

به نام خدا

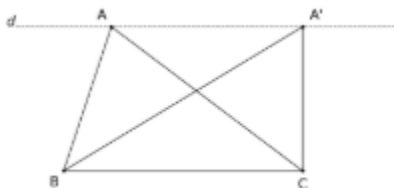
جزوه فصل دوم هندسه دهم ریاضی

● **نکته:** نسبت مساحت دو مثلث با ارتفاع برابر، برابر است با نسبت قاعده‌های متناظر.

● **نتیجه ۱:** دو مثلث ABC و A'BC که رئوس A و A' روی خطی موازی قاعده مشترک BC قرار دارند، هم مساحت اند، پس:

$$S_{ABC} = S_{A'BC}$$

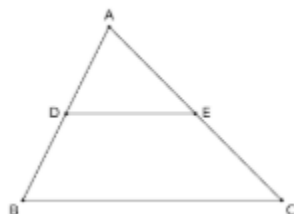
● **نتیجه ۲:** در هر مثلث، میانه هر ضلع، مساحت آن مثلث را نصف می کند.



● **قضیه تالس و تعمیم قضیه تالس:** اگر در مثلث ABC، [پاره‌خطی] DE موازی BC باشد، آن گاه داریم:

$$\text{(تالس)} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{(تعمیم تالس)} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

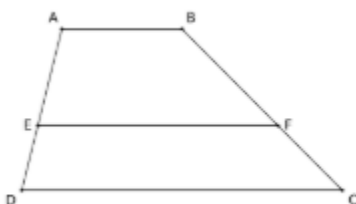


• **عکس قضیه تالس:** اگر نقاط D و E روی ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC طوری قرار گیرند که نسبت‌های مساوی روی این دو ضلع ایجاد کنند، آن‌گاه پاره خط DE موازی ضلع BC خواهد بود.

• **تالس در ذوزنقه:**

(۱) اگر پاره خطی موازی محدود به دو ساق‌های ذوزنقه، نسبت‌های مساوی روی ساق‌ها ایجاد کند، آن‌گاه پاره خط مذکور با ساق‌ها موازی است (عکس تالس):

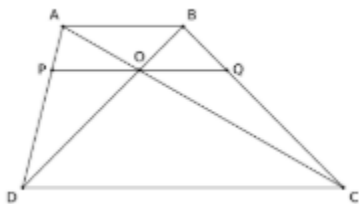
$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow EF \parallel AB \parallel CD$$



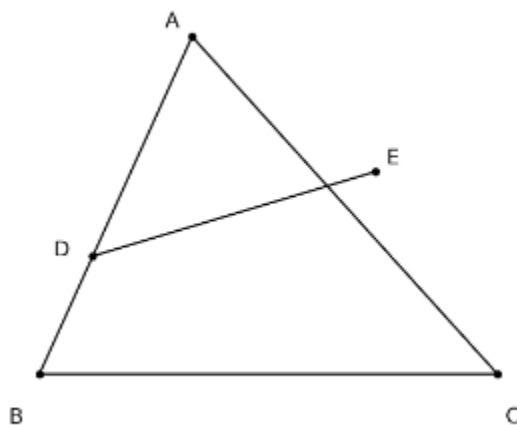
(۲) پاره خطی که نقاط وسط ساق‌های ذوزنقه را هم وصل می‌کند، اولاً با قاعده‌های ذوزنقه موازی است، ثانیاً طول آن برابر است با میانگین طول دو قاعده، یعنی:

$$\frac{AB + CD}{2}$$

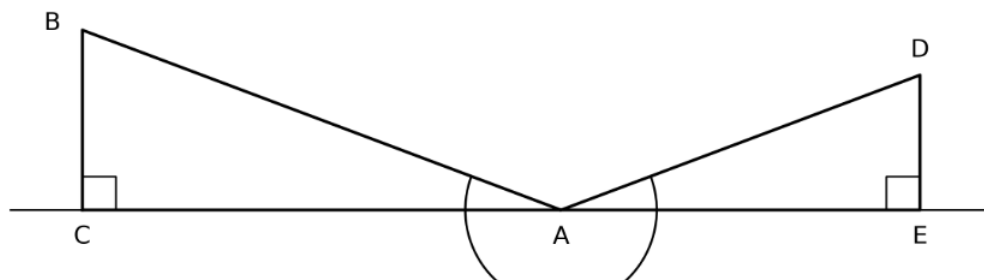
(۳) پاره خط محدود به ساق‌های ذوزنقه و موازی قائده‌ها که از تقاطع قطرهای (نقطه O) می‌گذرد، توسط این نقطه نصف می‌شود، یعنی $OP = OQ$: همچنین طول این پاره خط‌های OP و OQ با روش تعمیم قضیه تالس در مثلث‌های ABD و ABC و ACD و BCD به دست می‌آید.



