

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

نگارگری: سیدابوذر شهنشاهیان

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی

و هندسی

(قسمت اول: مجموع جملات دنباله حسابی)

جلسه اول: صفحات ۲ تا ۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش

و پرورش استان

همدان

معاونت آموزش

متوسطه

اداره تکنولوژی و

گروه های

آموزشی

گروه ریاضی

استان همدان

رشته حسابی: رشته ای که در آن هر عدد (به جز عدد اول) با اضافه شدن یک مقدار

ثابت به نام قدر نسبت به مجده قبل از خودش بدست می آید.

مانند $2, 5, 8, 11, \dots$ $\begin{matrix} +3 \\ +3 \\ +3 \end{matrix}$ قدر نسبت $= 3$

مجموعه سری رشته حسابی: اگر عدد اول را a_1 و قدر نسبت را با d نمایش دهیم، مجده

سری رشته حسابی از رابطه زیر بدست می آید:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

چند رابطه مهم در رشته حسابی:

۱) $d = \overset{\text{مجموعه قبلی}}{a_{n+1}} - \overset{\text{مجموعه فعلی}}{a_n}$ قدر نسبت در رشته حسابی برابر تفاضل دو مجده متوالی است:

۲) $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$ یافتن قدر نسبت با داشتن دو مجده از رشته:

۳) a, b, c سه مجده متوالی در رشته حسابی $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$ رابطه واسطه یا میانگین حسابی

۴) $n = \frac{b-a}{d} + 1$ تعداد مجدهات رشته حسابی با مجده اول a و مجده آخر b :

درج واطه حسابی: اگر بین دو عدد a و b ، عدد طریقی قرار دهیم به دنباله می گنجند: $d = \frac{b-a}{k+1}$

رابطه اندس: $n+m=p+q \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_q$

مجموع n جمله اول در دنباله حسابی:

در ریاضی ۱، رابطه گاوس برای مجموع اعداد طبیعی 1 تا n را به شکل زیر بدست آوریم:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ + S &= n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S &= (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \Rightarrow 2S = n(n+1) \\ S &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

از همین ایده کمکی گیریم و مجموع n جمله اول دنباله حسابی را بیابیم:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + \dots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\ + S_n &= (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \dots + (a_1 + d) + a_1 \end{aligned}$$

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \dots + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d)$$



$$S_n = n(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه دوم : زمانی که مجهول در آخر رابطه را داریم :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال : مجموع هشت جمله اول دنباله $1, 3, 5, \dots$ را بیابید.

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 5 \\ S_n = ? \end{cases}$$

$$S_8 = \frac{1}{2}(2(-2) + (8-1)(5)) = 4(-4 + 35)$$

$$= 4 \times 31 = 124$$

مثال : حاصل $A = -2 + 1 + 4 + \dots + 52$ را بدست آورید.

$$n = \frac{b-a}{d} + 1 \Rightarrow n = \frac{52 - (-2)}{3} + 1 = \frac{54}{3} + 1 = 18 + 1 = 19$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{19} = \frac{19}{2}(-2 + 52) = \frac{19}{2} \times 50 = 19 \times 25 = 475$$

مثال : در یک دنباله حسابی ۵۴ جمله پنجم ۷۷ هستند. مجموع روزده جمله اول را بیابید.

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} \Rightarrow d = \frac{a_9 - a_5}{9 - 5} = \frac{77 - 54}{4} = \frac{23}{4} = 6$$



$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_8 = a_1 + 7 \times 4 \rightarrow 54 = a_1 + 28 \rightarrow a_1 = 26$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} (2 \times 26 + (12-1)4) = 6(52 + 44) = 6 \times 96 = 576$$

مثال: در یک دنباله حسابی، حجم n ام به صورت $a_n = \frac{n}{2} - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول را بیابید.

قدرت

$$a_1 = \frac{n}{2} \times 1 - 5 = \frac{n}{2} - 5$$

$$a_{15} = \frac{n}{2} \times 15 - 5 = \frac{15}{2} - 5$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} \left(\frac{n}{2} - 5 + \frac{15}{2} - 5 \right)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} \left(\frac{18}{2} - 10 \right) = \frac{10}{2} (9 - 10) = \frac{10}{2} \times (-1) = -5$$

مثال: مجموع چند جمله از دنباله حسابی $2, 5, 8, \dots$ برابر 737 است؟

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 3 \\ S_n = 737 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2(2) + (n-1)3)$$

$$737 = \frac{n}{2} (4 + 3n - 3) = \frac{n}{2} (3n + 1)$$



$$\Rightarrow \frac{n}{2}(3n+1) = 737 \xrightarrow{\times 2} n(3n+1) = 1474$$

$$3n^2 + n - 1474 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 3(-1474)$$

$$\Delta = 1 + 17488 = 17489$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{17489}}{6} = \frac{-1 \pm 134}{6} \begin{cases} \frac{-1+134}{6} = \frac{133}{6} = 22 \\ \frac{-1-134}{6} = \frac{-135}{6} \text{ عدد صحیح} \end{cases}$$

$$\Rightarrow n = 22$$

مثال: در دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدر نسبت ۴ حداقل چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم

ما حاصل از ۳۰۰ بزرگ تر شود؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \\ S_n > 300 \\ n = ? \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \times 3 + (n-1)(4)) = \frac{n}{2}(4 + 4n - 4)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(4n) = n(2n+1)$$

$$S_n = n(2n+1) > 300$$

$$n=12 \rightarrow 12(2 \times 12 + 1) = 12 \times 25 = 300$$

$$n=13 \rightarrow 13(2 \times 13 + 1) = 13 \times 27 = 351$$

اگر حداقل ۱۳ جمله از این دنباله را جمع کنیم، حاصل از ۳۰۰ بزرگتری شود.

مثال: بین دو عدد ۱۵، ۳۵ قدری واسه حسابی قرار می دهیم تا مجموع همه اعداد 225 شود.

قدرت دنباله را بیابید.

$$15, \dots, 35 \quad \text{K تایی}$$

$$S_{k+2} = 225$$

$$S_{k+2} = \frac{k+2}{2} (15 + 35) \Rightarrow 225 = \frac{k+2}{2} (50)$$

$$\Rightarrow 25(k+2) = 225 \xrightarrow{:25} k+2=9 \rightarrow k=7$$

$$d = \frac{b-a}{k+1} = \frac{35-15}{7+1} = \frac{20}{8} = 2.5$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی فرد، نخستین بر ۳، و کوچکتر از ۱۰۱ را بیابید.

$$3, 9, 15, \dots \quad a_n = 3 + (n-1)4 \Rightarrow a_n = 3 + 4n - 4 \rightarrow a_n = 4n - 1$$

$$a_n < 101 \Rightarrow 4n - 1 < 101 \rightarrow 4n < 102 \rightarrow n < 17.5$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 17$$

$$S_{17} = \frac{17}{2} (2(3) + (17-1)4) = \frac{17}{2} (6 + 64) = \frac{17}{2} \times 70 = 17 \times 35 = 595$$

نکته: محبت شماره فردید دنباله حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots$ دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدریت

$2d$ تشکیل می دهند زیرا: $a_1, a_1+2d, a_1+4d, \dots$

محبت شماره زوج یک دنباله حسابی $a_2, a_4, a_6, \dots$ دنباله حسابی با جمله اول a_1+d و

قدریت $2d$ تشکیل می دهند زیرا: $a_1+d, a_1+3d, a_1+5d, \dots$

مثال: در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع محبت شماره های فرد ۲۲۰، مجموع محبت

شماره های زوج ۲۳۰ است. جمله اول و قدریت را بیابید.

$$S_{\text{فرد}} = S_{\text{زوج}} = \frac{20}{2} (2a_1 + (20-1)2d) \Rightarrow 220 = 10(2a_1 + 38d)$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 38d = 22 \rightarrow a_1 + 19d = 11 \quad (1)$$

$$S_{\text{فرد}} = S_{\text{زوج}} = \frac{20}{2} (2(a_1+d) + (20-1)2d) \Rightarrow 220 = 10(2a_1 + 2d + 38d)$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 40d = 22 \quad (2)$$

$$(1), (2) \begin{cases} a_1 + 19d = 11 \\ 2a_1 + 40d = 22 \end{cases} \rightarrow \underline{2a_1 + 20d = 11} \rightarrow 2d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$2a_1 + 20 = 22 \rightarrow 2a_1 = 2 \rightarrow a_1 = 1$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی

و هندسی

(قسمت دوم: مجموع جملات دنباله

هندسی)

جلسه دوم: صفحات ۴ و ۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش

و پرورش استان

همدان

معاونت آموزش

متوسطه

اداره تکنولوژی و

گروه های

آموزشی

گروه ریاضی

استان همدان

رشته هندسی : رشته ای است که هر جمله آن (به جز جمله اول) از ضرب یک مقدار ثابت

به نام قدر نسبت در جمله قبلی بدست می آید.

مانند : $2, 4, 8, 16, 32, \dots$ و $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$

$2 \times 2 = 4$
 $4 \times 2 = 8$
 $8 \times 2 = 16$
 $16 \times 2 = 32$
 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
 $\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
 $\frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

جمله عمومی رشته هندسی : اگر a_1 جمله اول و q قدر نسبت رشته هندسی باشد، جمله عمومی

جمله n ام آن عبارت است از : $a_n = a_1 q^{n-1}$

چند رابطه مهم در رشته هندسی :

۱) قدر نسبت در رشته هندسی برابر تقسیم دو جمله متوالی است : $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

۲) یافتن قدر نسبت هرگاه a_m و a_n دو جمله از رشته هندسی را داشته باشیم : $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$

۳) رابطه واسطه یا میانگین هندسی $b^2 = ac \Leftrightarrow$ سه جمله متوالی در رشته هندسی : a, b, c

۴) درج واسطه هندسی : اگر بین دو عدد a و b عدد k در طریقی قرار دهیم که رشته هندسی حاصل شود : $q^{k+1} = \frac{b}{a}$



$$n+m=p+q \Rightarrow a_n \times a_m = a_p \times a_q$$

رابطه اندی :

مجموع n جمله اول در یک دنباله هندسی :

مجموع n جمله اول دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q از رابطه زیر بدست می آید :

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \quad q \neq 1$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} \quad (1) \quad \text{اثبات :}$$

$$\times q \Rightarrow q S_n = a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^n \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow$$

$$S_n - q S_n = (a_1 + \cancel{a_1 q} + \cancel{a_1 q^2} + \dots + \cancel{a_1 q^{n-1}}) - (\cancel{a_1 q} + \cancel{a_1 q^2} + \dots + \cancel{a_1 q^{n-1}} + a_1 q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n \Rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$\xrightarrow[\div (1-q)]{q \neq 1} S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

اگر $q=1$ باشد غنی دنباله به صورت $a_1, a_1, a_1, \dots, a_1$ باشد $S_n = na_1$

مثال: مجموع هفت جمله اول دنباله هندسی ... ۳، ۶، ۱۲، ... را بیابید.

$$S_7 = 3 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 3 \times \frac{1-128}{1-2} = 3 \times \frac{-127}{-1} = 3 \times 127 = 381$$

مثال: در دنباله هندسی $a_1 = 4$ و $a_7 = 192$ ، مقدار S_{10} را محاسبه کنید.

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \Rightarrow q^{7-1} = \frac{a_7}{a_1} \Rightarrow q^6 = \frac{192}{4} = 48 \rightarrow q^6 = 48$$

$$\Rightarrow q = 2$$

$$a_7 = a_1 q^6 \Rightarrow 192 = 4 \times 2^6 \rightarrow a_1 = 4$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 4 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 4 \times \frac{1-1024}{-1} = 4 \times 1023 = 4092$$

مثال: مجموع چند جمله دنباله هندسی ... ۴، ۱۲، ۳۶، ... برابر ۱۰۲۴ است؟

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = -2 \\ S_n = 1024 \\ n = ? \end{cases}$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$1024 = 4 \times \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} \Rightarrow 1024 = 2(1-(-2)^n)$$

$$\div 2 \Rightarrow 1-(-2)^n = 512 \rightarrow -(-2)^n = 511$$

$$\rightarrow (-2)^n = -512 \rightarrow (-2)^n = (-2)^9 \rightarrow n=9$$

مسئله: بین دو عدد ۳۲۴ و ۴، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی

دارد. مجموع این ۵ عدد مثبت را بیابید.

$$4, \square, \square, \square, 324 \quad q^{k+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow q^4 = \frac{324}{4}$$

$$\Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3 \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{منفی}} q = 3$$

$$S_5 = 4 \times \frac{1 - 3^5}{1 - 3} = \frac{4(1 - 243)}{-2} = -2(-242) = 484$$

مسئله: در دنباله هندسی افزایشی ...، b، 9، a، 4، مجموع شش جمله اول را بدست آورید.

$$r^{\frac{n-1}{2}} = \frac{a_n}{a_1} = \frac{4}{9} \rightarrow r^2 = \frac{4}{9} \rightarrow r = \pm \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \text{دنباله افزایشی} \rightarrow r = \frac{2}{3}$$

ردیف دوم یا ششم:

$$a^2 = 4 \times 9 = 36 \rightarrow a = \pm 6 \rightarrow a = 6$$

$$4, 6, 9, b, \dots \Rightarrow q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$



$$S_4 = 28 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{2}\right)^4}{1 - \frac{4}{2}} = 28 \times \frac{1 - \frac{729}{64}}{-\frac{1}{2}} = -8 \left(\frac{64 - 729}{64} \right) = -\frac{440}{8}$$

$$= \frac{440}{8}$$

سؤال: در یک دنباله هندسی مجموع شش عدد اول ۲۸ برابر مجموع سه عدد اول است. مجموع

ده عدد اول چند برابر مجموع پنج عدد اول است؟

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_4 = 28 S_6 \Rightarrow \cancel{a_1} \times \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 28 \cancel{a_1} \times \frac{q^6 - 1}{q - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{(\cancel{q^4} - 1)(\cancel{q^6} + 1)}{\cancel{q} - 1} = 28 \frac{\cancel{q^4} - 1}{\cancel{q} - 1} \Rightarrow q^6 + 1 = 28 \rightarrow q^6 = 27 \rightarrow q = 3$$

$$S_{10} = k S_0 \rightarrow \frac{S_{10}}{S_0} = k$$

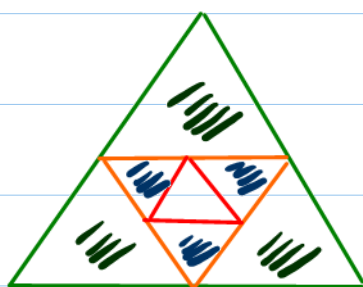
$$\frac{S_{10}}{S_0} = \frac{\cancel{a_1} \times \frac{q^{10} - 1}{\cancel{q} - 1}}{\cancel{a_1} \times \frac{q^0 - 1}{\cancel{q} - 1}} = \frac{q^{10} - 1}{q^0 - 1} \xrightarrow[\text{فرض}]{\text{تقریب}} \frac{S_{10}}{S_0} = \frac{(\cancel{q^{10}} - 1)(\cancel{q^0} + 1)}{\cancel{q} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{10}}{S_0} = q^0 + 1 = 3^0 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 2 \times 3 = 6$$

مثال: وسط اضلاع مثلث مسدوی را به هم وصل می‌کنیم و سه مثلث از چهار

بجای رنده را رنگ می‌کنیم. پس این کار را با مثلث باقی مانده تکرار می‌کنیم. جداتر

چند مرحله باید رنگ‌آمیزی را انجام دهیم تا بیش از ۹۹.۹ درصد مساحت اولیه رنگ شود؟



مساحت مثلث اولیه $S =$

مرحله اول مرحله دوم مرحله سوم
 $\frac{3}{4}S, \quad \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}S\right), \quad \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 S, \dots$

رسانه هندی : $a_1 = \frac{3}{4}S, \quad q = \frac{1}{4} \quad S_n > \frac{999}{1000}S$

$$S_n = \frac{3}{4}S \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{3}{4}S \times \frac{\frac{1}{4^n} - 1}{-\frac{3}{4}} = S\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

$$S_n > \frac{999}{1000}S \Rightarrow \cancel{S}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) > \frac{999}{1000}\cancel{S}$$

$$1 - \frac{999}{1000} > \frac{1}{4^n} \Rightarrow \frac{1}{1000} > \frac{1}{4^n} \stackrel{\text{عکس}}{\Rightarrow} 1000 < 4^n$$

$$n \geq 5 \Rightarrow 4^5 = 1024 > 1000 \quad \text{باید رنگ‌آمیزی}$$

می‌خواهیم رابطه مجموع دنباله هندسی را برای دنباله $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ و $a \neq 1$ با فرض

$a \neq 1$ و $n \in \mathbb{N}$ بکار ببریم. در این دنباله a قدر نسبت $q = a$ و مقدار جمله

n ثابت پس:

$$S_n = 1 \times \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow a^n - 1 = (a - 1)S_n$$

$$\Rightarrow a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

$$a^n - 1 = (a - 1)(\underbrace{a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1}_{\text{جمله}})$$

مانند:

مثال: حاصل عبارت $A = \frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^8 + t^7 + 1}$ را با $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (با اِزای)

بدست آوریم. $n = 12$, $q = t$, $a_1 = 1$: صورت

$n = 9$, $q = t$, $a_1 = 1$: مخرج

$$A = \frac{1 \times \frac{t^{12} - 1}{t - 1}}{1 \times \frac{t^9 - 1}{t - 1}} = \frac{\frac{t^{12} - 1}{t - 1}}{\frac{t^9 - 1}{t - 1}} = \frac{(t^{12} - 1)(t - 1)}{(t^9 - 1)(t - 1)} = \frac{t^{12} - 1}{t^9 - 1}$$

$$\frac{1(t^r + t + 1)}{t-1} = t^r + t + 1$$

$$t = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^r + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

$$A = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{4-2\sqrt{5}}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

$$A = \frac{2-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+2}{2} = 2$$

تذکر: اگر n زوج باشد با تبدیل a به $-a$ داریم:

$$a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + a^{n-3} - \dots + 1) \quad \text{اثبات عنوان آخرین}$$

نکته: در حالت کلی می توان دو رابطه زیر را بدست آورد:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

$$n \text{ فرد} : a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

مثال: کسر زیر را ساده کنید:

$$A = \frac{(x^2+1)(x-1)}{x^2-1}$$

$$A = \frac{(x+1)(x^2-x^2+x^2-x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = x^2 - x + x^2 - x + 1$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

(قسمت اول: روابط بین ضرائب و ریشه‌ها)

جلسه سوم: صفحات ۷ تا ۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

معادله درجه دوم :

به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد $a \neq 0$ یک معادله درجه دوم گفته می شود.

در سال گذشته بارش های حل معادله درجه دوم؛ روش تجزیه، روش جابجایی و روش دلتا

آشنا شدید.

یادآوری روش دلتا :

$$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \end{cases}$$

نکته: (روش ضرایب) برخی از معادلات درجه دوم شرایطی دارند که می توان به سرعت جواب های

آن را یافت:

الف) اگر جمع ضرایب منفی باشد یعنی: $a+b+c=0$ باشد یکی از جواب ها 1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

ب) اگر ضریب a مساوی جمع دوای دیگر باشد یعنی: $b=a+c$ باشد یکی از جواب ها 1-

و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.



مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $5x^2 - 2x - 2 = 0$ $\begin{cases} a=5 \\ b=-2 \\ c=-2 \end{cases}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ب) $4x^2 + 7x + 3 = 0$ $\begin{cases} a=4 \\ b=7 \\ c=3 \end{cases}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

جمع و ضرب ریشه‌ها:

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $\Delta \geq 0$ باشد، مجموع و حاصل ضرب

ریشه‌های آن برابر است با:

$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ (مجموع دو ریشه)

$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$ (ضرب دو ریشه)

دشانت: اگر $\Delta > 0$ باشد داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2}$$

به عنوان تمرین برای حالت $\Delta = 0$ اثبات کنید.

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad \square$$

مثال: بدون حل معادله $2x^2 - 7x + 3 = 0$ مجموع و ضرب ریشه‌ها را بیابید.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{2} = \frac{7}{2} \quad , \quad p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

مثال: در معادله $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ یکی از جواب‌ها کس و قرینه جواب دیگر است.

$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{array}$

m را بیابید.

ریشه‌ها $\alpha, \beta = -\frac{1}{\alpha}$

$$p = \alpha\beta = \alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = -1 \Rightarrow p = \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow \frac{m-1}{2} = -1$$

$$\Rightarrow m-1 = -2 \Rightarrow m = -1$$

مثال: در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بزرگتر باشد m را حساب کنید.

$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{array}$

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + 5 \xrightarrow{\times 2} 2\alpha = \beta + 10 \rightarrow 2\alpha - \beta = 10$$



$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{1} = 1 \rightarrow \alpha + \beta = 1$$

$$+ \begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

$$3\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \beta = \frac{2}{3}$$

$$p = \alpha\beta = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \rightarrow p = \frac{2}{9} = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} \rightarrow m = \frac{2}{9}$$

مثال: اگر α, β جذب های دیکارده $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند، حاصل عبارتهای زیر را بنویسید.

الف) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{p}$

$$S = \frac{2}{1} = 2, p = \frac{-4}{1} = -4$$

$$= \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

ب) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

نکته: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2p$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^2 - 2p}{p^2} = \frac{2^2 - 2(-4)}{(-4)^2} = \frac{4 + 8}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$



$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha+\beta+2}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{S+2}{1+S+P}$$

$$= \frac{2+2}{1+2-4} = \frac{4}{-1} = -4$$

۲) $\alpha^2 + \beta^2$

نکته: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2^2 - 2(-4)(2) = 4 + 16 = 20$$

مثال: سطر ۹۹ نوی

معادله درجه دوم $\overset{a}{x^2} + \overset{b}{(2m-1)x} + \overset{c}{2-m} = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع

ریشه ها با معکوس حاصل ضرب آن در ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۴) -1 (۳) 2 (۲) $\frac{7}{2}$ (۱) ✓



$$\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta} \Rightarrow S = \frac{1}{P} \rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{c}{a}} \rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$$

$$\rightarrow a^2 = -bc \rightarrow r^2 = -(2m-1)(2-m)$$

$$9 = -(4m - 2m^2 - 2 + m) \Rightarrow -2m^2 + 5m - 2 + 9 = 0$$

$$-2m^2 + 5m + 7 = 0 \Rightarrow -2 + 7 = 5 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{7}{-2} = \frac{7}{2} \end{cases} \quad \text{غیر صحیح} \quad \checkmark$$

$$m = -1 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$$

گزینہ ۱

حالت ریشه ها :

دو ریشه مثبت : $S > 0$:
دو ریشه منفی : $S < 0$:
(دو ریشه هم علامت) $P > 0$ (الف)

اندازه ریشه مثبت بزرگتر : $S > 0$:
اندازه ریشه منفی بزرگتر : $S < 0$:
دو ریشه قرینه هم : $S = 0$:
(دو ریشه مختلف علامت) $P < 0$ (ب)

مسئله کنکور ۹۶ رشته ریاضی:

به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دو ریشه مثبت دارد؟

$$-2 < a < 2 \quad (1) \quad 2 < a < 4 \quad (2) \quad 2 < a < 4 \quad (3) \quad 4 < a < 14 \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\Delta > 0, \quad p > 0, \quad S > 0$$

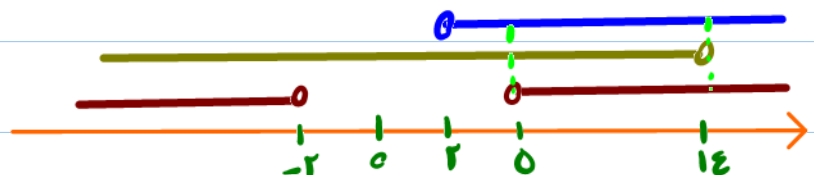
$$\Delta > 0 \rightarrow (-2(a-2))^2 - 4 \times 1 \times (14-a) > 0 \rightarrow 4(a^2 - 4a + 4) - 56 + 4a > 0$$

$$4a^2 - 12a + 16 - 56 + 4a > 0 \rightarrow 4a^2 - 8a - 40 > 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 10 > 0$$

$$\rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a > 5 \text{ یا } a < -2 \quad (1)$$

$$p > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{14-a}{1} > 0 \rightarrow a < 14 \quad (2)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow 2\frac{(a-2)}{1} > 0 \Rightarrow 2a - 4 > 0 \rightarrow a > 2 \quad (3)$$



$$(1) \cap (2) \cap (3) : 5 < a < 14 \quad \text{گزیده}$$

ساخت معادله درجه دوم :

تا به حال معادله درجه دوم را داشتیم و ریشه‌ها یا ضرب و جمع ریشه‌ها را پیدا می‌کردیم.

حال می‌خواهیم ببینیم اگر اطلاعات درباره ریشه‌ها داشته باشیم، می‌توانیم معادله را بنویسیم؟

فرضیه: اگر α و β دو عدد دلخواه باشند و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشد که $\alpha \neq \beta$

جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ است.

اثبات: فرض کنید می‌خواهیم معادله بنویسیم که ریشه‌های آن α و β است در این صورت

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

پس:

$$x^2 + (-\alpha - \beta)x + (-\alpha)(-\beta) = 0 \quad \text{یعنی ریشه‌های آن}$$

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \quad \square$$

مثال: معادله درجه دوم بنویسید که ریشه‌های آن $2 \pm \sqrt{3}$ باشد.

$$S = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4 \quad , \quad P = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد

کتر است؟

$$1) x^2 - 3x + 1 = 0 \quad 2) x^2 + 2x + 1 = 0 \quad 3) x^2 - 5x + 2 = 0 \quad 4) x^2 + 5x + 2 = 0$$

اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند ریشه‌های معادله جدید :

$$S_{\text{جدید}} = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad P_{\text{جدید}} = -\frac{1}{2} \quad \cdot \quad \frac{1}{\alpha} - 1, \frac{1}{\beta} - 1$$

$$S_{\text{جدید}} = \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{S_{\text{قدیم}}}{P_{\text{قدیم}}} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2$$

$$= \frac{4}{-2} - 2 = -2 - 2 = -4$$

$$P_{\text{جدید}} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = (-1) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)(-1) + \frac{1}{\alpha\beta} = 1 - 3(-1) + \frac{1}{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + 3 - 2 = 2$$

$$\text{نیز:} \quad x^2 - S_{\text{جدید}}x + P_{\text{جدید}} = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \quad \text{معادله جدید}$$

WWW.UPDF.COM

بستریات. کد نام است: $1(1) - 1(2) - 1(3) - 1(4) - 1(5) - 1(6) - 1(7) - 1(8) - 1(9) - 1(10)$

$$u^r + a u + b = 0 \quad \text{نوع } \frac{u}{x} \text{ و } \frac{1}{x} \quad r u^r + v_{n+1} = 0 \quad \text{نوع } \frac{u}{x} \text{ و } \frac{1}{x}$$
$$(S_{\text{قدیم}} = -\frac{V}{r}, P_{\text{قدیم}} = \frac{1}{r}) \quad \cdot \alpha+1, \beta+1$$

$$b = p = (\alpha + 1)(\beta + 1) = 1 + (\alpha + \beta) + \alpha\beta = 1 + \underbrace{S}_{\text{جمله}} + \underbrace{p}_{\text{جمله}} \quad \text{پس}$$

$$= 1 - \frac{V}{r} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{-4}{r} = 1 - 2 = -1$$

۲۰۲۰

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

(قسمت دوم: صفرهای تابع)

جلسه چهارم: صفحات ۱۰ تا ۱۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

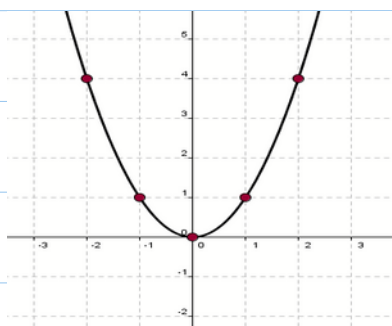
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

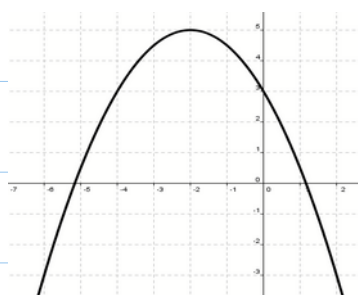
گروه ریاضی
استان همدان

به نمودار $y = ax^2 + bx + c$ که در آن $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ سهمی می‌گویند.

اگر $a > 0$ باشد سهمی رو به بالا دایر $a < 0$ باشد سهمی رو به پایین است.



$a > 0$
دارد min



$a < 0$
دارد max

در هر دو حالت نقطه $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ را رأس سهمی می‌گویند.

همچنین اگر $S(x_s, y_s)$ رأس سهمی باشد می‌توانیم معادله سهمی را به صورت:

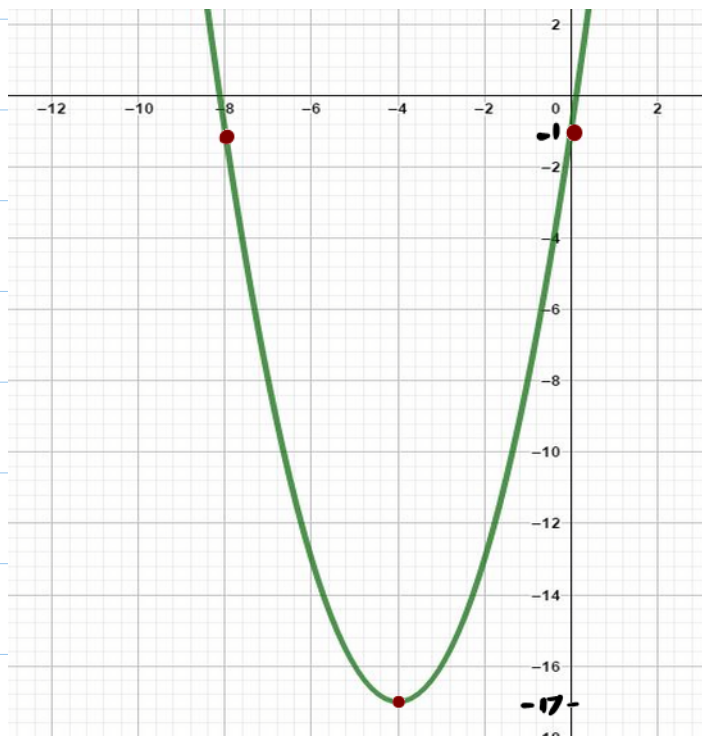
$$y = a(x - x_s)^2 + y_s \text{ هم نوشت.}$$

مثال: سهمی $y = x^2 + 8x - 1$ را رسم کنید.

x	-8	-4	0
y	-1	-17	-1

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$y = (-4)^2 + 8(-4) - 1 = 16 - 32 - 1 = -17$$



مثال: فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی باشد و سهمی از نقطه $(3, 1)$ هم بگذرد.

معادله سهمی را بنویسید.

$$y = a(x - x_A)^2 + y_A$$

$$y = a(x + 1)^2 + 9 \xrightarrow{\text{از سهمی}} 1 = a(3 + 1)^2 + 9 \rightarrow 1 = 16a + 9 \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 9$$

صفحه‌های تابع:

اگر f تابع باشد، جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را صفحه‌های تابع می‌گویند. در واقع صفحه‌های

تابع، معادله‌ای از تابع هستند که اگر آنها صفر است. پس می‌توان گفت:

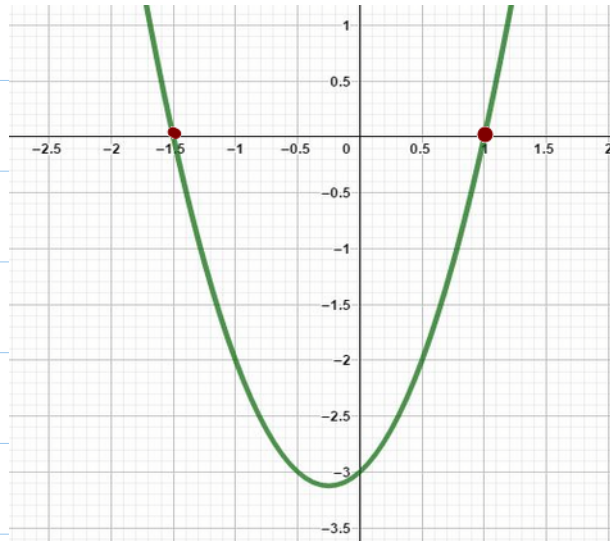
صفحه‌های تابع، طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور x هستند.



مثال: مفزهای تابع زیر را با رسم نمودار بدست آورید.

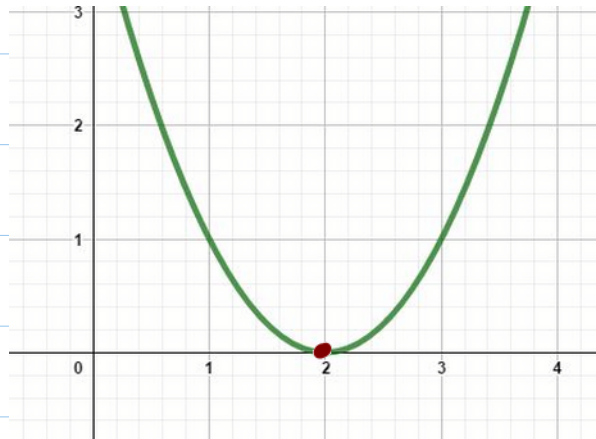
الف) $y = 2x^2 + x - 3$

$2x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1,5 \end{cases}$



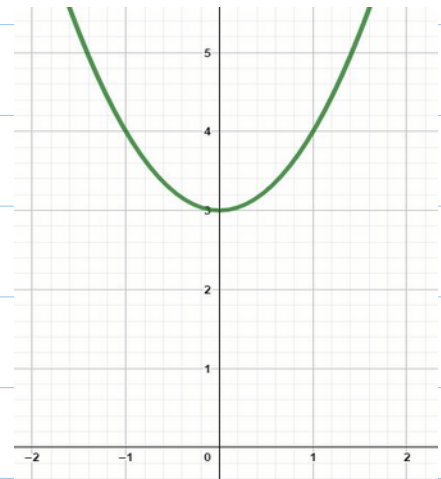
ب) $y = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$



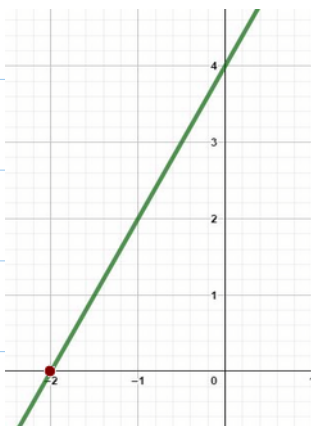
ج) $y = x^2 + 3$

$x^2 + 3 = 0$ مفز ندارد



د) $y = 2x + 4$

x	y
0	4
-2	0



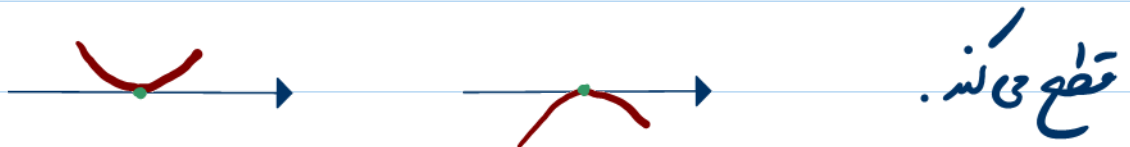
$2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$

نتیجه:

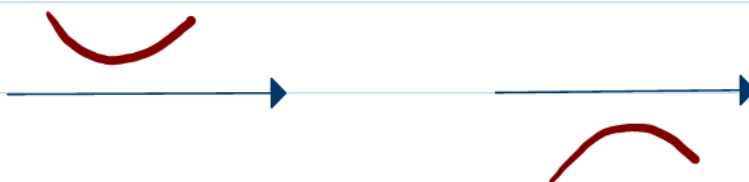
اگر Δ مثبت باشد یعنی در دو نقطه که خارج جواب های معادله هستند جذرها را قطع می کند.



اگر Δ منفی باشد یعنی فقط در یک نقطه که خارج رسم مخالف معادله است جذرها را قطع می کند.



اگر Δ منفی باشد یعنی جذرها را قطع نمی کند زیرا معادله جواب ندارد.



مثال: به ازای کدام مقادیر a ، بنزدار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ معادله ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

✓ (1) $a < -9$ (2) $a < -3$ (3) $a > -1$ (4) $-3 < a < 0$

دورشم منفی دارم $f(x) = 0 \rightarrow ax^2 + (a+3)x - 1 = 0$



$$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = (a+3)^2 - 4a(-1) = a^2 + 6a + 9 + 4a = a^2 + 10a + 9 > 0$$

$(a+9)(a+1)$

a	-9	-1
$-$	$+$	$-$

ج. ۲: $a < -9 \leq a > -1$ ①

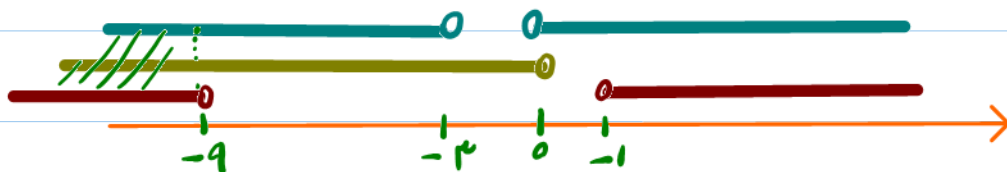
$p > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow -\frac{1}{a} > 0 \rightarrow a < 0$ ②

$q < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow -\frac{(a+3)}{a} < 0 \rightarrow \frac{a+3}{a} > 0$

a	-3	0
$+$	$+$	$-$

ج. ۲: $a < -3 \leq a > 0$ ③

① و ② و ③:



$a < -9$ گزینه ۱

نقشه هم: اگر x' و x'' ریشه‌های تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ باشد آنگاه می‌توانیم

رابطه آن را به صورت $y = a(x - x')(x - x'')$ هم بنویسیم.

نکته: چون x' و x'' ریشه‌های تابع $y = ax^2 + bx + c$ هستند پس جواب هر

$a(x-x')(x-x'') = ax^2 + bx + c$: کنیم. کافی است ثابت کنیم:

$$a(x-x')(x-x'') = a(x^2 - \underbrace{(x'+x'')}_{S}x + \underbrace{x'x''}_{P})$$

$$= a(x^2 - Sx + P)$$

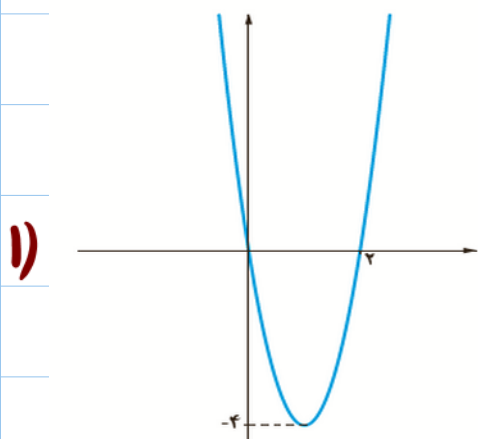
$$= a(x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a})$$

$$= ax^2 + bx + c \quad \square$$

تذکره: طول راس سهمی با ضابطه $y = a(x-x')(x-x'')$ دقیقاً وسط دو ریشه است،

$$\text{یعنی: } x_s = \frac{x' + x''}{2}$$

مثال: ضابطه سهمی های زیر را بنویسید.



$$x' = 0, x'' = 2$$

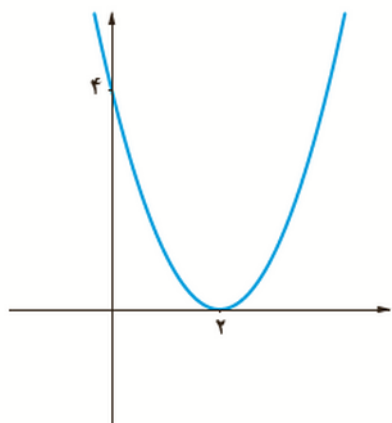
$$y = a(x-0)(x-2) = ax(x-2)$$

$$x_s = \frac{0+2}{2} = 1 \Rightarrow S(1, -4)$$



1) $S: -r = a(1)(1-r) \Rightarrow -r = -a \Rightarrow a = r$

$$y = rx(x-r) \Rightarrow y = rx^2 - rx$$

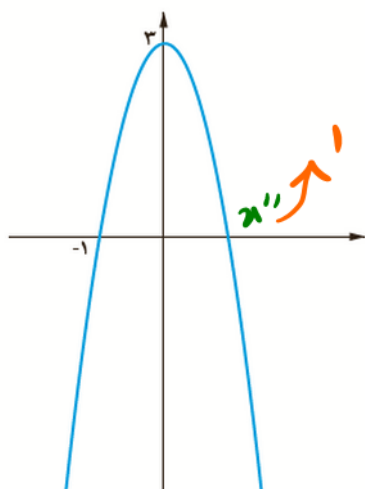


$$x' = x'' = r$$

$$y = a(x-r)(x-r) = a(x-r)^2$$

$(0, r) \xrightarrow{\text{نقطة}} r = a(0-r)^2 \Rightarrow r = ra \Rightarrow a = 1$

$$y = (x-r)^2 \Rightarrow y = x^2 - 2rx + r^2$$



$$x_s = \frac{x' + x''}{r} \Rightarrow 0 = \frac{-1 + x''}{r} \Rightarrow x'' - 1 = 0 \Rightarrow x'' = 1$$

$$y = a(x - (-1))(x - 1)$$

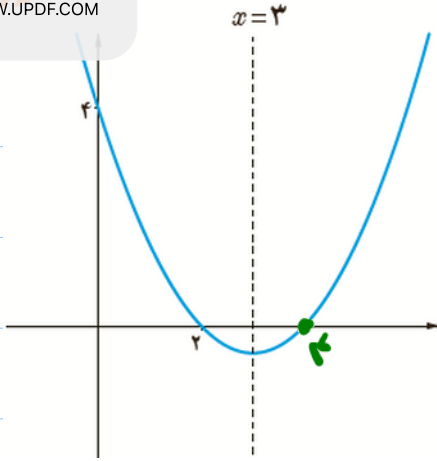
$$y = a(x+1)(x-1) = a(x^2 - 1)$$

$S(0, r) \xrightarrow{\text{نقطة}} r = a(0^2 - 1) \Rightarrow r = -a \Rightarrow a = -r$

$$y = -r(x^2 - 1) \Rightarrow y = -rx^2 + r$$



۴)



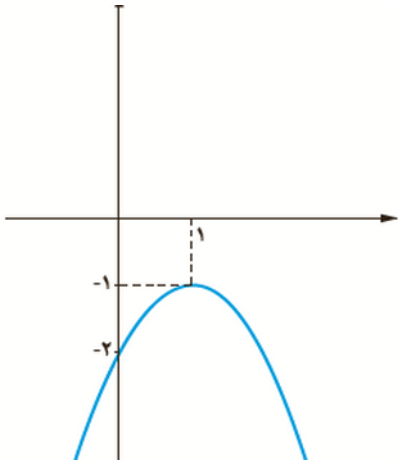
$$x_3 = 3 = \frac{1+x''}{2} \Rightarrow 4 = 1+x'' \rightarrow x'' = 3$$

$$y = a(x-1)(x-5)$$

$$(0, 4) \text{ راضیانه} \quad 4 = a(0-1)(0-5)$$

$$\Rightarrow 4 = a(1) \Rightarrow a = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow y = 4(x^2 - 6x + 5)$$

۵)



$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

$$y = a(x-x_3)^2 + y_3 \rightarrow y = a(x-1)^2 - 1$$

$$(0, -2) \text{ راضیانه} \quad -2 = a(0-1)^2 - 1 \Rightarrow -2 = a - 1$$

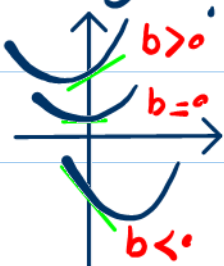
$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -1(x-1)^2 - 1$$

$$y = -1(x^2 - 2x + 1) - 1 = -x^2 + 2x - 1 - 1 \Rightarrow y = -x^2 + 2x - 2$$

صفت a, b, c از روی نمودار صفتی:

۱- a: صفتی درجه بالا: $a > 0$ - صفتی درجه پایین: $a < 0$

۲- b: صفت b، هند صفت شیب خط مماس بر نمودار در محل برخورد صفتی با محورهای است.



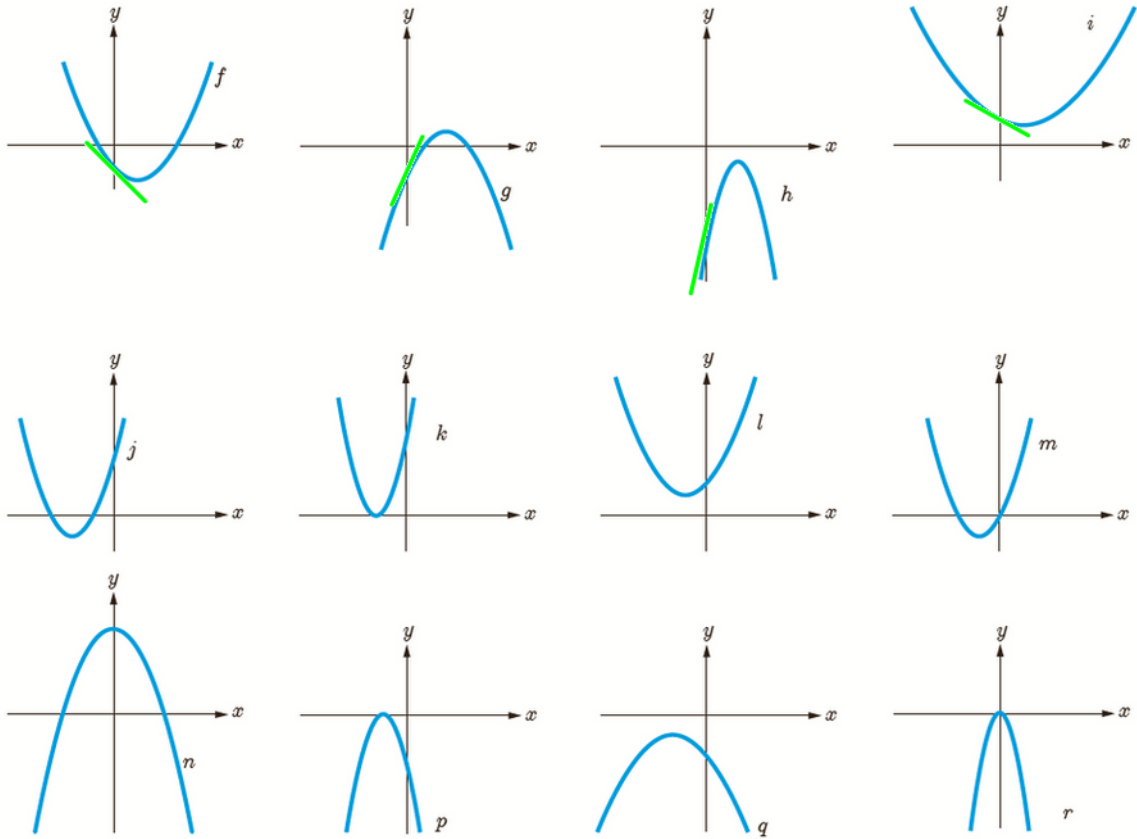


۳- c : ریشه‌ها، c عرض‌نقطه تلاقی سهمی با محور y هاست. (محض از یاد)

پس اگر $c > 0$ باشد، اگر در مبدأ قطع کند، $c = 0$ است.

