک نقطه هم‌رس‌اند.



اثبات: فرض کنیم ارتفاع‌های BH و CH' همدیگر را در نقطه O قطع کنند.

در این صورت داریم:

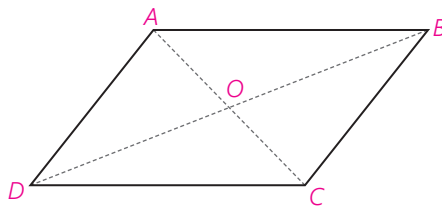
$$BH \perp AC \Rightarrow \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0, \vec{BO} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$CH' \perp AB \Rightarrow \vec{CH'} \cdot \vec{AB} = 0, \vec{CO} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{AO} \cdot \vec{BC} &= \vec{AO} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AO} \cdot \vec{AC} - \vec{AO} \cdot \vec{AB} \\ &= (\vec{BO} - \vec{BA}) \cdot \vec{AC} - (\vec{CO} - \vec{CA}) \cdot \vec{AB} = \vec{BO} \cdot \vec{AC} - \vec{BA} \cdot \vec{AC} \\ &\quad - \vec{CO} \cdot \vec{AB} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = -\vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = 0 \end{aligned}$$

بنابراین $AO \perp BC$ و لذا امتداد AO هم بر BC عمود است و ارتفاع رأس A هم از O می‌گذرد.

مثال ۴: ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن با هم موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.



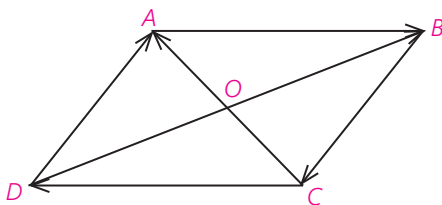
اثبات: در شکل مقابل، با فرض اینکه $AB \parallel CD$ و $AB = CD$ نتیجه می‌شود:

$$\vec{AB} = \vec{DC} \text{ و در نتیجه:}$$

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD} \Rightarrow \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OA} - \vec{OD} \Rightarrow \vec{CB} = \vec{DA}$$

و بنابراین: $CB \parallel DA$ و $CB = DA$ و ABCD متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۵: ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.



اثبات:

$$\left. \begin{aligned} \vec{OA} + \vec{AB} &= \vec{OB} \\ \vec{OC} + \vec{CD} &= \vec{OD} \end{aligned} \right\} +$$

$$(\vec{OA} + \vec{OC}) + (\vec{AB} + \vec{CD}) = \vec{OB} + \vec{OD} \Rightarrow$$

$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$$

اکنون استدلال را خودتان کامل کنید.

منابع

- ۱- پورنگی، محمدرضا، تاجبخش، یحیی (۱۳۸۱)، کتاب درسی هندسه تحلیلی و جبر خطی، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۲- غیور، حسین، مجذوب زنجانی، حسین، معیری، محمدطاهر (۱۳۷۳). کتاب درسی هندسه تحلیلی، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۳- فیروزنیا، احمد، باوری، احمد رضا (۱۳۷۰) هندسه تحلیلی، تهران، نشر فردوس.
- ۴- ایرانمنش، علی، جمالی، محسن و ... (۱۳۸۸) کتاب درسی ریاضیات ۲، تهران سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۵- امیری حمیدرضا، ماتریس و دستگاه‌های معادلات خطی (۱۳۷۸) انتشارات مدرسه
- ۶- شهریاری، پرویز، محاسبه برداری (۱۳۶۹) انتشارات تهران.
- 7- T. Grenfell, Analytical Geometry for beginners Nabu Press zolo.
- 8- Mittal & Shanti Nayan, Analytical Solid Geometry international Book Distributing Company 2005.
- 9- Larson, R. & Falvo, D.C. (2009). Elementary Linear Algebra, Sixth Edition. Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, Boston, MA.
- 10- Larson, R. (2017) Elementary Linear Algebra, Eighth Edition. Cengage Learning, Boston, MA



سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانه راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب هندسه ۳ با کد ۱۱۲۲۱۳

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	احمد تقی عجمی	آذربایجان شرقی	۲۷	جابر عامری	خوزستان
۲	پیمان خاوندی	آذربایجان شرقی	۲۸	میترا سلماسی	خراسان شمالی
۳	فرشته قرامحمدی	شهر تهران	۲۹	سیدعلی حسینی	خراسان جنوبی
۴	محمد رمضانپور	فارس	۳۰	محمد مهدی قلندری	هرمزگان
۵	شادی حبیب پور	هرمزگان	۳۱	میشم محمدیان	زنجان
۶	فرزانه فروزانفر	کردستان	۳۲	سیمیا حقیقی آذر	گلستان
۷	علی نصیری	قزوین	۳۳	کیان سهرابی	کرمانشاه
۸	زهره اصلانی	شهرستانهای تهران	۳۴	نوراله جمالی	بوشهر
۹	حکیمه محمدی	البرز	۳۵	لیلی حاتم زاده	اصفهان
۱۰	فاطمه نصیری	ایلام	۳۶	لیلا محرابی نسب	خراسان شمالی
۱۱	سید محسن حسینی	کردستان	۳۷	مانده ملا حسینی	البرز
۱۲	کامران کاظمی	خوزستان	۳۸	ژاله اخوان	شهرستانهای تهران
۱۳	الناز رابری	آذربایجان غربی	۳۹	علی رضایات	همدان
۱۴	رضا کاظمی	قزوین	۴۰	فاطمه دولت خواه	گیلان
۱۵	قاسم شعبانی چاوسر	مازندران	۴۱	مذهب روستائی	بوشهر
۱۶	کیانوش کمائی	مرکزی	۴۲	وحید سجادیپور	کهگیلویه و بویراحمد
۱۷	فرزانه کد خدایی	لرستان	۴۳	سالم برزگر	اردبیل
۱۸	محمد رضا نفعی	خراسان رضوی	۴۴	سعید تاجیان	فارس
۱۹	مجتبی مرسلی	شهر تهران	۴۵	فرشته واتق	کرمان
۲۰	مهدی روناسی	سیستان و بلوچستان	۴۶	حسن فتاحی	کرمانشاه
۲۱	مریم امیرمحمدی	گیلان	۴۷	رضا علیوند	اردبیل
۲۲	قباد خالدی کوره	آذربایجان غربی	۴۸	زهره خاتمی	زنجان
۲۳	سلیمان موحدی راد	مازندران	۴۹	جمال نوین	یزد
۲۴	مریم امامی	همدان	۵۰	محمد نیازی	چهارمحال و بختیاری
۲۵	علی مراد سبزه کار	خراسان جنوبی	۵۱	زهره صیدی	ایلام
۲۶	سکینه حبیبی	لرستان	۵۲	علیرضا عمرانی	مرکزی

پیاموز | Biamoz.com

بزرگترین مرجع آموزشی و نمونه سوالات درسی تمامی مقاطع

شامل انواع | نمونه سوالات | فصل به فصل | پایان ترم | جزوه |

ویدئوهای آموزشی | گام به گام | طرح درس | طرح جابر | و ...

اینستاگرام

گروه تلگرام

کانال تلگرام

برای ورود به هر پایه در سایت ما روی اسم آن کلیک کنید

دبستان

اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم
-----	-----	-----	-------	------	-----

متوسطه اول

هفتم	هشتم	نهم
------	------	-----

متوسطه دوم

دهم	یازدهم	دوازدهم
-----	--------	---------