حالت تساوی دو زاویه در تشابه مثلث‌ها ◀ در حالی که دو مثلث متمایز، دو زاویه برابر دارند، آن دو مثلث متشابه بوده و اضلاع آنها به شکل متناظر متناسب است. مثال‌هایی فوق را در گستره‌های خاصی به شکل‌های زیر خواهید دید:



$$\begin{cases} \hat{A} \text{ مشترک} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases} \Rightarrow ADE \sim ACB$$



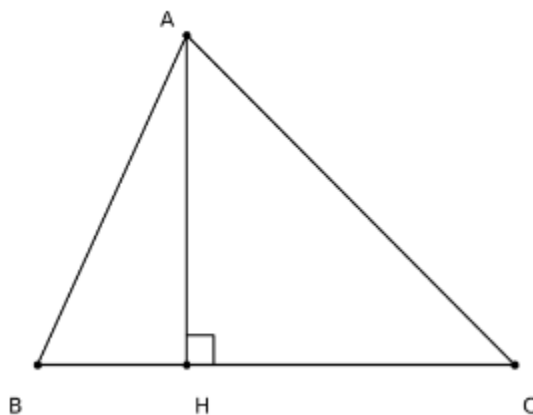
$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{E} = q^\circ \\ \hat{B} = \widehat{DAE} \\ \hat{D} = \widehat{BAC} \end{cases} \Rightarrow ABC \sim DAE$$

● **نکته:** در مثلث قائم الزاویه ABC ، ارتفاع AH بر وتر BC رسم شده است. رابطه طولی به صورت زیر برقرار است:

$$AC^2 = CH \cdot BC \quad (AB^2 = BH \cdot BC) \quad (۱)$$

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \quad (AH^2 = BH \cdot CH) \quad (۳)$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (۵)$$



● **نتیجه مهم:** از روابط طلایی در مثلث قائم الزاویه ABC ، نسبت طول قطعه‌های جدا شده روی وتر (نسبت ارتفاع‌های رؤس) به صورت مجذور نسبت اضلاع قائمه یعنی:

$$\frac{BH}{CH} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

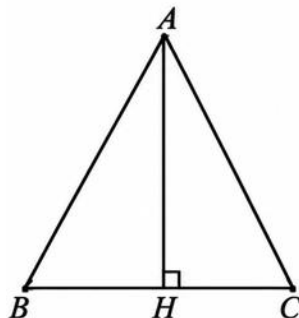
● **نسبت اجرای فرعی در دو مثلث متشابه:**

در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ داریم:

(۱) نسبت‌های اجزای فرعی در دو مثلث متشابه

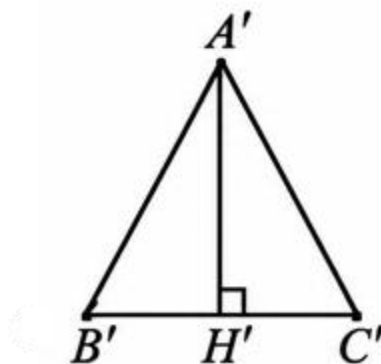
نسبت ارتفاع‌های متناظر برابر است با نسبت تشابه دو مثلث، یعنی:

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = (\text{نسبت تشابه})$$



۲) نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر است با مجذور نسبت تشابه دو مثلث، یعنی:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$



نتیجه مهم:

مطابق شکل، پاره خط DE موازی ضلع BC رسم شده است که طبق «اصل اساسی تشابه» نتیجه می‌شود که دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند و در نتیجه:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$$