و اگر $c < 0$ باشد، اگر در مبدأ قطع کند، $c < 0$ خواهد بود.

مثال: با توجه به نمودارهای زیر، جدول را تکمیل کنید.



ویژگی \ تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-
علامت b	-	+	+	-	+	+	+	+	0	-	-	0
علامت c	-	-	-	+	+	+	+	0	+	-	-	0
تعداد ریشه‌های متمایز	دو	دو	ندارد	ندارد	دو	یک	ندارد	دو	دو	یک	صفر	یک
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت	هر دو مثبت	ندارد	ندارد	هر دو منفی	منفی	ندارد	یکی منفی یکی صفر	یکی مثبت یکی منفی	منفی	ریشه ندارد	صفر

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم (معادلات دو مجهولی)

برخی از معادلات در نگاه اول درجه دوم نیستند ولی با تغییر متغیری توان آن‌ها را به معادله درجه دوم تبدیل کرد.

به این صورت که عبارت تکرار شونده را u در نظر بگیریم به طوری که معادله درجه دوم شود.

معادله را حل کرده u را بدست می آوریم. در آخر با جایگزینی u ، x را می یابیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad u = x^2$$

(الف)

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ u = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

$$b) (x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$$

$$u = x^2 + x \Rightarrow u^2 - 18u + 72 = 0 \Rightarrow (u - 12)(u - 6) = 0$$

$$u = 12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$u = 6 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

نکته: اگر $n = \alpha$ یکی از صفهای تابع چندجمله‌ای $f(x)$ باشد، ریشه $n - \alpha$

یکی از عامل‌های $f(x)$ است. اگر $f(x)$ را بر $n - \alpha$ تقسیم کنیم،

عامل‌های دیگر برای $f(x)$ بدست می‌آید.

مثال: اگر $n = 2$ یکی از صفهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 + x + 6$ باشد، ابتدا k را

بیابید. پس صفهای دیگر f را بدست آورید.

$$f(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + k(2)^2 + 2 + 6 = 0 \rightarrow 8 + 4k + 8 = 0$$

$$4k = -16 \rightarrow k = -4 \quad f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + x + 6 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline -2x^2 + x + 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-2 \\ x^2-2x-4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 + x + 6 \\ -(-2x^2 + 4x) \\ \hline -3x + 6 \\ -(-3x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-2)(x^2-2x-4) = 0$$

حاصل می‌شود

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

(قسمت سوم: روش هندسی حل معادلات)

جلسه پنجم: صفحه ۱۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

اگر $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب هندسی و جبری درجه n و m باشند، بر روی حل معادله $f(x) = g(x)$ به روش هندسی، همان درجه $\max(n, m)$ را در یک رشتۀ مختصات رسم کرد. طول نقاط برخورد درجه $\max(n, m)$ جواب معادله است.

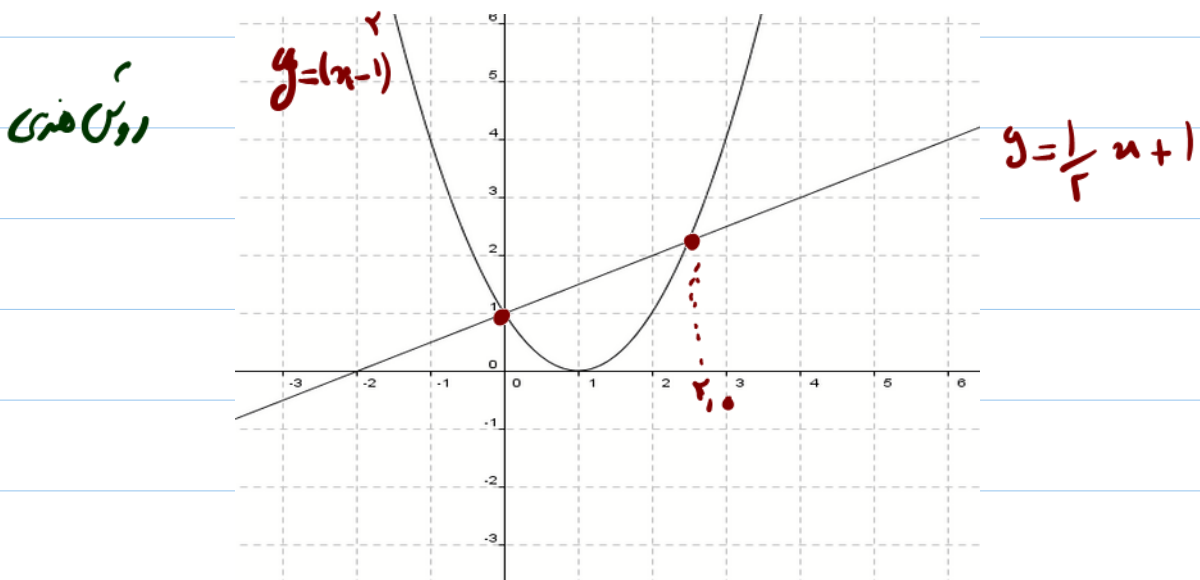
نکته ۱) از این روش بهترین استفاده وقتی است که در جواب معادله اعداد صحیح یا کسری ظاهر شود.

نکته ۲) بعضی اوقات روی رسم $f(x)$ و $g(x)$ نیاز به جابجایی آنها از محور x به y است. زیرا بعضی معادله ها به شکل $f(y) = g(y)$ در می آید.

مثال: ۱) معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{4}x + 1$ را حل کنید.

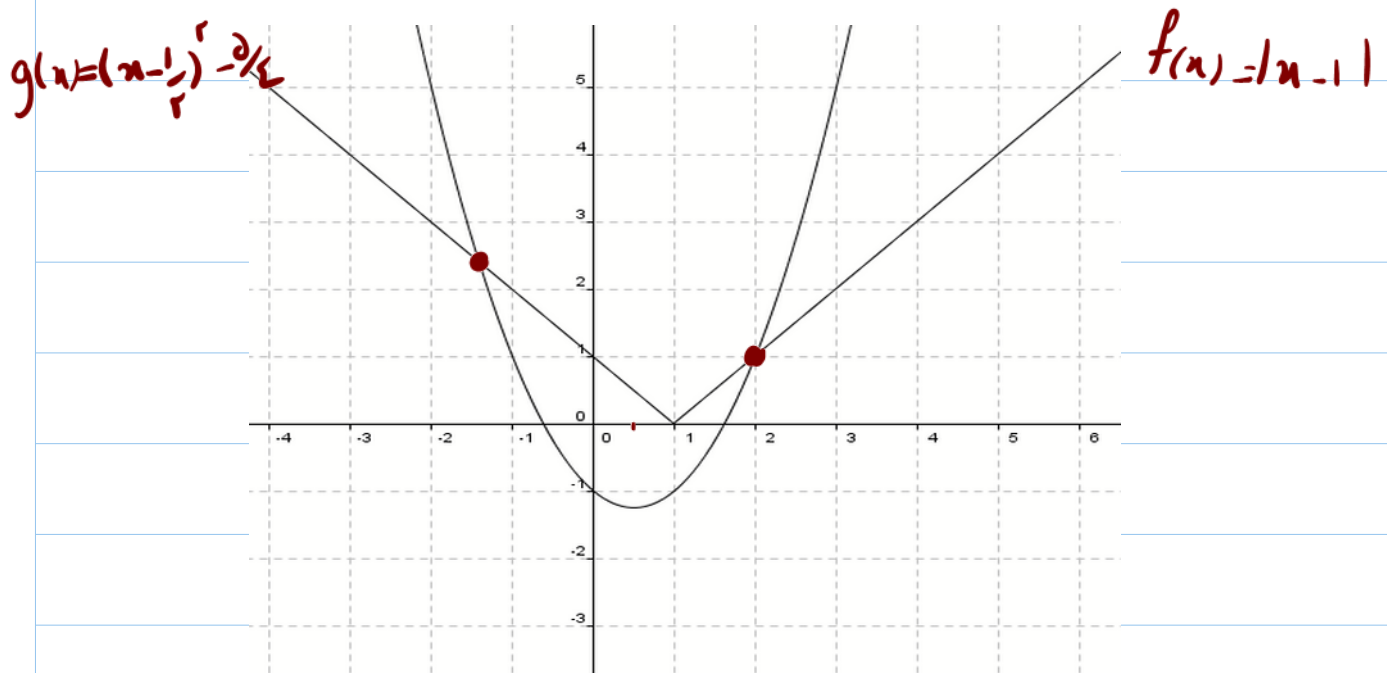
$$\text{روش جبری: } x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{4}x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - \frac{1}{4}x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{9}{4}x = 0 \Rightarrow x(x - \frac{9}{4}) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=\frac{9}{4} \end{matrix}$$



۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

$$g(x) = x^2 - x - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$$



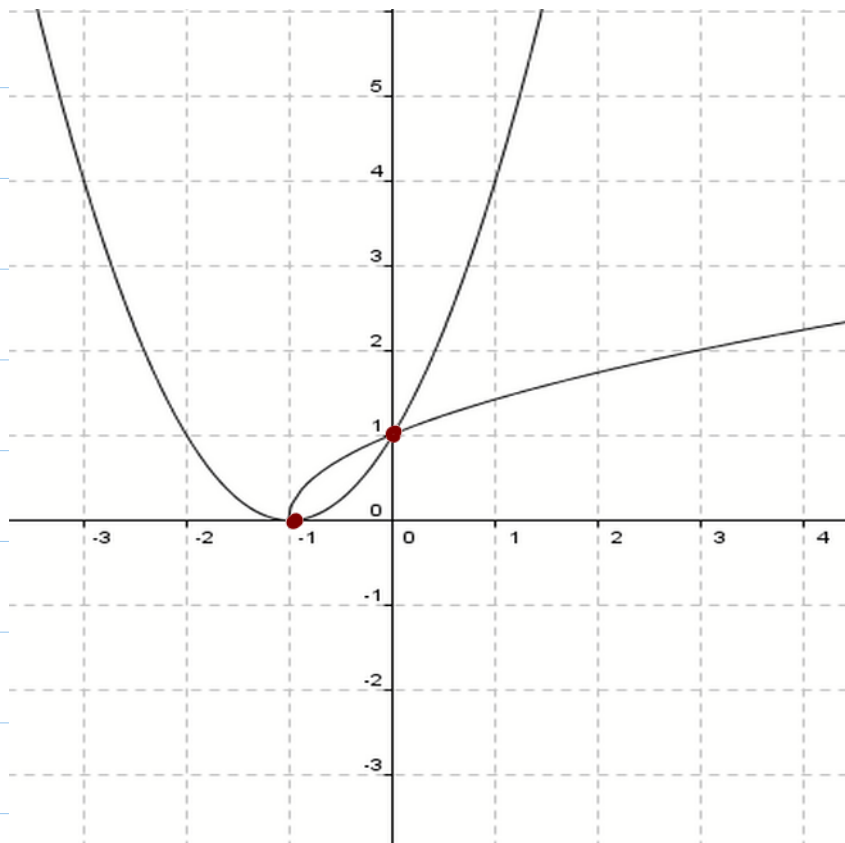
دو ریشه. مرکز ریشه ها $x=2$ است و دیگری عدد بین -1 و -2 .



سؤال: هر چه $x^2 + 1 - 2x = \sqrt{x+1}$ را بر روی محور حل کنید.

$$\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1 = \underbrace{(x+1)^2}_g$$

$$g(x) = (x+1)^2$$



$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

دورس دار : $x = 0, x = -1$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس دوم: معادلات درجه دوم

حل تمرین: صفحات ۱۵ و ۱۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

1 معادله درجه دومی بنویسید که :

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

$$\text{الف) } x^2 - Sx + p = 0 \quad S = \alpha + \beta \quad p = \alpha\beta$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \quad p = \alpha\beta = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$$

$$\text{ب) } \alpha, 2\alpha \quad \text{ریشه‌های معادله}$$

$$S = \alpha + 2\alpha = 3\alpha \quad p = \alpha \times 2\alpha = 2\alpha^2$$

$$x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 = 0 \quad \text{سه جواب دارد}$$

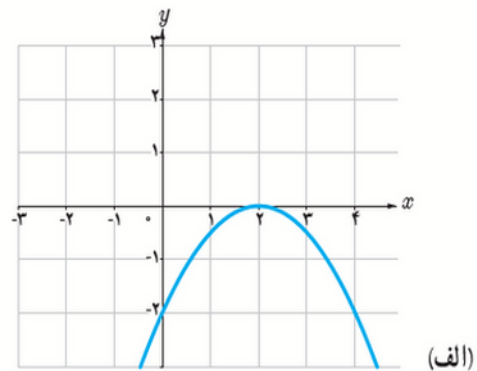
$$\alpha = 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

⋮

$$\alpha = \omega \rightarrow x^2 - 15x + \omega = 0$$

⋮

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفر ضابطه آن را مشخص کنید.



صفر $a=2$ (الف)

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ باشند، آنگاه ضابطه $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

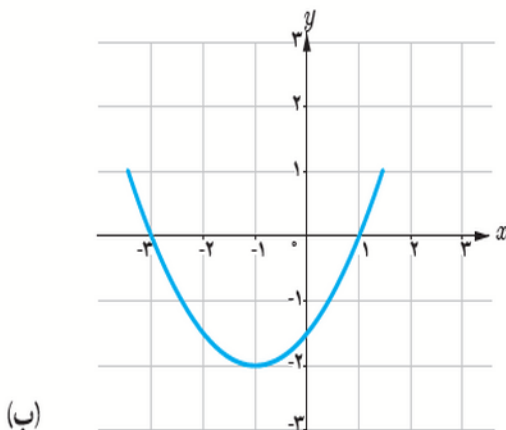
تعبیر: در حالتی که $f(x) = 0$ ریشه‌های $x = \alpha$ و $x = \beta$ را داریم (یعنی $\Delta \geq 0$)، ضابطه $f(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$p(x) = a(x - 2)^2 \quad \text{ریشه صفر کننده } (0, -2)$$

$$-2 = a(0 - 2)^2 \rightarrow -2 = 4a \rightarrow a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$p(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2$$

نکته: روی معادله a از نقطه‌ای که طول عرض آن روی محور مختصات باشد
می‌کنیم مانند رأس سهمی، معادله پیدا می‌کند.



معادله سهمی: $x = -1, -3$ (ب)

$$p(x) = a(x-1)(x-(-3)) = a(x-1)(x+3)$$

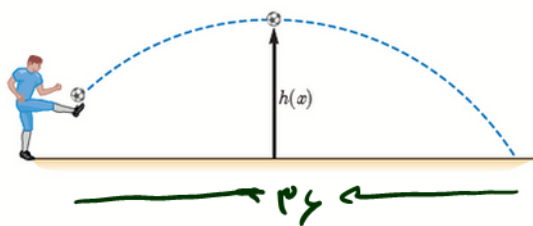
در $p(x)$ قرار دهیم $(-1, -2)$ رأس سهمی

$$-2 = a(-1-1)(-1+3)$$

$$-2 = a(-2)(2) \rightarrow 1 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$p(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+3) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 3)$$

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$



۳ یک توپ فوتبال بر اثر ضربه بازیکن طبق شکل روبه‌رو حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه ارتفاع توپ از سطح زمین را می‌توانیم با رابطه $h(x) = -\frac{1}{3}x(x-36)$ مدل‌سازی کنیم که x فاصله افقی توپ از نقطه اولیه است (x بر حسب متر است)

الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد.
ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.

حل الف) محل برخورد توپ با زمین $h(x) = 0$

$$-\frac{1}{3}x(x-36) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3}x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 36 = 0 \rightarrow x = 36 \end{array} \right.$$

حل ب)

$$h(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 12x$$

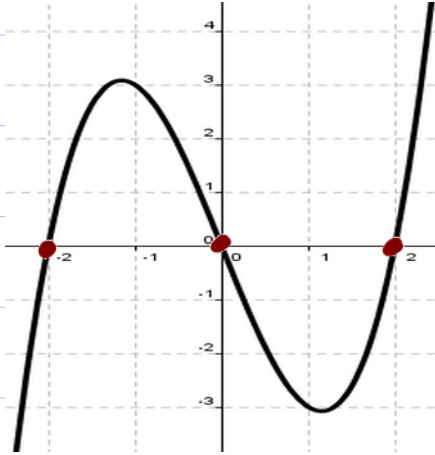
$$x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-2/3} = 18$$

$$h(18) = -\frac{1}{3} \times 18^2 + 12 \times 18 = -9,72 + 19,44 = 9,72$$

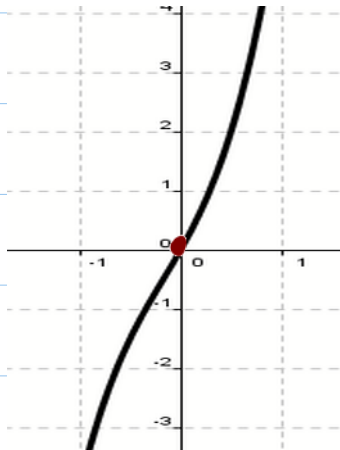
۴. صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = x^3 - 4x$

$$x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$



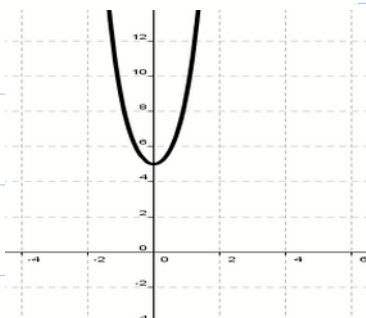
ب) $g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$ $\rightarrow x(2x^2 + x + 3) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + x + 3 = 0 \end{cases}$



$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 - 24 = -23$$

پ) $h(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ $u = x^2 \rightarrow u^2 + 3u + 5 = 0$ فاده مفرجه

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$$





الف) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$$u = x^2$$

$$u^2 - 3u - 4 = 0 \quad \begin{cases} u = -1 \\ u = 4 \end{cases}$$

$$1 - 4 = -3$$

$$\begin{cases} x^2 = -1 \times \\ x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

$$a + b + c = 0 \quad \begin{cases} n = 1 \\ n = \frac{c}{a} \end{cases} \quad \text{نتیجه}$$

$$a + c = b \quad \begin{cases} n = -1 \\ n = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

ب) $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$

$$u = \frac{x^2}{3} - 2$$

$$u^2 - 7u + 6 = 0 \quad \begin{cases} u = 1 \\ u = 6 \end{cases} \quad 1 - 7 + 6 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \rightarrow x^2 = 24 \rightarrow x = \pm \sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$پ) (4-x^2)^2 - (4-x^2) = 12$$

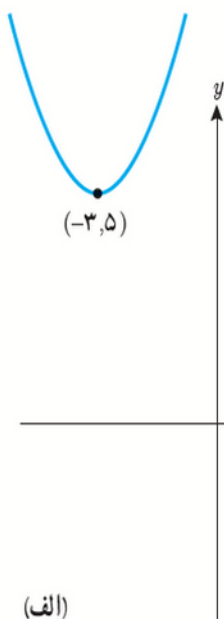
$$u = 4 - x^2$$

$$u^2 - u - 12 = 0 \rightarrow (u-4)(u+3) = 0 \quad \begin{cases} u=4 \\ u=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - x^2 = 4 \rightarrow x = 0 \\ 4 - x^2 = -3 \rightarrow -x^2 = -7 \rightarrow x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - x^2 = -3 \rightarrow -x^2 = -7 \rightarrow x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.



فاندسفر

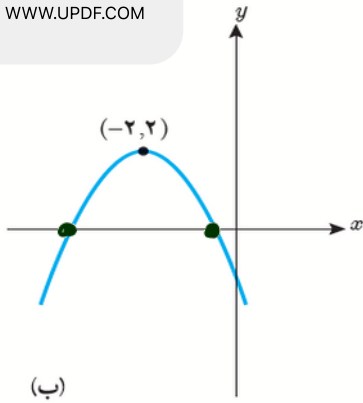
$$a = 1 \quad x = -\frac{b}{2a} \rightarrow -3 = -\frac{b}{2} \rightarrow b = 6$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (-3, 0) & \text{نقطه} & \end{matrix} \quad f(x) = x^2 + 6x + c$$

$$0 = 9 - 18 + c \Rightarrow c = 9$$

$$f(x) = x^2 + 6x + 9$$

(الف)



$$a = -1 \quad x = \frac{-b}{2a} \rightarrow -2 = \frac{-b}{-2} \rightarrow b = -4$$

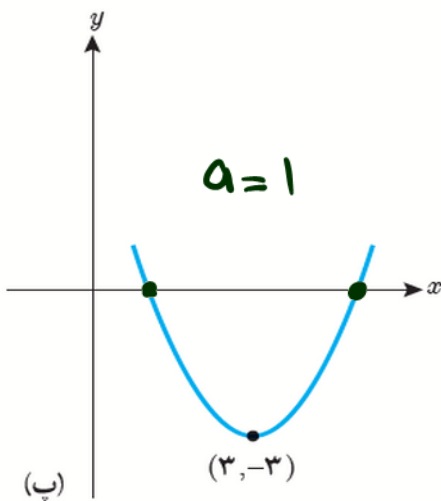
$$(-2, 2) \rightarrow f(x) = -x^2 - 4x + c$$

$$2 = -4 + 4 + c \rightarrow c = -2$$

$$f(x) = -x^2 - 4x - 2 \rightarrow f(x) = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \quad \Delta = 16 - 8 = 8 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$\rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$



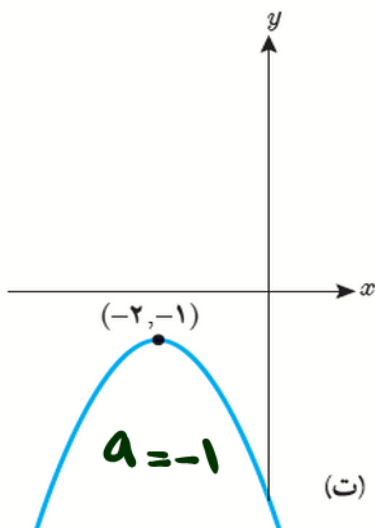
$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 3 = \frac{-b}{2} \rightarrow b = -6$$

$$f(x) = x^2 - 6x + c$$

$$(3, -3) \rightarrow -3 = 9 - 18 + c$$

$$\rightarrow c = 6$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 6$$

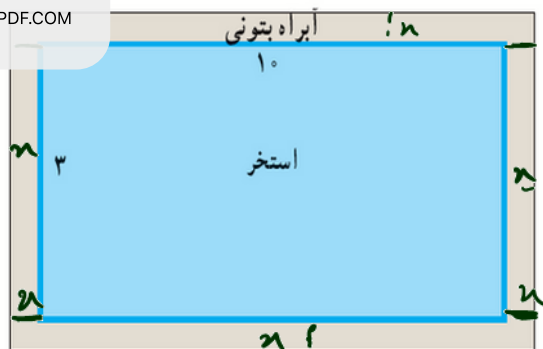


$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow -2 = \frac{-b}{-2} \rightarrow b = -4$$

$$f(x) = -x^2 - 4x + c$$

$$(-2, -1) \rightarrow -1 = -4 + 4 + c \rightarrow c = -1$$

$$f(x) = -x^2 - 4x - 1$$



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

$$(پهنای آبراه) + ۲(مساحت استخر) = ۱۴$$

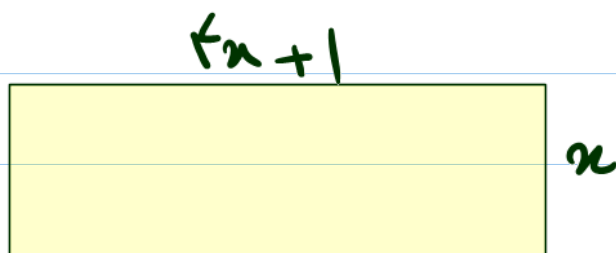
$$\rightarrow ۱۴ = ۲(۳x) + ۲(۱۰ + ۲x)x \rightarrow ۷x + ۲۰x + ۴x^2 - ۱۴ = 0$$

$$۴x^2 + ۲۷x - ۱۴ = 0 \div ۲ \rightarrow ۲x^2 + ۱۳x - ۷ = 0$$

$$\Delta = 169 - 4 \times 2 \times (-7) = 169 + 56 = 225$$

$$x = \frac{-13 \pm 15}{4} \quad \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2} \\ -\frac{28}{4} = -7 \times \end{cases}$$

۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشانیدن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی متر است؟



$$\text{مساحت یک کاشی} = (x+1)x = x^2 + x$$

$$2000(x^2 + x) = 52.8 \times 10^4 \text{ cm}^2$$

$$\div 10^4 \rightarrow 2(x^2 + x) = 52.8 \times 10 = 528$$

$$2x^2 + 2x - 528 = 0$$

$$\div 2 \rightarrow x^2 + x - 264 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times (-264) = 1 + 1056 = 1057$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1057}}{1} \quad \begin{matrix} \frac{1057}{1} = 32.4 \\ \frac{1057}{1} = 32.4 \end{matrix} \quad x = 32 \rightarrow x+1 = 33 \text{ طول}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

قسمت اول: حل معادلات گویا

جلسه ششم: صفحات ۱۷ تا ۱۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

عبارت گویا: عبارتی است که از تقسیم دو چند عبارت بر عبارت دیگر

عبارت گویا: عبارتی است که در آن به جدول معادله درخرج عبارت گویا و برقرار

حل معادله گویا: ابتدا کوچکترین مضرب مشترک (م.م) معادله ها را می یابیم.

سپس با ضرب خواص معادله در م.م. معادله ها، معادله را از ضرایب گویا

خارج می کنیم و معادله حاصل را حل می کنیم جوابی در جدول معادله است که

هیچ کدام از معادله ها را صدق نمی دهد.

ک.م.م عبارت ها گویا: ابتدا عبارات را تجزیه می کنیم حاصل ضرب خواص مشترک

و غیر مشترک بتوان بزرگترین ک.م.م عبارات است.

مثال: ک.م.م $2x^2(x-2)$ و $x(x^2-4)$ را بیابید.

$$2x^2(x-2) \quad x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$$

$$2x^2(x-2)(x+2)$$

مثال: معادله گویای

$$\frac{1}{n^r + n} + \frac{n^r}{n^r - 1} = \frac{n-1}{n^r - n}$$

حاصل کنید.

$n(n+1) \quad (n-1)(n+1) \quad n(n^r-1) = n(n-1)(n+1)$

$$r \cdot r \cdot n = (n+1)n(n-1)$$

$$\cancel{n(n+1)(n-1)} \frac{1}{\cancel{n(n+1)}} + \cancel{n(n+1)(n-1)} \frac{n^r}{\cancel{(n-1)(n+1)}} = \cancel{n(n+1)(n-1)} \frac{n-1}{\cancel{n(n-1)(n+1)}}$$

$$\cancel{n} + n(n^r) = \cancel{n-1}$$

$$n^r + n - \cancel{n} = 0 \Rightarrow n^r - 1 = 0 \Rightarrow n(n^r - 1) = 0$$

$$\begin{cases} n=0 & 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ n^r - 1 = 0 \rightarrow n^r = 1 \rightarrow \boxed{n = \pm 1} \end{cases}$$



معادلات زیر را حل کنید.

$$1 \quad \frac{6}{x} = \frac{2}{1} + \frac{x-3}{x+1}$$

$$2 \quad \frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = \frac{-3}{2}$$

$$3 \quad \frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

حل 1: $6 \cdot 2 \cdot 1 = x(x+1)$

$$\frac{1}{x} x(x+1) = 2 x(x+1) + x(x+1) \frac{(x-3)}{x+1}$$

$$7(x+1) = 2x^2 + 2x + x(x-3)$$

$$7x+7 = 2x^2 + 2x + x^2 - 3x$$

$$3x^2 - 7x - 7 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 49 + 84 = 133$$

$$x = \frac{7 \pm 11}{6} \Rightarrow x = \frac{7+11}{6} = \frac{18}{6} = 3 \quad \checkmark, \quad x = \frac{7-11}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \quad \checkmark$$

حل 2: $6 \cdot 2 \cdot 1 = 2p(2-p)$

$$2p(2-p) \frac{p}{2-p} + 2p(2-p) \frac{2}{p} = 2p(2-p) \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$2p^2 + 2(2-p)2 = p(2-p)(-3)$$

$$2p^2 + 8 - 4p = -3p + 3p^2$$

$$p^2 - 2p - 8 = 0 \rightarrow (p-4)(p+2) = 0 \quad \begin{cases} p=4 \quad \checkmark \\ p=-2 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\frac{y^2 + 0}{y^2 + 0y} + \frac{y + 2}{y + 0} = \frac{y + 1}{y}$$

$y(y + 0)$

$$C.R. = y(y + 0)$$

$$\cancel{y(y + 0)} \frac{(y^2 + 0)}{\cancel{y(y + 0)}} + \cancel{y(y + 0)} \frac{y + 2}{\cancel{y + 0}} = \cancel{y(y + 0)} \frac{y + 1}{\cancel{y}}$$

$$y^2 + 0 + y(y + 2) = (y + 0)(y + 1)$$

$$y^2 + 0 + \cancel{y^2} + 2y = \cancel{y^2} + 2y + 0$$

$$y^2 + 0 = 2y + 0 \rightarrow y^2 - 2y = 0 \rightarrow y = 0$$

مردم کنترل نت

به این جواب نرسد.



۱) معادله $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = \frac{3}{1}$ را حل کنید.

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = \frac{3}{1}$$

$$1 + 2(x-2) = 3(x-2)^2$$

$$1 + 2x - 4 = 3(x^2 - 4x + 4)$$

$$1 + 2x - 4 = 3x^2 - 12x + 12$$

$$3x^2 - 14x + 10 = 0$$

$$\Delta = (14)^2 - 4 \times 3 \times 10 = 196 - 120 = 76$$

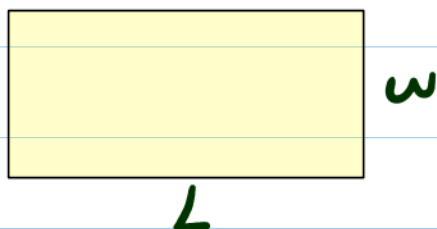
$$x = \frac{14 \pm \sqrt{76}}{2} \rightarrow x = \frac{14 + \sqrt{76}}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \checkmark$$

$$x = \frac{14 - \sqrt{76}}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \checkmark$$

۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم : $\frac{L}{w} = \frac{w+L}{L}$ آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

مستطیل طلایی : مستطیلی است که نسبت بعرض طول در آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد.



$$p = 2(L + w) = 144 \rightarrow L + w = 72 \rightarrow w = 72 - L$$

$$\frac{w+L}{L} = \frac{L}{w} \Rightarrow \frac{72-L+L}{L} = \frac{L}{72-L}$$

$$\frac{72}{L} = \frac{L}{72-L} \quad \text{م.ر.ک} = L(72-L)$$

$$L(72-L) \cdot \frac{72}{L} = L(72-L) \cdot \frac{L}{72-L}$$

$$(72-L) \cdot 72 = L^2 \rightarrow L^2 + 72L - 5184 = 0$$

$$\Delta = (72)^2 - 4(1)(-5184) = 72^2 + 4(5184) = 5(72)^2$$



$$L = \frac{-vr \pm \sqrt{5(vr)^2}}{2} = \begin{cases} \frac{-vr + vr\sqrt{5}}{2} = vr(-1 + \sqrt{5}) \checkmark \\ \frac{-vr - vr\sqrt{5}}{2} = vr(-1 - \sqrt{5}) \times \end{cases}$$

$$L = vr(-1 + \sqrt{5})$$

$$\omega = vr - L = vr - (vr(-1 + \sqrt{5}))$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

قسمت دوم: مدلسازی با معادلات گویا

جلسه هفتم: صفحات ۱۷ تا ۱۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان



در حل برخی مسائل عبدازمیر زوی آن، به یک معادله نر، می رسم. برای ساده تر شدن محل اسلاید

مسائل کنه را به صورت زیر دسته بندی می کنیم.

نوع اول: مسائل سرعت-زمان

فصل ۱: مسائل سرعت-زمان

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین المللی امام خمینی (قَدِسَ سِرُّه) متصل می کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه ها طی می کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت قطار 10 km/h کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبه طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

$$x = vt$$

در این نوع مسائل از رابطه محل استفاده می کنیم:

$$t = \frac{x}{v} \quad t_{\text{رفت}} = \frac{60}{v}$$

$$t_{\text{برگشت}} = t + \frac{1}{2}$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{60}{v-10}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2} \quad \text{همانگونه}$$

$$2v(v-10) \Rightarrow 12v = 12(v-10) + v(v-10)$$

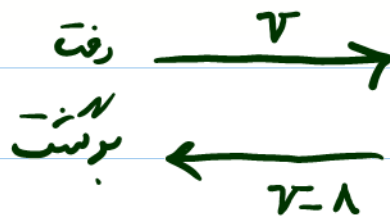
$$v^2 - 10v + 12v - 12v - 120 = 0$$

$$v^2 - 10v - 120 = 0 \rightarrow (v-20)(v+6) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = 20 \rightarrow t_{\text{رفت}} = \frac{60}{20} = 3 \text{ ساعت} \\ v = -6 \times \end{array} \right.$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{60}{20-10} = \frac{60}{10} = 6 \text{ ساعت}$$

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.



$$t_{\text{رفت}} = \frac{144}{v}$$

$$t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = 17 \quad \uparrow \text{نموت}$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{144}{v-8}$$

$$\frac{144}{v} + \frac{144}{v-8} = 17 \quad \div 8 \rightarrow \frac{18}{v} + \frac{18}{v-8} = 17$$

$$\times v(v-8) \rightarrow 18(v-8) + 18v = 17v(v-8)$$

$$\rightarrow 18v^2 - 144v - 144v + 1384 = 0$$

$$\rightarrow 18v^2 - 288v + 1384 = 0$$

$$\Delta = (-288)^2 - (4 \times 18 \times 1384) = 82944 - 99936 = -16992$$

$$\sqrt{16992} = 130.35$$

$$v = \frac{288 \pm 130.35}{18} \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{288 + 130.35}{18} = 24 \\ v = \frac{288 - 130.35}{18} = 8.8 \end{array} \right.$$

تمرین ص ۲۳ ریاضی ۲

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

در حل این نوع مسائل می‌توانیم اگر کاری در x ساعت (رقم عدد...) انجام می‌پذیرد، رکب می‌کند

(که رقم عدد...) $\frac{1}{x}$ از کار انجام شده است.

رضای شهری: x

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{1\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{3}{5}$$

$$\times 2x$$

$$2x + 2 = 3x \rightarrow \underline{x = 2}$$

۹ ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

$$A: x$$

$$B: x+10$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{18}$$

$$\underline{18x(x+10)} \rightarrow 18(x+10) + 18x = x(x+10)$$

$$x^2 + 10x - 18x - 270 - 18x = 0$$

$$x^2 - 26x - 270 = 0$$

$$(x-30)(x+9) = 0 \quad \begin{cases} x=30 \rightarrow A \\ x=-9 \end{cases}$$

، B ، ۴۵ ، ۳۰

مثال: زمانی که طول می کشد تا شیر A به شهابی حوضی را پر کند، از دو برابر زمانی

که شیر B همان حوض را پر کند، یک ساعت بیشتر است. اگر هر دو شیر را همزمان

باز کنیم. حوض در ۲ ساعت ۶ دقیقه و ۴۰ ثانیه پر می شود. شیر A به شهابی در چند ساعت حوض

را پر می کند؟

زمانی که شیر B به شهابی پر می شود: t

$2t+1 : A$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2.1} = \frac{1}{\frac{2.1}{1}} = \frac{1}{2.1}$$

$2.1(2t+1)$ →

$$\rightarrow 2.1(2t+1) + 2.1t = 1.t(2t+1)$$

$$\rightarrow 4.2t + 2.1 + 2.1t = 2.t^2 + 1.t$$

$$\rightarrow 2.t^2 + 1.t - 6.3t - 2.1 = 0$$

$$\rightarrow 2.t^2 - 5.3t - 2.1 = 0$$

$$\Delta = (-5.3)^2 - (4 \times 2 \times (-2.1)) = 28.9 + 16.8 = 45.7$$

$$\sqrt{45.7} = 6.7$$

$$t = \frac{5.3 \pm 6.7}{4} < \frac{5.3 - 6.7}{4} = -\frac{1.4}{4} = -\frac{7}{20} \times$$

شیر A به شهابی در ۷ ساعت پر می شود
 $2 \times 7 + 1 = 15$

ص ۱۷۰ احسان ۱

در یک مغازه ماهی های تزینی، ماهی های آب شور در محلول های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلو گرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟

حالت اول : فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

مقدار نمک در محلول ۴ درصدی

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \text{ kg}$$

نمک گرم کن
افزانه کنیم

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100}$$

$$\rightarrow 100(8+x) = 7(200+x) \rightarrow 800 + 100x = 1400 + 7x$$

$$\rightarrow 93x = 600 \rightarrow x = \frac{600}{93} \text{ kg}$$

حالت دوم : اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

نمک گرم کن
از آب بکسریم

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

$$800 = 7(200-y) \rightarrow 7y = -800 + 1400$$

$$7y = 600 \rightarrow y = \frac{600}{7} \text{ kg}$$



در مسئله ماهی‌های تزئینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازه کافی موجود نباشد. فرض کنیم در ۷ درصدی نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

y: کدیم تبخیر آب

$$\frac{1+5}{2.5-y} = \frac{7}{100}$$

$$\rightarrow \frac{13}{2.5-y} = \frac{7}{100}$$

$$\rightarrow 1300 = 7 \times 2.5 - 7y$$

$$\rightarrow 7y = 1435 - 1300$$

$$\rightarrow 7y = 135 \rightarrow y = \frac{135}{7} \approx 19.28 \text{ kg}$$

۱۹,۲۸ kg از آب تبخیر

مسئله مفقوده مانند :

تمرین ص ۲۲ حسین ۱

۸ پدر بزرگ برای اهدا به مهد کودک چند اسباب بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به پدر بزرگ تخفیف می داد او می توانست با همان پول چهار اسباب بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

x : قیمت یک اسباب بازی قبل از تخفیف

تعداد قبل از تخفیف



تعداد بعد از تخفیف



$$\frac{120000}{x} + 4 = \frac{120000}{x-1000}$$

$$\times x(x-1000) \rightarrow$$

$$120000(x-1000) + 4x(x-1000) = 120000x$$

$$4x^2 - 4000x + 120000x - 120000000 - 120000x = 0$$

$$4x^2 - 4000x - 120000000 = 0$$

$$\div 4 \rightarrow x^2 - 1000x - 30000000 = 0 \rightarrow \Delta = 121000000$$

$$x = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1000 + 11000}{2} = \frac{12000}{2} = 6000 \checkmark \\ \frac{1000 - 11000}{2} = -5000 \end{array} \right.$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول : جبر و معادله

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

قسمت سوم: معادلات شامل عبارت‌های گنگ

جلسه هشتم: صفحات ۲۰ و ۲۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مقارنات گنگ (اصم)

مقارناتی که در رزها مجهول زیر رادیکال است را مقارنات گنگ می گویند.

روش حل مقارنات اصم با فرم دو :

مقدار رادیکال را یک طرف و بقیه عبارت ها را سمت دیگر منتقل می کنیم.

طرفین را به توان ۲ می رسانیم تا رادیکال از بین برود. اگر باز هم رادیکال

داشته باشیم این عمل را تکرار می کنیم تا همه رادیکال ها از بین برود و مقارنات بدست

آمده را حل می کنیم.

جواب های به دست آمده به شرحی قابل قبول هستند که در مقارنات اولیه صدق کنند.

تذکر: گاهی اوقات برای سرعت عمل در تشخیص مخرج قبول بودن یا نبودن جواب می توان از نکات زیر استفاده کرد :

- عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

- هر عبارت که با یک رادیکال برابر است باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.



تذکر: در موارد گنگی که در کمال هارر معین قرار می گیرند ابتدا مانند موارد عمل کرده با ضرب طرفین معادله در ک.م.م معین ها، معادله را از حالت گنگی خارج می کنیم.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$k = \sqrt{6k - 8} \quad \text{ث)}$$

$$x + \sqrt{x} = 6 \quad \text{ج)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1 \quad \text{چ)}$$

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2 \quad \text{ح)}$$

$$\text{ث)} \quad k^2 = 6k - 8 \rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0$$

$$(k-4)(k-2) = 0 \quad \begin{cases} k=4 \rightarrow 4 = \sqrt{24-8} = \sqrt{16} = 4 \quad \checkmark \\ k=2 \rightarrow 2 = \sqrt{12-8} = \sqrt{4} = 2 \quad \checkmark \end{cases}$$

ج) $\sqrt{x} = 7-x$ توان ۲ $\rightarrow x = (7-x)^2$ با استفاده از جمع دو جمله ای

$$x = 49 - 14x + x^2$$

$$\rightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \rightarrow (x-7)(x-7) = 0 \quad \begin{cases} x=7 \quad \times \\ x=7 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{9} = 7-9 \rightarrow 3 = -3 \quad \times \\ \sqrt{4} = 7-4 \rightarrow 2 = 3 \quad \checkmark \end{cases}$$



$$2) \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$$

$$\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{2x-5}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع الطرفين}} (\sqrt{x+1} - 1)^2 = 2x - 5$$

$$\rightarrow x+1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 2x-5$$

$$\rightarrow x+2-2x+5 = 2\sqrt{x+1}$$

$$\rightarrow -x+7 = 2\sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع الطرفين}} x^2 - 14x + 49 = 4(x+1)$$

$$\rightarrow x^2 - 14x + 49 - 4x - 4 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x-15) = 0 \quad \begin{cases} x=3 \rightarrow \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1 \checkmark \\ x=15 \rightarrow 4 - 5 = 1 \times \end{cases}$$

$$2) \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$$

$$\xrightarrow{\times \sqrt{m}} m+1 = 2\sqrt{m} \xrightarrow{\text{رفع الطرفين}} m^2 + 2m + 1 = 4m$$

$$\rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow (m-1)^2 = 0 \rightarrow m = 1 \checkmark$$

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

۱) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

$\frac{x(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} \rightarrow 1-\sqrt{x} = (1-x)(1+\sqrt{x})$

$\rightarrow 1-\sqrt{x} = 1-x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}$

$\rightarrow x = \sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{x}$

$\rightarrow x = 2\sqrt{x} - x\sqrt{x}$

$\rightarrow x = \sqrt{x}(2-x)$

$\frac{0}{1} \rightarrow x' = x(2-x+x')$

$x' = 2x - x^2 + x''$

$\rightarrow x'' - 0x' + 2x = 0 \rightarrow x(x' - 0x + 2) = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow \frac{1-0}{1+0} = 1 \checkmark \\ x' - 0x + 2 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x=1 \rightarrow \frac{1-1}{1+1} = 0 \checkmark \\ x=2 \rightarrow \frac{1-2}{1+2} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq 0 \end{array} \right.$

۲) $\frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \xrightarrow{x(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \omega(\sqrt{x}-2) = 2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}+2)$

$\rightarrow \omega\sqrt{x} - 4\omega = 2(x-4) - \sqrt{x} - 2$

$\rightarrow 0\sqrt{x} - 4\omega - 2x + 8 + \sqrt{x} + 2 = 0$

$\rightarrow 2\sqrt{x} = 2x \xrightarrow{\frac{0}{1}} 2\sqrt{x} = 2x \rightarrow x' = 2x \rightarrow x' - 2x = 0$

$\rightarrow x(x-2) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow 0/2 = 0 \checkmark \\ x=2 \rightarrow \frac{0}{0} = 2 - \frac{1}{1} = 1 \checkmark \end{array} \right.$

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+7 = x+2\sqrt{x}+1$$

$$\rightarrow 7 = 2\sqrt{x} \rightarrow 3 = \sqrt{x} \rightarrow x = 9 \quad \checkmark \quad 4 = 3+1$$

$$4) \frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0 \rightarrow x\sqrt{4}\sqrt{u-3} \rightarrow \sqrt{4} - 2\sqrt{u-3} = 0$$

$$\sqrt{4} = 2\sqrt{u-3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} u = 4(u-3) \rightarrow u = 4u - 12$$

$$\rightarrow -3u = -12 \rightarrow u = 4 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{2} = 0$$

مثال: جواب معادله زیر را در صورت وجود بنویسید.

الف) $\sqrt{t} + 2 = 0$

ب) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$

پ) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$

جواب ندارد $\times$ $\sqrt{t} = -2$ الف

جواب ندارد $\rightarrow$ امکان ندارد $(+) + (+) + 1 = 0$ ب)

جواب ندارد $\rightarrow$ $1-u=0 \rightarrow u=1$ یا $u-2=0 \rightarrow u=2$ $(+) + (+) = 0$ $\xrightarrow{\text{بجای ۰}}$ پ)



در مثال ها با حل شرط
 $x+1=2 \rightarrow x=1$

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابرش باشد؟

۲ معادله $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x-2} = 0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می توانستید به این نتیجه برسید؟

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

✓
 $x=2$ هم زمان در دو رادعوی است

پس جواب ها در است.

نکته: هرگاه جمع دو رادیکال منفرجه باشد و هر دو جواب را در هر دو عبارت
 رادیکال منفرجه منفی شوند.

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه

در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به طوری که $t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$.

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

$$2 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4 = 10 - \frac{h}{5} \rightarrow -6 = -\frac{h}{5}$$

$$\rightarrow -h = -30 \rightarrow h = 30 \text{ m}$$

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟
ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$\text{الف) } \sqrt{x} - x = \frac{x}{2} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} + x = \frac{3}{2}x$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x = \frac{9}{4}x^2 \rightarrow \frac{9}{4}x^2 - x = 0 \rightarrow x(\frac{9}{4}x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \checkmark \\ \frac{9}{4}x = 1 \rightarrow x = \frac{4}{9} \quad \times \end{cases}$$

$$\text{ب) } x - \sqrt{x} = \frac{x}{2} \rightarrow x - \frac{x}{2} = \sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{1}{4}x^2 = x \rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x = 0 \rightarrow x(\frac{1}{4}x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \checkmark \\ x = 4 \quad \checkmark \end{cases}$$

۵ معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = 2$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
قسمت اول: ویژگی‌ها و رسم نمودار توابع
قدرمطلق

جلسه هشتم: صفحات ۲۳ تا ۲۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان



تعریف: قدرمطلق عدد حقیقی a به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

تذکره: قدرمطلق یک عمل منفرجه است و باید در عمل عبارت، نه عبارت، رسم منفرجه دارد...

با استفاده از تعین عبارت را در مطلق حذف شود.

کارد در کلاس

۱ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-5 - (-3)| =$ ب) $\left| \sqrt{3} - \sqrt{5} \right| =$ پ) $\left| 1/5 - 1/2 \right| =$

الف) $|-5 - (-3)| = |-5 + 3| = |-2| = 2$

ب) $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

پ) $|1/5 - 1/2| = 1/10$

۲ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} = \sqrt{(a^2 + 1)^2} = |a^2 + 1| = a^2 + 1$

ب) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} =$

$\sqrt{3 - 4\sqrt{3} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$

وَرَبِّي هَي قَدْر مَطْلَق :

۱) $|a| \geq 0$

۴) $|x| = |a| \rightarrow x = \pm a$

۲) $\sqrt{a^2} = |a|$

۵) $|a|^2 = a^2$

۳) $|x| = a \xrightarrow{a \geq 0} x = \pm a$

۶) $|-x| = |x|$

فعالیت

۷) $|ab| = |a| |b|$

فرض کنید a و b عددهای حقیقی دلخواه باشند.
۱ از رابطه $\sqrt{a^2} = |a|$ استفاده کنید و نشان دهید که :

۸) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

۲ با فرض $b \neq 0$ و استفاده از مرحله قبل ثابت کنید که :

اثبات :

حس ۱ $|ab| = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = |a| |b|$

حس ۲ $\left| \frac{a}{b} \right| = \left| a \times \frac{1}{b} \right| = |a| \times \left| \frac{1}{b} \right| = |a| \times \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$

فعالیت

۱ فرض کنید c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. هریک از نامعادله‌های زیر را به جواب متناظر آن وصل کنید.

الف $|x| < c, (c \neq 0)$ (۱)
→ ۲
(۲)



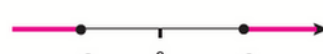
ب $|x| > c$ (۲)
→ ۳
(۳)



پ $|x| \leq c$ (۳)
(۱)



ت $|x| \geq c$ (۴)
(۲)



$$4) \quad |a| \leq c \xrightarrow{c>0} -c \leq a \leq c$$

$$1.) \quad |a| \geq c \xrightarrow{c>0} a \geq c \vee a \leq -c$$

$$11) \quad -|a| \leq a \leq |a|$$

$$\begin{aligned} \text{دليل: } |a| \leq |a| \xrightarrow{|a|=c} |a| \leq c \rightarrow -c \leq a \leq c \xrightarrow{c=|a|} \\ \rightarrow -|a| \leq a \leq |a| \end{aligned}$$

$$12) \quad -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$\text{دليل: } \begin{cases} -|a| \leq a \leq |a| \\ + \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{cases}$$

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

نمایشی مثبت $|a+b| \leq |a| + |b|$ (۱.۲)

$$\overbrace{|a+b|} \leq \overbrace{|a| + |b|} \quad \text{اثبات:}$$

$$\rightarrow |a+b| \leq |a| + |b|$$

رسم نمودار توابع قدر مطلق:

۱) اگر ضابطه تابع به صورت $y = |x+a|+b$ باشد با استفاده از انتقال نمودار

تابع $y = |x|$ نمودار را رسم می کنیم.

۲) اگر ضابطه به صورت $y = |f(x)|$ باشد کافی است تابع $f(x)$ را رسم

کنیم پس قسمت های از نمودار که زیر محور x هستند را قدر منفی کنیم و بالای محور x

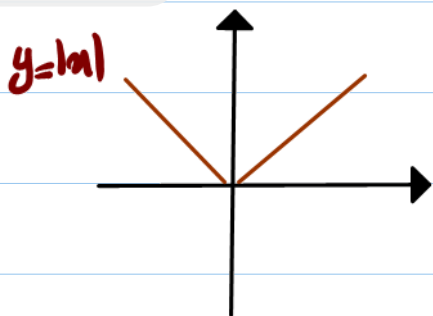
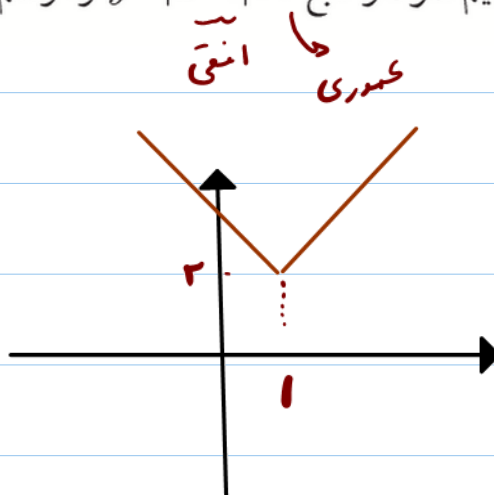
رسم کنیم.

۳) اگر به هیچ یک از دو صورت بالا نبود، با استفاده از یقین علامت عبارات داخل قدر مطلق

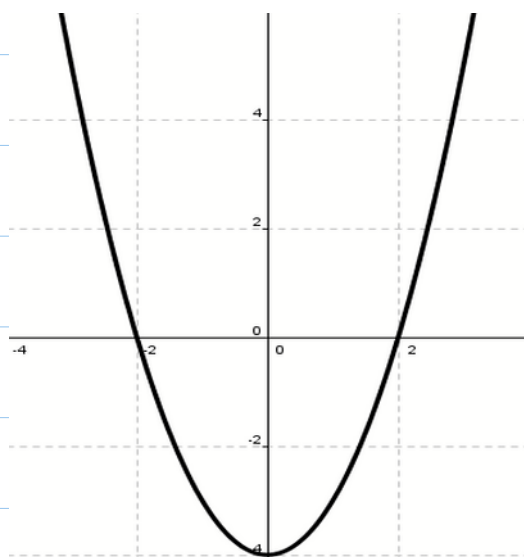
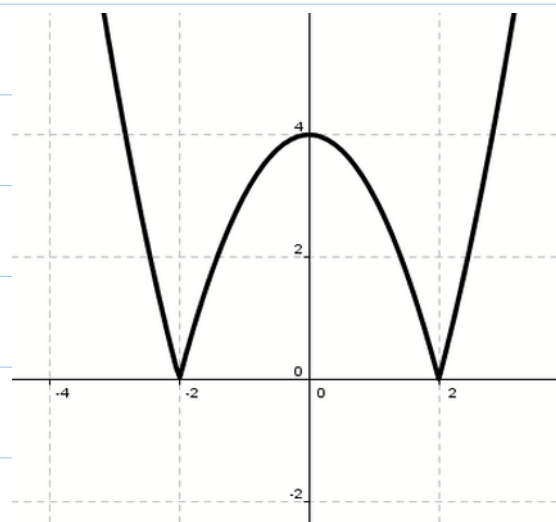
تابع را به صورت چند ضابطه ای و بدون قدر مطلق می نویسیم.



مثال: می خواهیم نمودار تابع $y = |x-1| + 2$ را رسم کنیم.



مثال: نمودار $y = |x^2 - 4|$ را رسم کنید.



۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید. **ورک‌شیت**

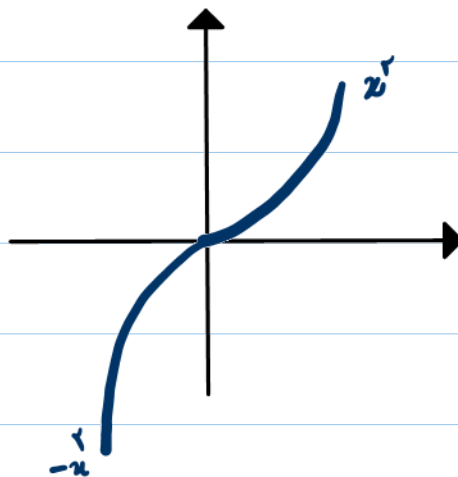
الف) $f(x) = x|x|$

ب) $g(x) = |x^2 - 1|$

پ) $h(x) = |x-1| + |x+1|$

الف)
$$\begin{array}{c|c|c} x & \textcircled{2} & \textcircled{1} \\ \hline x & - & + \end{array}$$

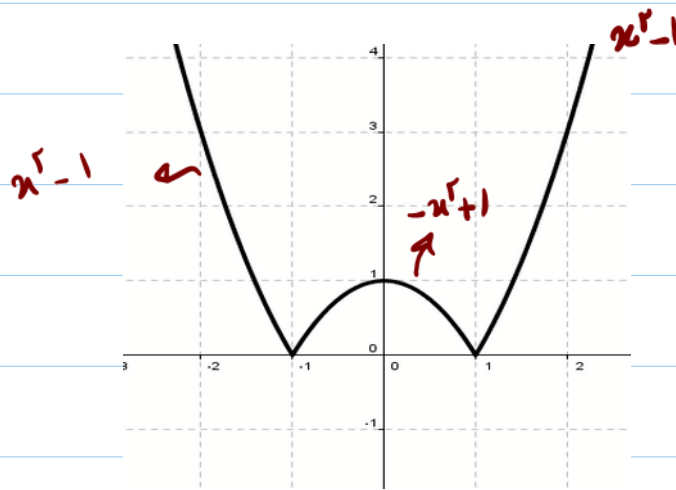
$$f(x) = \begin{cases} x \times x & x \geq 0 \\ x \times (-x) & x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



ب) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & \textcircled{2} & \textcircled{1} & \textcircled{1} \\ \hline x^2 - 1 & + & - & + \end{array}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & x \leq -1 \end{cases}$$



—) $h(x) = |x-1| + |x+1|$

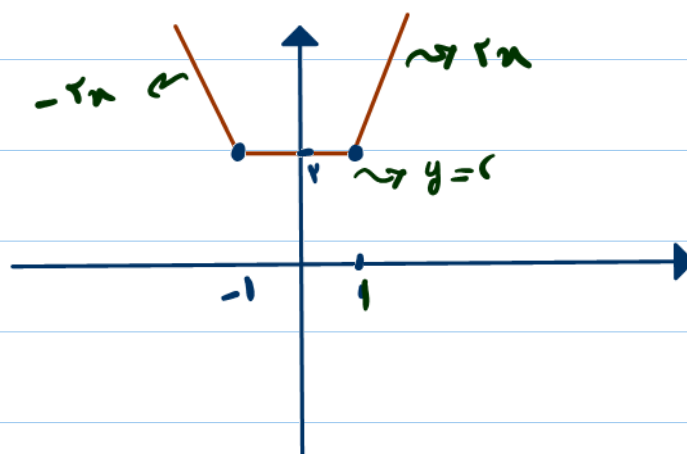
$x-1=0 \rightarrow x=1$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

	②	⑤	①
$x-1$	-	-	+
$x+1$	-	+	+

$$h(x) = \begin{cases} x-1+x+1 & x \geq 1 \\ -(x-1)+x+1 & -1 < x < 1 \\ -(x-1)-(x+1) & x \leq -1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -x & x \leq -1 \end{cases}$$



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

قسمت دوم: معادلات و نامعادلات

قدرمطلق

جلسه نهم: صفحات ۲۶ و ۲۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

معادلات قدر مطلق

معادلاتی که در آنجا مجهول داخل قدر مطلق قرار دارد را معادله قدر مطلق می‌گویند.

روش‌های حل معادله قدر مطلق :

$$\begin{cases} |x| = a \rightarrow x = \pm a \\ |x| = |a| \rightarrow x = \pm a \end{cases}$$

(۱) استفاده از روش‌های :

الف) اگر فقط یک طرف قدر مطلق وجود داشته باشد مانند : $|x-2| = 4-2x$.
در این حالت قدر مطلق را برداشته برای سمت دیگر $\pm$ می‌نویسیم و معادلات حاصل را حل می‌کنیم.
چون شرط جذبه‌های مغفوب هستی که قدر مطلق وجود ندارد را داریم باید جواب‌ها را در معادله امتحان کنیم.

ب) اگر هر دو طرف قدر مطلق باشد مانند : $|2x-3| = |4x+1|$. باز هم قدر مطلق را برداشته برای یک سمت $\pm$ می‌نویسیم و معادلات حاصل را حل می‌کنیم.
(۲) توان دو رساندن :

معادلات دسته الف و ب را می‌توان با به توان دو رساندن دو طرف و حذف قدر مطلق هم حل کرد، البته باید در آخر جواب‌ها را در معادله قرار دهیم که در معادله صدق کنند.

(۳) تحسین علامت :

اگر معادله به صورت دسته الف و ب نباشد، چاره‌ای جز، حذف قدر مطلق‌ها با استفاده از تحسین علامت قدر مطلق‌ها نداریم. به این صورت که :

مرحله اول: عبارت های درون قدر مطلق را در یک جدول قسیم می کنیم تا بدست
این عبارت ها در ناحیه های ایجاد شده مثبت اند یا منفی.

مرحله دوم: در هر ناحیه از جدول قسیم می کنیم، عبارت های درون قدر مطلق را با توجه به علامت
آنها از قدر مطلق خارج می کنیم. (مثبت باشند بدون هیچ تغییری از قدر مطلق خارج
و منفی باشند با بیرون آمدن از قدر مطلق در منفی ضرب می شوند.)
و معادله را بدون قدر مطلق حل می کنیم.

مرحله سوم: هر کدام از جواب های بدست آمده زنگ قابل قبول اند که در ناحیه مورد نظر
باشند.

مرحله چهارم: اجتماع جواب های بدست آمده در هر ناحیه، مجموعه جواب معادله است.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$|x-2| = 2x-3 \quad (الف)$$

$$x-2 = \pm(2x-3) \begin{cases} x-2 = 2x-3 \rightarrow -x = -1 \rightarrow x=1 \\ x-2 = -(2x-3) \rightarrow x-2 = -2x+3 \rightarrow 3x=5 \rightarrow x=\frac{5}{3} \end{cases}$$

آزمون جواب ها:

$$\begin{cases} x=1 \rightarrow 1 = -1 \quad \times \\ x=\frac{5}{3} \rightarrow \left| \frac{5}{3}-2 \right| = 2 \times \frac{5}{3} - 3 \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \checkmark \end{cases}$$

$$|2x-3| = |x+1|$$

$$2x-3 = \pm(x+1) \begin{cases} 2x-3 = x+1 \rightarrow -x=4 \rightarrow x=-4 \\ 2x-3 = -(x+1) \rightarrow 2x-3 = -x-1 \rightarrow 3x=2 \rightarrow x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{نقشه ۱} \quad |x-1| - |x-2| = x$$

x	①	②	③
x-1	+	+	-
x-2	-	+	+

① $x < 1$: $x-1 - (-x+2) = x$

$$x-1 + x-2 = x \rightarrow x = x \rightarrow \text{همواره برقرار}$$

② $1 \leq x \leq 2$: $x-1 - (x-2) = x$

$$x-1 - x+2 = x \rightarrow -1 = x \rightarrow x = -1$$

③ $x > 2$: $-(x-1) - (x-2) = x$

$$-x+1 - x+2 = x \rightarrow -2x+3 = x \rightarrow -3x = -3 \rightarrow x=1$$

$x=0 \notin (2, +\infty)$ جواب ندارد

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, 1) \cup \{1\} = (-\infty, 1]$$

تذکر: از روش هندسی هم می‌توان در حل معادله قدر مطلق کمک گرفت. (از نظر گرافیک و یافتن محل برخورد آنها)
نمایی به عنوان دایره و رسم آنها در دستگاه مختصات و یافتن محل برخورد آنها

کاردر کلاس

معادله قدر مطلق $|x-1|=4-3x$ را به سه روش زیر حل کنید.

حذف قدر مطلق (الف)

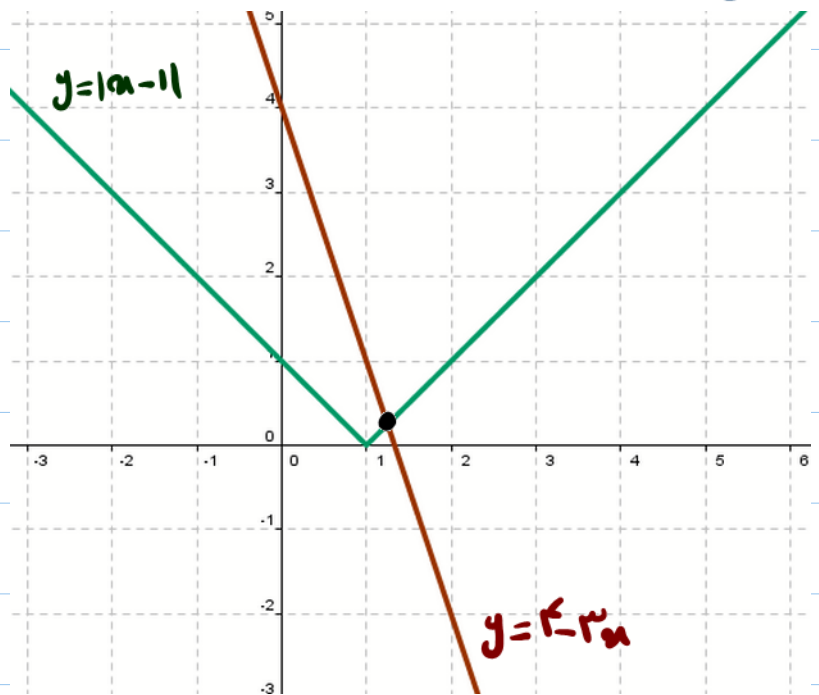
$$\begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & & \\ \hline x-1 & - & 0 & + \end{array}$$

$$x < 1 : -(x-1) = 4-3x \rightarrow -x+1 = 4-3x$$

$$\rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \times$$

$$x \geq 1 : x-1 = 4-3x \rightarrow 4x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

هندسی (ب)



به توان ۲ رساند (پ)

$$|x-1|^2 = (4-3x)^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 16 - 24x + 9x^2$$

$$8x^2 - 22x + 15 = 0 \rightarrow \Delta = 484 - (4 \times 8 \times 15) = 484 - 480 = 4$$



$$x = \frac{1 \pm 2}{17} = \begin{cases} \frac{14}{17} = \frac{5}{2} \times \\ \frac{2}{17} = \frac{5}{2} \checkmark \end{cases}$$

کاردکلاس

۱ با استفاده از شکل روبه‌رو، نمودار توابع $y = |x^2 - 1|$ و $y = |2x - 1|$ را رسم کنید و تعداد جواب‌های معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ و مقدار تقریبی جواب‌ها را به دست آورید.

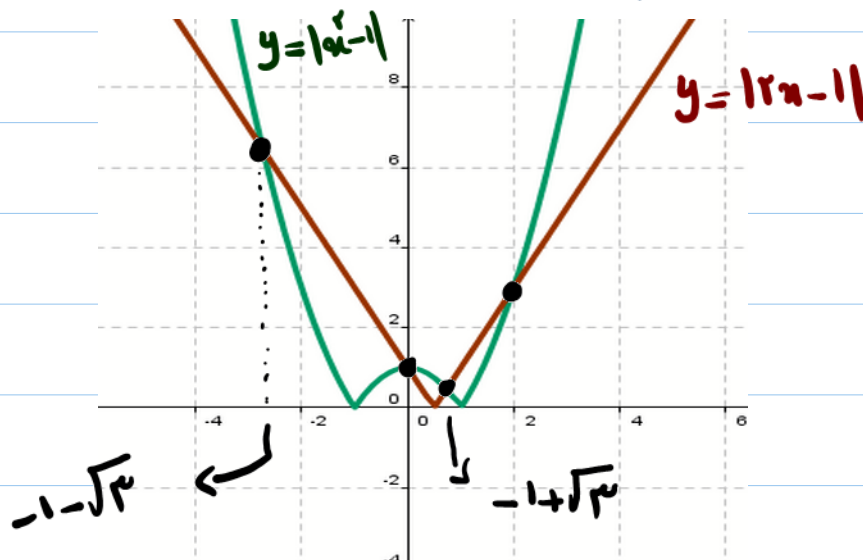
۲ به روش جبری و با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ را حل کنید.

$$\text{روش جبری : } x^2 - 1 = \pm(2x - 1) \begin{cases} x^2 - 1 = 2x - 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 1 = -2x + 1 \rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x(x - 2) = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}, \boxed{x = 2}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{3})}{2} = \boxed{-1 \pm \sqrt{3}}$$



روش های حل نامعادلات قدر مطلق :

الف) اگر یک طرف قدر مطلق یک حرف یکبار باشد مانند $|2x-1| \leq 3$ از ویژگی های :

$$|u| \leq c \Rightarrow -c \leq u \leq c$$

و

$$|u| \geq c \Rightarrow u \geq c \text{ یا } u \leq -c$$

استفاده می کنیم.

ب) اگر به صورت درست الف نباشد، باید مانند حل معادلات زیر قسیم است استفاده کرد و

جواب هر ناحیه را با آن ناحیه اشتراک گرفت و در آخر جواب های نهایی هر قسمت

را اجتماع می گیریم.

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $|2x-1| \leq 3$

$$-3 \leq 2x-1 \leq 3 \xrightarrow{+1} -2 \leq 2x \leq 4 \xrightarrow{:2} -1 \leq x \leq 2$$

$$ج. ۳ = [-1, 2]$$

$$|2n-1| \leq n+1$$

↙ ↘
1/4 2

x	① $\frac{1}{4}$	②
$2n-1$	-	+

① نقص : $x < \frac{1}{4} : -(2n-1) \leq n+1 \rightarrow -2n+1 \leq n+1$
 $\rightarrow -2n \leq 0 \xrightarrow{:(-2)} n \geq 0$

اشتراكها : $(-\infty, \frac{1}{4}) \cap [0, +\infty) = \underline{[0, \frac{1}{4})}$

② نقص : $x \geq \frac{1}{4} : 2n-1 \leq n+1 \rightarrow n \leq 2$

اشتراكها : $[\frac{1}{4}, +\infty) \cap (-\infty, 2] = \underline{[\frac{1}{4}, 2]}$

ج. م = $[0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{4}, 2] = [0, 2]$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

جلسه دهم: حل تمرین صفحه ۲۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

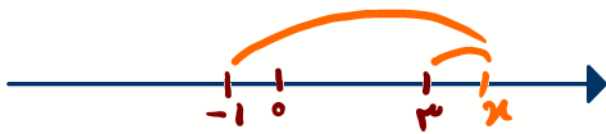
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

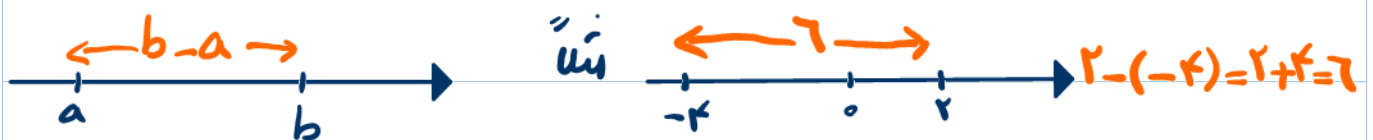
گروه ریاضی
استان همدان

۲ بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۱- و ۳ روی محور x ها برابر ۶ باشد؟



نکته: فاصله بین دو نقطه a و b روی محور:

اگر $a < b$ باشد، فاصله بین a و b برابر $b - a$ می شود:



اگر $a - b$ معنی $-6 = -4 - 2$ بنویسیم، چون فاصله نمی تواند منفی باشد، باید جواب

را قدرش بنویسیم. پس برای رفع این مشکل و زمانی که نمی دانیم a بزرگتر است یا b ، فاصله

بین a و b روی یک محور را $|b - a|$ می گیریم.

$$|x - 3| + |x - (-1)| = 6 \rightarrow |x - 3| + |x + 1| = 6$$

$$1) x < -1 : -(x - 3) - (x + 1) = 6$$

$$-x + 3 - x - 1 = 6 \rightarrow -2x = 4$$

$$\rightarrow x = -2 \quad \checkmark$$

	① -1	② 3	③
$x - 3$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+

$$2) -1 \leq x \leq 3 : -(x-3) + (x+1) = 7$$

$$-x + 3 + x + 1 = 7$$

$$4 = 7$$

غیرممکن

$$3) x > 3 : x - 3 + x + 1 = 7$$

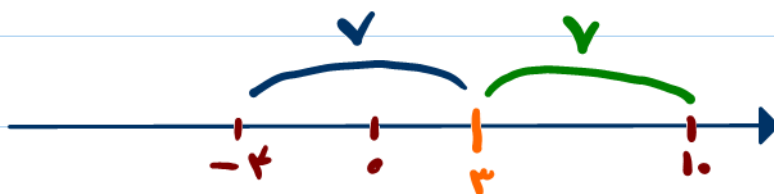
$$2x = 9 \rightarrow x = 4.5$$

۳) هر يك از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت يك معادله يا نامعادله بنويسيد و جواب را روی محور اعداد نمايش دهيد.

الف) فاصله بين x و ۳ برابر ۷ است.

$$|x-3|=7 \rightarrow x-3=\pm 7$$

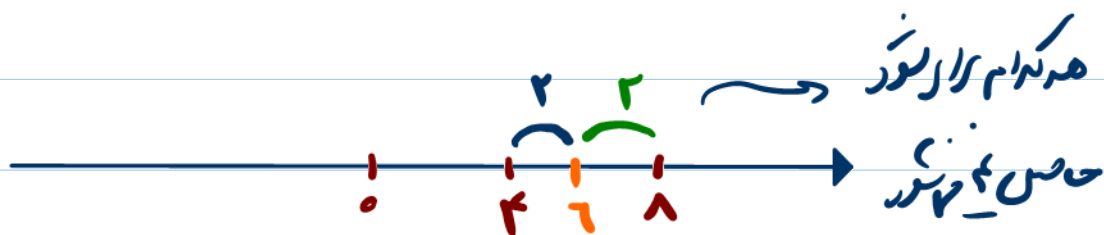
$$\begin{cases} x-3=7 \rightarrow x=7+3=10 \\ x-3=-7 \rightarrow x=-7+3=-4 \end{cases}$$



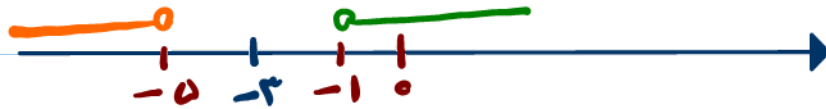
ب) دو برابر فاصله بين x و ۶ برابر ۴ است.

$$2|x-6|=4 \xrightarrow{\div 2} |x-6|=2$$

$$\begin{cases} x-6=2 \rightarrow x=8 \\ x-6=-2 \rightarrow x=4 \end{cases}$$



و نیز $\begin{cases} x+1 > 2 \rightarrow x > -1 \\ x+1 < -2 \rightarrow x < -3 \end{cases}$



الف) $\frac{2-x}{|x-3|} = 1$

$$\rightarrow |x - r| = r - x \rightarrow x - r = \pm(r - x)$$

$x - 3 = 2 - x \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5 \rightarrow 12,5 - 3 = 9,5$
 $10 \neq -10$
 كسور
 $x - 3 = -2 + x \rightarrow -3 = -2$
 غير ممكن

این همه جواب ندارد.



ب) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$ $\rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 2x + 1$

معادله

$$|x-1| = 2x+1$$

غش $\rightarrow x-1 = 2x+1 \rightarrow x = -2$

$1-2-1 = -2+1$
 $-2 \neq -1$

$\rightarrow x-1 = \pm(2x+1)$

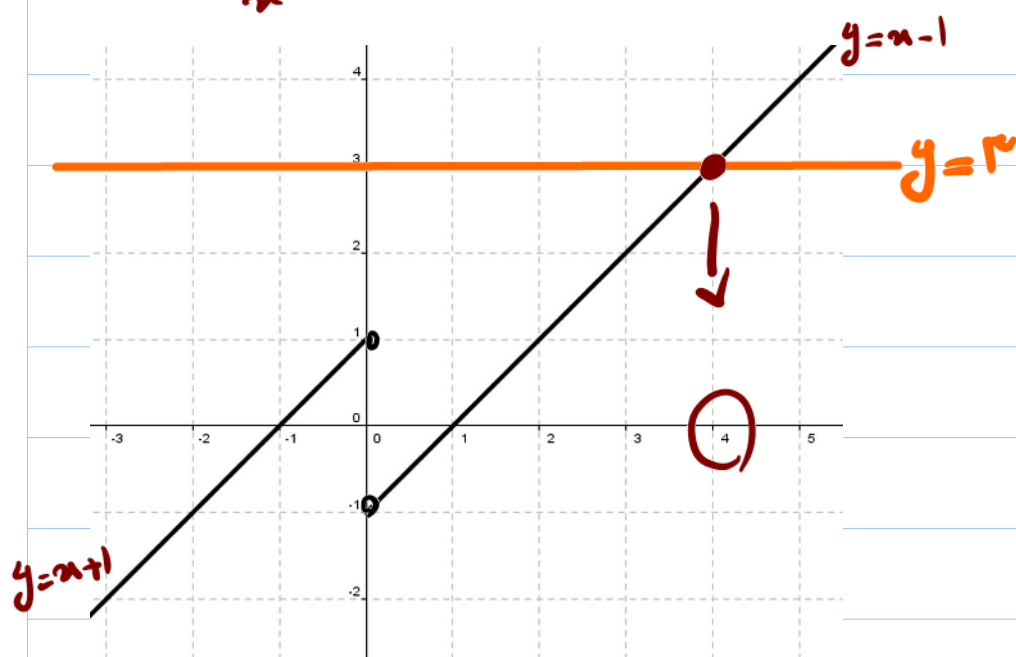
$x-1 = -2x-1 \rightarrow 3x = 0 \rightarrow x = 0$ ✓

$1-1 = 2 \cdot 0 + 1$
 $0 = 1$ ✗

۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=3$ معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$ $\rightarrow \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$

$$y = \begin{cases} x - \frac{x}{-x} & x < 0 \\ x - \frac{x}{x} & x > 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$$



روش هندسی:

جواب چهارم:

$x = 4$



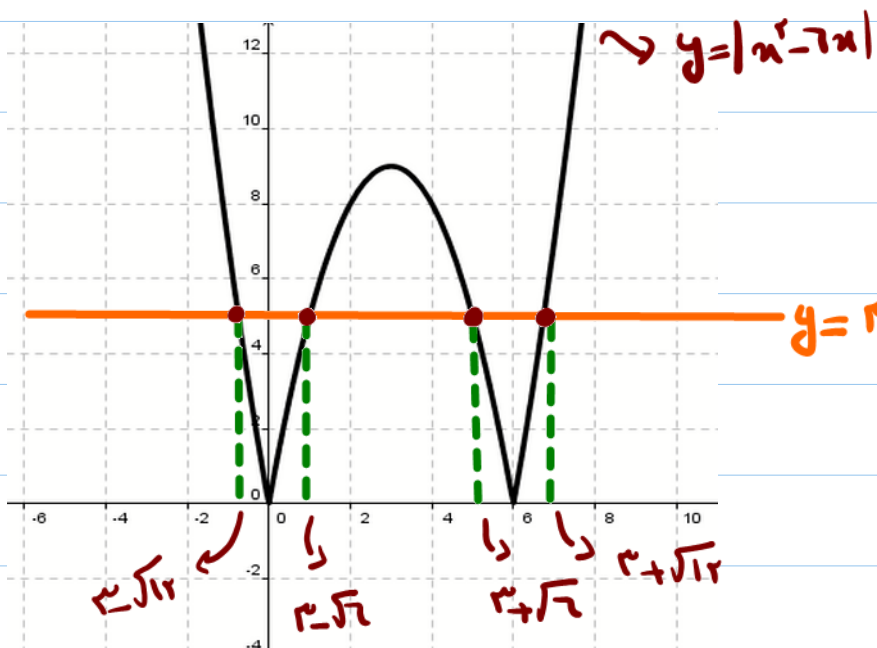
روش جدی :

$$r = n - \frac{n}{|n|}$$

در حالت $n < 0$: $r = n + 1 \rightarrow n = 2 \sim X$

و $n > 0$: $r = n - 1 \rightarrow n = 4 \checkmark$

ب) $y = |x^2 - 6x| \leadsto y = |\underbrace{x^2 - 6x + 9 - 9}| = |(x-3)^2 - 9|$



روش هندسی :

۴ جواب داریم

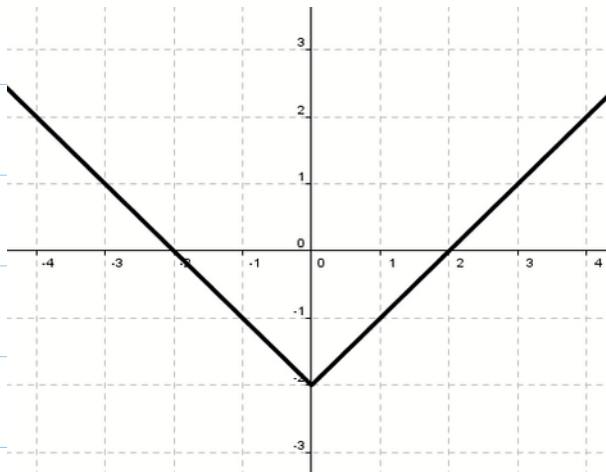
روش جدی :

$$|x^2 - 6x| = 3 \leadsto |(x-3)^2 - 9| = 3$$

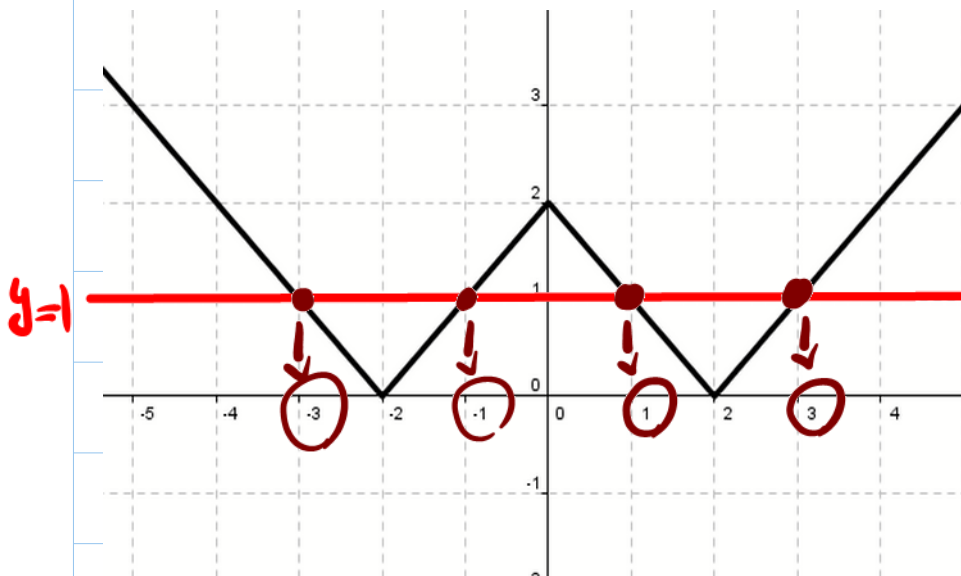
$$(x-3)^2 - 9 = 3 \leadsto (x-3)^2 = 12 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x-3| = \sqrt{12} \rightarrow x-3 = \pm\sqrt{12} \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{12}$$

$$(x-3)^2 - 9 = -3 \leadsto (x-3)^2 = 6 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x-3| = \sqrt{6} \rightarrow x-3 = \pm\sqrt{6} \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{6}$$

۶ نمودار تابع $f(x) = ||x|-2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.



$$y = |x| - 2$$



$$y = ||x| - 2|$$

روش هندسی :

$$x = -3, -1, 1, 3$$

$$||x| - 2| = 1 \rightarrow |x| - 2 = \pm 1$$

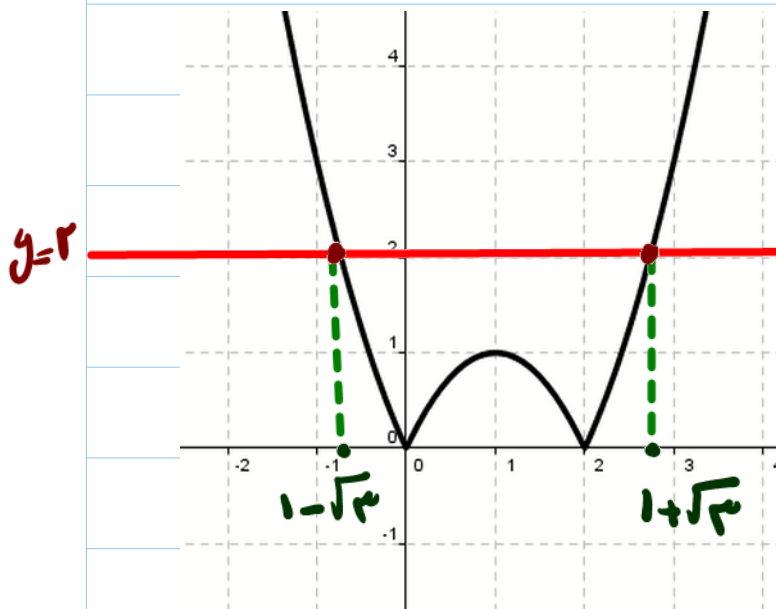
روش جبری :

$$|x| - 2 = 1 \rightarrow |x| = 3 \rightarrow x = \pm 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| - 2 = -1 \rightarrow |x| = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right.$$

۷ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2 - 2x| = 2$ را حل نمایید.

$$y = |x^2 - 2x| = |\underline{x^2 - 2x + 1} - 1| = |(x-1)^2 - 1|$$



روش هندسی :

۲ جواب داریم.

روش جبری :

$$|x^2 - 2x| = |(x-1)^2 - 1| = 2$$

$$\rightarrow (x-1)^2 - 1 = \pm 2$$

$$(x-1)^2 - 1 = 2 \rightarrow (x-1)^2 = 3 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} x-1 = \pm \sqrt{3}$$

$$\rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3} \quad \checkmark$$

$$(x-1)^2 - 1 = -2 \rightarrow (x-1)^2 = -1 \quad \times$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

قسمت اول و دوم

جلسه یازدهم و دوازدهم: صفحات ۲۹ تا ۳۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱) فاصله دو نقطه (طول پاره خط)

همانطور که در درس قبل دیدیم، اگر دو نقطه A و B مشخص با اعداد x_A و x_B روی

محور x ما باشند آنگاه فاصله بین دو نقطه $|AB| = |x_B - x_A|$ می شود.

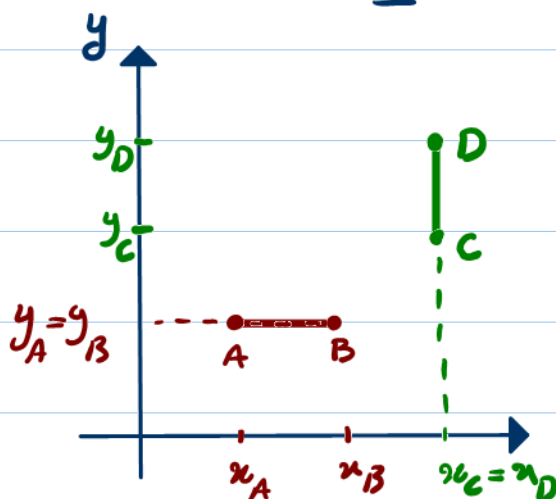


مانند:



تذکر: در دستگاه مختصات، دو نقطه A و B که عرض برابر دارند هم عرض و به نقاط C و D

که طول مساوی دارند هم طول گفته می شود و داریم:



$$|AB| = |x_B - x_A|$$

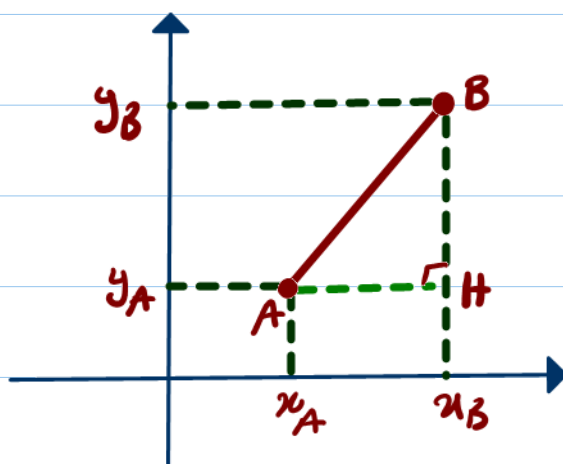
$$|CD| = |y_D - y_C|$$

فرمول شماره (۱): اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در

باشند، طول پاره خط AB یا فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

اثبات:



اگر از نقطه A بر خط عمود B
روی محور x ها، x_B ، عبور کنیم
و پای عمود را H بنامیم.

مثلث ABH قائم الزامه خواهد بود و طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad (1)$$

و بر BH هم طول هست پس: $|BH| = |y_B - y_A|$

همچنین H و A هم عرض هستند پس: $|AH| = |x_B - x_A|$

با جایگذاری در رابطه (۱) داریم:

$$AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

با گرفتن رادیکال از طرفین و این خاصیت قدر مطلق ($|a|^2 = a^2$) و توجه به این نکته که طول
را همیشه عددی مثبت در نظر می گیریم خود هم داشت:

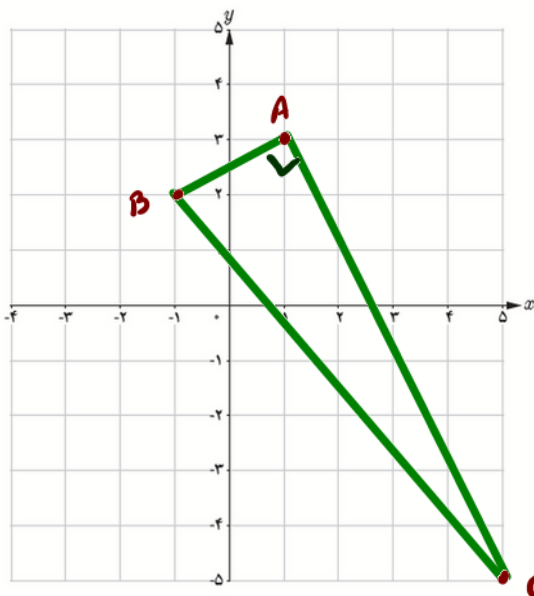
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



یادآوری: شیب خط گذرا از دو نقطه $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ برابر: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

و معادله خط گذرنده از نقطه A با شیب m برابر: $y - y_A = m(x - x_A)$ است.

کارد کلاس



سه نقطه $A(1, 3)$, $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC ، در صفحه مختصات روبه‌رو، هستند.

(الف) مثلث را رسم کنید.

(ب) طول اضلاع مثلث را به دست آورید.

(پ) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

(ت) شیب دو خط AB و AC را به دست آورید. چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

$$BC = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{85})^2 = (\sqrt{80})^2 + (\sqrt{5})^2 \rightarrow 85 = 80 + 5 \rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2$$

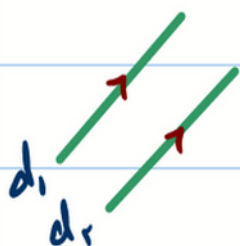
$$m_{AB} = \frac{2-3}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$m_{AC} = \frac{-5-3}{5-1} = \frac{-8}{4} = -2$$

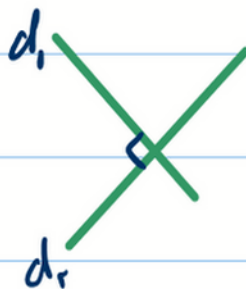
مقدار دایره‌مضرب برابر -1 می‌شود

حاصل ضرب شیب منفی یکدیگر می‌شود.

تذکره: شیب دو خط موازی با هم برابر و شیب دو خط عمود بر هم قرینه و معکوس اند.



$$m_1 = m_2$$



$$m_1 \times m_2 = -1$$

مثال: وضعیت خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$$d_1: y = 4x - 1$$

$$d_r: 1y + 2x = 3$$

$$d_2: 12x - 3y + 1 = 0$$

نکته: ضریب a در صورت استاندارد خط $(y = mx + h)$ شیب خط است.

نکته: شیب خط $ax + by + c = 0$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

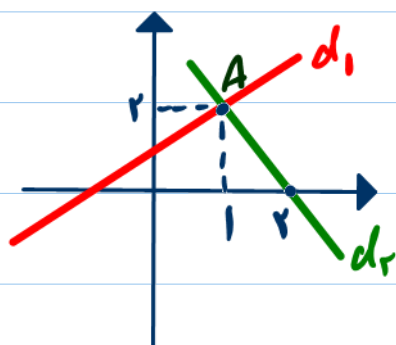
$$m_1 = 4$$

$$m_r = -\frac{2}{1} = -\frac{1}{4}$$

$$m_2 = -\frac{12}{-3} = 4$$

$$m_1 = m_2 \rightarrow d_1 \parallel d_2, \quad m_1 \times m_r = m_2 \times m_r = -1 \rightarrow d_r \perp d_1 \text{ و } d_r \perp d_2$$

مثال: معادله خط d_1 عمود بر d_r را در نقطه تقابل بنویسید.



$$d_1 \perp d_r \Rightarrow m_1 \times m_r = -1$$

$$(1, 0) \text{ و } (1, 2) \rightarrow m_r = \frac{2-0}{1-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

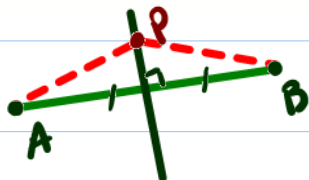
$$m_1 = \frac{1}{2}$$

$$d_1: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

نکته: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دوسر پاره خط به یک فاصله است و برعکس.

کارد کلاس

نشان دهید نقطه $P(-12, 11)$ روی عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه $A(0, -3)$ و $B(6, 15)$ قرار دارد.



کافی است ثابت کنیم $AP = BP$.

$$AP = \sqrt{(-12-0)^2 + (11+3)^2} = \sqrt{144 + 196} = \sqrt{340}.$$

$\rightarrow AP = BP$

$$BP = \sqrt{(-12-6)^2 + (11-15)^2} = \sqrt{324 + 16} = \sqrt{340}.$$

۱۲) مختصات نقطه وسط یک پاره خط:

اگر M وسط پاره خط AB روی محور طول ها باشد:



$$AM = MB \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

به همین ترتیب اگر M وسط پاره خط AB روی محور عرض ها باشد:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

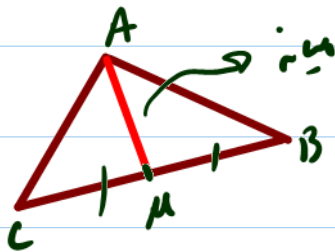
و در حالت کلی اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند:

تعیین کردن این نقاط در محور و ها به فرمول شماره ۱۲ می آید

فرمول شماره ۱۲: مختصات نقطه M وسط پاره خط AB :

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

مثال: اگر $A(1, 9)$, $B(3, 1)$, $C(7, 11)$ سه رأس یک مثلث باشند، پاره میانه



AM را به دست آوریم.

$$M = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left(\frac{3+7}{2}, \frac{1+11}{2} \right) = (5, 6)$$

$$M, A \rightarrow m = \text{شیب} = \frac{9-6}{1-5} = \frac{3}{-4}$$

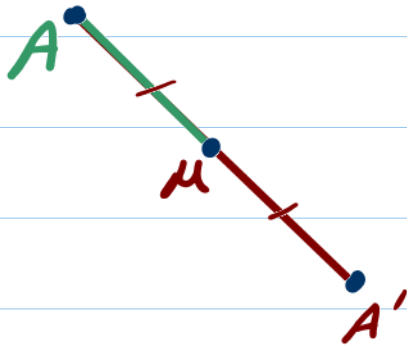
$$y - 9 = \frac{3}{-4}(x - 1)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + 9$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$$



نکته: قدرینه نقطه $A(x_A, y_A)$ نسبت به نقطه $M(x_M, y_M)$:



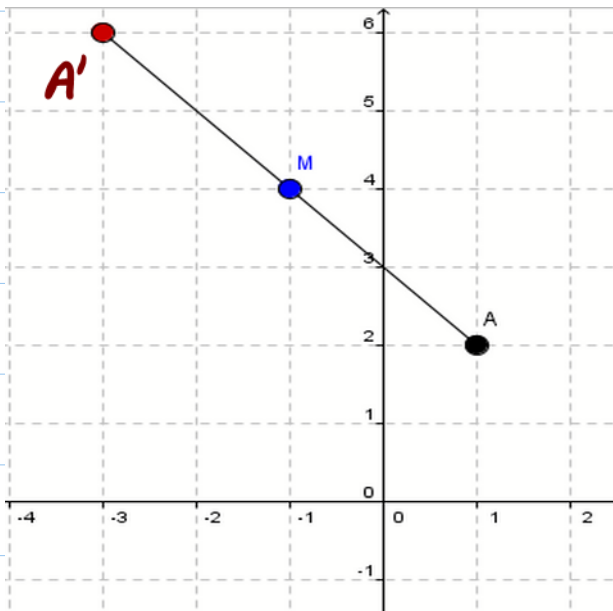
اگر A' را نقطه مدبر نظر بگیریم. چون M وسط AA' است.

واقع می شود پس خواهیم داشت:

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \rightarrow 2x_M = x_A + x_{A'} \rightarrow x_{A'} = 2x_M - x_A$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \rightarrow 2y_M = y_A + y_{A'} \rightarrow y_{A'} = 2y_M - y_A$$

مثال: قدرینه نقطه $A(1, 2)$ را نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ بیابیم.



$$x_{A'} = 2x_M - x_A = 2(-1) - 1 = -3$$

$$y_{A'} = 2y_M - y_A = 2(4) - 2 = 6$$

$$A'(-3, 6)$$

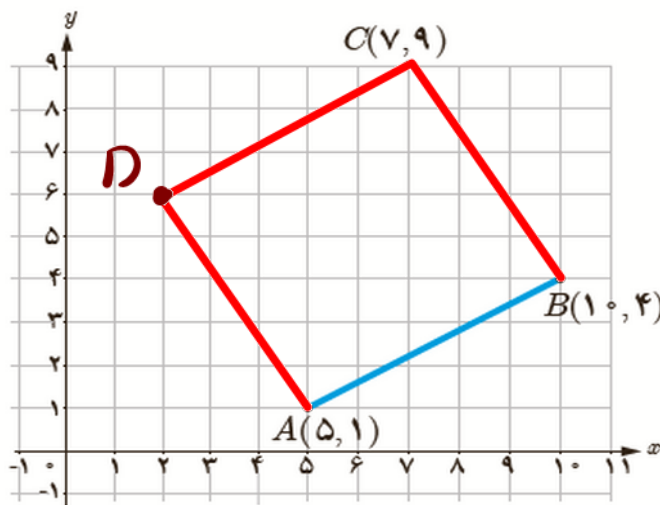
نکته: در هر چهارضلعی که قطرهایش را نصف می کنند (مانند مربع، مستطیل، لوزی و ...)

متوازی الاضلاع) مجموع طول ها و مجموع عرض های دو رأس روبه رو هفتم برابرند.

(اثبات عنوان تمرین)

مثال: مربع $ABCD$ را با رأس های $A(5,1)$ ، $B(10,4)$ ، $C(7,9)$

در نظر بگیرید. مختصات رأس D را بیابید.



$$x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow 5 + 7 = 10 + x_D \rightarrow x_D = 2$$

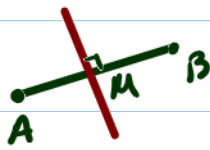
$$y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow 1 + 9 = 4 + y_D \rightarrow y_D = 6$$

$D(2,6)$

مثال: معادله عمود منصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(3, 4)$ را به هم وصل کرده است.

روش اول: منصف کتاب حساب

روش دوم:



$$M = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

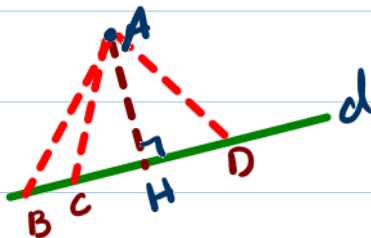
$$m_{AB} = \frac{4-1}{3+2} = \frac{3}{5} \rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{5}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{\times 6} 4y - 15 = -10x + 5 \rightarrow 4y + 10x = 20$$

$$\div 2 \rightarrow 2y + 5x = 10$$

۳) فاصله نقطه از خط:

بی‌رأسم فاصله یک نقطه از یک خط، کوتاه‌ترین فاصله بین فاصله عمودی از خط می‌گیریم.

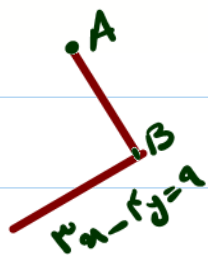


فرمول شماره ۳: (بدون اثبات می‌پذیریم)

فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر:

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱ اگر نقطه $A(2,3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟



روی خط قرار ندارد $A(2,3) \xrightarrow{\text{در خط}} 3 \times 2 - 4 \times 3 = 9$
 $6 - 12 = -6 \neq 9$

صورت کلی خط:

$$AB = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 3 - 9|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\Rightarrow S = 3 \times 3 = 9$$

۲ دو خط $3x + 2y = 1$ و $2x - 3y = 2$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه $A(2,5)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

$$d_1: 3x + 2y = 1 \rightarrow m = -\frac{3}{2}, \quad d_r: 2x - 3y = 2 \rightarrow m = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$d_1 \perp d_r \rightarrow \text{در ضلع مجاور } d_1, d_r$$

$$(2,5) \xrightarrow{d_1} 3 \times 2 + 2 \times 5 \neq 1, \quad (2,5) \xrightarrow{d_r} 2 \times 2 - 3 \times 5 \neq 2$$

$(2,5)$ روی اضلاع قرار ندارد پس A رأس مستطیل است که به مقابل در ضلع قرار دارد.



$$d_1: 2x - 3y - 2 = 0$$

B

D

C

پس داریم :

$$d_1 \text{ تا } A \text{ فاصله} = AD = \frac{|2 \times 2 + 3 \times 0 - 2|}{\sqrt{4+9}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

$$d_2 \text{ تا } A \text{ فاصله} = AB = \frac{|2 \times 2 - 3 \times 0 - 2|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

$$S = \frac{10}{\sqrt{13}} \times \frac{13}{\sqrt{13}} = 10 \times \frac{13}{13} = 10$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل اول: جبر و معادله

درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

حل تمرین: صفحات ۳۵ و ۳۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

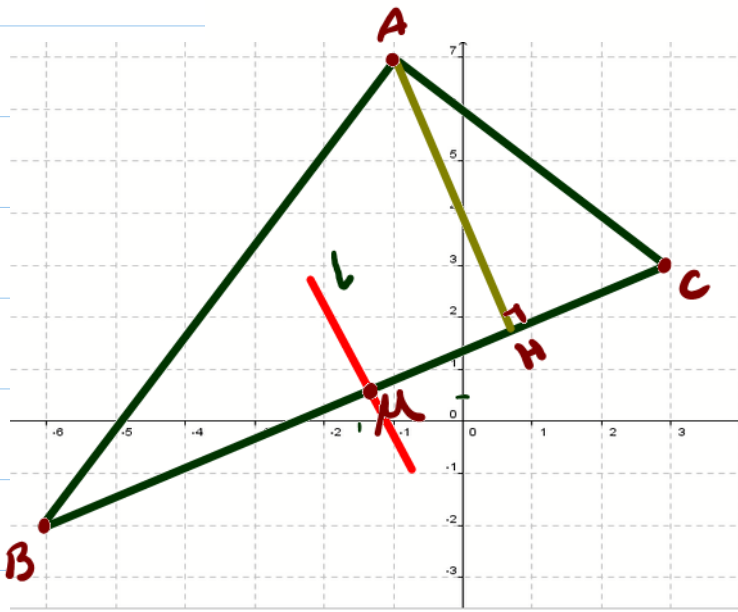
گروه ریاضی
استان همدان

۱ مثلث ABC به رأس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید.
الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمود منصف ضلع BC را به دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟



$$ب) AB = \sqrt{(-1+6)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$$

$$BC = \sqrt{(3+6)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$$

$AB=BC$ پس مثلث متساوی‌الساقین است

$$ب) M_{BC} = \left(\frac{-6+3}{2}, \frac{-2+3}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

نقطه وسط BC

$$م_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3+2}{3+6} = \frac{5}{9}$$

عمود منصف BC بر BC عمود است پس $m_l = -\frac{9}{5}$

بارشش m و شیب m_2 معادله را بنویسیم :

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{5}\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\stackrel{\times 10}{\Rightarrow} 10\left(y - \frac{1}{2}\right) = 10 \times \left(-\frac{9}{5}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 10y - 5 = -18x - 27 \Rightarrow 18x + 10y + 22 = 0$$

$$\stackrel{\div 2}{\Rightarrow} 9x + 5y + 11 = 0$$

معادله خط مماس BC

ii) معادله BC : $m_{BC} = \frac{5}{9}$, $C(3, 2)$

$$y - 2 = \frac{5}{9}(x - 3) \xrightarrow{\times 9} 9y - 18 = 5x - 15$$

BC : $-5x + 9y - 12 = 0$, $A(-1, 7)$

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-5(-1) + 9(7) - 12|}{\sqrt{(-5)^2 + 9^2}}$$

$$= \frac{|5 + 63 - 12|}{\sqrt{25 + 81}} = \frac{56}{\sqrt{106}}$$

۲) نقاط دوسر قطر یک دایره اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

وسط AB مرکز دایره

$$O = \left(\frac{0+8}{2}, \frac{6-8}{2} \right) = (4, -1)$$

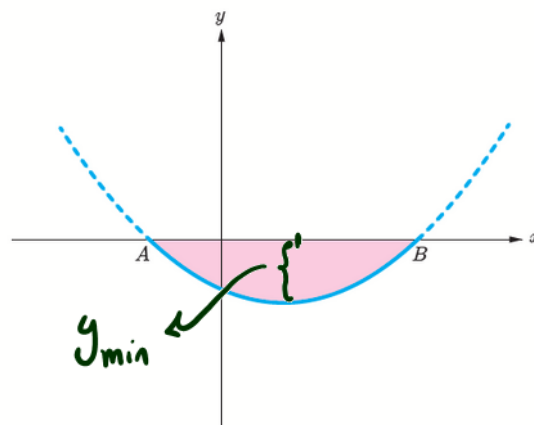
$$OA = R = \sqrt{(0-4)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

۳) شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y = x^2 - 8x - 20$ مطابق شکل زیر مدل سازی می شود.

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به دست آورید.

ب) اگر x بر حسب سانتی متر باشد طول AB را به دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟



$$\text{صفحه ج سهمی (الف)} : x^2 - 8x - 20 = 0 \rightarrow (x-10)(x+2) = 0 \begin{cases} x=10 \\ x=-2 \end{cases}$$

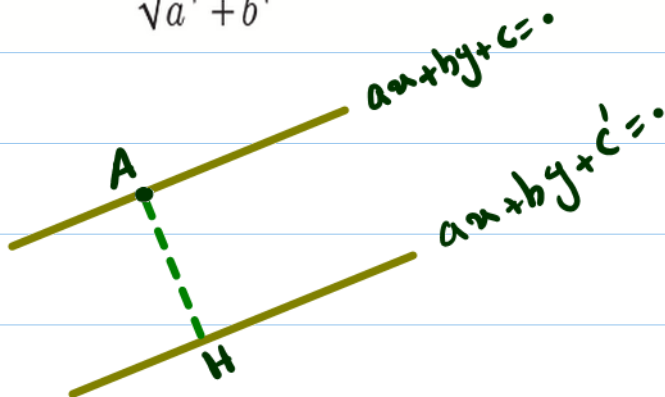
$$\Rightarrow x_A = -2, x_B = 10$$

$$\text{ب) } |AB| = |10 + 2| = 12 \text{ cm}$$

$$\text{پ) } x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4 \rightarrow y_{\min} = 4^2 - 8 \times 4 - 20 = 16 - 32 - 20 = -36$$

ضخامت کمری = 36 mm

۴ ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می باشد.



روش اول :

$$A \rightarrow x=0 \rightarrow ax_0+by+c=0 \rightarrow by=-c \rightarrow y=-\frac{c}{b}$$

$$A(0, -\frac{c}{b})$$

$$AH = \frac{|ax_0+bx(-\frac{c}{b})+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

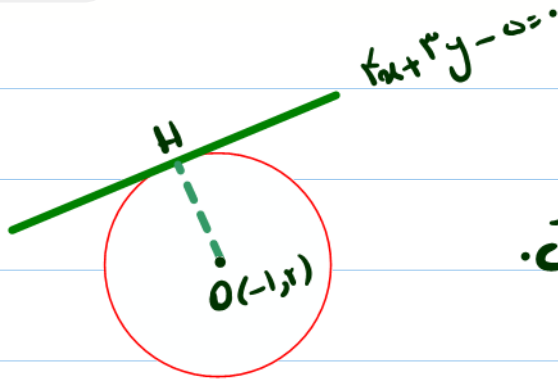
$$\begin{aligned} |x| &= |x| \\ \Rightarrow AH &= \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

روش دوم :

$$A(x_1, y_1) \xrightarrow{\text{خط}} ax_1+by_1+c=0 \rightarrow ax_1+by_1=-c$$

$$AH = \frac{|\widetilde{ax_1+by_1+c'}|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۵ خط $4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

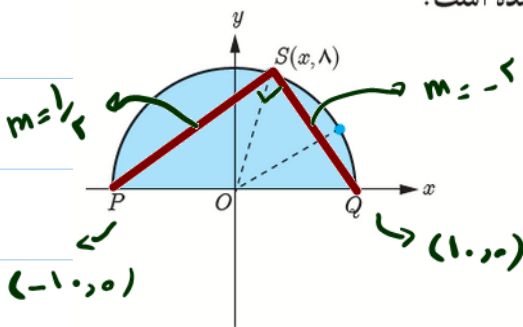


مفید: شعاع بر خط مماس در نقطه مماس عمود است.

$$OH = R = \frac{|4(-1) + 3(2) - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-4 + 6 - 5|}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

فاصله نقطه O تا خط مماس

۶ نقطه $S(x, 8)$ روی نیم دایره ای به شعاع 10 در شکل روبه رو داده شده است.



الف) مقدار x را به دست آورید.

ب) شیب خط های PS و SQ را به دست آورید.

پ) نشان دهید $\hat{PSQ}$ قائمه است.

الف) $R = 10 = OS = \sqrt{(x-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{x^2 + 64}$

$$10 = \sqrt{x^2 + 64} \xrightarrow{\text{مربع کردن}} 100 = x^2 + 64 \rightarrow x^2 = 36 \xrightarrow{x > 0} x = 6$$

ب) $S(6, 8)$, $P(-10, 0)$, $Q(10, 0)$

$$m_{PS} = \frac{8-0}{6-(-10)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad , \quad m_{SQ} = \frac{0-8}{10-6} = \frac{-8}{4} = -2$$

سے p_s پر m_{sq} سہجرات $\Rightarrow m_{sq} = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$

۷ اگر فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

$$ax + by - 1 = 0$$

$$AH = \frac{|a_x + \epsilon_x r - 1|}{\sqrt{a^r + 17}} = r \Rightarrow \frac{|a + v|}{\sqrt{a^r + 17}} = r$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+17} = |a+1| \xrightarrow{\text{aufq.}} (a^2+17) = (a+1)^2 = a^2+2a+1$$

$$\Rightarrow \underline{5a'} + 7\underline{5} - \underline{a'} - 15a - 59 = 0 \Rightarrow \underline{4a'} - 15a + 10 = 0$$

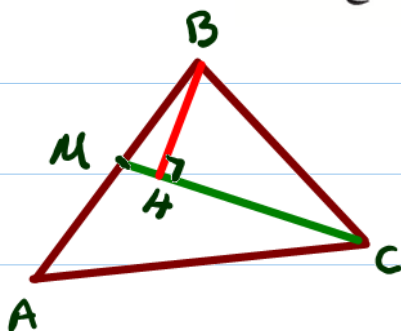
$$\Delta = 197 - (r \times r \times 10) = 197 - 180 = 17 \rightarrow a = \frac{1r \pm r}{7}$$

$$a = \begin{cases} \frac{1\pi + \pi}{2} = \pi & \text{CC} \\ \frac{1\pi - \pi}{2} = \frac{\pi}{2} & \text{CS} \end{cases}$$

سه رأس مثلث ABC ، $A(-11, -13)$ ، $B(-3, 3)$ ، $C(3, 1)$ می باشند. ▲

(الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به دست آورید.

(ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد.



(الف) ابتدائی مرحلہ MC راجع اسم میں خاصہ

نقشه ABC را بسطی کنیم.



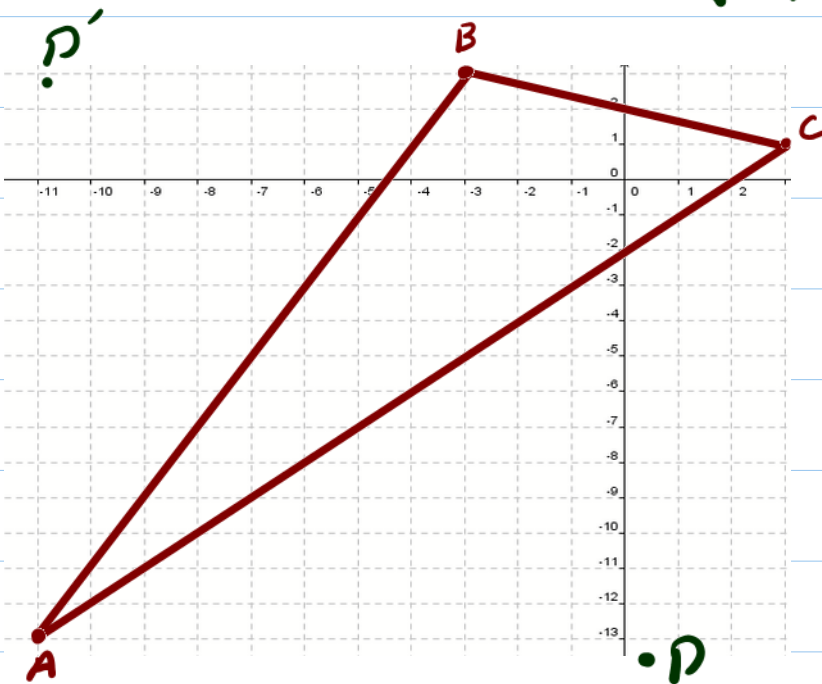
$$\mu \left(-\frac{1-r}{r}, \frac{-1r+r}{r} \right) \Rightarrow \mu(-v, a)$$

$$m = \frac{y_c - y_\mu}{x_c - x_\mu} = \frac{1-a}{r+v} = \frac{-r}{1.} = -\frac{r}{\delta}$$

$$\mu C \sim \omega : y-1 = -\frac{r}{\delta}(x-r) \xrightarrow{\times \delta} \delta y - \delta = -rx + r$$

$$\Rightarrow rx + \delta y - 11 = 0$$

$$\mu C \text{ إلى } B \sim \delta = BH = \frac{|rx(-r) + \delta \times r - 11|}{\sqrt{r^2 + \delta^2}} = \frac{|-7 + 10 - 11|}{\sqrt{r^2 + \delta^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \delta^2}}$$



ABCD :

$$\begin{cases} x_B + x_D = x_A + x_C \\ y_B + y_D = y_A + y_C \end{cases}$$

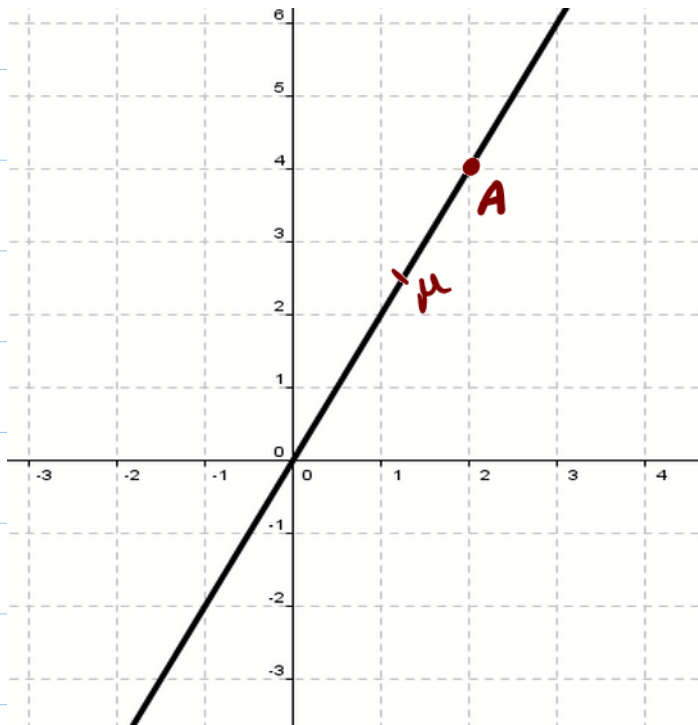
$$\begin{cases} -r + x_D = -11 + r \rightarrow x_D = -\delta \\ r + y_D = -1r + 1 \rightarrow y_D = -10 \end{cases}$$

$$D(-\delta, -10)$$

$$ABCD' : \begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_{D'} \\ y_A + y_B = y_C + y_{D'} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -11 - r = r + x_{D'} \rightarrow x_{D'} = -14 \\ -1r + r = 1 + y_{D'} \rightarrow y_{D'} = -11 \end{cases}$$

$$D'(-14, -11)$$

۹ نقطه ای روی خط $y=2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2,4)$ برابر ۵ باشد



$$OM + MA = 5$$

فرض کنیم $M(a, 2a)$
 $y=2x$
 باشد.

$$OM = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5a^2}$$

$$MA = \sqrt{(a-2)^2 + (2a-4)^2} \xrightarrow{\text{معرّف}} \sqrt{5a^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (2a-4)^2} = 5$$

$(2(a-2))^2$ ←

$$\sqrt{5a^2} + \sqrt{(a-2)^2 + 4(a-2)^2} = 5$$

$$\sqrt{5a^2} + \sqrt{5(a-2)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{5}|a| + \sqrt{5}|a-2| = 5$$

$$\div \sqrt{5} \Rightarrow |a| + |a-2| = \frac{5 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|a| + |a-r| = \sqrt{5}$$

	0	2
a	-	+
a-r	-	+

$$a < 0 : -a - a + r = \sqrt{5} \rightarrow -2a = \sqrt{5} - r \rightarrow a = \frac{r - \sqrt{5}}{2}$$

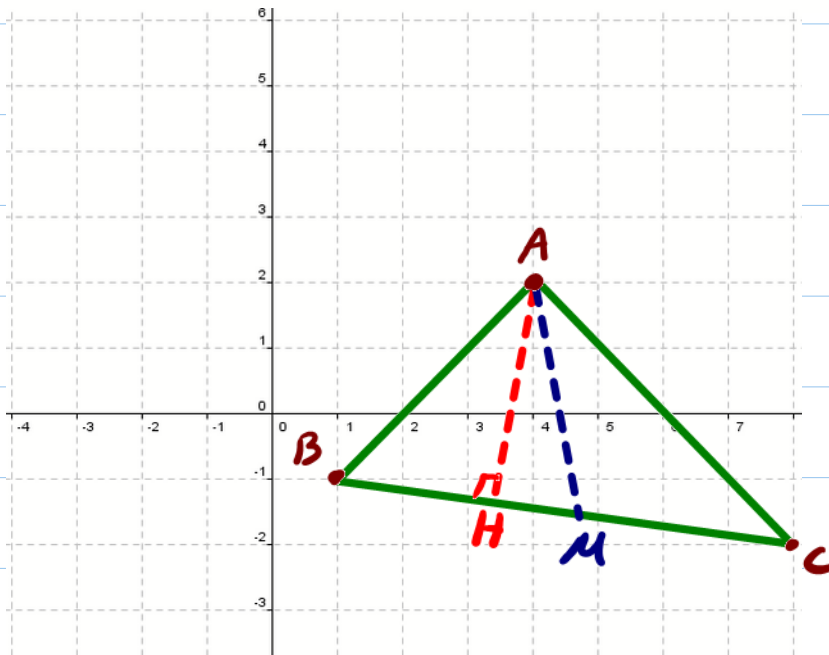
$$0 < a < 2 : \cancel{a} - \cancel{a} + r = \sqrt{5} \rightarrow r = \sqrt{5}$$

$$a > 2 : a + a - r = \sqrt{5} \rightarrow 2a = \sqrt{5} + r \rightarrow a = \frac{r + \sqrt{5}}{2}$$

$$a = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\mu\left(\frac{r - \sqrt{5}}{2}, r - \sqrt{5}\right), \mu'\left(\frac{r + \sqrt{5}}{2}, r + \sqrt{5}\right)$$

۱۰ نقاط $A(4, 2)$ و $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به دست آورید.



تفسیر فاکتورس $\Delta AHM \sim$

$$AM^2 = AH^2 + MH^2$$

↓ ↓ ↗ ?

طول میانه فاصله A تا خط BC



AH: دہرہ خط BC را بہ رست کریم
پس فاصلہ A را تا BC معلوم.

$$m_{BC} = \frac{-r+1}{\lambda-1} = \frac{-1}{v} \xrightarrow{\text{بافتتاح B}} y+1 = -\frac{1}{v}(x-1)$$

$$\xrightarrow{xv} vy+v = -x+1 \rightarrow x+vy+v=0, A(x,r)$$

$$AH = \frac{|1x+vy+v|}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{r}{\sqrt{5}}$$

AM: وسط BC را می بینیم و فاصلہ A تا M را حساب می کنیم.

$$M = \left(\frac{1+\lambda}{2}, \frac{-1-r}{2}\right) = \left(\frac{q}{2}, -\frac{r}{2}\right) \quad \text{وسط BC}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{q}{2}-1\right)^2 + \left(-\frac{r}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 \rightarrow MH^2 = AM^2 - AH^2$$

$$MH^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{5}{4} - \frac{r^2}{5} = \frac{25-4r^2}{20} = \frac{49}{20}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

جلسه اول: صفحات ۳۸ تا ۴۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

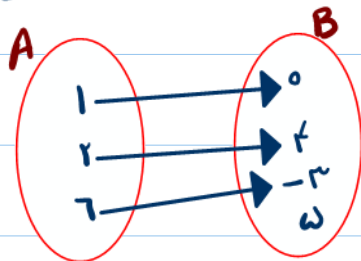
اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری مفهوم تابع :

هر تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A

دقیقاً یک عضو از B نسبت می دهد. A را دامنه، B را هم دامنه این تابع



$$B = \{0, 4, -3\} = \text{هم دامنه}$$

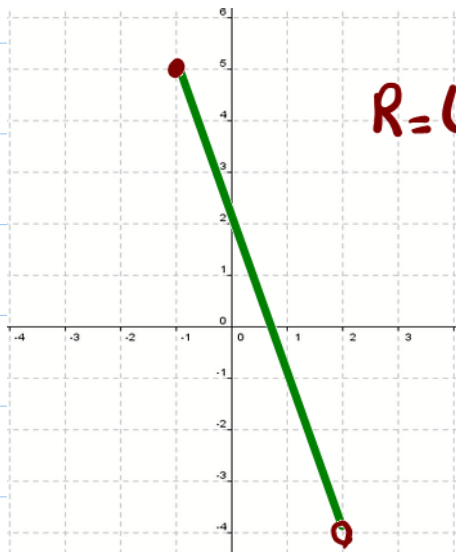
$$R = \{(0, 4, -3)\} = \text{بر}$$

می نامیم.

مجموعه عضوهای از B را که به عضوی از A نسبت داده شده اند **بر** این تابع

می نامیم. بنابراین **بر** این تابع زیر مجموعه ای از هم دامنه تابع است.

مثال : برای تابع $f: [-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ که دامنه از نمایش های زیر نیز قابل قبول است؟
 $f(x) = -3x + 2$



$$R = (-4, 5]$$

هم دامنه دامنه

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} f: [-1, 2) \rightarrow (-2, 5) \\ f(x) = -3x + 2 \end{array} \right. \quad \text{اف} \quad \times \\ & \left\{ \begin{array}{l} f: [-1, 2) \rightarrow [1, +\infty) \\ f(x) = -3x + 2 \end{array} \right. \quad \text{ب} \quad \times \\ & \left\{ \begin{array}{l} f: [-1, 2) \rightarrow (-4, 5] \\ f(x) = -3x + 2 \end{array} \right. \quad \text{ج} \quad \checkmark \end{aligned}$$

برای تابع $f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \frac{1}{9}]$ کدام یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟
 $f(x) = x^2$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(الف)

$$\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \infty) \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \frac{1}{9}] \\ f(x) = x \end{cases}$$

(پ)

$$\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(ت)

الف) قابل قبول نیست زیرا دامنه تغییر کرده است.

ب) قابل قبول است زیرا $[0, \infty) \subseteq [0, \frac{1}{9}]$.

پ) قابل قبول نیست زیرا ضابطه تابع تغییر کرده است.

ت) قابل قبول است زیرا $\mathbb{R} \subseteq [0, \frac{1}{9}]$.

تأیید به عنوان داشتن

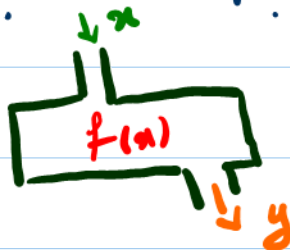
می‌توان تأیید را داشتنی در نظر گرفت که به ازای هر ورودی یک خروجی تحول می‌دهد. ورودی‌ها

از دامنه تأیید داره می‌شوند و خروجی‌ها در بردار هستند. در ضمن به ازای هر ورودی دقیقاً

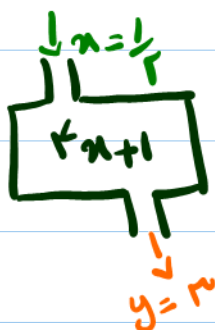
یک خروجی صادر دارد. البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند

اگر n مخفی از دامنه تابع f و x خودی این تابع n باشد، می‌نویسیم $y = f(n)$

به عبارتی که داشتن تابع روی و دوری انجام می‌دهد تا خودی را تحول دهد، ضابطه تابع می‌گویند.



مثال: اگر خودی داشتن تابع $f(n) = 4n + 1$ عدد ۳ باشد، دوری آن چه عددی خواهد بود؟



$$3 = 4n + 1 \Rightarrow 3 - 1 = 4n$$

$$\Rightarrow 2 = 4n \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

جمع بندی:

- برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه هم دامنه ضابطه تابع داده شده باشد

- اگر هم دامنه داده نشده باشد فقط ضابطه و دامنه را داشته باشیم، می‌توانیم

هم دامنه را هر مجموعه‌ای که شامل برد باشد در نظر بگیریم.

- اگر دامنه داده نشده باشد، بزرگترین مجموعه‌ای که اعضای آن را بتوانیم به جای n

قرار دهیم و خودی و تحول بگیریم، دامنه در نظر بگیریم.

تساوی دو تابع :

دو تابع f و g با هم برابرند هرگاه :

$$D_f = D_g \quad (\text{دوم})$$

ب) برای هر x از دامنه یکان داشته باشیم $f(x) = g(x)$.

به عبارت دیگر برای هر x ورودی یکان، خروجی هاهم یکی باشد.

مثال : در هر قسمت تساوی دو تابع را بررسی کنید.

$$f = \{(-2, 7), (\underline{3}, 7), (4, 0)\} \quad (\text{دوم})$$

$$D_f = D_g = \{-2, 3, 4\} \rightarrow f \neq g$$

$$g = \{(-2, 7), (4, 0), (\underline{3}, 4)\}$$

$$f(3) \neq g(3) \quad \text{دوم}$$

$$\text{ب) } f(x) = 4x - 1, \quad g(x) = \frac{1x - 2}{2} = 2\left(\frac{4x - 1}{2}\right) = 4x - 1$$

$$f = g$$

$$\text{ج) } \begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \end{cases}$$

زیرا مقادیر هایشان نه

$$f \neq g$$



$$\Rightarrow \begin{cases} f: [0, r] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = rx - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g: (0, r) \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = rx - 1 \end{cases}$$

$D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$: دائمه جابر ارنجيت

$$\Rightarrow \begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) \\ f(x) = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{rx+r}{r} = \frac{r(x+1)}{r} = x+1 \end{cases}$$

$$f = g$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x}{x}$$

$$g(x) = 1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

جلسه دوم : حل تمرین صفحه ۴۲ و ۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

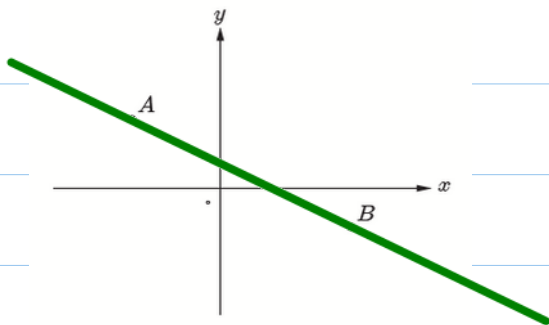
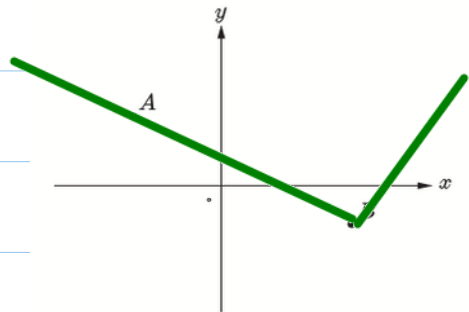
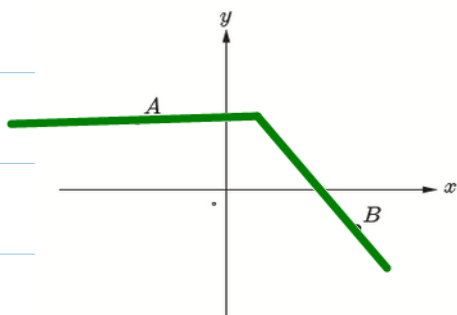
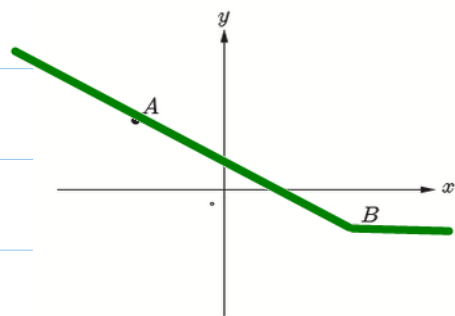
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱ در صفحه مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟ بی‌شماره



۲ کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم‌دامنه تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم‌دامنه تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است.

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $[0, 3]$ است.

$$f = \{(1, 2), (2, 5)\} \quad D_f = D_g = \{1, 2\}$$

$$g = \{(1, 5), (2, 2)\} \quad R_f = R_g = \{2, 5\}$$

الف) نادرست مثل نقض

$$f(1) \neq g(1), f(2) \neq g(2) \Rightarrow f \neq g$$

ب) درست است. هم دامنه تابع هر معبره شامل بر یا هوز برد است.

پ) غلط است. بر زیر معبره هم دامنه است.

$$\left\{ \begin{array}{l} f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ y = 2\sqrt{x} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ y = 2x - 1 \end{array} \right\}$$

۳) تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ y = x^2 \end{array} \right\}$$

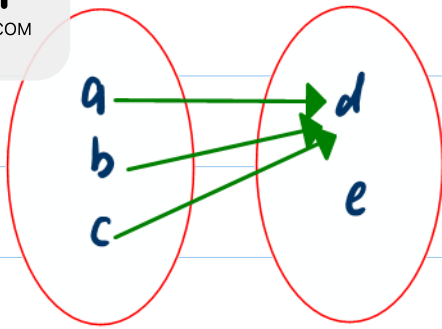
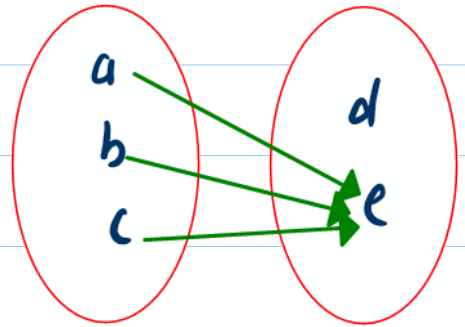
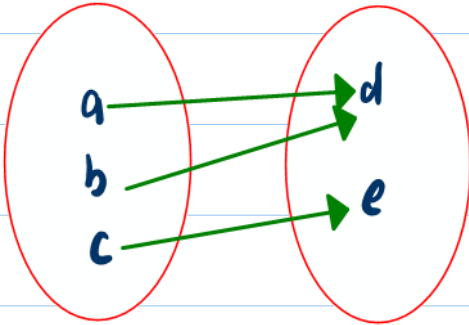
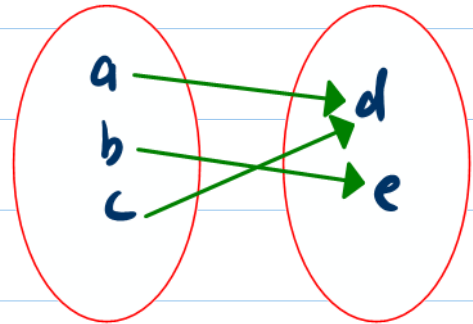
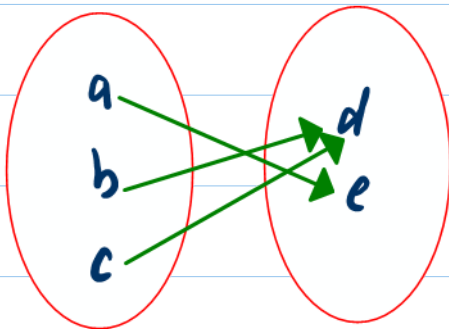
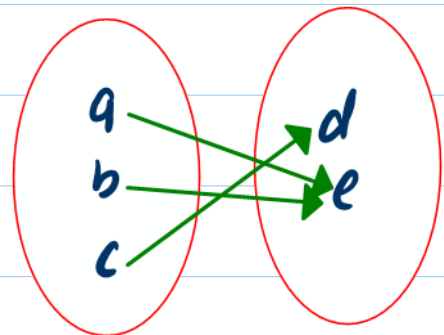
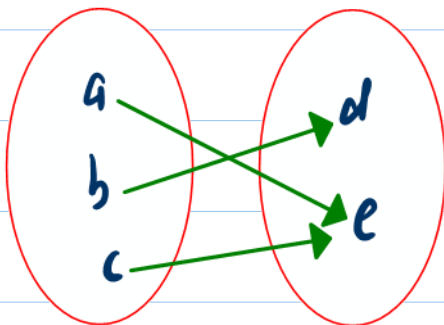
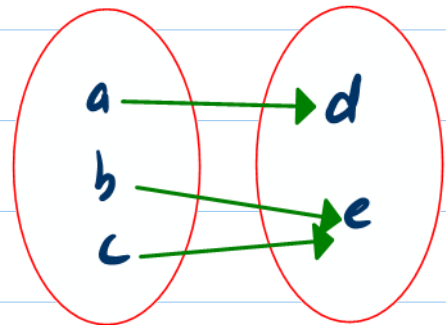
بیشتر، تابع و صبر دارد.

۴) همه تابع های از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ را بنویسید (از نمودار پیکانی کمک بگیرید).

نکته: مقدار توابع از یک معبره m عنصری به یک معبره n عنصری برابر n^m است.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array} = 2^3 = 8$$

اصل ضرب



۵ تابع های مساوی را مشخص کنید.

✓ $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{cases}$

$\begin{cases} r: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ r(a) = 5a \end{cases}$

✓ $\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 5x \end{cases}$

✓ $\begin{cases} s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s(a) = 5a \end{cases}$

✓ $\begin{cases} h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \end{cases}$

$\begin{cases} t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = 5x \end{cases}$

$f = h$

$g = s$

۱، ۲، ۳ هیچ تعجبی برادر نیستند.

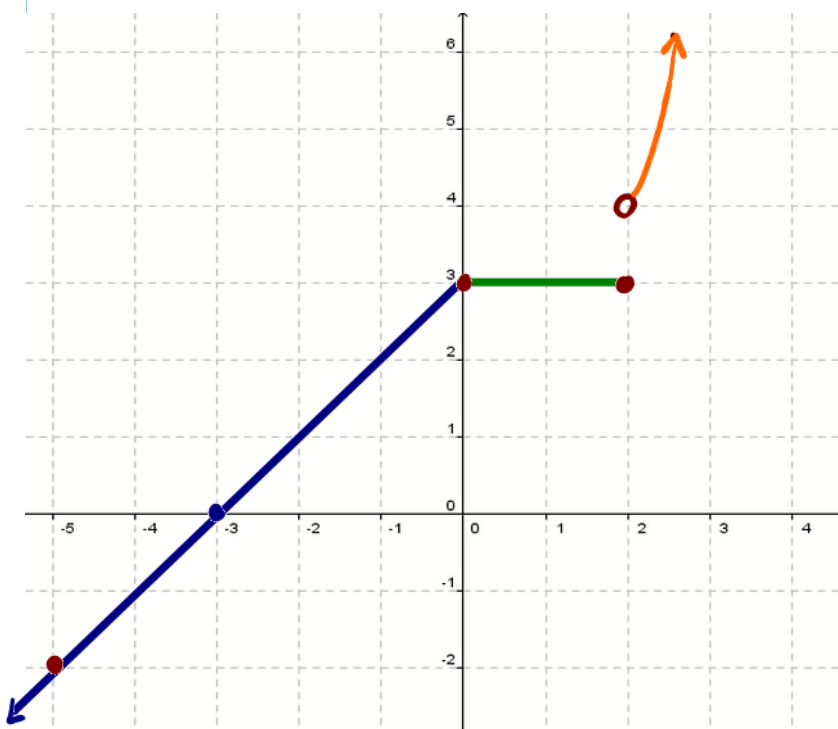
۶ تابع f در همه شرایط زیر صدق می کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه ای به طول ۳- قطع می کند.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x+3 & x < 0 \end{cases}$$

(۵)

۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می توان طول قد یک انسان را برآورد کرد:

$$M(x) = 2/89x + 70/64$$

تابع خطی برای مردان

$$F(x) = 2/75x + 71/48$$

تابع خطی برای زنان

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

$$\text{الف)} \quad \mu(35) = 2,89 \times 35 + 70,64 = 101,15 + 70,64 = 171,79 \text{ cm}$$

$$\text{ب)} \quad 185 = 2,89x + 70,64 \Rightarrow 185 - 70,64 = 2,89x$$

$$x = \frac{114,36}{2,89} \approx 39,57 \text{ cm}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس دوم : انواع تابع

جلسه سوم : صفحات ۴۴ تا ۴۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱۱ تابع گویا :

اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد

تابع باصداغه $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ و دامنه $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ تابع گویا

می‌گوئیم.

به عبارت دیگر دامنه توابع گویا = اعداد حقیقی منهای ریشه‌های مخرج

$$D_f = \mathbb{R} - \{ \text{اعدادی که مخرج را صفر می‌کند} \}$$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{2x-1}{\omega x+3}$

$$\omega x + 3 = 0 \Rightarrow \omega x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{\omega}$$

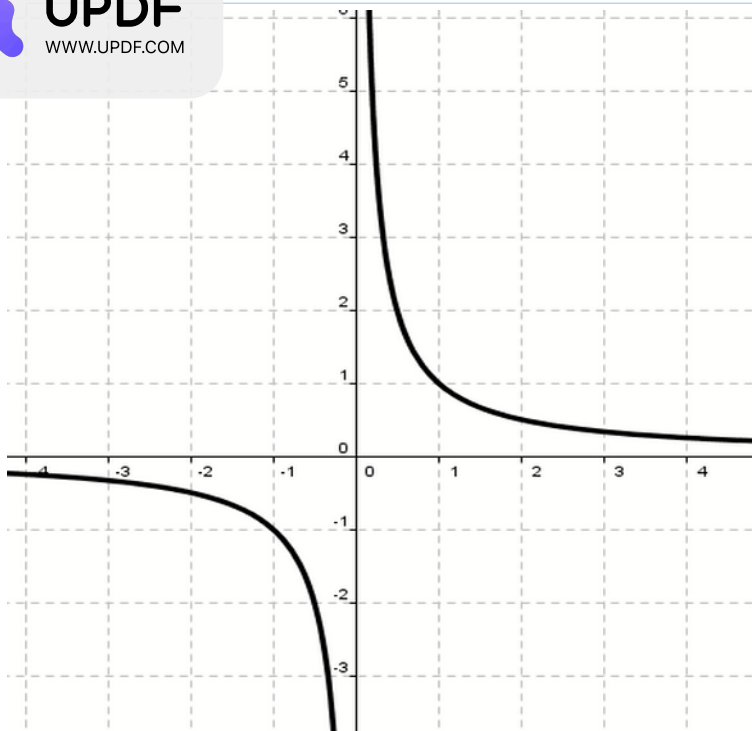
$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{\omega} \right\}$$

ب) $g(x) = \frac{x}{2x^2-3x+1}$

$$2x^2-3x+1=0$$

$$2-3+1=0 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\}$$



$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ متوار تابع}$$

۱۲) تابع ریشه نام :

الف) اگر n عدد طبیعی و زوج باشد به تابعی که به هر عدد نامنفی، ریشه n ام نامنفی آن

رابطت می دهد تابع ریشه n ام می گوئیم.

ب) اگر n عدد طبیعی و فرد و مخالف n باشد، به تابعی که به هر عدد حقیقی ریشه n ام

آن را نسبت می دهد تابع ریشه n ام می گوئیم.

$$n \text{ زوج} : g(x) = \sqrt[n]{f(x)} \rightarrow D_g = D_f$$

$$n \text{ زوج} : g(x) = \sqrt[n]{f(x)} \rightarrow D_g = \{x \in D_f \mid f(x) \geq 0\}$$

به عبارت دیگر دامنه توابع رادیکالی با فرض حزن همان دامنه تابع زیر رادیکال است و

برای یافتن دامنه توابع رادیکالی با فرض زوج، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر

قرار می دهیم و نامعادله حاصل را حل می کنیم.

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{1-2x} \quad 1-2x \geq 0 \rightarrow -2x \geq -1 \xrightarrow{:(-2)} x \leq \frac{1}{2}$$

$$D_f = (-\infty, \frac{1}{2}]$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x-4}} \quad D_g = D_{\frac{2x}{x-4}} \rightarrow D = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2x+4}}$$

$$\frac{1-x}{2x+4} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 1-x=0 \rightarrow x=1 \\ 2x+4=0 \rightarrow x=-2 \end{cases}$$

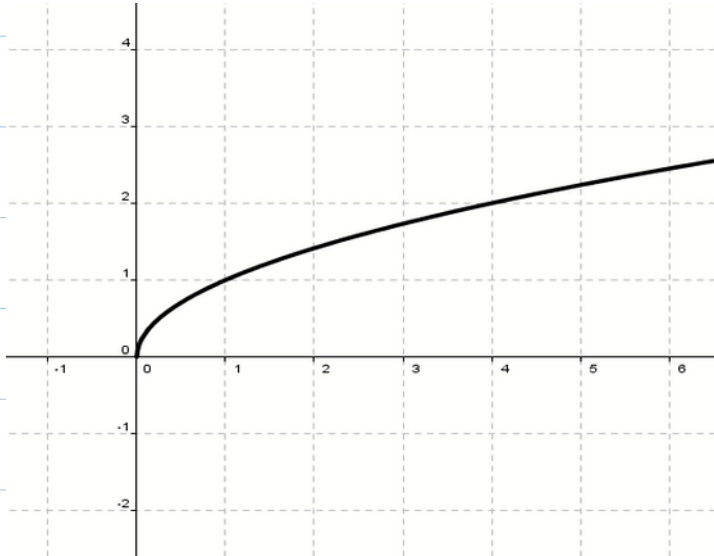
x	-2	1	
$1-x$	+	+	-
$2x+4$	-	+	+
$\frac{1-x}{2x+4}$	-	+	-

2

$$D_h = (-2, 1]$$

منوار تابع راکلی (رشته دوم مثبت)

منوار تابع $y = \sqrt{x}$ به صورت زیر است :



در ریاضی با قوانین انتقال برای رسم منوارها آشنا شوید. این قوانین را برای تابع

راکلی به کار می بریم :

الف) $y = \sqrt{x} + k$:
 - $k > 0$: منوار k واحد سمت بالا
 - $k < 0$: منوار k واحد سمت پایین
 انتقال عمودی

ب) $y = \sqrt{x+k}$:
 - $k > 0$: منوار k واحد سمت چپ
 - $k < 0$: منوار k واحد سمت راست
 انتقال افقی

ج) $y = -\sqrt{x}$: منوار مثبت به معبر y ها قرینه می شود. (انعکاس)

د) $y = \sqrt{-x}$: منوار مثبت به محور x ها قرینه می شود. (انعکاس)

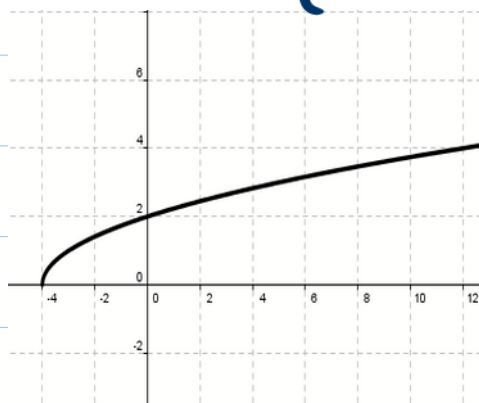
نکته: برای رسم تابعی به صورت $y = a\sqrt{bx+c} + d$ از دامنه و نقطه می‌توانیم

می‌گیریم (درجه بان ۲ با ذکر قاعده‌های کمی این نوع تبدیل‌ها بیشتر بررسی می‌شود)

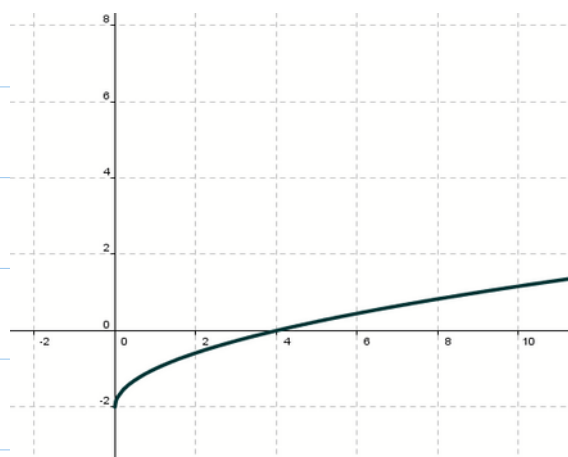
درجه بان ۱ به زیر همین نکته اکتفا می‌کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = \sqrt{x+4}$
انتقال افقی ۴ واحد به چپ

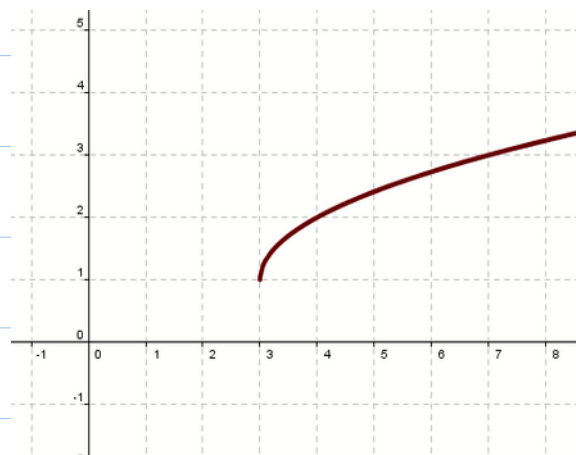


ب) $y = \sqrt{x} - 2$
انتقال عمودی ۲ واحد به پایین



ج) $y = 1 + \sqrt{x-3}$

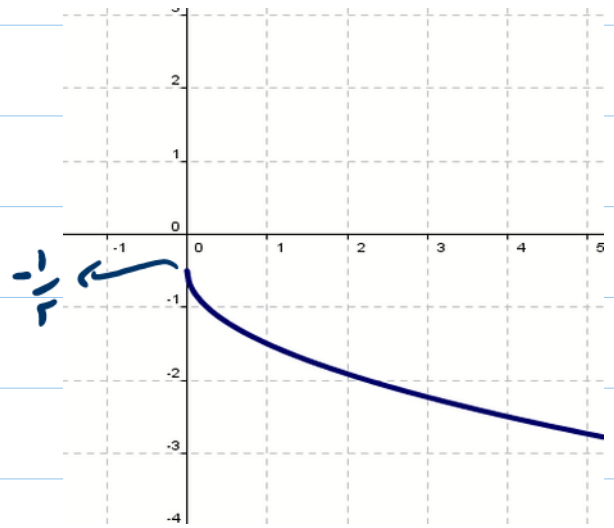
انتقال عمودی ۱ واحد به بالا
انتقال افقی ۳ واحد به راست





$$y = -\sqrt{x} - \frac{1}{x}$$

انتقال محوری به یک پاشی
دفعات به قدر x صا

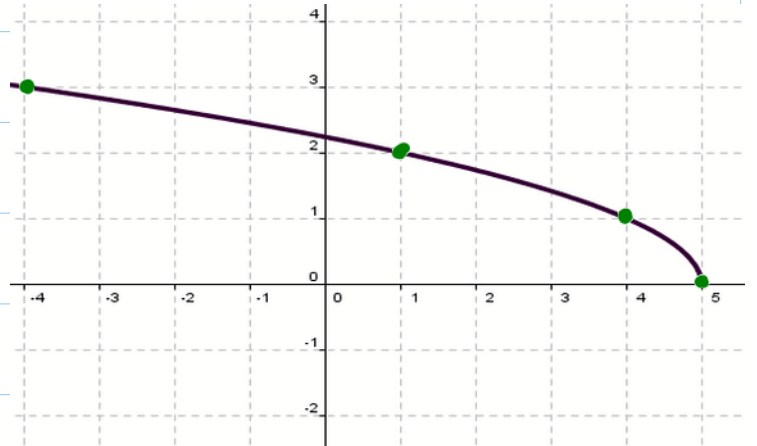


$$y = \sqrt{-x+5}$$

$$D: -x+5 \geq 0 \rightarrow -x \geq -5$$

$$\div (-1) \rightarrow x \leq 5$$

x	-4	1	4	5
y	3	2	1	0

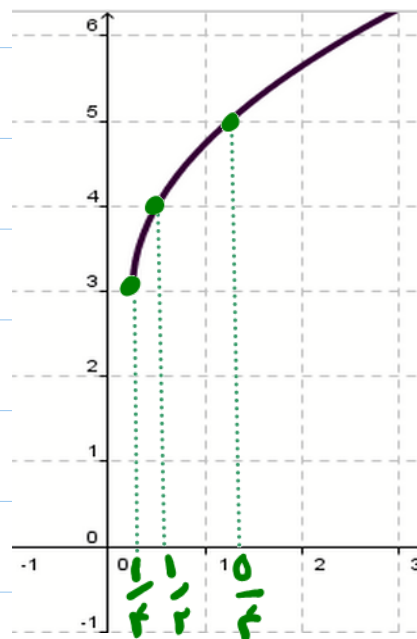


مثال: نمودار تابع $y = \sqrt{x-1} + 3$ را رسم کنید.

$$D: x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$\rightarrow x \geq \frac{1}{x}$$

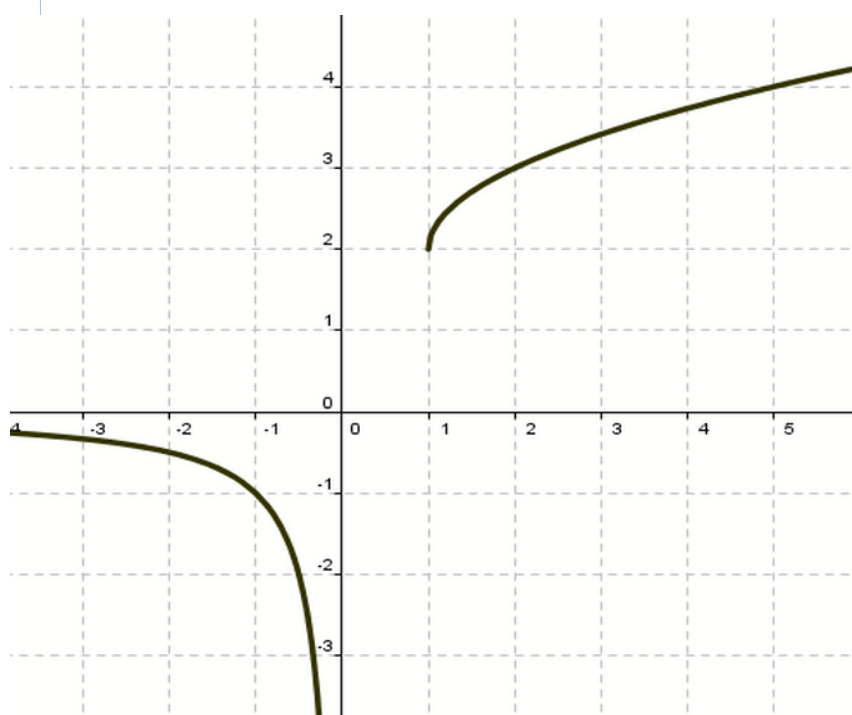
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$
y	3	4	5



یادآوری: توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند، توابع متعدی

یا چند ضابطه‌ای نامیده می‌شوند.

مثال: معزدار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ \sqrt{x-1} + 2 & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و بردار آن را تعیین کنید.



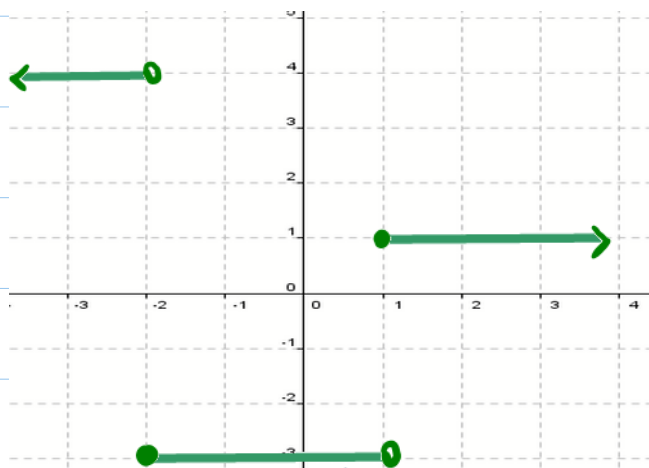
$$D = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

$$R = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$$

تذکر: اگر در توابع چند ضابطه‌ای، همه ضابطه‌ها تابع ثابت باشند (یعنی عددی که معزدارش خط افقی

می‌شود) آن را تابع **پله‌ای** می‌نامند.

مثال: معزدار تابع $y = \begin{cases} 4 & x < -2 \\ -3 & -2 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید.



قبل از اینکه آخرین نوع توابع خطی توابع جزء صحیح را ببینیم به نکته ای در باره تشخیص
تابع بودن یا نبودن یک رابطه از روی ضابطه اشاره کنیم.

نکته: رابطه یا تابع

فرض کنید رابطه ای بین x و y به صورت یک سادی داریم. در این صورت y تابعی
از x است اگر و فقط اگر به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد که در
سادی داده شده صدق کند.

برای تشخیص تابع بودن یا نبودن یک رابطه سعی می کنیم y را بر حسب x بدست آوریم
و نشان دهیم که تابع هست یا خیر. روش دیگر استفاده از مثال نقض است.

مثال: کدام یک از معادلات زیر را به صورت تابعی از x مشخص می کنند؟

مثال نقض: $y=0$ و $y=1 \rightarrow x=2$ تابع نیست
 $y - \sqrt{y} = x - 2$ (الف)

(ب) $y^3 - 3y^2 + 3y = x$
 $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = x - 1 \rightarrow (y-1)^3 = x-1 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} y-1 = \sqrt[3]{x-1}$
 $y = \sqrt[3]{x-1} + 1$ تابع هست

(پ) $y^2 + x = 4$
 $y^2 = 4 - x \xrightarrow{\sqrt{}} |y| = \sqrt{4-x} \rightarrow y = \pm \sqrt{4-x}$
 $x=1 \rightarrow y = \pm \sqrt{3}$ تابع نیست

(ت) $|x| + |y| = 1$
 مثال نقض: $x=0 \rightarrow |y|=1 \rightarrow y = \pm 1$ تابع نیست

(ث) $y^2 + 4x^2 = 4xy$
 $y^2 - 4xy + 4x^2 = 0 \rightarrow (y-2x)^2 = 0 \rightarrow y-2x=0$
 $y=2x$ تابع است

(ج) $|x| + (y-1)^2 = 0$

جمع درجدارت مثبت صفر شده است پس هر دو صفر اند

$|x|=0 \rightarrow x=0$

$(y-1)^2=0 \rightarrow y=1$

این رابطه فقط شامل یک نقطه است پس تابع است
 $(0, 1)$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس دوم : انواع تابع

جلسه چهارم : صفحات ۴۹ تا ۵۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

جزء صحیح

تعریف ۱) جزء صحیح هر عدد حقیقی بزرگترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچکتر یا با

آن برابر باشد.

تعریف ۲) اگر عدد حقیقی x بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ باشد، جزء صحیح

x را برابر k تعریف کرده و می نویسیم: $[x] = k$. جزء صحیح عدد صحیح

با خودش برابر است.

تعریف ۳) برای هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از x

بزرگتر نباشد. جزء صحیح x را با بهار $[x]$ نمایش می دهیم.

$$[2,2] = 2$$

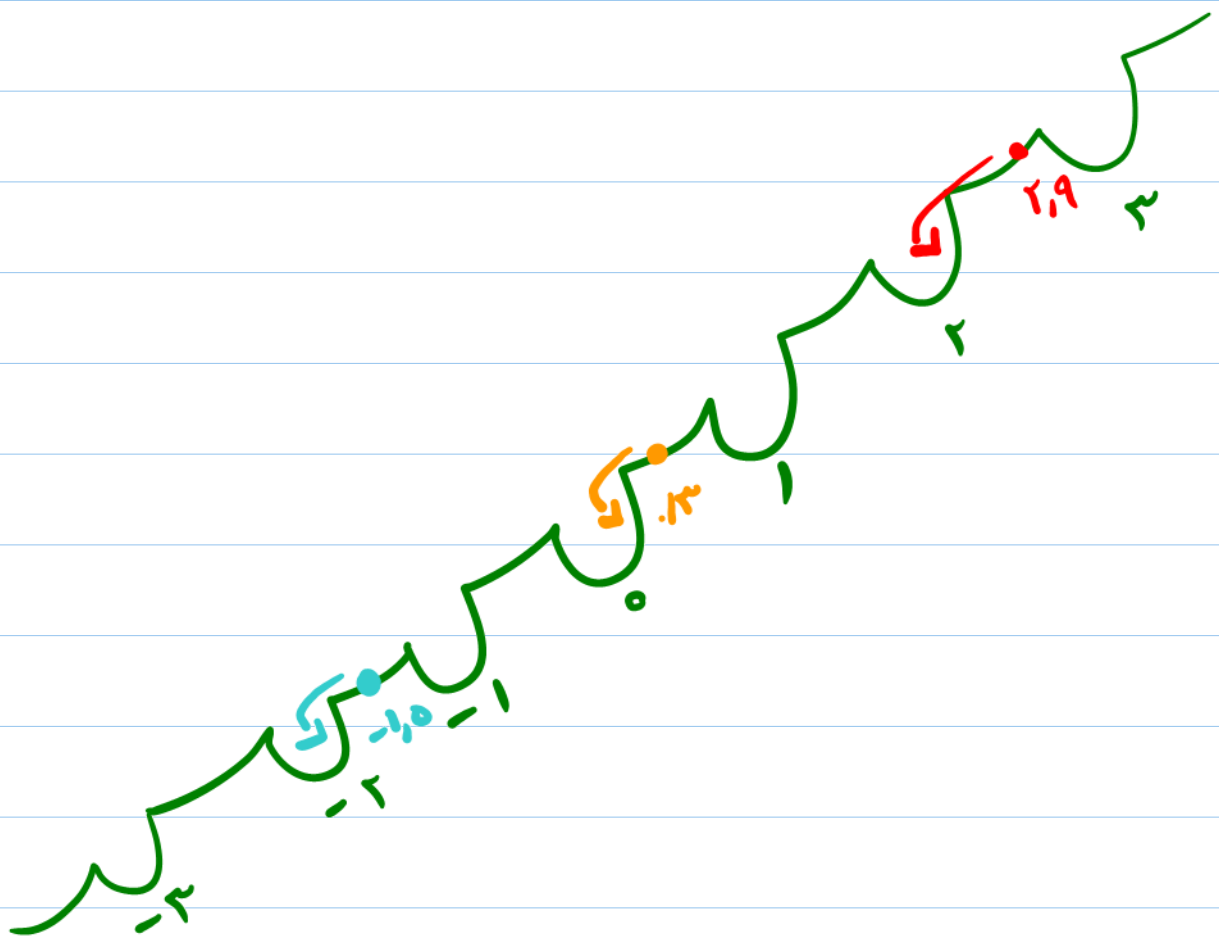
مثال:

$$[-5] = -5$$

$$[-3,9] = -3$$

نکته: برای یافتن جزو صحیح یک عدد حقیقی می توان از سطح شیب دار چاله دار زیر استفاده کرد.

در این شکل اعداد صحیح چاله ها و اعداد غیر صحیح روی سطح شیب دار و بین چاله ها قرار می گیرند. با توجه به شیب این سطح، واضح است اگر توی را در موقعیت یک عدد روی سطح قرار دهیم، توپ در این چاله می افتد. عدد صحیح مربوط به چاله همان جزو صحیح عدد است.



مثال: چند صحیح‌های زیر را ببینید.

$$\text{الف) } \left[\frac{15}{4} \right] = [3,75] = 3$$

$$\text{ب) } [-1,4] = -2$$

$$\text{پ) } \left[\sqrt{2} \right] = 1 \quad \text{چون } 1,4 = \sqrt{2}$$

$$\text{ت) } \left[\frac{1}{3} \right] = 0$$

$$\text{ث) } [-1,7] = -1$$

$$\text{ج) } -10 < x < -9 \rightarrow [x] = -10$$

$$\text{ج) } [\sqrt[3]{71}] = 4 \rightarrow 4 < \sqrt[3]{71} < 5 \rightarrow 64 < 71 < 125$$

برخی از ویژگی‌های چند صحیح:

۱) اگر u عبارتی بر حسب x باشد از آنجا که $[u] = k$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$k \leq u < k+1$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\lceil \frac{1-4x}{3} \rceil = -2 \quad (\text{اگر})$$

$$\begin{aligned} -2 &\leq \frac{1-4x}{3} < -2+1 \xrightarrow{\times 3} -6 \leq 1-4x < -3 \xrightarrow{-1} -7 \leq -4x < -4 \\ \xrightarrow{\div (-4)} \frac{7}{4} &\geq x > 1 \rightarrow 1 < x \leq \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\text{ب. } \lfloor x^2+x \rfloor = -1$$

$$\begin{aligned} -1 \leq x^2+x < 0 &\rightarrow \begin{cases} -1 \leq x^2+x \rightarrow x^2+x+1 \geq 0 & (1) \\ x^2+x < 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1) x^2+x+1 \geq 0 \rightarrow \Delta = 1-4 \times 1 = -3 \rightarrow x^2+x+1 > 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(2) x^2+x < 0 \rightarrow x(x+1) < 0 \rightarrow x = 0, -1 \quad \frac{x}{x+1} + \frac{-1}{0} + \frac{0}{0} \rightarrow x \in (-1, 0)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -1 < x < 0$$

(۲) حاصل یک جزء صحیح همراه عددی صحیح است یعنی $[x] \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\text{اگر} \quad 2[x] - 7 = 0 \rightarrow 2[x] = 7 \rightarrow [x] = \frac{7}{2}$$

معادله جواب ندارد

$[x^2]$ عدد صحیح است. ۱ هم از آن کم شود

$$[x^2] - 1 = x$$

حاصل عدد صحیحی شود. چون این عبارت با x برابر است پس x هم صحیح و سرور می دانیم توان ردیم که عدد صحیح، عددی صحیح است پس $[x^2] = x^2$

$$x^2 - 1 = x \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \rightarrow x = 3, -2$$

۳ اگر عدد صحیح k در n جزو صحیح جمع یا تفریق شده باشد می توان آن را از جزو صحیح

خارج کرد یعنی:

$$[n+k] = [n] + k$$

$$[n] + [-n] = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{Z} \\ -1 & n \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad ۱۴$$

مثال: اگر x صحیح نباشد، حاصل $[x^2-7] + [4-x^2]$ را به دست آوریم.

$$[x^2] - 7 + 4 + [-x^2] = [x^2] + [-x^2] - 3$$

$$x = \frac{1}{3} \rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \notin \mathbb{Z}$$

$$x = \sqrt{5} \rightarrow x^2 = 5 \in \mathbb{Z}$$

$$[x^2] + [-x^2] = \begin{cases} 0 & x^2 \in \mathbb{Z} \\ -1 & x^2 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$[x^2] + [-x^2] - 3 = \begin{cases} -3 & x^2 \in \mathbb{Z} \\ -4 & x^2 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۱۳ تابع جزء صحیح :

به توابی که متغیرش داخل جزء صحیح باشد ، تابع جزء صحیح می گوئیم .

ساده ترین تابع جزء صحیح که به هر عدد جزء صحیحش را نسبت می دهد تابع

$$y = [x] \text{ است.}$$

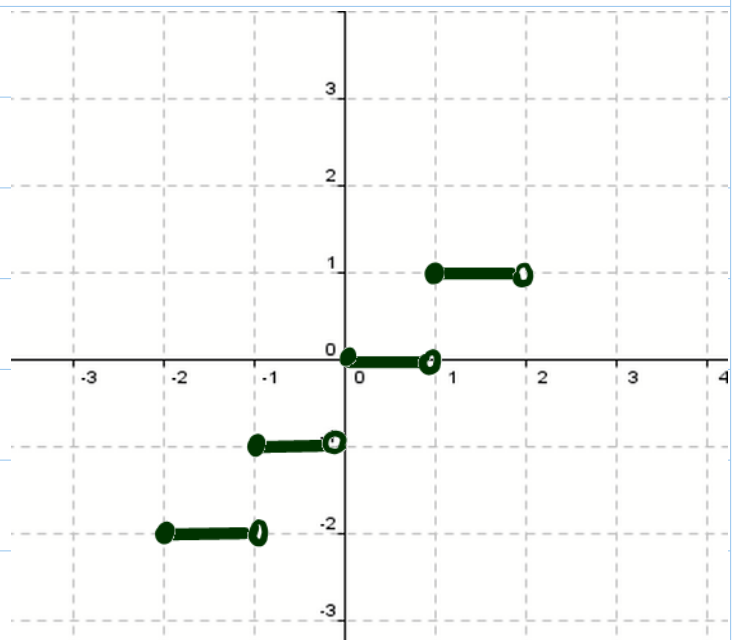
مثال : نمودار تابع $y = [x]$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم کنید.

پله اول : $-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = [x] = -2$

پله دوم : $-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = -1$

پله سوم : $0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$

پله چهارم : $1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1$



رسم نمودار توابع به صورت $f(x) = [ax] + k$ در یک بازه

ابتدا طول پله را از رابطه $\frac{1}{|a|}$ می یابیم. پس از ابتدای بازه داده شده

پله ها را تشکیل داده و برای هر پله مقدار y را حساب می کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را در بازه داده شده رسم کنید.

$$f(x) = [2x] + 1 \quad [-1, 1]$$

$$\frac{1}{|a|} = \frac{1}{2}$$

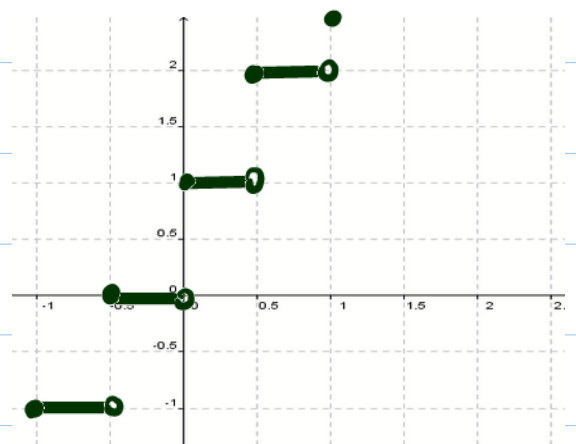
$$x^2 \rightarrow -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4} \rightarrow -2 < 2x < -1 \rightarrow y = [2x] + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$x^2 \rightarrow -\frac{1}{4} < x < 0 \rightarrow -1 < 2x < 0 \rightarrow y = -1 + 1 = 0$$

$$x^2 \rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \rightarrow 0 \leq 2x < 1 \rightarrow y = 0 + 1 = 1$$

$$x^2 \rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \rightarrow 1 \leq 2x < 2 \rightarrow y = 1 + 1 = 2$$

$$x = 1 \rightarrow y = [2 \times 1] + 1 = 2 + 1 = 3$$



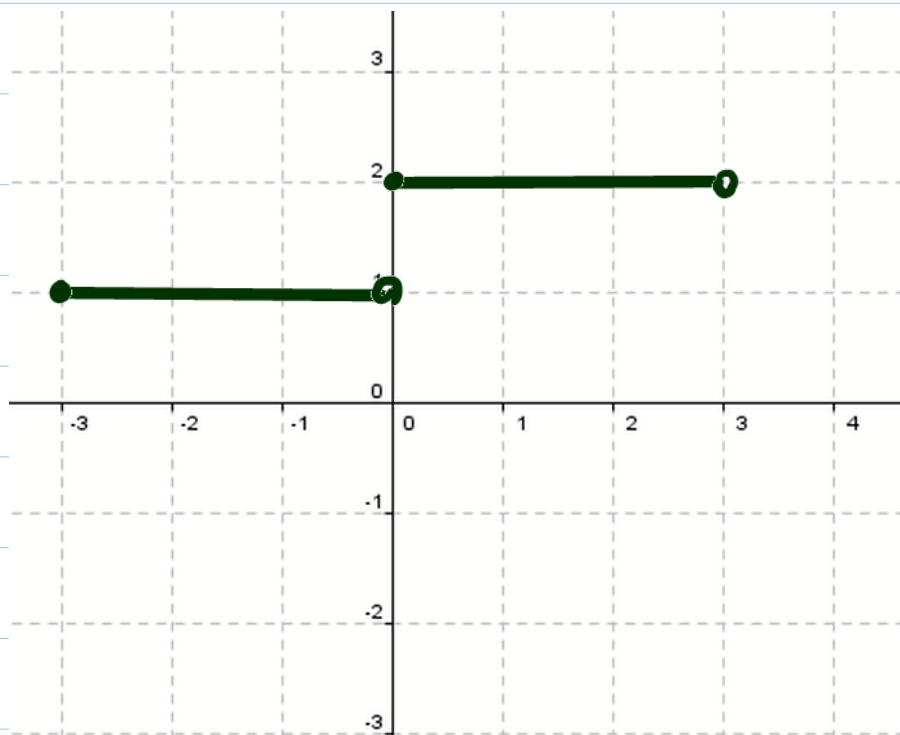


$$y(x) = \left\lfloor \frac{1}{3}x + 2 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{3}x \right\rfloor + 2 \quad [-3, 3)$$

$$\text{مقدار} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

$$\text{په درج ۱: } -3 \leq x < 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} -1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \rightarrow y = \left\lfloor \frac{1}{3}x \right\rfloor + 2 = -1 + 2 = 1$$

$$\text{په درج ۲: } 0 \leq x < 3 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \rightarrow y = 0 + 2 = 2$$



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس دوم : انواع تابع

جلسه پنجم : حل تمرین صفحات ۵۲ و ۵۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

الف) $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$

ب) $f(x) = \frac{-3x}{x^2+1}$

پ) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-12}$

ت) $f(x) = \sqrt{3x+1}$

ث) $f(x) = 2\sqrt{x-3}$

ج) $f(x) = \sqrt{8-x}$

الف) $2-x=0 \rightarrow x=2 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{2\}$

ب) $x^2+1 \neq 0 \rightarrow D = \mathbb{R}$

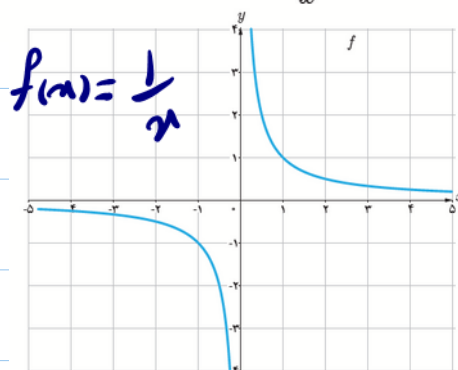
پ) $x^2+x-12=0 \rightarrow (x+4)(x-3)=0 \rightarrow x=-4, 3 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{-4, 3\}$

ت) $3x+1 \geq 0 \rightarrow 3x \geq -1 \rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \rightarrow D = [-\frac{1}{3}, +\infty)$

ث) $x \geq 0 \rightarrow D = [0, +\infty)$

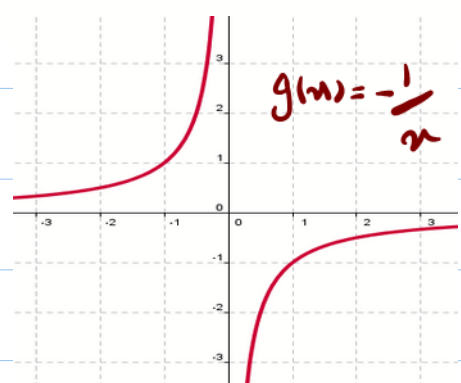
ج) $8-x \geq 0 \rightarrow 8 \geq x \rightarrow x \leq 8 \rightarrow D = (-\infty, 8]$

۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می توان نمودار تابع $g(x) = -\frac{1}{x}$ را رسم کرد.



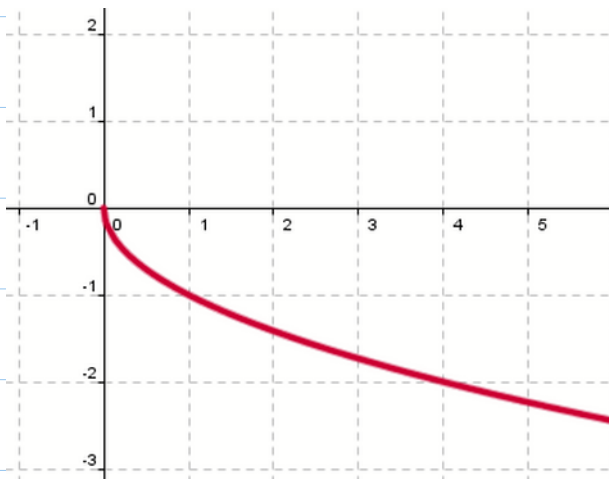
شماره ها ناصیه اول رسم

نمودار را نسبت
به محور مختصات
قرینه می کنیم



شماره ها ناصیه دوم رسم

۳ نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.



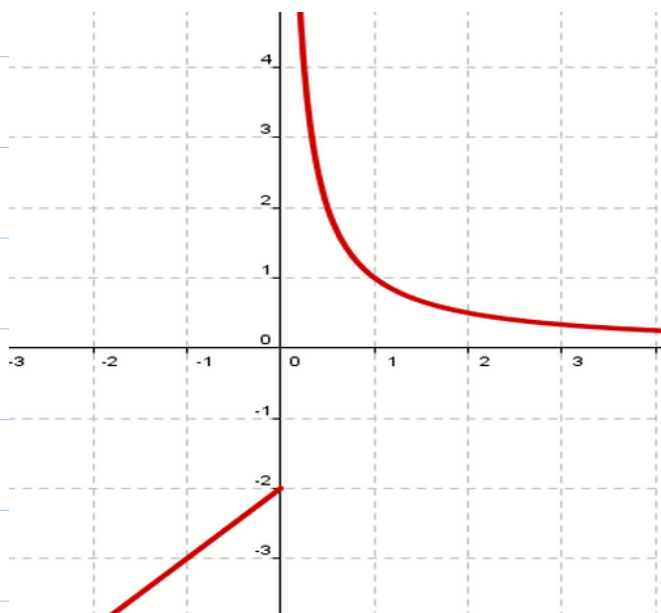
منظور از تابع $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور x ها

مقنیه می کشیم.

$$y = -\sqrt{x}$$

۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$$

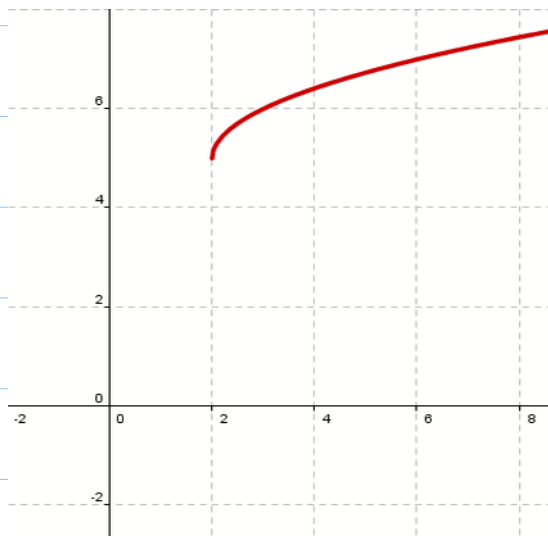


$$D = \mathbb{R}$$

$$R = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$$



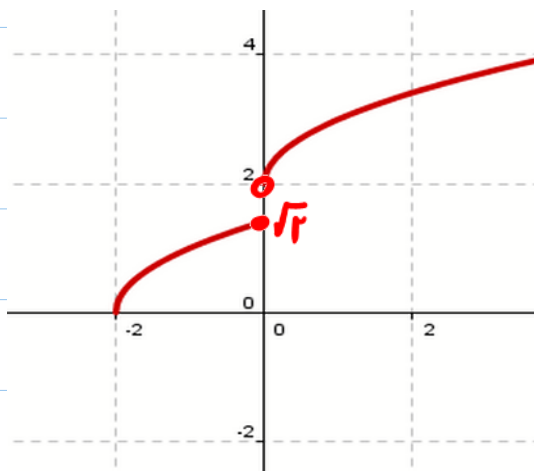
$$ب) f(x) = \sqrt{x-2} + 5$$



$$D = [2, +\infty)$$

$$R = [5, +\infty)$$

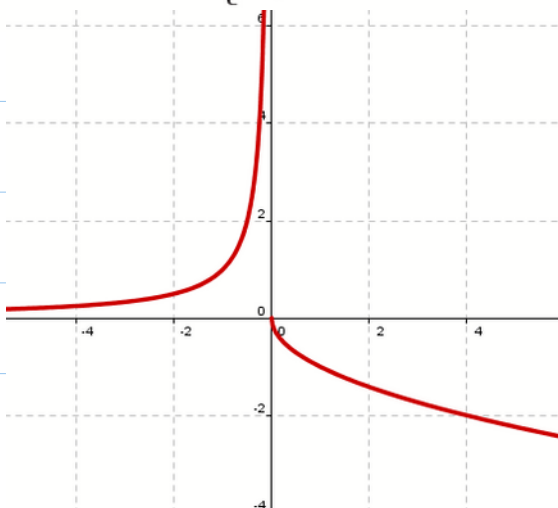
$$ب) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2 & x > 0 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$



$$D = [-2, +\infty)$$

$$R = [0, \sqrt{2}] \cup (2, +\infty)$$

$$ت) f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$



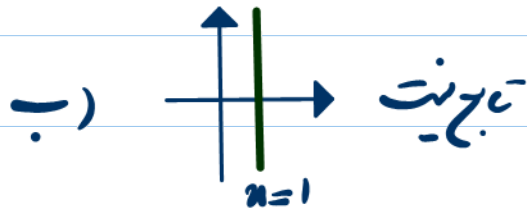
$$D = \mathbb{R}$$

$$R = \mathbb{R}$$

۵ کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می کند؟

الف) $3x + 2y = 12$ ب) $x = 1$ پ) $y = -2$ ت) $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$ ث) $y^2 = x^2$ ج) $y = |x|$

تابع خطی (الف)



پ) تابع ثابت

ت) $x=0$ $\begin{cases} y=0+3=3 \\ y=0-1=-1 \end{cases}$ تابع نیست

ث) $x=1 \rightarrow y^2=1 \rightarrow y=1, -1$ تابع نیست

ج) تابع قدر مطلق

۶ هزینه پاک سازی x درصد از آلودگی های شهری و صنعتی از رودخانه ای، به وسیله تابع $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک سازی بر حسب میلیون تومان است. الف) هزینه پاک سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟ ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

الف) $f(50) = \frac{255 \times 50}{100-50} = \frac{255 \times 50}{50} = 255$

ب) $D = [0, 100)$



الف) $f(x) = [x] + 1$, $-2 \leq x < 3$

ب) $f(x) = [\frac{1}{2}x]$, $-4 \leq x < 4$

روش کلی برای رسم نمودار $y = [f(x)]$:

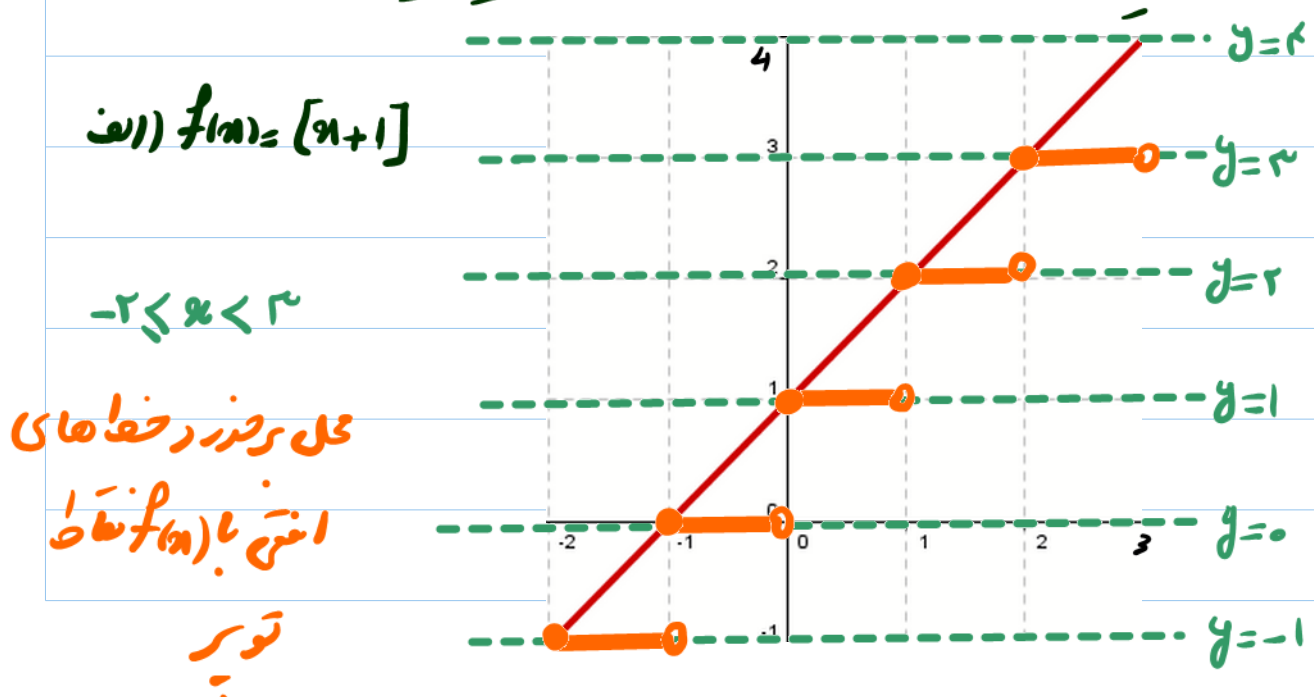
مرحله اول : نمودار تابع را بدون توجه به جزء صحیح رسم می‌کنیم.

مرحله دوم : خط‌های افقی با مقادیر صحیح یعنی $y = 0$, $y = \pm 1$, $y = \pm 2$, ...

که نمودار تابع $y = f(x)$ را قطع می‌کنند رسم می‌کنیم.

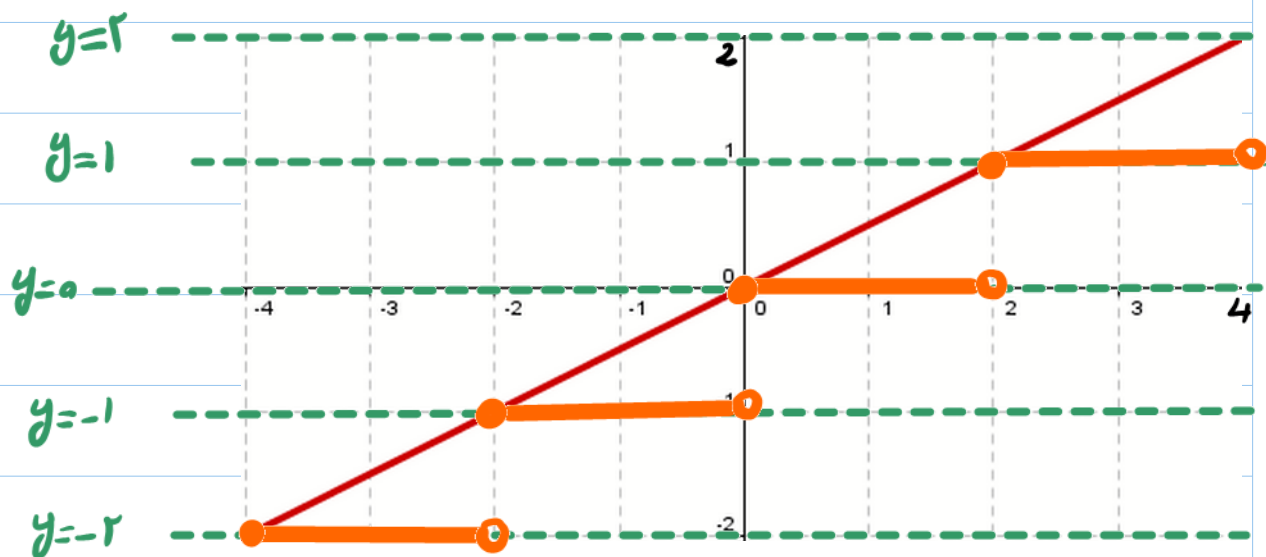
مرحله سوم : حال جزء صحیح را ردی این تابع اثر دهیم به این صورت که هر نقطه

که پس از خط افقی قرار دارد ردی خط پائین‌ترش می‌کند.



$$f(x) = \left\lceil \frac{1}{4}x \right\rceil$$

$$-4 \leq x < 4$$

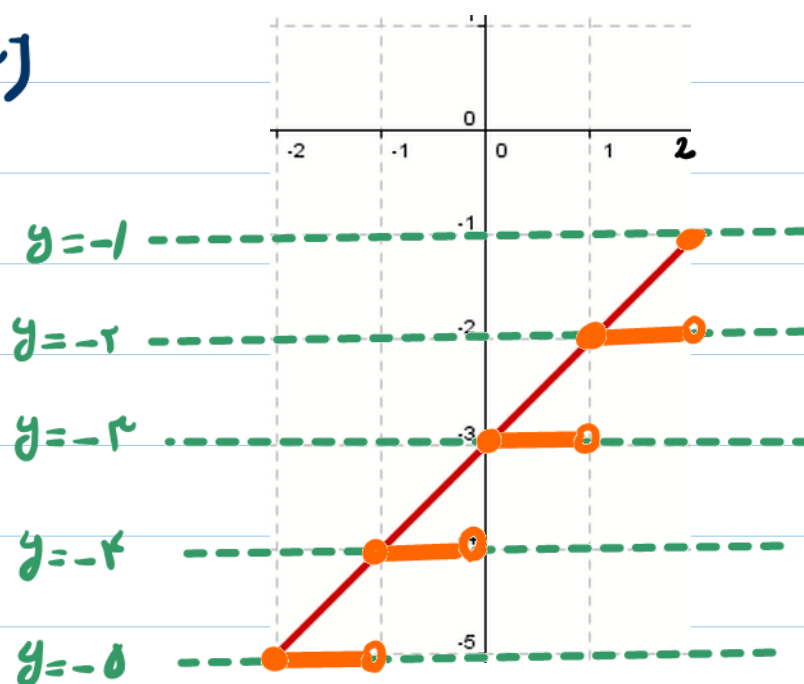


۸ نمودارهای دو تابع $y = [x-3]$ و $y = [x]-3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

$$y = [x-3] = [x] - 3$$

سندارهای یک هسته (دو تابع برابرند)

$$[-2, 2]$$





۹ اگر تعداد افرادی که طی یک مدت معین، به وسیله یک نوع ویروس آلوده می شوند با دستور $n(t) = \frac{9500t - 2000}{4+t}$ به دست آید که در آن $t > 0$ زمان برحسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده اند چقدر است؟
ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

$$\text{الف) } n(5) = \frac{9500 \times 5 - 2000}{4+5} = \frac{47500 - 2000}{9} = \frac{45500}{9} = 5055,5$$

۵۰۵۶ نفر

$$\text{ب) } \frac{5500}{1} = \frac{9500t - 2000}{4+t}$$

$$9500t - 2000 = 5500(4+t)$$

$$9500t - 2000 = 22000 + 5500t$$

$$9500t - 5500t = 22000 + 2000$$

$$4000t = 24000 \rightarrow t = \frac{24000}{4000} = 6$$

۶ ماه

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس سوم : وارون تابع

جلسه ششم : صفحات ۵۴ تا ۵۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع یک به یک :

تابع f را یک به یک می‌گوئیم به شرطی که دو عضو متمایز از دامنه به دو عضو متمایز در برد

نظر شوند. به عبارت دیگر f یک به یک است هرگاه به ازای هر دو عضو x و y از دامنه از

دامنه f عائد x و y داشته باشیم :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

بوده‌ی یک به یک بودن تابع در نمایش‌های مختلف آن :

۱) نمایش زوج مرتبی : زمانی یک به یک است که مولفه دوم مساری نداشته باشد. اگر

مولفه‌های دوم مساری داشت باید مولفه‌های اول هم برابر باشند.

$$f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 4), (5, 3), (4, 1)\}$$

$$g = \{(3, \frac{1}{4}), (9, 0), (4, 1), (5, 2)\}$$

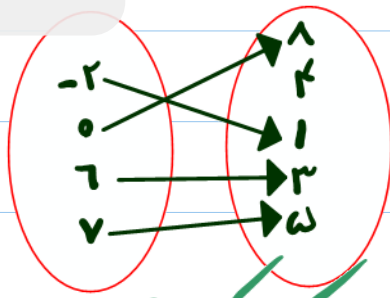
یک به یک نیست
یک به یک هست

مثال :

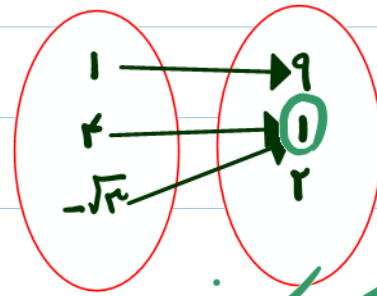
۲) نمایش نموداری : زمانی یک به یک است که به هر عضو دایره دوم (ست راست)

بیشتر از یک غلش وارد نشود.

مثال :



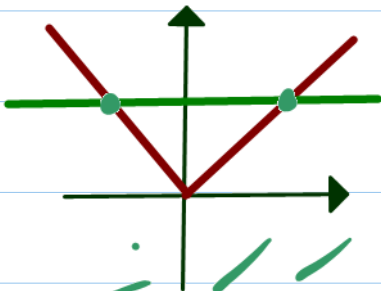
یک به یک نیست



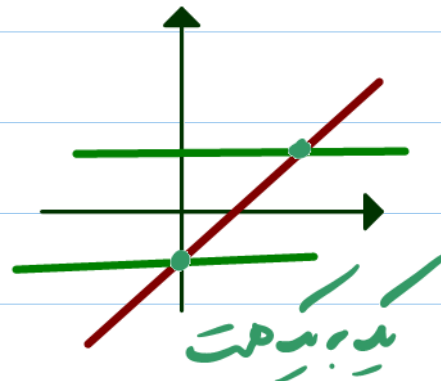
یک به یک نیست

۱۳) نمایش نموداری : زمانی یک به یک است که هر خط موازی محور ها حداکثر در یک نقطه

نمودار را قطع کند.



یک به یک نیست



یک به یک هست

مثال :

۱۴) نمایش داشتنی : زمانی یک به یک است که هر خطی فقط مربوط به یک عددی باشد به عبارت دیگر هر خطی نگه‌داری نداشته باشیم.



یک به یک نیست



یک به یک هست

مثال :

۱۵) نمایش جبری (ضابطه‌ای) : زمانی یک به یک است که برای هر دو عضو دخواه از دامنه f مانند

x_1 و x_2 :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

به عبارت دیگر یک به جای x در ضابطه تابع x_1 و یک بار x گذشته و یک بار x_1 قرار می دهیم. اگر به سادگی $x_1 = x_2$ رسیدیم آنگاه تابع یک به یک خواهد بود.

مثال:

الف) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + 1} = \sqrt{x_2^2 + 1} \xrightarrow{\text{مربع}} x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \xrightarrow{\sqrt{}} x_1 = x_2 \quad \text{یک به یک هست}$$

ب) $f(x) = x^2 - 4$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{}} |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \quad \text{یک به یک نیست}$$

مثال: اگر تابع: $f = \{(\underline{a^2}, \underline{1}), (\underline{4}, \underline{1}), (\underline{2a+b}, \underline{2}), (\underline{7}, \underline{2}), (a, b)\}$

یک به یک باشد a, b را بیابیم.

$$a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$$



$$a+b=7 \begin{cases} a=2 \rightarrow 2+b=7 \rightarrow b=5 \\ a=-2 \rightarrow -2+b=7 \rightarrow b=9 \end{cases}$$

تابع یک به یک نیست $a=2, b=5 \rightarrow f = \{(4,1), (6,2), (2,2)\}$

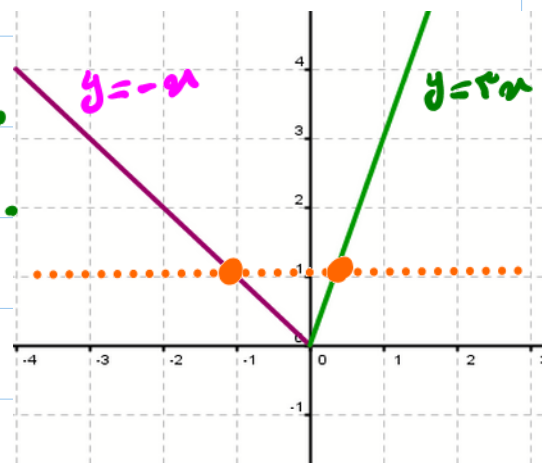
تابع یک به یک نیست $a=-2, b=9 \rightarrow f = \{(4,1), (6,2), (-2,1)\}$

مثال: کدامیک از توابع زیر یک به یک است؟ چرا؟

الف) $f(x) = x + 2|x|$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2x & x < 0 \\ x + 2x & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$$

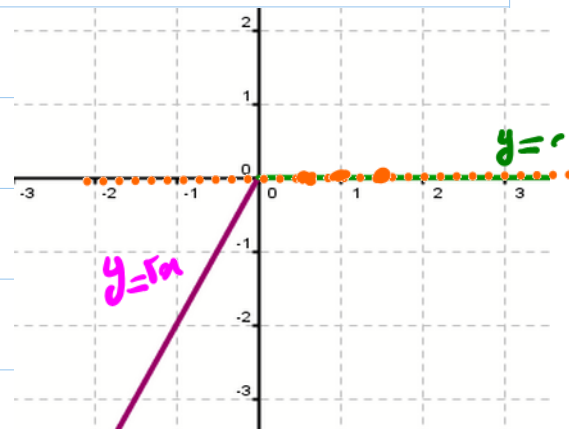
یک به یک نیست



ب) $f(x) = x - |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x - (-x) & x < 0 \\ x - x & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

یک به یک نیست





$$1) f(x) = x^2 - 2x^2$$

$$x=0 \rightarrow y=0$$

$$x=2 \rightarrow y = 2^2 - 2(2)^2 = 4 - 8 = 0$$

تابع یک به یک نیست

$$2) f(x) = x^2 + 3x$$

$$x=0 \rightarrow y=0$$

$$x=-3 \rightarrow y = 9 + 3(-3) = 0$$

تابع یک به یک نیست

$$3) f(x) = \frac{[x] + [-x]}{x}$$

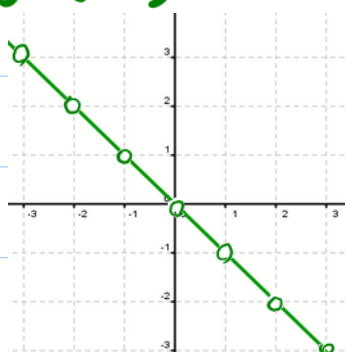
$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0 \rightarrow y = 0$$

$$2) f(x) = \frac{x}{[x] + [-x]}$$

$$D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$$[x] + [-x] = 0 \rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1 \rightarrow f(x) = \frac{x}{-1} \Rightarrow f(x) = -x$$



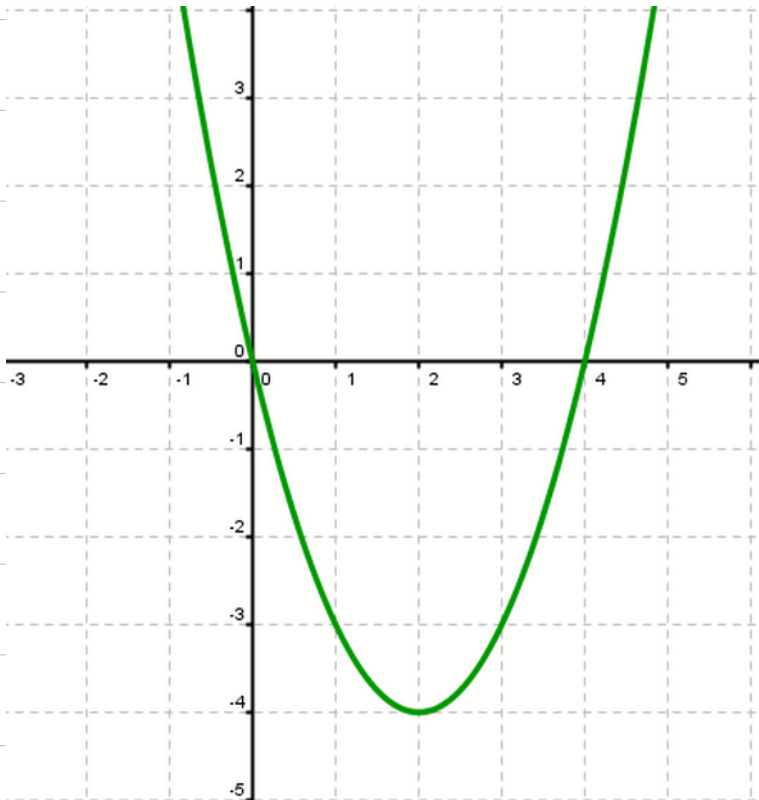
تابع یک به یک است.



نکته: می‌توانیم با محدود کردن دامنه، از یک تابع یک به یک تابعی یک به یک بسازیم.

مثال: ابتدا ثابت کنید تابع $f(x) = x^2 - 4x$ یک به یک نیست. سپس با محدود کردن دامنه

آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید.



خط‌های مرزی محدودها

و صد در صد که تابع را در

دو نقطه قطع می‌کنند پس تابع

یک به یک نیست.

برای تبدیل به یک به یک بازه ها
 $[0, 2] \cup [2, +\infty) \cup (-\infty, 2] \cup (2, +\infty)$

نکته: تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ با دامنه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یک به یک است.

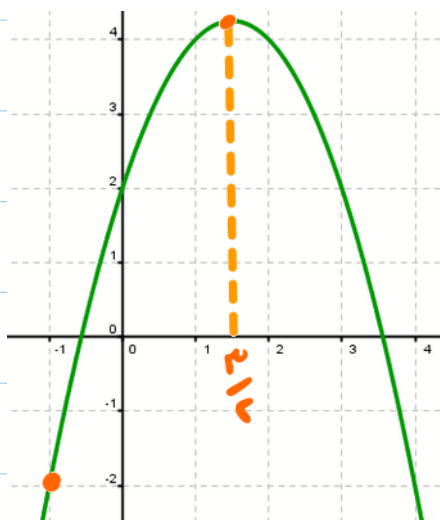


مثال: تابع $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ روی بازه $[-1, a]$ کجبه کجاست؟

راش سهمی

جبه کجاست؟

$$a = -\frac{3}{2(-1)} = \frac{3}{2}$$



مثال:

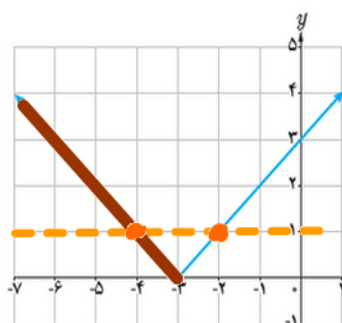
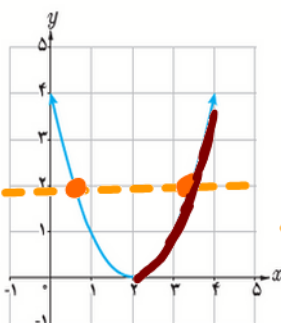
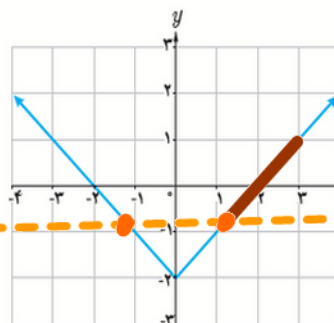
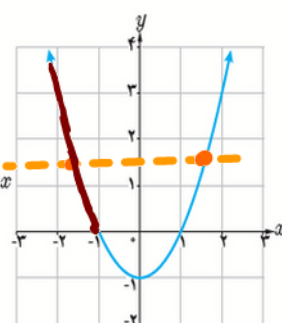
تابع های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y = |x+3|$

ب) $y = (x-2)^2$

پ) $y = |x|-2$

ت) $y = x^2 - 1$



$$D = (-\infty, -3]$$

$$D = [2, +\infty)$$

$$D = [0, 2]$$

$$D = (-\infty, -1)$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس سوم : وارون تابع

جلسه هفتم : صفحات ۵۷ تا ۶۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

وارون تابع :

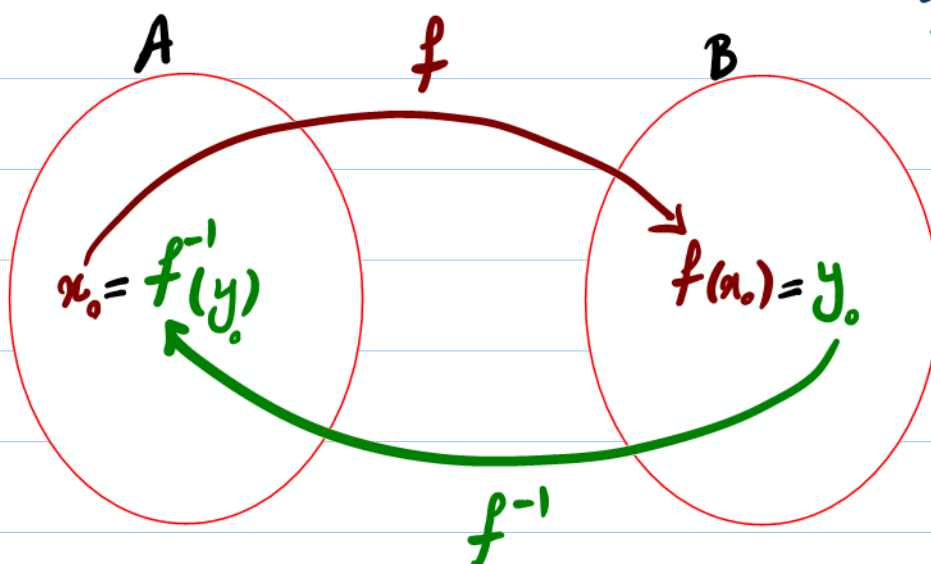
برای بدی تابع ، تابعی دیگر وجود دارد که عکس تابع اصلی را برگرداند و خودی را به ورودی تبدیل می کند . به چنین تابعی ، تابع معکوس یا تابع وارون می گویند .

تعریف : وارون تابع f رابطه ای است که در آن به ازای هر x در دامنه f ، به ورودی

مربوط می رسم . مثلاً اگر تابع f از دامنه A به B از بر می برد ، وارون تابع f

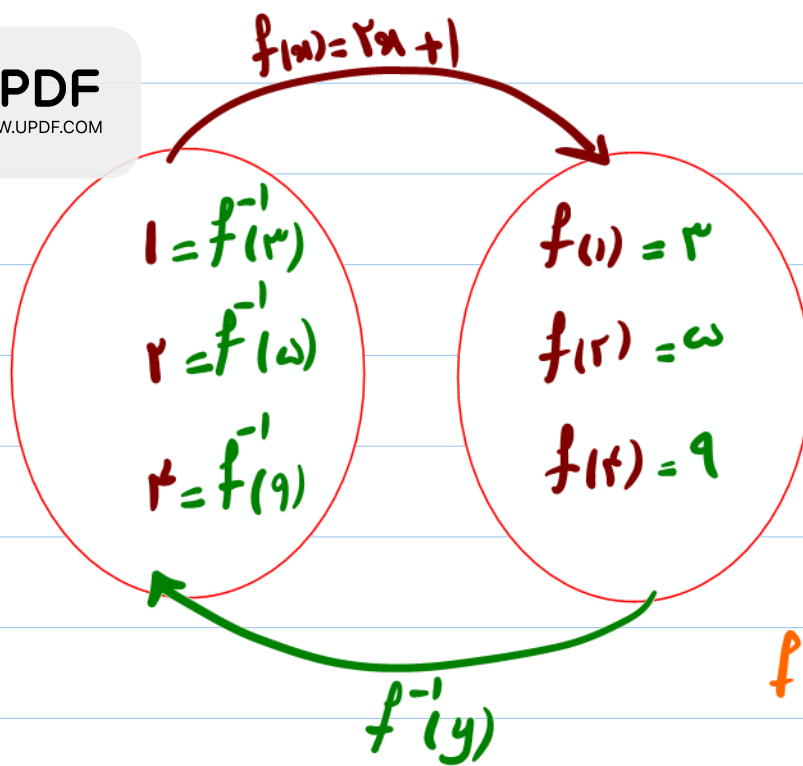
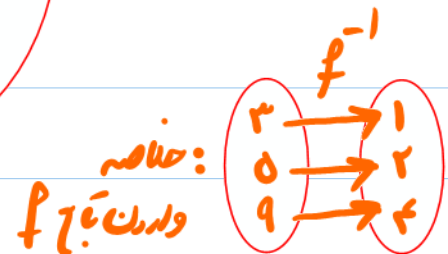
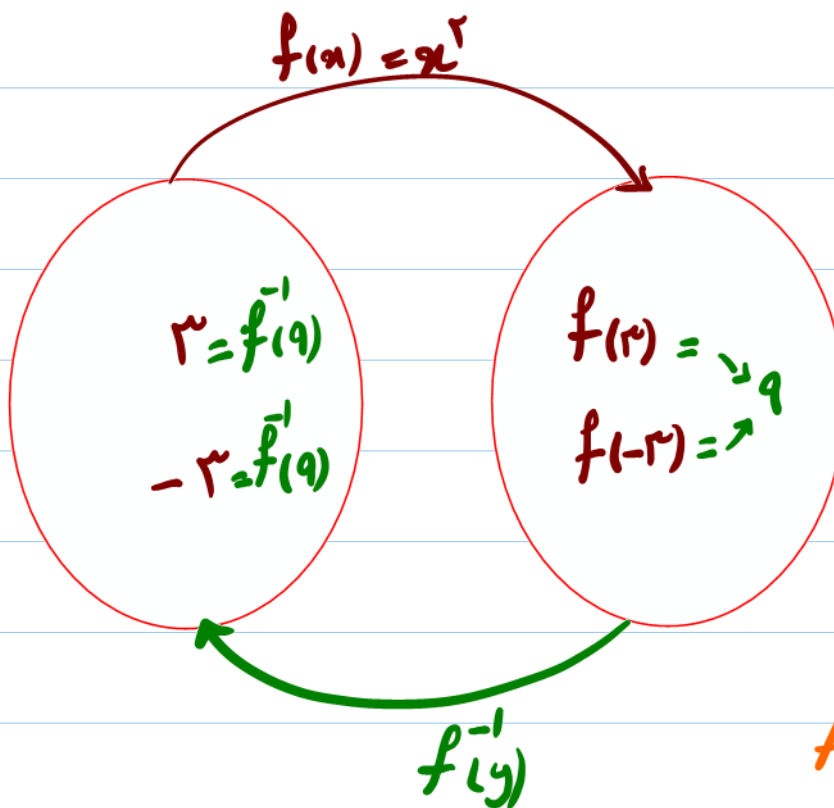
که آن را با f^{-1} نشان می دهند عنصر y را به عنوان عکس از دامنه B می برد .

x_0 از معبره بر می برد .

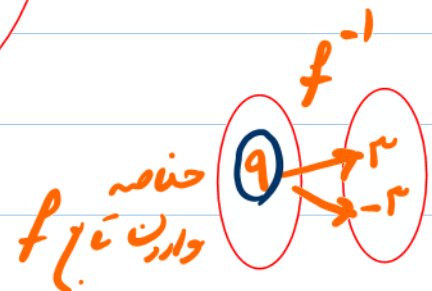




مثال :



دارد تابع هر تابع نیست :



تابع وارون پذیر : اگر وارون تابع f ، تابع باشد، f را وارون پذیری گوئیم.

نکته : تابع f وارون پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد

۱) محاسبه وارون تابع از روی نمایش زوج مرتبی :

کافی است جای مولفه اول در درم را عوض کنیم : $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$

مثال: وارون پذیر است $f = \{(1, 4), (-1, 5), (2, 4)\}$ (الف)

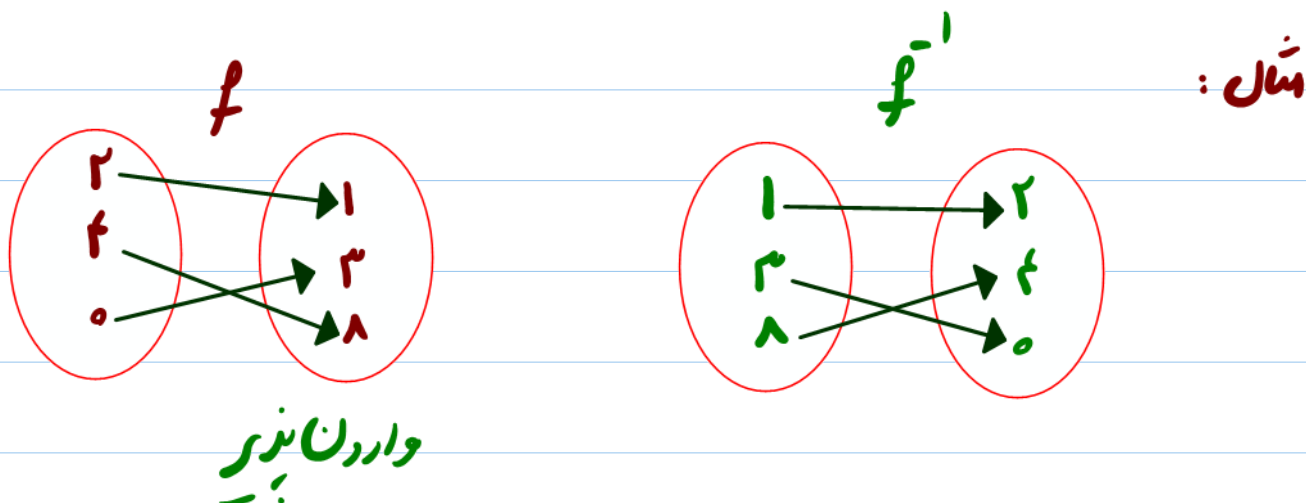
$$f^{-1} = \{(4, 1), (5, -1), (4, 2)\}$$

وارون پذیر نیست $g = \{(2, 3), (4, -1), (5, 2), (7, 3)\}$ (ب)

تابع نیست : $h = \{(3, 2), (-1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ (ج)

۲) محاسبه وارون تابع از روی نمایش نمودار دین :

کافی است جهت فلش‌ها یا جای درایره‌ها را عوض کنیم .

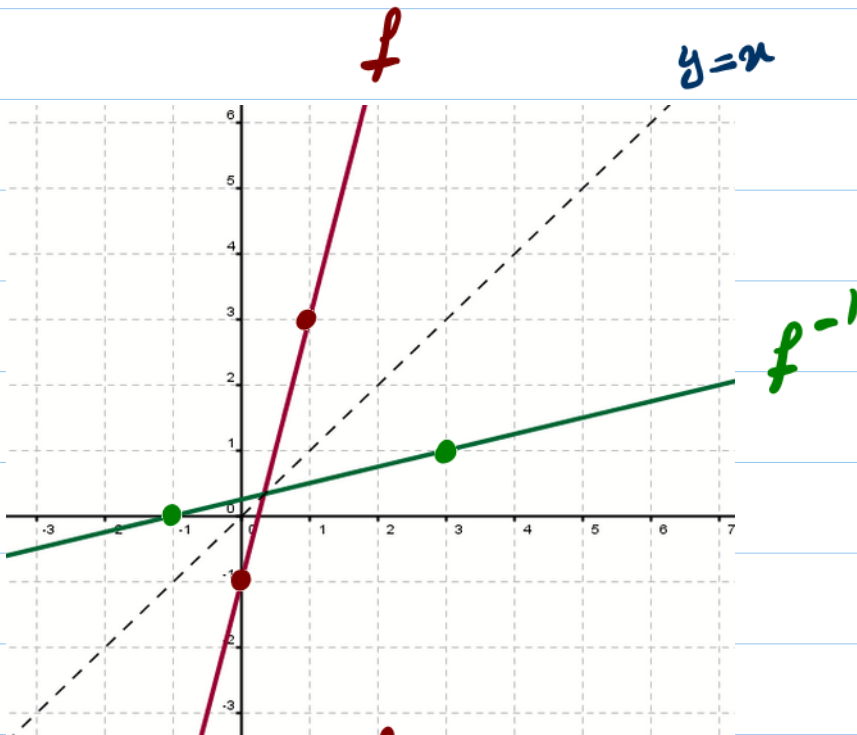


۱۳ محاسبه وارون تابع از روی نمایش دستگاه مختصات:

کافی است قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ (نیم‌مازناص اول و سوم) بکشیم

زیرا دو نقطه (y, x) و (x, y) نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.

مثال:



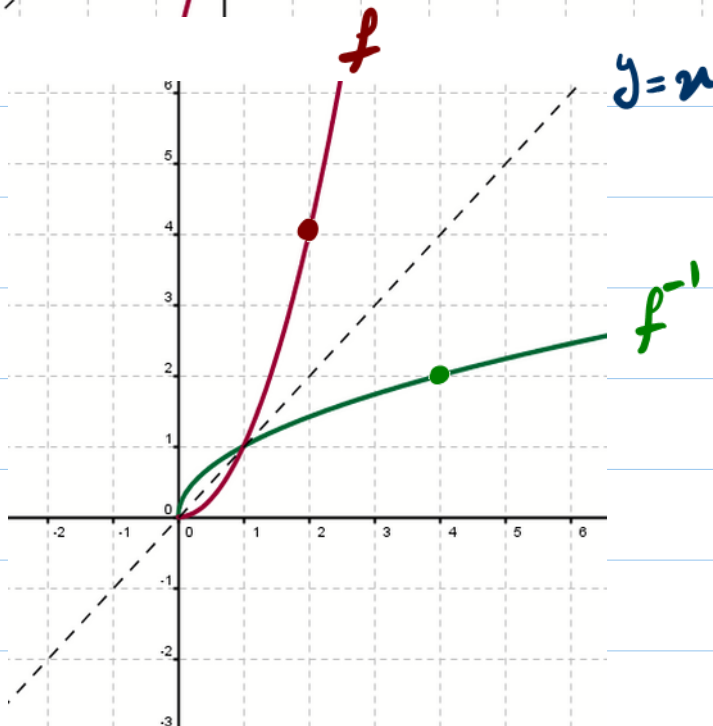
تذکره: جهت‌رأب برای دقتی‌تر

شدن نمودار f چه نقطه

روی f پیدا کنیم و جای x, y

را عرض کنیم تا نقطه روی f

به دست آید.



چند نکته: اگر f وارون پذیر باشد نگاه

۱- اگر $f(a)=b$ نگاه $f^{-1}(b)=a$. به عبارت دیگر اگر نقطه (a,b)

روی منحنی تابع f باشد نگاه نقطه (b,a) روی منحنی f^{-1} است.

$$2- (f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$$

$$3- D_{f^{-1}} = R_f \quad , \quad D_f = R_{f^{-1}}$$

۴- اگر f و f^{-1} در نقطه (a,b) مماس باشند نگاه $f(a)=b$, $f^{-1}(b)=a$.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-9} + \sqrt{x+9}$ باشد مقدار $f(9) + f^{-1}(4)$ را بیابید.

$$f(9) = \sqrt{9-9} + \sqrt{9+9} = 0 + 3 = 3$$

$$f^{-1}(4) = 9$$

$$f(9) + f^{-1}(4) = 3 + 9 = 12$$

مثال: اگر $f = \{(2, 2), (2, 3), (4, -1), (5, 6)\}$ و $g = \{(2, 4), (3, 2), (1, 5), (0, -1)\}$

، $f^{-1}(a) + g^{-1}(r) = 4$ ، مقدار $g(a)$ ، ایدت دورید.

$$g(3) = 2 \rightarrow g^{-1}(2) = 3$$

$$f^{-1}(a) + 3 = 4 \rightarrow f^{-1}(a) = 1 \rightarrow f(1) = a = 2$$

$$g(a) = g(2) = 4$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = -x^2 + mx + n$ در نقطه $(-1, \frac{1}{3})$ میزدار تابع داروش رافعه کی.

مقدار m, n را بیابید.

$$f(-1) = \frac{1}{3} \rightarrow -(-1)^2 - m + n = \frac{1}{3} \rightarrow -m + n = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$f(\frac{1}{3}) = -1 \rightarrow -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}m + n = -1 \rightarrow \frac{1}{3}m + n = -1 + \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{3}m + n = \frac{-28}{9} \xrightarrow{\times 3} m + 3n = -\frac{28}{3} \quad (2)$$

$$\begin{cases} -m + n = -\frac{2}{3} \\ m + 3n = -\frac{28}{3} \end{cases} \rightarrow n = -\frac{22}{9} = -\frac{2}{9} \rightarrow -m - \frac{2}{9} = -\frac{2}{3} \rightarrow m = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

۴) یافتن معکوس تابع داشتن :

اگر تابع به صورت معکوس داشته باشد، مراحل زیر را انجام دهیم :

۱- به جای $f(x)$ ، y قرار دهیم .

۲- مانند یک معادله به آن نگاه می کنیم که می خوریم x را بیابیم حتی x را بر حسب y بیابیم .

۳- به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x قرار دهیم .

مثال: داشتن توابع زیر را بیابید .

$$1) f(x) = 4x - 7$$

$$y = 4x - 7 \rightarrow y + 7 = 4x \xrightarrow{\div 4} \frac{y+7}{4} = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$$

$$2) f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

$$y = \frac{3x+2}{x-1} \rightarrow yx - y = 3x + 2 \rightarrow yx - 3x = 2 + y$$



$$x(y-2)=2+y \rightarrow x = \frac{2+y}{y-2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

$$3) y = 3 - \sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1} = 3-y \xrightarrow{\text{بهر توان ۲}} x+1 = (3-y)^2 \rightarrow x = (3-y)^2 - 1$$

$$f^{-1}(x) = (3-x)^2 - 1$$

$$x+1 = 9-6y+y^2 \rightarrow x = y^2-6y+8$$

مرت دوم

$$f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 8$$

تذکر: اگر تابعی یک به یک نباشد پس واردها پذیر نیست و می توانیم با محدود کردن دامنه

تابع آن را یک به یک کنیم و واردها را به دست آوریم.

مثال: با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 + 4x + 4$ ، ضابطه تابع واردها را بیابید.

$$D = (-\infty, -\frac{b}{2a}] = (-\infty, -\frac{4}{1}] = (-\infty, -2]$$

با این دامنه تابع یک به یک و در نتیجه واردها پذیر می شود.



$$f(x) = \underbrace{x^r + rx + r + 1}_{x+r+1} = (x+r)^r + 1$$

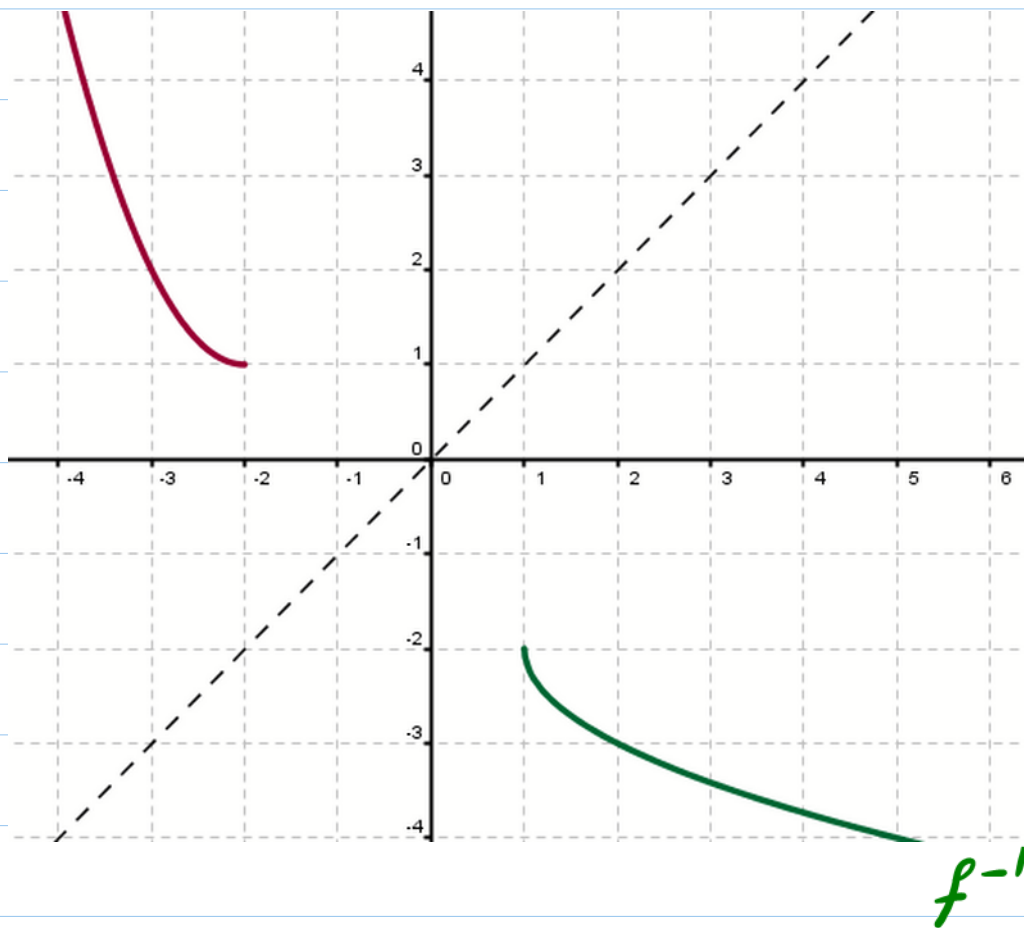
$$x+r+1 = \frac{x+r}{1} + \frac{1}{1}$$

$$y = (x+r)^r + 1 \rightarrow y-1 = (x+r)^r \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{y-1} = |x+r|$$

$$\sqrt{y-1} = -(x+r) \rightarrow \sqrt{y-1} = -x-r$$

$$x = -r - \sqrt{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = -r - \sqrt{x-1}$$

$f: x \leq -r$



مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x < 1 \\ 0x+1 & x \geq 1 \end{cases}$ داریم، f را بساز.

دامنه f^{-1} : $D_{f^{-1}} = R_f$

$$x < 1 \xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{x} < \sqrt{1} \xrightarrow{+1} \sqrt{x+1} < 1$$

$$x \geq 1 \xrightarrow{x \geq 0} 0x \geq 0 \xrightarrow{+1} 0x+1 \geq 1$$

پس f^{-1} است:

$$y = \sqrt{x+1} \rightarrow y-1 = \sqrt{x} \rightarrow x = \frac{y-1}{1} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{1}$$

$$y = 0x+1 \rightarrow y-1 = 0x \rightarrow x = \frac{y-1}{0} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{0}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1} & x < 1 \\ \frac{x-1}{0} & x \geq 1 \end{cases}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس سوم : وارون تابع

جلسه هشتم : حل تمرین صفحه ۶۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

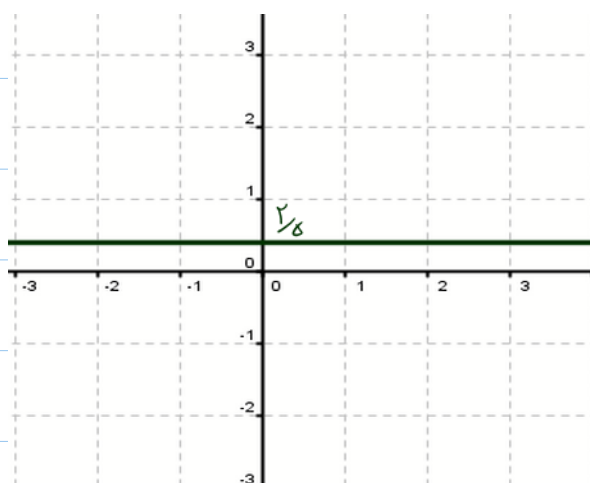
۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

دمای هوا در ساعات یک روز : مثلاً دمای هوا ۱ صبح ۳ درجه سانتیگراد و

۲۲ شب هم ۳ درجه باشد . $\{(1, 3), (22, 3)\}$

۲ آیا تابع $f(x) = \frac{2}{5}$ وارون تابع $g(x) = \frac{5}{4}$ است؟ خیر.

$f(x) = \frac{2}{5}$ تابع ثابت است پس یک به یک نیست در نتیجه وارون پذیر نیست.



$$f(x) = \frac{2}{5}$$

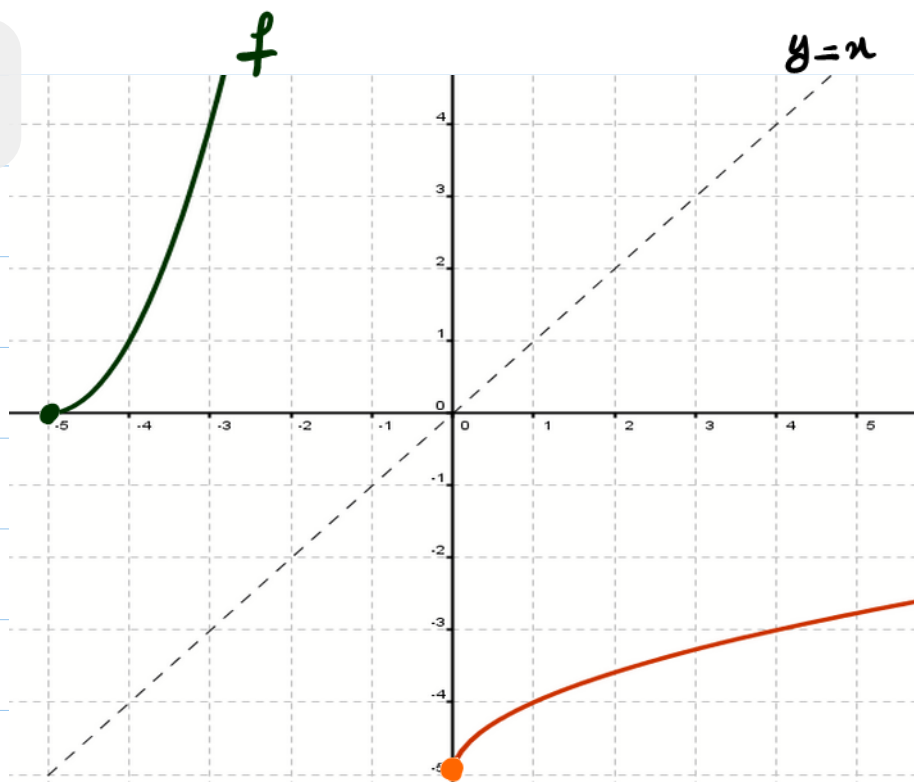
۳ به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، به دست

آورید :

یک به یک با: $D_f = [-5, +\infty)$ و $(-5, 0)$ را پس می $f(x) = (x+5)^2$ (الف) $x \geq -5$

$$y = (x+5)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y} = |x+5| \xrightarrow{x \geq -5} \sqrt{y} = x+5 \rightarrow \sqrt{y} - 5 = x$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 5$$



ب) $f(x) = -|x - 1| + 1$, $x \geq 2$

$x-1 \quad | \quad - \quad 1 \quad + \quad *$

$f(x) = -(x-1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2$: $x \geq 2$: $D_f = [2, +\infty)$

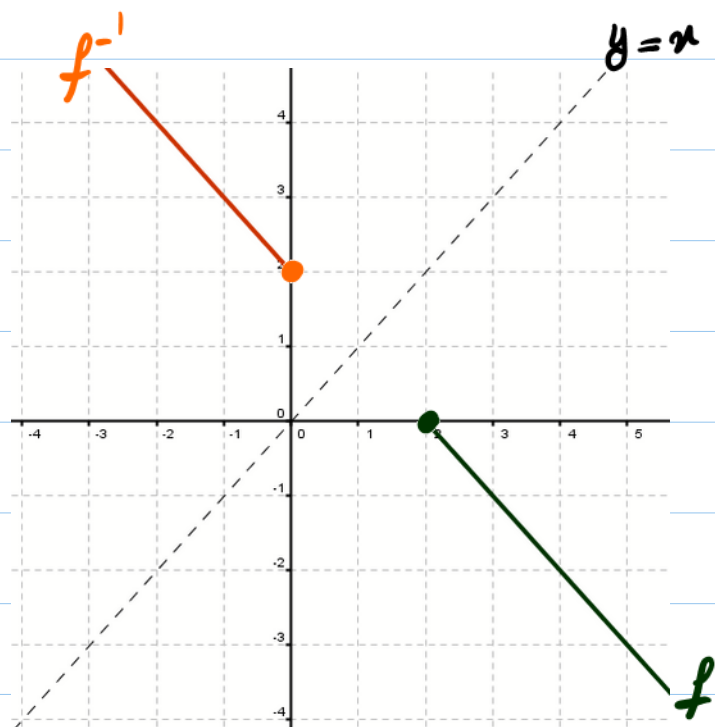
تابع یک به یک تابع معکوس شده تابع خطی همواره یک به یک هستند.

$y = -x + 2 \rightarrow x = 2 - y \rightarrow f^{-1}(y) = 2 - y = -y + 2$

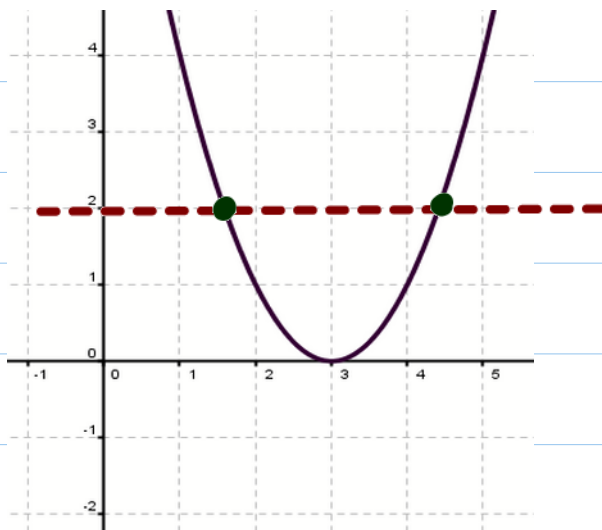
منابع همون f
پس باید بردار f را به f^{-1} آرایه f قبلی شود :

$R_f : x \geq 2 \xrightarrow{x \leftarrow -1} -x \leq -2 \xrightarrow{+2} -x + 2 \leq 0 \rightarrow R_f = (-\infty, 0]$

$R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 0]$



پ) $f(x) = (x - 3)^2$



تابع f یک به یک نیست زیرا

$y = 2$ در دو نقطه تابع را قطع کرد.

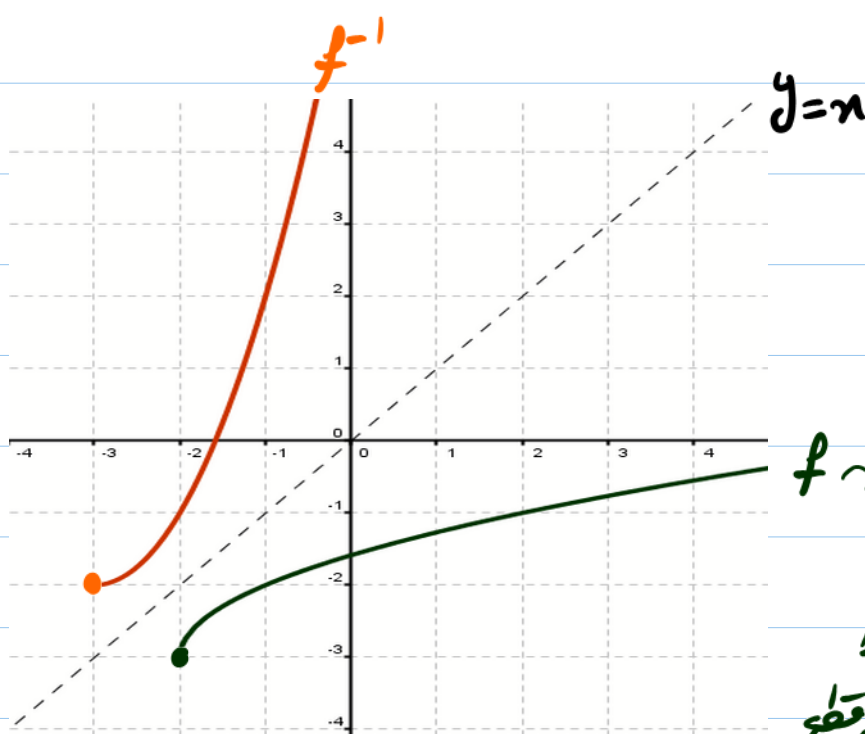
در نتیجه تابع وارون پذیر هم نخواهد بود.

ت) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

$R_f = [-2, +\infty) = D_{f^{-1}}$

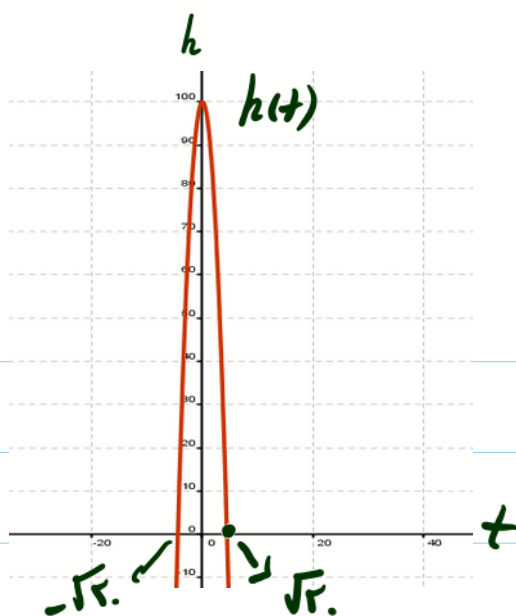
$$y = \sqrt{x+2} - 3 \rightarrow y + 3 = \sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{مربع کردن}} (y+3)^2 = x+2$$

$$(y+3)^2 - 2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = (x+2)^2 - 2 : D_{f^{-1}} = [-2, +\infty)$$



کد به یک
حرف مداری
محرک ها آن را
فقط در یک نقطه قطع
می کنند.

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه $h(t) = 100 - 5t^2$ به دست می آید.



الف) دامنه و برد h را به دست آورید.
ب) چرا h تابعی یک به یک است؟
پ) تابع وارون h را به دست آورید.

چون زه ن نمی نداریم شامکت به خند چکر.

چون ارتفاع نمی نداریم، زیر محرز + ها خند لاسر.

آ که $t = \pm 20 \rightarrow 5t^2 = 100 \rightarrow 5t^2 = 0 \rightarrow t^2 = 0 \rightarrow t = 0$: D_h (الف)
فقط مثبت ها قبول

$$D_h = [0, \sqrt{20}] \quad R_h = [0, 100]$$



ب) سنگ در حوزة يك ارتفاع منحصر به فرد دارد.

$$y = 100 - 5t^2 \rightarrow 5t^2 = 100 - y$$

۱۲

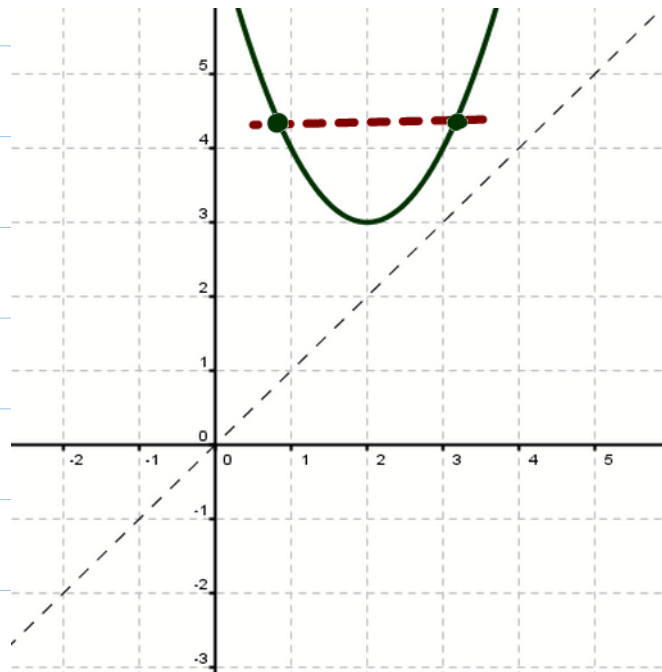
$$\stackrel{+5}{\rightarrow} t^2 = \frac{100-y}{5} \xrightarrow{t>0} t = \sqrt{\frac{100-y}{5}}$$

$$h^{-1}(t) = \sqrt{\frac{100-t}{5}}$$

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x ، $x < f(x)$.

همداری f باید برای $y=x$ باشد.

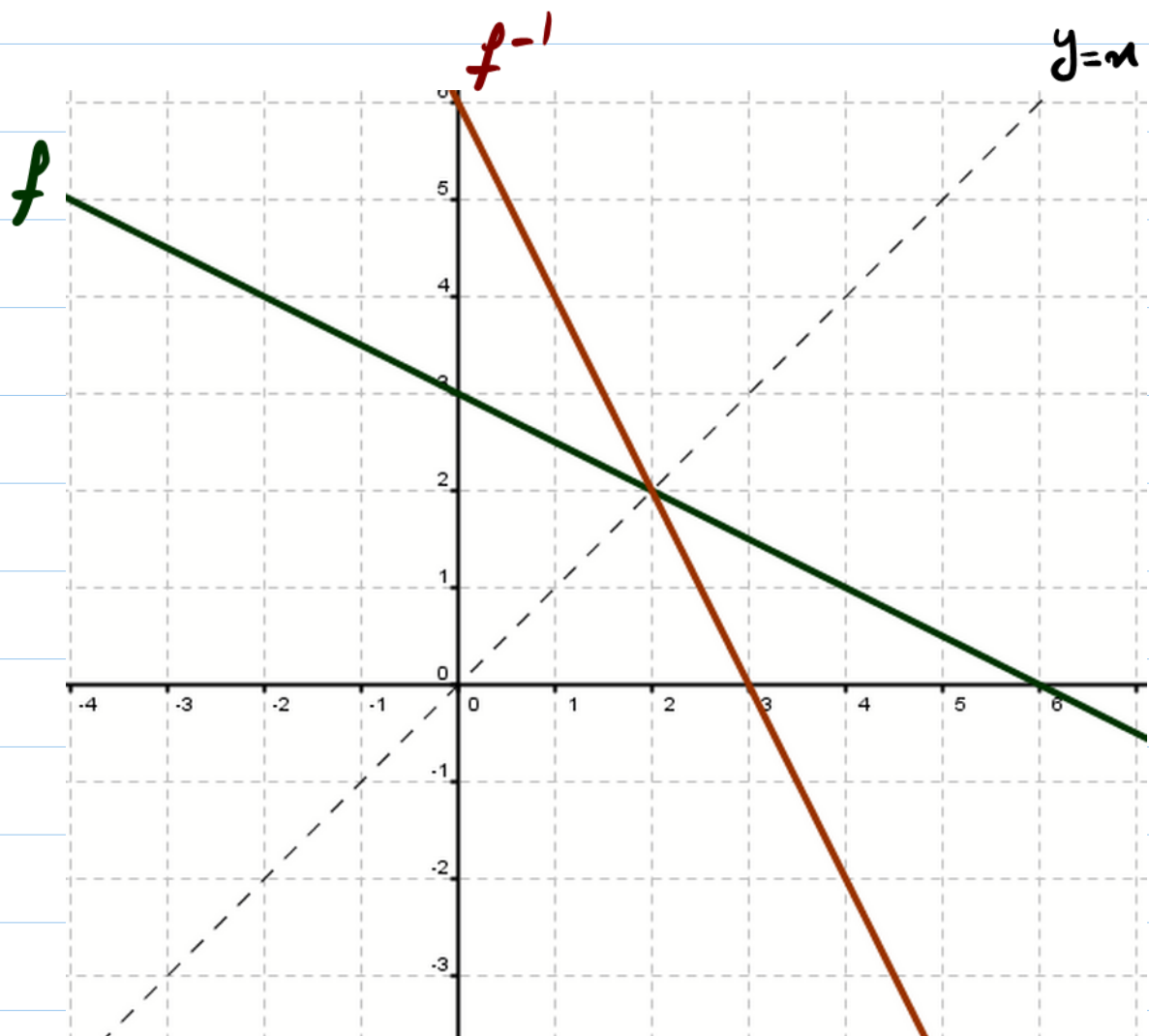
یک به یک $f(x)$:



۶ وارون تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}x \xrightarrow{x(-2)} -2(y - 3) = x$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = -2(x - 3) = -2x + 6$$



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس چهارم : اعمال روی توابع

جلسه نهم : صفحات ۶۳ تا ۶۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

احمال ردی توابع :

فرض کنید f و g در تابع باشند، در این صورت :

۱- جمع f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{این دامنه مشترک داریم:}$$

حاصل جمع در تابع f و g را با $f+g$ نمایش می دهیم

۲- تفاضل f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{این دامنه مشترک داریم:}$$

تفاضل در تابع f و g را با $f-g$ نمایش می دهیم

۳- ضرب f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad \text{این دامنه مشترک داریم:}$$

حاصل ضرب در تابع f و g را با $f \times g$ نمایش می دهیم

۴- تقسیم f بر g : تابعی است که دامنه آن $\{x \mid g(x) \neq 0\}$ و $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

است و برای هر x از دامنه این تابع داریم: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

تقسیم تابع f بر تابع g را با $\frac{f}{g}$ نمایش می‌دهیم.

مثال (نوع مرتب):

اگر داشته باشیم: $f = \{(\underline{-2}, 1), (\underline{3}, 0), (\underline{1}, 4), (\underline{6}, 0)\}$

$g = \{(\underline{1}, 9), (\underline{5}, 0), (\underline{3}, 7), (\underline{-2}, 2), (\underline{6}, \sqrt{2})\}$ مطلوب است:

$$D_f \cap D_g = \{1, 3, -2, 6\}$$

الف) $f+g = \{(1, 13), (3, 12), (-2, 3), (6, \sqrt{2})\}$

ب) $f \times g = \{(1, 36), (3, 35), (-2, 2), (6, 0)\}$

ج) $\frac{f}{g} = \{(1, \frac{4}{9}), (3, \frac{0}{7}), (-2, \frac{1}{2}), (6, 0)\}$

د) $\frac{g}{f} = \{(1, \frac{9}{1}), (3, \frac{0}{0}), (-2, 2), (6, \frac{\sqrt{2}}{0})\}$



دریافته
 $f - 3g$

$$2f = \{(-2, 2), (3, 1), (1, 1), (4, 0)\}$$

$$3g = \{(1, 2), (0, 0), (3, 2), (-2, 4), (4, 2)\}$$

$$2f - 3g = \{(-2, -4), (3, -1), (1, -1), (6, -2)\}$$

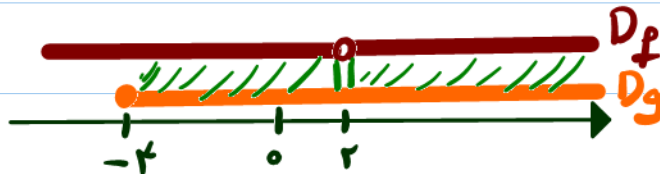
مسأل (صنایع جبری)
 دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید. مطلوب است:

الف) دامنه، صنایع توابع $f-g$ و $\frac{f}{g}$.

ب) محاسبه مقادیر $(f+g)(0)$ ، $(\frac{g}{f})(-3)$ ، $(4f - \frac{1}{f}g)(5)$.

$$\text{الف) } (f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+1}{x-2} - \sqrt{x+4}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad D_g : x+4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4 \rightarrow D_g = [-4, +\infty)$$



$$D_f \cap D_g = [-4, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$D_{f-g} = [-4, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{x+1}{x-2}}{\sqrt{x+4}} = \frac{x+1}{(x-2)(\sqrt{x+4})}$$



از رانده شکر خارج می کنیم $\rightarrow \sqrt{x+4} = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow g(x) = 0$

$$D_{\frac{f}{g}} = (-4, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$ب) (f+g)(0) = f(0) + g(0) = \frac{0+1}{0-2} + \sqrt{0+4} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(-3) = \frac{g(-3)}{f(-3)} = \frac{\sqrt{-3+4}}{\frac{-3+1}{-3-2}} = \frac{1}{-\frac{2}{-5}} = \frac{5}{2}$$

$$(4f - \frac{1}{2}g)(0) = 4f(0) - \frac{1}{2}g(0) = 4 \times \frac{0+1}{0-2} - \frac{1}{2}\sqrt{0+4}$$

$$= 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 = 8 - \frac{1}{2} = \frac{16-1}{2} = \frac{15}{2}$$

مثال: (زوج مرتب و ضابطه جبری)

اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ ، $g = \{(3, 1), (1, 7), (-4, 4), (0, 6)\}$ باشند،

توابع $f+g$ ، $\frac{g}{f}$ را بیابید.

$$D_g = \{3, 1, -4, 0\}$$

$$D_f: x^2 - 2x \geq 0 \quad \xrightarrow{\text{عبارت ۲، ۰، ۶}}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ x^2 - 2x & + & - & + \end{array}$$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$D_f \cap D_g = \{1, -1, 0\}$$

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = \sqrt{9-1} + 1 = \sqrt{8} + 1$$

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = \sqrt{1+1} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 7 = 7$$

$$f+g = \{(1, 1+\sqrt{8}), (-1, 1+\sqrt{2}), (0, 7)\}$$

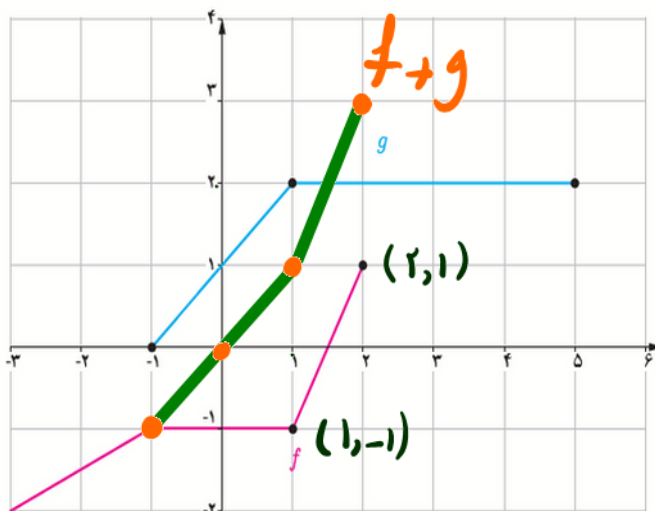
$$\left(\frac{g}{f}\right)(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(-1) = \frac{g(-1)}{f(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{7}{0}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{ \left(1, \frac{1}{\sqrt{8}}\right), \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

مثال: (مرداری)



نمودارهای توابع f و g داده شده است.
الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به دست آورید.
ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.
پ) ضابطه توابع f و g را به دست آورید.
ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = -1 + 2 = 1$$

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -1 + 0 = -1$$

$$D_f = [-1, 5] \quad D_g = (-\infty, 2]$$

$$D_f \cap D_g = [-1, 2]$$

مجموعه دو نقطه از این ران به تابع داریم

$$(f+g)(-1) = -1 \quad , \quad (f+g)(0) = f(0) + g(0) = -1 + 1 = 0$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 1 + 2 = 3 \quad , \quad (f+g)(1) = 1$$

$$(-1, -1), (0, 0), (2, 3), (1, 1)$$

این نقاط در $f+g$ هستند

۲۰

در دامنه ۱

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-3 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$m = \frac{1+1}{2-1} = 2$$

$$y-1 = 2(x-1)$$

$$y-1 = 2x-2$$

$$y = 2x-1$$

در دامنه ۲

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$f(x)+g(x) = \begin{cases} x+1-1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-3+2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$f(x)+g(x) = \begin{cases} x & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

ن) بنده هر دو یکی است و در رسم بنده را به یک ضابطه رقتی تر است.

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس چهارم : اعمال روی توابع

جلسه دهم : صفحات ۶۶ تا ۶۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

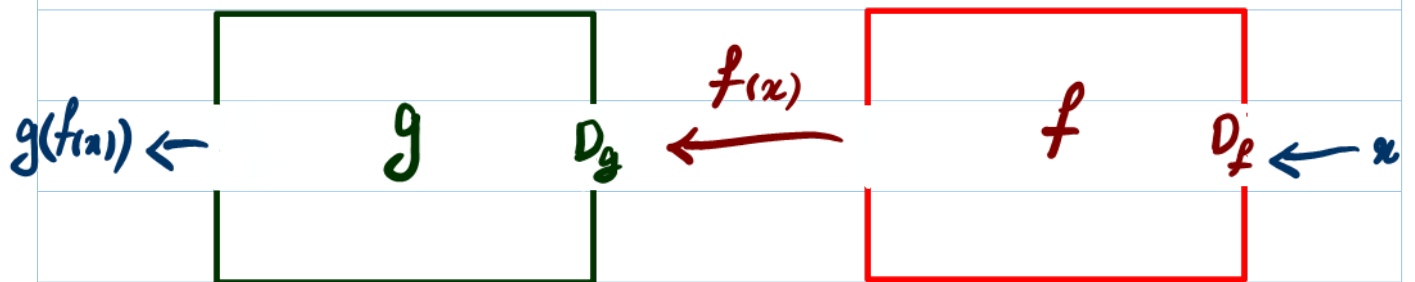
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

ترکیب توابع :

اگر f و g در تابع باشند، داشتن این توابع را به صورت های زیر در نظر بگیرید :

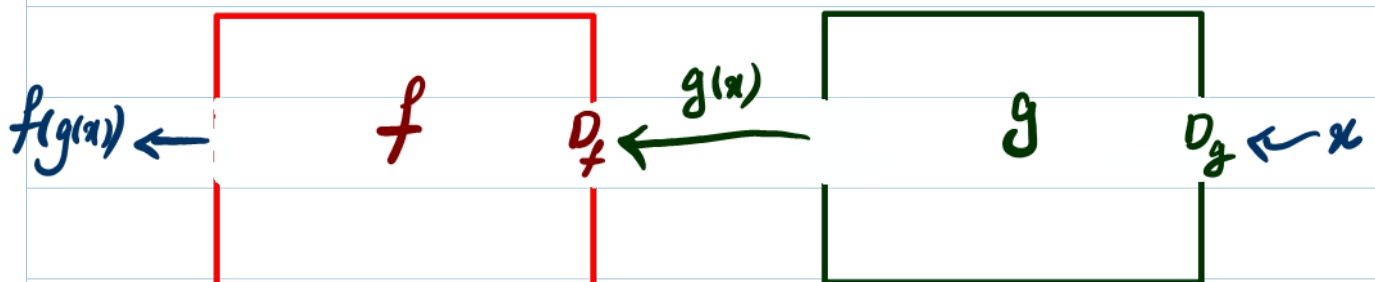


مجموعه های که حق ورود به f را دارند حتماً در D_f هستند و در تابع f می شوند و می

توری می آیند می پذیرد و $(f(x))$ قبول دارد می شود. اگر $f(x)$ ها اجازه

ورود به g را داشته باشند حتماً در D_g باشند، داشتن g و توری $f(x)$ اگر کرده

و $g(f(x))$ را به عنوان خروجی تحویل می دهد.



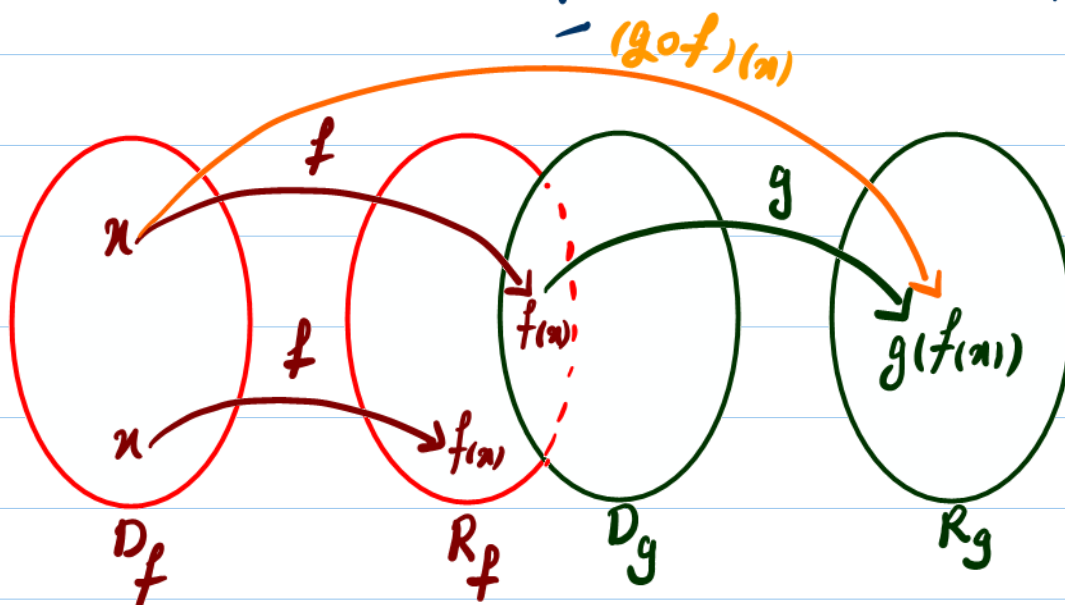
در نظر داریم، g و f را دارند یعنی در دامنه g هستند

تأیید می‌کنیم که $g(f(x))$ قابل‌داده‌ی g است. اگر g اجازه‌ی ورود به f را

داشته باشد یعنی در دامنه f باشند، داشتن f روی g اگر برگردد $f(g(x))$

را قبول می‌دهد.

همین مفهوم را در نمودار دین هم ببینیم.



توضیح: نموداری مشابه، نمودار با g برای $f(g(x))$ رسم کنید.

تعریف: ترکیب $g \circ f$ را با f و g نشان می‌دهیم و تأیید می‌کنیم که دامنه آن:

$$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

است و برای هر x در دامنه این تابع داریم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

تذکر: به همین ترتیب و در f بار دامنه $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ تعریف می‌شود که

برای هر x در این دامنه خواهیم داشت: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \cos x$ باشند، $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$

را بدست آورید.

معنی در تابع f به جای x ، $g(x)$ بگذاریم: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$$

معنی در تابع g به جای x ، $f(x)$ بگذاریم: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$= \cos \sqrt{1-x^2}$$

مسئله: اگر $f = \{(1,2), (2,-1), (-1,1), (0,2)\}$ و $g = \{(1,1), (2,0), (3,-1)\}$

باشند، تابع $g \circ f$ را تشکیل دهید.

ست چپ g های و را بنویسم و به چهار مرتبه بنویسم: $g \circ f$

بعد f را از g هم.

g

$1 \rightarrow 1 \xrightarrow{f} 2$

$2 \rightarrow 0 \xrightarrow{f} 2$

$3 \rightarrow -1 \xrightarrow{f} 1$

$g \circ f = \{(1,2), (2,2), (3,1)\}$

ست چپ g های f را بنویسم و به چهار مرتبه بنویسم: $g \circ f$

بعد g را از f هم.

f

$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 0$

$2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} \times$

$-1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 1$

$0 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 0$

$g \circ f = \{(1,0), (-1,1), (0,0)\}$

سؤال: اگر $f = \{(1, 5), (2, 3), (4, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (1, 1)\}$ باشد، $g \circ f$ را تشکیل دهید.

تشکیل می‌دهد؟ چرا؟

$$\begin{array}{lcl} f & g & \\ 1 & \rightarrow 5 & \rightarrow x \\ 2 & \rightarrow 3 & \rightarrow x \\ 4 & \rightarrow 7 & \rightarrow x \end{array}$$

چون $R_f \cap D_g = \emptyset$:

نتیجه: برای تشکیل $g \circ f$ باید $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ باشد.

برای تشکیل $f \circ g$ باید $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ باشد.

سؤال: اگر $f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ باشند، رابطه $f \circ g$

را بدست آورید.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\frac{2x-2}{x+1} + 2}{\frac{2x-2}{x+1} - 1} = \frac{\frac{2x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x-2-x-1}{x+1}}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{4x+1}{x-3}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} , \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$



$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} - \{-1\} \mid \frac{x-2}{x+1} \in \mathbb{R} - \{1\}\}$$

$$r: \frac{x-2}{x+1} \neq 1 \rightarrow x-2 \neq x+1 \rightarrow x \neq -1 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{2} \\ D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

مثال: اگر $g(x) = x^2 - 4$ باشد، $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، D_g و D_f و $D_{f \circ g}$ را بیابید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4 - 2} = \sqrt{x^2 - 6}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad D_g = \mathbb{R} \quad D_f = [2, +\infty)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \in [2, +\infty)\}$$

$$r: x^2 - 4 \geq 2 \rightarrow x^2 \geq 6 \rightarrow x \geq \sqrt{6} \text{ یا } x \leq -\sqrt{6}$$

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{2}: D_{f \circ g} = (-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, +\infty)$$



مثال: اكر $f(x) = \sqrt{r-x}$, $g(x) = \frac{1}{r-x}$, حيث $D_{f \circ g}$:-

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{r - r \times \frac{1}{r-x}} = \sqrt{r - \frac{r}{r-x}}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_g: r-x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{r}{r} \quad D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{r}{r}\right\}$$

$$D_f: r-rx \geq 0 \rightarrow -rx \geq -r \xrightarrow{\div (-r)} x \leq \frac{r}{r} \rightarrow D_f = (-\infty, \frac{r}{r}]$$

$$D_{f \circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{r}{r}\right\} \mid \frac{1}{r-x} \in (-\infty, \frac{r}{r}]\right\}$$

$$r: \frac{1}{r-x} \leq \frac{r}{r} \xrightarrow{\div r} \frac{1}{r-x} \leq \frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{r-x} - \frac{1}{r} \leq 0$$

$$\frac{r-rx+0}{r(r-x)} \leq 0 \rightarrow \frac{r-rx}{r(r-x)} \leq 0$$

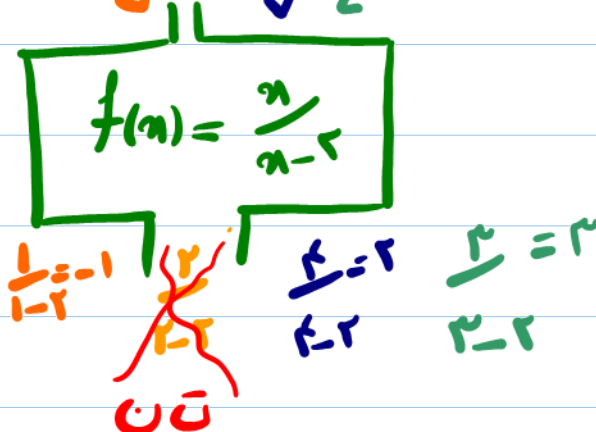
$$r \cdot r = (-\infty, \frac{0}{r}) \cup [r, +\infty)$$

x	$\frac{0}{r}$	r
$r-rx$	+	+
$r-x$	-	+
	-	+

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{2} = D_{f \circ g} = (-\infty, \frac{0}{r}) \cup [r, +\infty)$$



مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{x-2}$ و $g = \{(1,0), (2,1), (3,2), (5,3)\}$ باشد، $f \circ g$ را بیابید.



$$f \circ g = \{(1, -1), (2, 2), (5, 3)\}$$

نکته: اگر f و g وارده باشند و خودهم واری سبکیم. چون f وارده،

تابع $f \circ g$ را تشکیل می دهیم و با g وارده شده بسیاری ترکیبی می دهیم.

معادله حاصل را حل می کنیم تا $g(x)$ بدست آید.

مثال: اگر $(f \circ g)(x) = \frac{2x}{x-1}$ و $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ باشد، ضابطه $g(x)$ را بیابید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-2} = \frac{2x}{x-1}$$

$$2x(g(x)-2) = (x-1)(g(x)+1)$$



$$2ng(n) - 2n = ng(n) + n - g(n) - 1$$

$$2ng(n) - ng(n) + g(n) = 2n + n - 1$$

$$ng(n) + g(n) = 3n - 1 \Rightarrow g(n)(n+1) = 3n - 1 \rightarrow g(n) = \frac{3n-1}{n+1}$$

نکته: اگر f و g را در رشته با هم ذخیره کنیم، رابطه f را بدست آوریم، ابتدا g را مساوی t

میگیریم، n را بر حسب t بدست میآوریم و در f قرار می دهیم تا $f(t)$

بدست آید. $f(t)$ همان $f(n)$ است که جای t ، n میگذارد.

مثال: اگر $f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{2n}{n-1}$ باشد، $f(n)$ را بیابید.

$$g(n) = \frac{n+1}{n} = t \rightarrow nt = n+1 \rightarrow nt - n = 1$$

$$\rightarrow n(t-1) = 1 \rightarrow n = \frac{1}{t-1}$$

$$f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{2n}{n-1} \rightarrow f(t) = \frac{2 \times \frac{1}{t-1}}{\frac{1}{t-1} - 1} = \frac{\frac{2}{t-1}}{\frac{1-t+1}{t-1}} = \frac{2}{-t+2}$$

$$f(t) = \frac{2}{-t+2} \xrightarrow{t \rightarrow n} f(n) = \frac{2}{2-n}$$

نکته: ترکیب تابعی مانند f با خودش، در صورت $f \circ f$ می نویسد.

مثال: اگر $f = \{(2,1), (3,5), (7,2), (5,9), (4,3)\}$ ، $f \circ f$ را بیابید.

$$\begin{array}{l} f \quad f \\ 2 \rightarrow 1 \rightarrow x \\ 2 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \\ 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\ 5 \rightarrow 9 \rightarrow x \\ 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \end{array}$$

$$f \circ f = \{(3,9), (7,1), (4,5)\}$$

مثال: اگر $f = \{(1,2), (3,-1), (4,5)\}$ باشد، $f \circ f^{-1}$ ، $f \circ f^{-1}$ را بیابید.

$$f^{-1} = \{(2,1), (-1,3), (5,4)\}$$

$f \circ f^{-1}$:

$$\begin{array}{l} f^{-1} \quad f \\ 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \\ -1 \rightarrow 3 \rightarrow -1 \\ 5 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \end{array}$$

$$f \circ f^{-1} = \{(2,2), (-1,-1), (5,5)\}$$

$$\begin{aligned} f^{-1} &: 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \\ 2 &\xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{f^{-1}} 2 \\ 3 &\xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f^{-1}} 3 \end{aligned}$$

$$f \circ f^{-1} = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

نکته: اگر f تابعی وارون پذیر باشد گنگاه:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

توجه کنید گنگاه گزاره با هم درست است یعنی اگر در تابع در دوسای به هم صدق کنند

گنگاه f تابعی وارون پذیر است که وارون آن f^{-1} خواص دارد.

مثال: ثابت کنید $f(x) = \frac{7}{4}x - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$ وارون یکدیگرند.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -\frac{7}{4} \times \left(-\frac{2x+6}{7}\right) - 3$$

$$= \frac{x(x+3)}{2} - 3$$

$$= x + 3 - 3 = x$$

به عنوان عرین ثابت کنید: $(g \circ f)(x) = x$



مثال*: در تابع $f = \{(2,0), (7,3), (3,7), (4,1), (1,9)\}$ ، $g(x) = \frac{x}{x-1}$

داریم $f^{-1}(g(2a)) = 7$ ، a را بدست آورید.

$$f^{-1}(g(2a)) = 7 \longrightarrow g(2a) = f(7) = 3$$

$$3 = \frac{2a}{2a-1} \longrightarrow 7a-3 = 2a \longrightarrow 5a = 3$$

$$\longrightarrow a = \frac{3}{5}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل دوم : تابع

درس چهارم : اعمال روی توابع

جلسه یازدهم و دوازدهم : حل تمرین

صفحات ۷۰ و ۶۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱ اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2 - x$ ، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f - g$ و $f \circ g$ را به همراه دامنه آنها به دست آورید.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x}{2-x} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{x \mid 2-x=0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 4x - (2-x) = 4x - 2 + x = 5x - 2$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4(2-x) = 8 - 4x$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2-x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

۲ برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آن را به دست آورید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 3} = \frac{1}{\frac{4-3x}{x}} = \frac{x}{4-3x}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$



$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{x}{x} \in \mathbb{R} - \{3\}\}$$

$$۲: \frac{x}{x} \neq 3 \rightarrow 3x \neq x \rightarrow x \neq \frac{x}{3}$$

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{2} = D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{0, \frac{x}{3}\}$$

۳ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن گاه $(f \circ g)(4) = 35$

ب) اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$ آن گاه $(\frac{f}{g})(2) = 1$

پ) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $f \circ g = g \circ f$

ث) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، آن گاه $(f \circ g)(5) = -25$ و $(f \circ g)(x) = -x^2$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$

الف) نادرست است زیرا: $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(7) = 5 \neq 35$

ب) درست است زیرا: $(\frac{f}{g})(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2+4}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$

پ) درست است زیرا: $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(9) = \sqrt{9} = 3$
 $g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$

ت) نادرست است. مثل نقض:

$$f(x) = x^2 + 5 \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 + 5 = x + 5$$

$$\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 5}$$

ث) نادرست است زیرا:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x^2 - 4})^2 - 4 = x^2 - 4 - 4 = x^2 - 8 \neq -x^2$$

ج) درست است زیرا:

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x) = g(x) \times f(x) = (gf)(x)$$

$$fg = gf$$

۴ فرض کنیم $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ و $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ که در آن:

$$\begin{cases} g(n) = 2n \end{cases}$$

 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، توابع $f+g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\} \quad D_g = \mathbb{N} \rightarrow D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$g = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

$$f+g = \{(1,4), (2,7), (3,11), (4,15)\}$$

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 4$$

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$$

$$3 \rightarrow 5 \rightarrow 10$$

$$4 \rightarrow 7 \rightarrow 14$$

$$g \circ f = \{(1,4), (2,6), (3,10), (4,14)\}$$

اگر $f = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{2}, 0), (3, -5)\}$ و $g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\}$ ۵

توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

$$D_f \cap D_g = \{-4, 0, 3\}$$

$$f+g = \{(-4, 7), (0, 2), (3, -5)\}$$

$$f-g = \{(-4, 13-(-7)), (0, 5-(-3)), (3, -5-0)\}$$

$$= \{(-4, 20), (0, 8), (3, -5)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(-4, \frac{13}{-7}), (0, -\frac{5}{-3}), (3, -\frac{5}{0})\}$$

۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

$$D_f: x^2 + 5 \geq 0 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g: 4 - x^2 \geq 0 \rightarrow -x^2 \geq -4 \xrightarrow{(-1)} x^2 \leq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$D_g = [-2, 2]$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-2, 2] \mid \sqrt{4 - x^2} \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(\sqrt{4 - x^2})^2 + 5} = \sqrt{4 - x^2 + 5} = \sqrt{9 - x^2}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{\sqrt{x^2 + 5}}_{*} \in [-2, 2]\}$$

* چک در یکال با فرم زوج هیچ معنی نمی‌سازد : $\sqrt{x^2 + 5} \in [0, 2]$ *

$$0 \leq \sqrt{x^2 + 5} \leq 2$$

$$\rightarrow x^2 + 5 \leq 4 \rightarrow x^2 \leq -1 \quad \text{غیر ممکن}$$

$f \circ g$ و تشکیل نمی‌شوند $D_{g \circ f} = \emptyset \rightarrow g \circ f = \emptyset$

۷ اگر $f(x) = x^2 - 9$ و $g(x) = x + 3$ ، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنه آن در ادامه محاسبه شده اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$

$x + 3$ از صورت و مخرج بدون ریشه گریختن ریشه $x + 3 \neq 0$ است، مخرج صفر

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3; \quad x \neq -3 \quad \text{درست:}$$

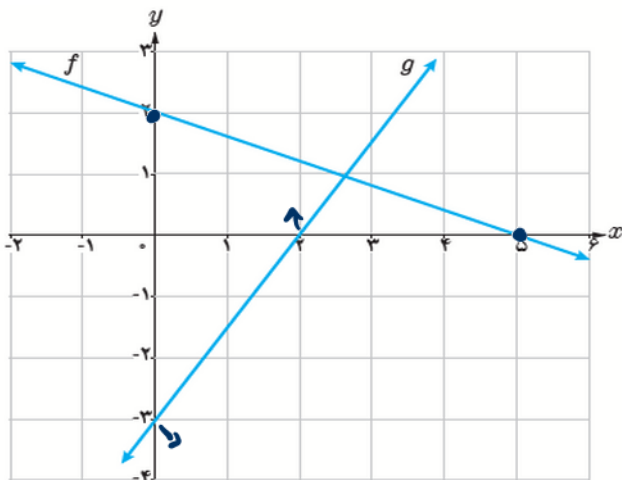
۸ اگر $f(x) = 2x + 5$ ، $f^{-1}(x)$ ، $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را به دست آورید.

$$y = 2x + 5 \rightarrow y - 5 = 2x \rightarrow x = \frac{y - 5}{2} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{2}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{2x + 5 - 5}{2} = \frac{2x}{2} = x; \quad x \in D_f = \mathbb{R}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = 2 \frac{x - 5}{2} + 5 = x - 5 + 5 = x; \quad x \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

۹ نمودار توابع f و g داده شده اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.



$$f: (0, 2), (5, 0) \rightarrow y - 2 = \frac{0-2}{5-0}(x-0) \rightarrow f(x) = -\frac{2}{5}x + 2$$

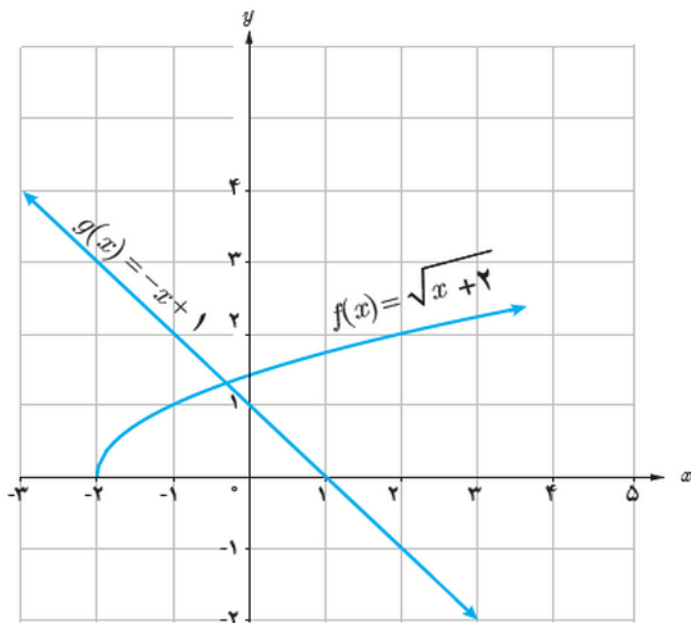
$$g: (2, 0), (0, -3) \rightarrow y + 3 = \frac{-3-0}{0-2}(x-0) \rightarrow g(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -\frac{2}{5}x + 2 + \frac{3}{2}x - 3 = \frac{11}{10}x - 1$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = -\frac{2}{5}x + 2 - \frac{3}{2}x + 3 = -\frac{19}{10}x + 5$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \left(-\frac{2}{5}x + 2\right)\left(\frac{3}{2}x - 3\right)$$

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$



الف) $(f+g)(2)$

$$f(2) + g(2) = \sqrt{2+2} + (-2+1) = 2 - 1 = 1$$

ب) $(f+g)(-3)$

تکین

$$f(-3) + g(-3) = \sqrt{-3+2} + g(-3) =$$

تعریف نشده

پ) $(fg)(\frac{1}{2})$

$$f(\frac{1}{2}) \times g(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2}+2} \times (-\frac{1}{2}+1)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}}$$



ت) $(f \circ g)(-4)$

$$f(g(-4)) = f(-1-4+1) = f(-4) = \sqrt{5+2} = \sqrt{7}$$

ث) $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$

$$\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\sqrt{0+2}}{0+1} = \sqrt{2}$$

ج) $(g \circ f)(-1)$

$$g(f(-1)) = g(\sqrt{-1+2}) = g(1) = -1+1 = 0$$

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) باز هم یک تابع خطی است.

$$y = ax + b \rightarrow y - b = ax \xrightarrow{\div a} x = \frac{y-b}{a}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a} = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

f^{-1} هم تابع خطی شد.

۱۲ تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می کند. تابعی بنویسید عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

واردن f را رسم : $y = \frac{9}{5}(x - 32) \xrightarrow{\times \frac{1}{9}} \frac{1}{9}y = x - 32$

$\frac{1}{9}y + 32 = x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{9}x + 32$
 x : سانتی گراد
 f^{-1} : فارنهایت

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پر فروش در حوزه خاطرات دفاع مقدس را می بینید :
 یکی از این کتاب ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.
 کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ های بعدی ۹ هزار نسخه به چاپ رسیده است.
 الف) تابع هایی بنویسید که تعداد نسخه های چاپ شده هر یک از این دو کتاب را بر حسب شماره چاپ نمایش دهند.
 ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه های چاپ شده هر دو کتاب را نمایش دهد.
 ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

الف) $f(x) = 10000 + (x-1)(7000) \quad x \geq 1$

$g(x) = 20000 + (x-1)(9000) \quad x \geq 1$

ب) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 30000 + (x-1)(16000) \quad x \geq 1$

برای ساده تر شدن رسم بهتر است روی محور y ها واحد را هزار نسخه در نظر بگیریم : (پ)

$f(x) = 10 + (x-1)7 = 7x - 7 + 10 = 7x + 3 \quad x \geq 1$



$$g(n) = 20 + (n-1)9 = 9n - 9 + 20 = 9n + 11 ; n \geq 1$$

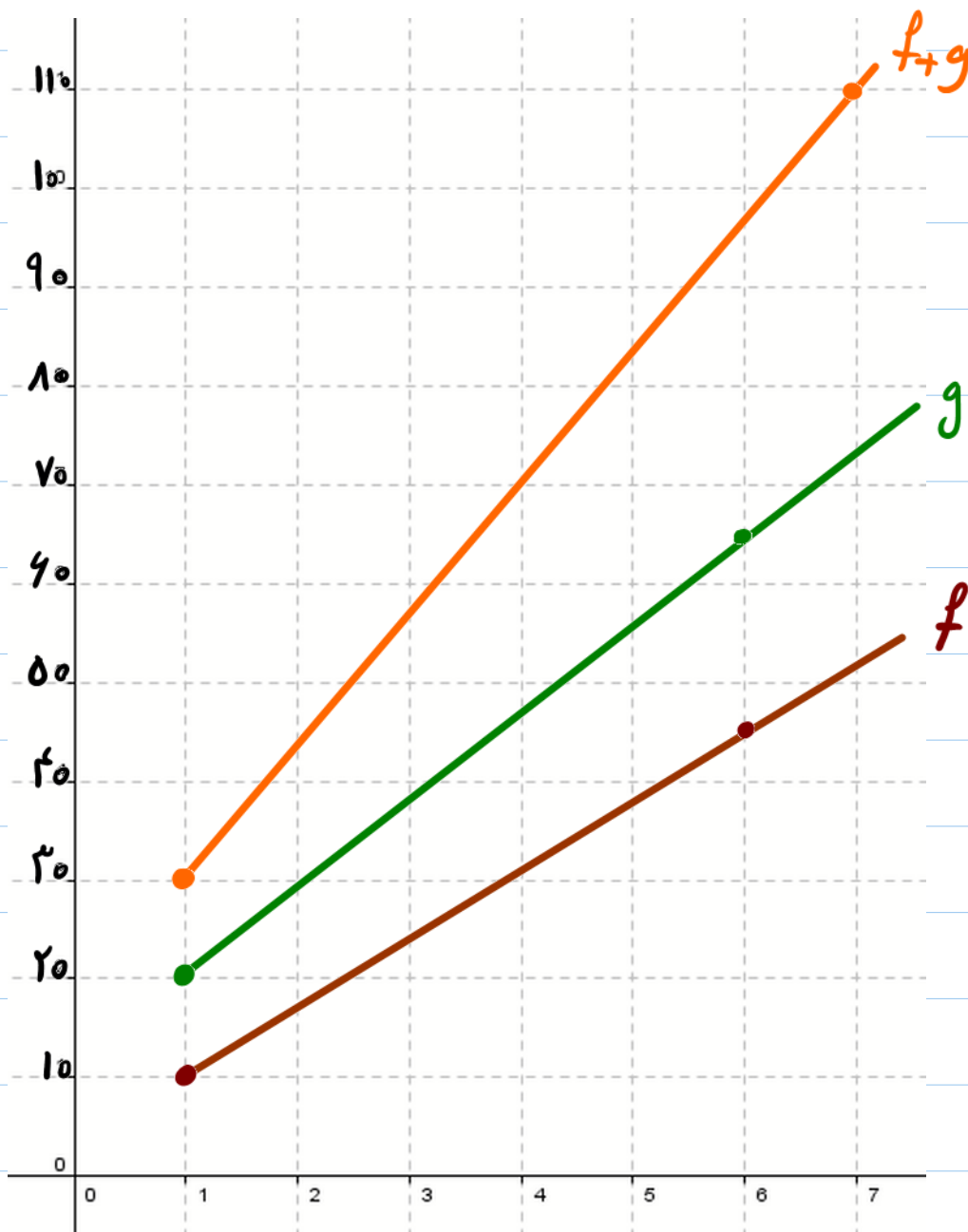
$$(f+g)(n) = 20 + (n-1)14 = 14n - 14 + 20 = 14n + 6 ; n \geq 1$$

$$f(n) \begin{array}{c|cc} n & 1 & 7 \\ \hline & 10 & 70 \end{array}$$

$$g(n) \begin{array}{c|cc} n & 1 & 7 \\ \hline & 20 & 70 \end{array}$$

$$f+g \begin{array}{c|cc} n & 1 & 7 \\ \hline & 30 & 110 \end{array}$$

نمودار تابع (فراينده)



نمودار

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی قسمت اول

جلسه اول: صفحات ۷۲ تا ۷۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع نمایی :

تعریف : اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد، تابع $f(x) = a^x$ را تابع نمایی

می نامیم.

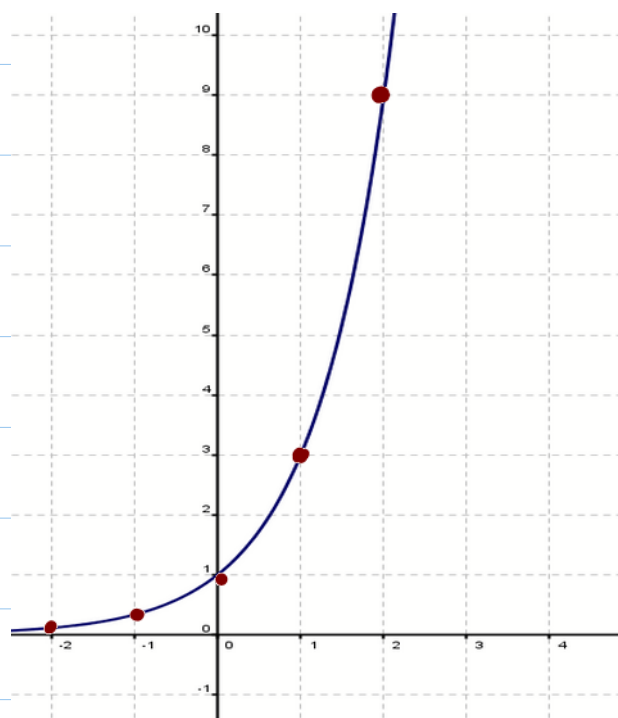
$y = 4^x$ و $y = (\frac{1}{4})^x$ ، $y = (\sqrt{3})^x$ تابع نمایی دی $y = 1^x$ و $y = (-2)^x$ نمایی نیستند.

برای آشنایی بیشتر با تابع نمایی بدست آوریم نیاز به رسم دانه داریم.

برای نمونه دو تابع $y = 3^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم می کنیم و نتیجه را مقسم می دهیم.

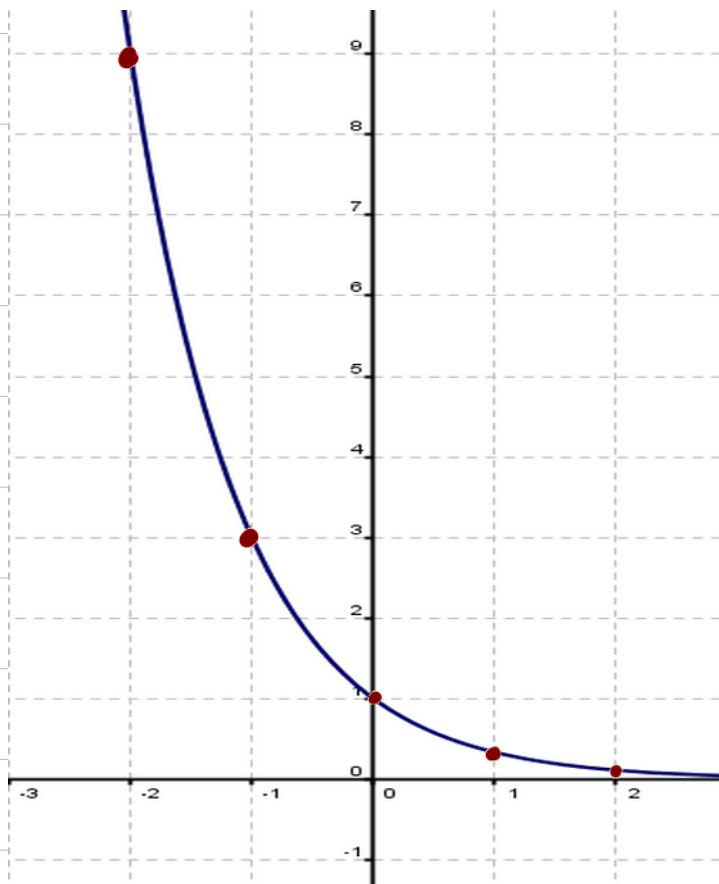
$y = 3^x$ (الف)

x	-2	-1	0	1	2
y	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$	1	3	9



$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\left(\frac{1}{a}\right)^{-2} = a^2$	$\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$	1	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$

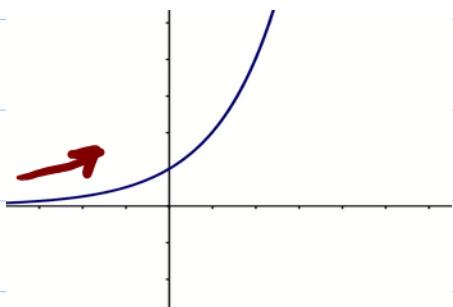


نتیجه: (الف) اگر $a > 1$ باشد نمودار تابع $f(x) = a^x$ به صورت زیر است:

$D = \mathbb{R}$, $R = (0, +\infty)$

تجربه بدید است

با افزایش متغیر x ، y ها هم افزایش می یابند.

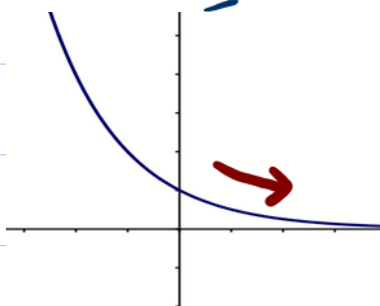


ب) اگر $0 < a < 1$ باشد نمودار تابع $f(x) = a^x$ به صورت زیر است:

$D = \mathbb{R}$, $R = (0, +\infty)$

تجربه بدید است

با افزایش متغیر x ، y ها کاهش می یابند.



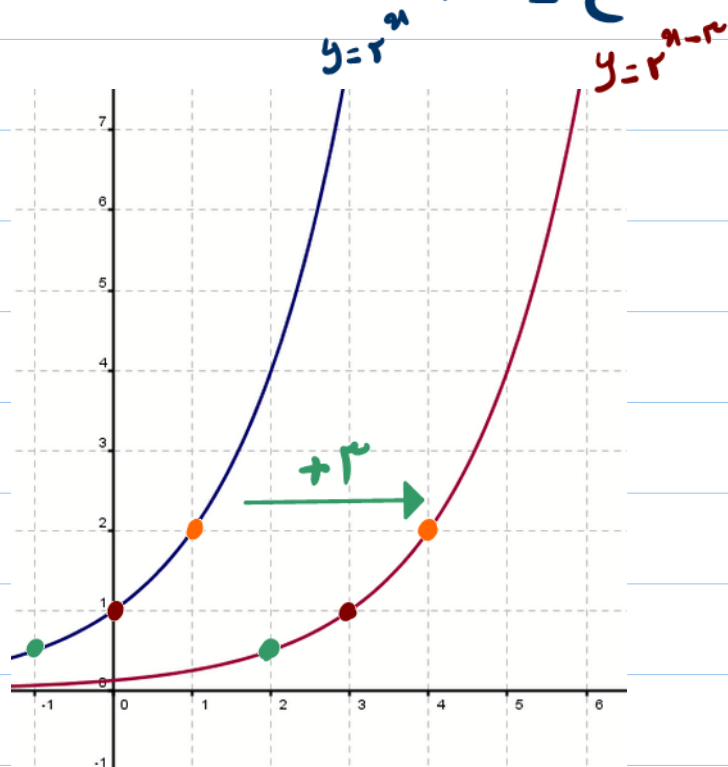


فرم کلی تابع نمایی: با شرطهای گفته شده برای a به صورت کلی $y = ba^{cx+d} + f$ است که b, c, d, f اعداد حقیقی و $b, c \neq 0$ باشند.

نکته: از نقطهٔ انتقال و توانش انتقال برای رسم نمودار توابع نمایی کمک می‌گیریم.

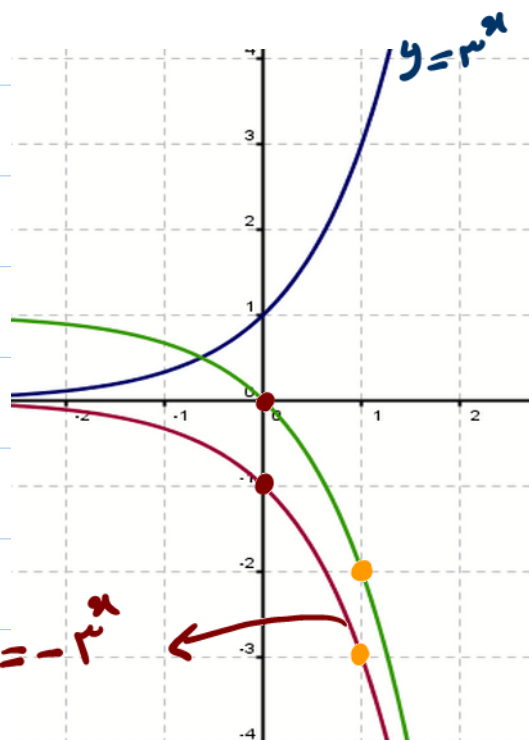
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = 2^{x-3}$



۲) $f(x) = 1 - 3^x$

$y = 1 - 3^x$ انتقال شوری



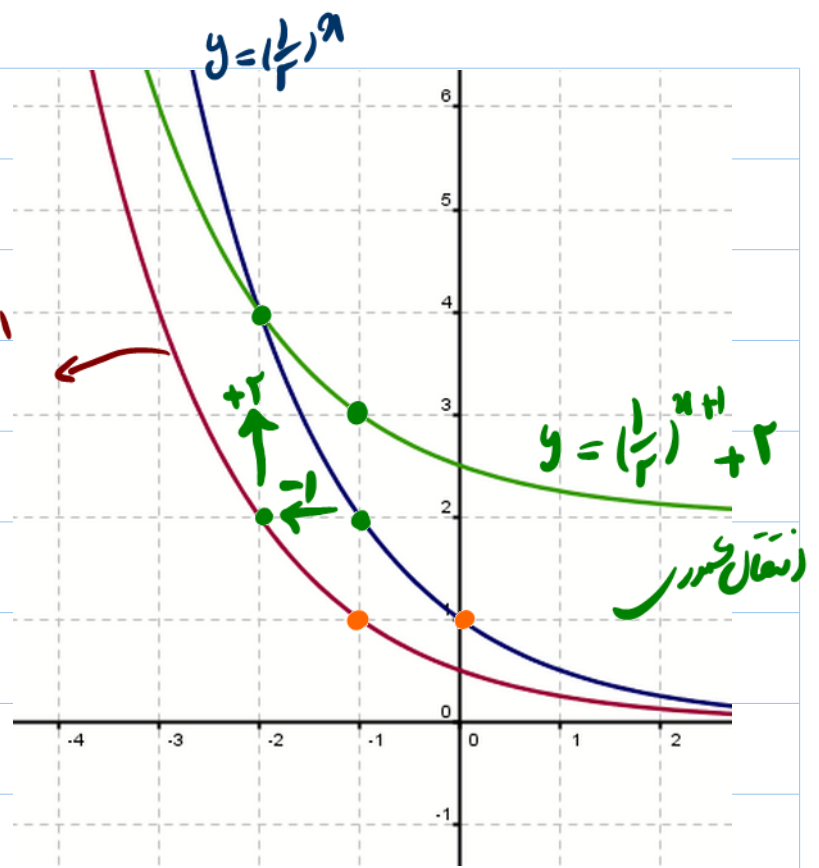
$y = -3^x$ انعکاس نسبت به محور x ها



$$2) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 2$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

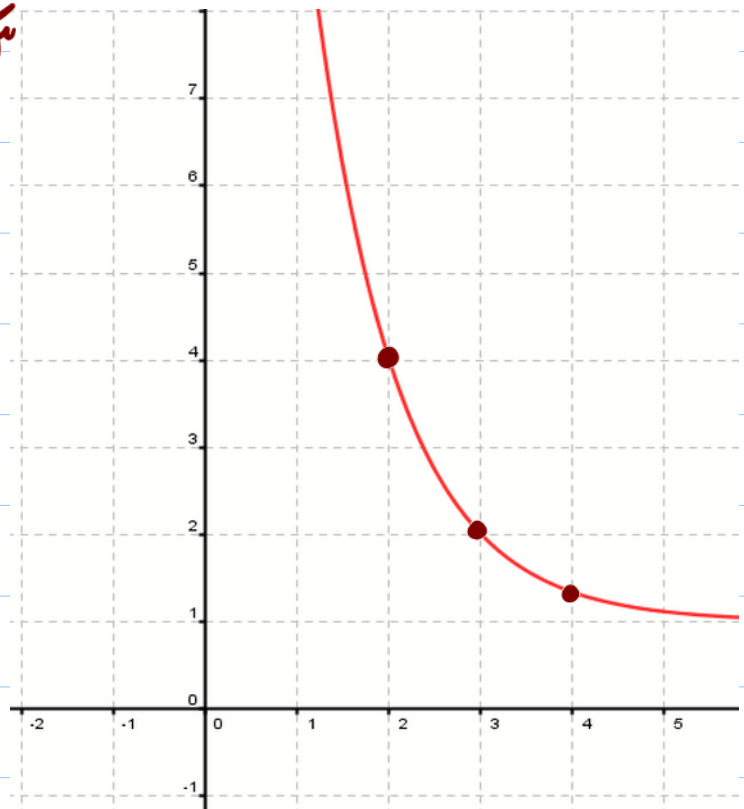
نقطه انتقال



$$3) f(x) = 3^{-x+2} + 1$$

نقطه انتقال : $-x+2=0 \rightarrow x=2$

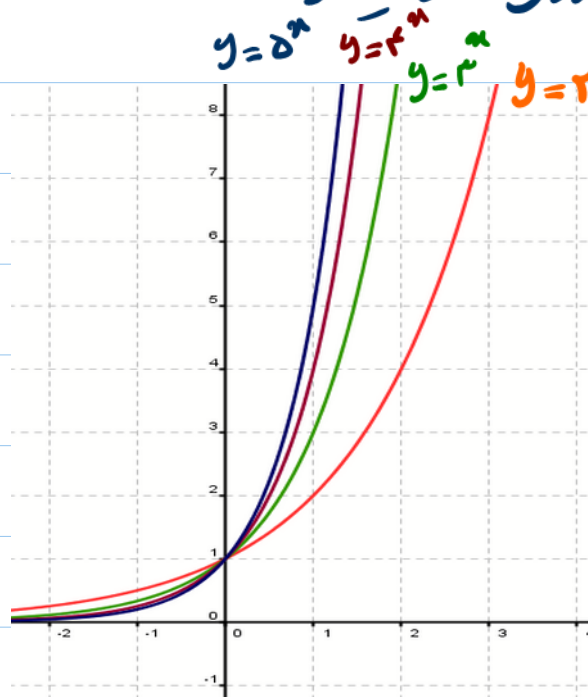
x	2	3	4
y	4	2	$3^{-1}+1 = \frac{4}{3}$



مقایسه توابع نمایی $y=a^n$, $y=b^n$, $y=c^n$, ...

(الف) اگر پایه ها نزدیک از یک باشند هر چه پایه بزرگتر شود نمودار تابع در راستای انتی

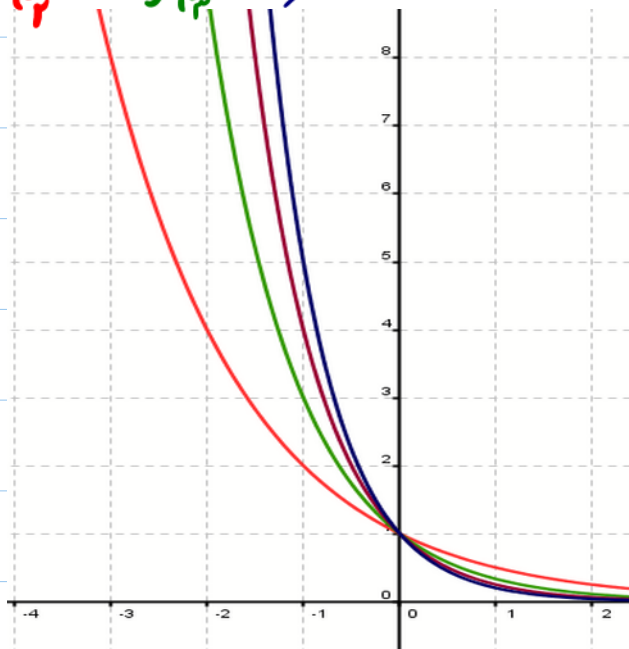
فشارده تری شود و به محور y ها نزدیک تری شود.



(ب) اگر پایه ها بین منفر دیک باشند هر چه پایه بزرگتر باشد نمودار در راستای انتی کشیده تر

$y=(\frac{1}{2})^n$, $y=(\frac{1}{3})^n$, $y=(\frac{1}{4})^n$, $y=(\frac{1}{5})^n$

هستند و از محور y ها دور تری شود.



فصل کتاب ریسی :

الف) نقطه $x = \sqrt{2}$ را روی محور x ها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $2^{\sqrt{2}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید.

$$2^{\sqrt{2}} \approx 2.6$$

ب) نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار

$$y = 2^x$$

$y = 2^x$ مقایسه کنید.

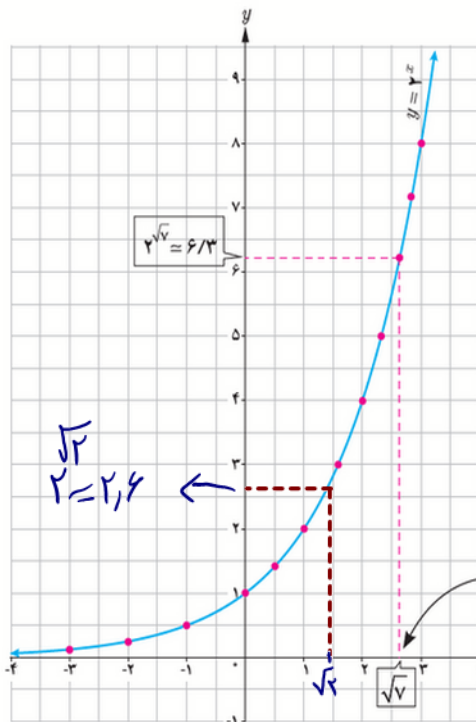
سندار $y = 2^x$ را نسبت به محور هماقترن می کنیم.

پ) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$2^4, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 2^2, 2^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

باتوجه به سندار تابع های داریم :

$$2^4 < 2^3 < 2^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^4$$



توجه کنید دامنه $y = 2^x$ شامل اعداد اصم مثل $\sqrt{2}$ است.

نتیجه! در سال های گذشته با توان های گویا آشنا شدیم. با حرف های جدید، از توان های حقیقی

هم با هم دربرگی های توان های گویا در شماره می کنیم.

دربرگی های توان حقیقی :

$$1) a^0 = 1$$

$$2) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$3) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$4) (a \times b)^x = a^x \times b^x$$

$$5) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$6) a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$7) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

مثال: اگر $f(x) = 1^x$ و $g(x) = 2^{x+0}$ ، حاصل $f(\frac{x}{3})g(x-2)$

$$f(\frac{x}{3}) = 1^{\frac{x}{3}} = (2^3)^{\frac{x}{3}} = 2^x$$

$$g(x-2) = 2^{2(x-2)+0} = 2^{2x-4+0} = 2^{2x+1}$$

$$f(\frac{x}{3})g(x-2) = 2^x \times 2^{2x+1} = 2^{x+2x+1} = 2^{3x+1}$$

معادله‌های نهایی :

معادله‌هایی که در آن‌ها مجهول در توان (نه) قرار گرفته است را معادله نهایی می‌نامیم.

چون تابع نهایی یک به یک است و a حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد، اگر $a^x = a^y$

کننده $x = y$. پس برای حل معادلات نهایی در صورت نزدیک باید هارا یکی می‌نامیم و با

حذف پایه و مساوی قرار دادن توان‌ها حاصل معادله حاصل، مجهول بدست می‌آید.

مثال: معادله $(\frac{2}{3})^{x+2} = (\frac{11}{16})^{x-1}$ را حل کنید.

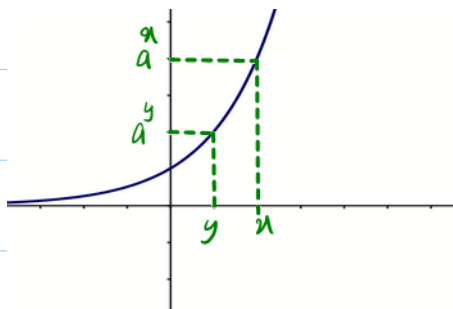
$$(\frac{11}{16})^{x-1} = (\frac{3^4}{2^4})^{x-1} = ((\frac{3}{2})^4)^{x-1} = ((\frac{2}{3})^{-4})^{x-1} = (\frac{2}{3})^{-4x+4}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x+4}$$

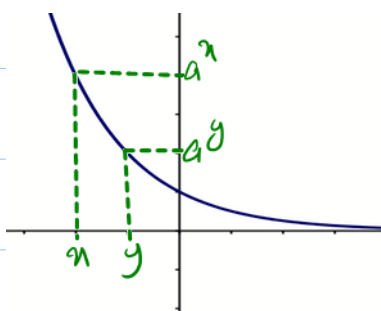
$$\rightarrow x+2 = -2x+4 \rightarrow 0x=2 \rightarrow x=\frac{2}{0}$$

نکاره های نهایی :

اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد داریم :



الف، اگر $a > 1$ و $a^x > a^y$ که نشانه $x > y$.



ب، اگر $0 < a < 1$ و $a^x > a^y$ که نشانه $x < y$.

یعنی در صورت لزوم پایه ها در طرف نام دی را می بینیم. اگر پایه بزرگتر از یک باشد

با حذف پایه حاجت نام دی حذف نمی شود و اگر پایه بین صفر و یک باشد با حذف پایه ها



جهت نامادری عوض هر سطر .

مثال: معبریم جواب نامعادله $۲^{۳-۳} < ۳۲^{۵-۳}$ را بیابیم .

$$(۲^۳)^{۳-۳} < (۳^۵)^{۵-۳} \Rightarrow ۲^{۳(۳-۳)} < ۳^{۵(۵-۳)}$$

$$\xrightarrow{۲>۱} ۳(۳-۳) < ۵(۵-۳)$$

$$\rightarrow ۳۳-۹ < ۲۵-۵۳ \rightarrow ۷۳ < ۳۱ \rightarrow ۳ < \frac{۳۱}{۷}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن

جلسه دوم: کاربرد تابع نمایی

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

کاربرد توابع نمایی

به صورت کلی یک تابع با نمایی $f(x) = k a^x$ که $k \in \mathbb{R}$ ، a عدد حقیقی،

مثبت و مخالف یک است، رفتار نمایی دارد که کاربرد زیادی در مسائل زیستی،

اقتصادی، مهندسی و... دارد.

مفهوم رشد نمایی

مثال های زیر را در نظر بگیرید:

- باتری ها می توانند هر ۲۴ ساعت یک بار دوباره شارژ شوند.

- اگر نرخ سود سالانه ۱۰۰ درصدی سرمایه خود داشته باشید، هر سال سرمایه شما دو

برابر خواهد شد.

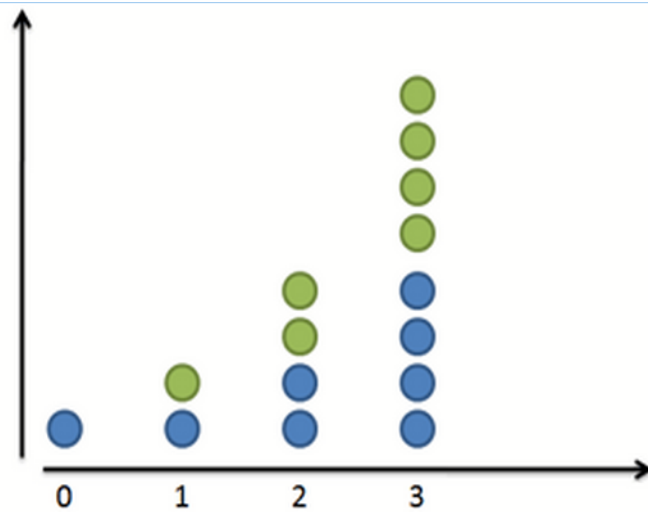
برای این مسائل می توانیم رفتار نمایی را به صورت $f(x) = 2^x$ بنویسیم. از طرفی چون

دوبار کردن، همان رشد ۱۰۰٪ است رابطه بالا را می توان به صورت زیر هم نوشت:

$$f(x) = (1 + 100\%)^x$$

این همان معادله قبل است. نقطه ۲ را به آن چیزی که واقعاً هست تغییر داده ایم.

حقیقتاً مقدار ۱ اولیه به علاوه ۱۰۰٪.



می‌توانیم هر عددی را به جای ۱۰۰٪ بنویسیم مثلاً ۵٪، ۲۵٪، ۲۰۰٪ و...

و نمودار رشد را برای آن نرخ رشد بدست آوریم.

معادله کلی رشد نهایی به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است که در آن $f(t)$

مقدار نهایی، c مقدار اولیه و r بیانگر میزان رشد یا صاف نرخ رشد، t زمان است.

تذکره: تابع $f(t) = c(1-r)^t$ را زوال نهایی می‌گویند.



مثال ۱) : مقدار گرم باتری در هر ساعت، ۱.۵ برابر می شود. اگر بعد از دو ساعت

مقدار باتری ۴.۵ گرم باشد، در پایان ساعت سوم مقدار باتری چقدر گرم

خواهد شد؟

$$f(t) = k(1.5)^t$$

$$f(2) = 4.5 \xrightarrow{\text{در } t=2} f(2) = 4.5 = k(1.5)^2$$

$$k(1.5)^2 = 4.5 \rightarrow k = \frac{4.5}{(1.5)^2} = \frac{4.5}{2.25} = 2$$

$$f(3) = 2(1.5)^3 = 2 \times 3.375 = 6.75 \text{ گرم}$$

مثال ۲) قیمت یک کالا ۴۰۰۰ تومان است، بی - طرحی بازخ نکوم ۳ درصد

در حال افزایش است. قیمت آن دو سال دیگر چقدر خواهد بود؟

$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow f(2) = 4000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2$$

$$f(2) = 4000 \times (1.03)^2 = 4000 \times 1.0609 = 4243.6 \text{ تومان}$$

مثال ۳) اگر جمعیت یک کشور به طارنی و با ضرب ثابت ۰.۲ در سال

چیز از چند سال، جمعیت این کشور ۱۸ برابر جمعیت اولیه می شود؟

$$(\quad) \quad \text{و} \quad (\quad)^2 = 1/8 \quad , \quad 1/9 \approx (1/98)^5$$

$$f(t) = c(1-r)^t$$

$$\begin{cases} r = 0.2 \\ f(t) = 18c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 18c = c(1-0.2)^t$$

$$\stackrel{\div c}{\Rightarrow} 18 = (1/98)^t$$

$$\frac{18 = (1/9)^2}{\rightarrow} (1/9)^2 = (1/98)^t \quad \frac{1/9 \approx (1/98)^5}{\rightarrow} ((1/98)^5)^2 = (1/98)^t$$

$$\Rightarrow (1/98)^{10} = (1/98)^t \Rightarrow t = 10$$

مفهوم نیمه عمر:

منظور از نیمه عمر یک ماده، مدت زمانی است که نیمی از مقدار اولیه آن از بین می رود.

اگر A_0 مقدار اولیه و A مقدار ماده بعد از n نیمه عمر باشد خواهیم داشت:

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



برای یافتن مقدار نیمه عمر از رابطه مقابل کمک می گیریم: $t = \frac{\ln 2}{\lambda}$ $T =$ طول نیمه عمر

مثال ۴) نیمه عمر یک ماده ۴ سال است. اگر در ابتدا ۱۰۰ میلی گرم از این ماده

موجود باشد، بعد از ۸۰ سال چند میلی گرم از این ماده از بین می رود؟

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 4. \\ A_0 = 100 \\ t = 80. \\ A = \text{مقدار ماده بعد از ۸۰ سال} \end{array} \right.$$

$$n = \frac{t}{T} = \frac{80}{4} = 2$$

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow A = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 100 \times \frac{1}{4} = 25$$

مقدار ماده ای که بعد از ۸۰ سال از بین می رود = ۱۰۰ - ۲۵

۷۵ میلی گرم

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن

جلسه سوم: حل تمرین صفحات ۷۷ تا ۷۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک توده معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

الف $f(t) = 100 \times 2^t$

ب $f(20) = 100 \times 2^{20}$



۲ نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 2^x + 1$ و $y = 2^x - 1$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y = a^x$ ، $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($a > 1$).

برای رسم تابع $y = a^x + 2$ ، هم‌راهِ $y = a^x$

را دو واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم

برای رسم تابع $y = a^x - 2$ ، هم‌راهِ $y = a^x$

را دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

۳ داروها در بدن با ادرار دفع می شوند. فرض کنید 10° میلی گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و

ساعت از رابطه $A(t) = 10 \cdot (0.8)^t$ به دست می آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می رود؟

الف) $A(8) = 10 \cdot (0.8)^8 \approx 1.47$

ب) $A(0) = 10$, $A(1) = 10 \cdot (0.8)^1 = 8$

بیت درصد $= \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} \times 100 = \frac{8 - 10}{10} \times 100 = -\frac{2}{10} \times 100 = -20\%$

۴ الف) سه عدد بین اعداد $3^{2/5}$ و $3^{\sqrt{10}}$ پیدا کنید.

$$3^{\sqrt{10}} < 3^2 < 3^{1.9} < 3^{1.8} < 3^{1.5}$$

ب) نامعادله توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.

$$(2^2)^{2x-1} > \frac{1}{2^{10}} \rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-10}$$

$$\xrightarrow{2>1} 4x-2 > -10 \rightarrow 4x > -8$$

$$\rightarrow x > -2$$

پ) اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، به طوری که $a^x > a^y > a^z$ ،
آن گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ ($a > 1$).

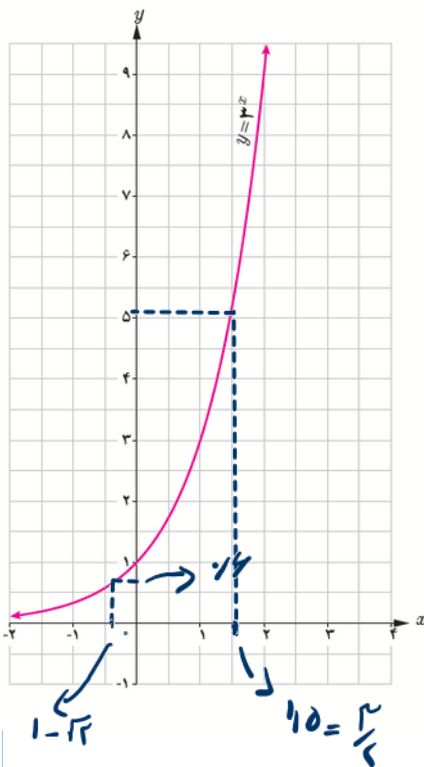
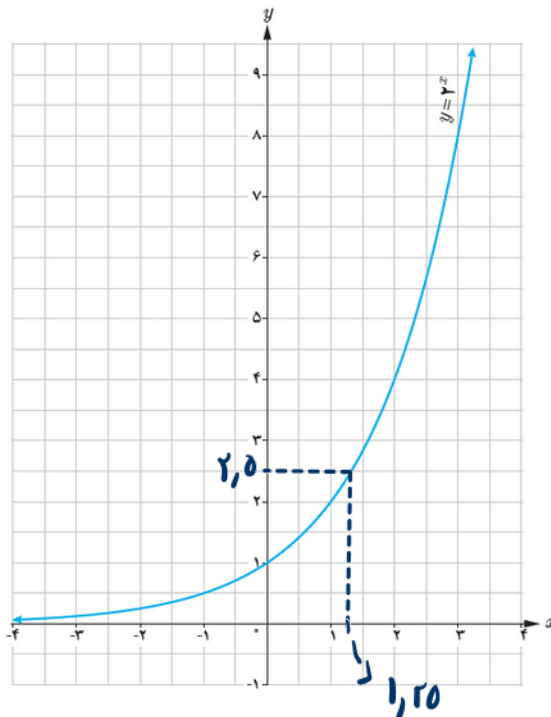
$$x > y > z$$

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس
به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

پ) $3^{\frac{3}{2}}$

ب) $2^{1/25}$

الف) $3^{1-\sqrt{2}}$
 $\approx 0.4 = 1 - 1.4$

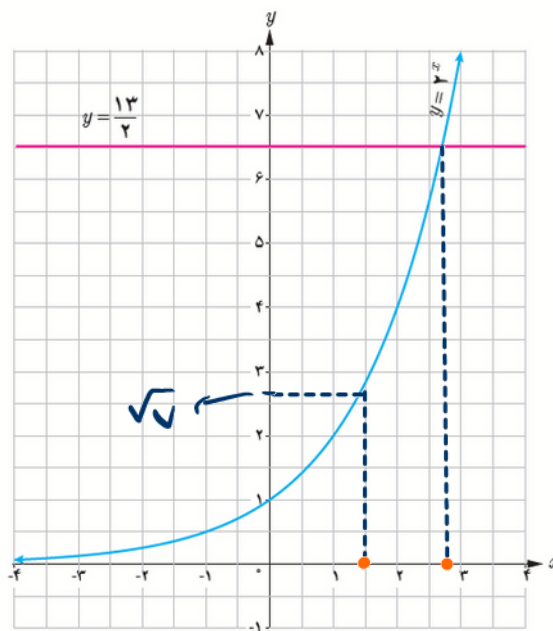


$$3^{1-\sqrt{2}} \approx 0.4$$

$$2^{\frac{1}{25}} \approx 0.19$$

$$2^{1.25} \approx 2.27$$

۶ الف) در شکل زیر خط $y = \frac{13}{2}$ نمودار $y = 2^x$ را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟
ب) خط $y = \sqrt{7}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y = 2^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



الف) $2 < x < 3$

ب) $1 < x < 2$

۷ در تصفیه آب، داخل فیلترها، لایه تمیزکننده ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی ها را حذف می کند و در نتیجه ۷۰ درصد از ناخالصی ها باقی می ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه $0.7 \times 0.7 = 0.49$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی ها باقی می ماند.

الف) درصد ناخالصی های موجود در آب از کدام رابطه به دست می آید؟

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می توان بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی های آب را از بین برد؟

الف) $f(x) = (1/7)^x$

تعداد لایه فیلتر

ب)

$(1/7)^x$ درصد از ناخالصی ها باقی ماند



$$(1/7)^t < \frac{t}{100} \rightarrow (1/7)^t < .1 \cdot t$$

بعد از $t \geq 10$



UPDF
WWW.UPDF.COM

WWW.UPDF.COM

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم قسمت اول

جلسه چهارم: صفحات ۸۰ تا ۸۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

زنجیره اصلی برای ترفیع تابع گارتم یا همگردد گارتم، ساده کردن عملیات پیچیده ضرب است. همچنین گارتم گری از اعداد، مقایسه ازنه را کوچکتری کند.

گارتم یک عدد در یک پایه، برابر با توانی از پایه است که آن عدد را می دهد. عنوان

مثال گارتم ۸ در پایه ۲ برابر ۳ است زیرا : $1 = 2^3 = 2 \times 2 \times 2$

در واقع حاصل $\log_2 8$ جواب این سوال است که چه قدر از عدد ۲ را باید در هم

ضرب کنیم تا عدد ۸ بدست آید؟ $\log_2 8 = 3$

از طرف دیگر می توان گارتم را واردن تابع نهایی در نظر گرفت.

عنوان مثال تابع $f(x) = 2^x$ را در نظر بگیرید. اگر ورودی x ، ۳ باشد خروجی

خروجی برابر ۸ می شود: $f(3) = 8$. تابع واردن این تابع باید ۳ را برگرداند و این را به

مثلاً ۱ را برگرداند ۳ را به عدد: $f(1) = 2$. طبق آنچه در بالا گفتیم این تابع را

گزارش دربارهٔ ۲ حرفه کنیم :

$$y = 2^x \Rightarrow \log_2 y = x$$

پس x را بر حسب y حساب می‌کنیم. طبق رابطه در فصل تابع برمی‌تابش و داریم

تابع گزیده به x را به $f(x)$ و y را به x تبدیل کنیم می‌توانیم : $f^{-1}(x) = \log_2 x$

تعریف : اگر a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد تابع $f(x) = a^x$ یک تابع درستی

دارد پذیراست. داریم این تابع را تابع گزیده با پایه a می‌نامیم و آن را

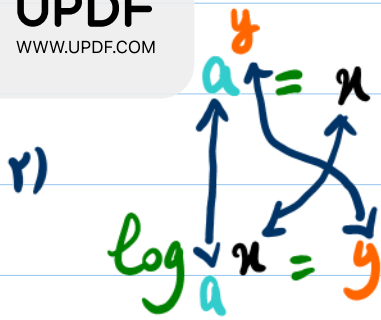
$$f(x) = \log_a x \text{ می‌نامیم.}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = (0, +\infty) \text{ و } D_f = R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

نتیجه : خود معادله گزارش را به یکی از دو شکل زیر به خاطر بسپارید :

$$1) \quad y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

به توان



مثال: گرام های زیر را بسازید.

۱) $\log_{10} 100 = 2$
بهترین

$10^2 = 100$

۲) $\log_3 1 = 0$

$3^0 = 1$

۳) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

۴) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$

مثال: معادله معادله دارون $f(x) = \log_p(x-2)$ را بسازید.

$y = \log_p(x-2)$ $\xrightarrow{\text{تعریف کنیم}}$ $p^y = x-2$
بهترین

$\rightarrow p^y + 2 = x \rightarrow f(x) = p^{x-2}$

مثال: اگر $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 3$ باشد. ضابطه تابع وارون f^{-1} را بیابید.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 3 \rightarrow y - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \rightarrow y - 3 = \frac{1}{2^{x-1}}$$

$$\xrightarrow[\text{معکوس}]{\text{دوطرف}} \frac{1}{y-3} = 2^{x-1} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \log_2 \frac{1}{y-3} = x-1$$

به توان

$$\log_2 \frac{1}{y-3} + 1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \log_2 \frac{1}{x-3}$$

تذکر: به یاد نگه دارید مبنا هم گفته می شود. هرگاه مبنا یا پایه نگه داریم ۱ باشد بدون

نگه داریم دشواری می کنیم. هرگاه مبنا یا پایه نگه داریم نوشته نشود آن را ۱ در نظر می گیریم.

مثال: اگر $f(x) = 4 + \log(2x-4)$ ، مقدار $f^{-1}(4)$ را بیابید.

$$f^{-1}(4) = a \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} 4 = f(a) \Rightarrow 4 = 4 + \log(2a-4)$$

$$\rightarrow 0 = \log(2a-4) \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} 10^0 = 2a-4$$

به توان

$$100 = 2a-4 \rightarrow 2a = 104 \rightarrow a = 52 \Rightarrow f^{-1}(4) = 52$$



نکته: همواره در تعریف تابع گوییم دامنه تابع $y = \log_a x$ به صورت

$(0, +\infty)$ است. در حالت کلی برای یافتن دامنه تابع $y = \log_a u$ باید $u > 0$ را در نظر بگیریم.

شرایط به شرط $u > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ را بنویسیم.

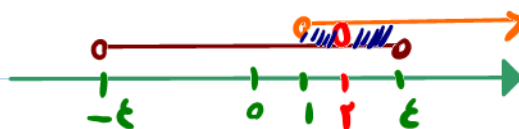
مثال: دامنه تابع $f(x) = \log_{(x-1)}(14-x^2)$ را بدست آوریم.

$$① \quad 14 - x^2 > 0 \rightarrow 14 > x^2 \rightarrow x^2 < 14 \rightarrow -\sqrt{14} < x < \sqrt{14}$$

$$② \quad x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$③ \quad x - 1 \neq 1 \rightarrow x \neq 2$$

$$D_f = ① \cap ② \cap ③ = (-\sqrt{14}, \sqrt{14}) - \{2\}$$



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل
معادله‌های لگاریتمی قسمت اول

جلسه پنجم صفحات: ۸۶ و ۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

ویژگی‌های لگاریتم :

برای محاسبه تکرار لگاریتم‌ها، از ویژگی‌های زیر که صحتی با استفاده از تعریف لگاریتم اثبات می‌شوند، استفاده می‌کنیم.

ویژگی ۱. لگاریتم یک در هر پایه‌ای عدد مثبت و مخالف یک، برابر صفر است یعنی:

$$\log_a 1 = 0$$

مثال: $\log_{10} 1 = 0$, $\log_2 1 = 0$, $\log_{1/10} 1 = 0$

ویژگی ۲. لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک در مبنای خودش مساوی یک است یعنی:

$$\log_a a = 1$$

مثال: $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$, $\log_2 2 = 1$

ویژگی ۳. اگر عددی عبارت جدوی لگاریتم توان در باشد، توان را ضرب لگاریتم قرار می‌دهیم یعنی:

$$\log_a x^n = n \log_a x$$



$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \times 1 = 3$$

مثال:

$$\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\log \frac{1}{100} = \log \frac{1}{10^2} = \log 10^{-2} = -2 \log 10 = -2$$

دستی ۴. لگاریتم ضرب در عدد برابر است با جمع لگاریتم‌های آن یعنی:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_4 12 + \log_4 3 = \log_4 12 \times 3 = \log_4 36 = \log_4 6^2 = 2 \log_4 6 = 2$$

مثال:

$$* \log 2 + \log 5 = \log 2 \times 5 = \log 10 = 1$$

دستی ۵. لگاریتم تقسیم در عدد برابر است با تفریق لگاریتم‌های آن یعنی:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2$$

مثال:

$$\log_2 512 - \log_2 2 = \log_2 \frac{512}{2} = \log_2 256 = \log_2 2^8 = 8 \log_2 2 = 8$$



$$\log_a x^n = \frac{n}{m} \log_a x$$

دوری ۶.

$$\log_8 32 = \log_{2^3} 2^5 = \frac{5}{3} \log_2 2 = \frac{5}{3}$$

مثال:

$$\log_{\sqrt{4}} 216 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{6}{3}} = \frac{\frac{6}{3}}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = 4$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

دوری ۷.

مثال: اگر $\log_2 3 = n$ ، مقدار $\log_{12} 18$ را بر حسب n بیابید.

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (2^1 \times 3^2)}{\log_2 (2^2 \times 3^1)} = \frac{\log_2 2^1 + \log_2 3^2}{\log_2 2^2 + \log_2 3^1} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3} = \frac{1 + 2n}{2 + n}$$

نتیجه: اگر جای a و x تراز هم دریم:

$$\log_a x = \frac{\log_n x}{\log_n a} \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{\log_n a} \quad \text{و} \quad \log_a x \times \log_n a = 1$$

مثال:

$$\frac{1}{\log_4 4} + \frac{1}{\log_4 9} = \log_4 4 + \log_4 9 = \log_4 4 \times 9$$

$$= \log_4 36 = \log_4 6^2 = 2$$



$$\log_a^x b = x \log_a b$$

دستی ۸.

$${}_4 \log_9^{\frac{1}{2}} = {}_4 \log_9^{\frac{1}{2}} = {}_4 \log_{3^2}^{\frac{1}{2}} = {}_4 \log_3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3^{\frac{1}{2}}$$

مثال:

$$= \frac{1}{2} \log_3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

نتیجه: اگر جای a و b قرار دهیم داریم:

$$\log_a^x a = x \log_a a \Rightarrow \log_a^x a = x$$

$$\sqrt[2]{\log_2^2} = 2$$

مثال:

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل
معادله‌های لگاریتمی قسمت دوم

جلسه ششم صفحات: ۸۶ و ۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مثال‌های بیشتری از نگارتم :

۱) حاصل عبارت‌های گسسته زیر را بیابید .

$$\begin{aligned} \text{الف) } \log_2 \sqrt[5]{8} + \log_2 9 &= \log_2 8^{\frac{1}{5}} + \log_2 3^2 \\ &= \frac{1}{5} \log_2 2^3 + 2 \log_2 3 = \frac{3}{5} \log_2 2 + 2 = \frac{3}{5} + 2 = \frac{13}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } 5 \log_2 \sqrt[4]{11} - 2 \log_2 \frac{1}{49} + 3 \log_2 100 &= 5 \log_2 11^{\frac{1}{4}} - 2 \log_2 7^{-2} + 3 \log_2 10^2 \\ &= 5 \log_2 11^{\frac{1}{4}} - 2 \log_2 7^{-2} + 3 \log_2 10^2 \\ &= 5 \times \frac{1}{4} \log_2 11 - 2(-2) \log_2 7 + 3(2) \log_2 10 = \frac{5}{4} + 4 + 6 = 10\frac{5}{4} \end{aligned}$$

۲) اگر $\log 2 = \frac{1}{5}$ و $\log 3 = \frac{1}{4}$ باشند ، مقدار $\log \frac{1100}{\sqrt[5]{343}}$ را بیابید .

$$\begin{aligned} \log 1100 - \log \sqrt[5]{343} &= \log 2^4 \times 10^2 - \log \sqrt[5]{7^3} \\ &= \log 2^4 + \log 10^2 - \log 7^{\frac{3}{5}} = 4 \log 2 + 2 \log 10 - \frac{3}{5} \log 7 \\ &= 4 \times \frac{1}{5} + 2 - \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{5} + 2 - \frac{3}{20} = \frac{4}{5} + \frac{20}{10} - \frac{3}{20} = \frac{4}{5} + \frac{40}{10} - \frac{3}{20} = \frac{4}{5} + 4 - \frac{3}{20} = 4\frac{17}{20} \end{aligned}$$

(۳) حاصل عبارت های گسسته زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt{r(\log r)^2 + (\log \frac{1}{r})^2}$

$$\log r = \log r^1 = r \log r$$

$$\log \frac{1}{r} = \log r^{-1} = -\log r$$

$$= \sqrt{r(r \log r)^2 + (-\log r)^2}$$

$$= \sqrt{r(r^2)(\log r)^2 + (\log r)^2} = \sqrt{r^3(\log r)^2 + (\log r)^2} = \sqrt{4(\log r)^2}$$

$$= 2 \log r$$

ب) $\log \frac{1}{\sqrt[4]{r^2}} = \log \frac{r^2}{r^4}$

$$= \log r^{\frac{2}{4}} = \frac{2}{4} \log r = \frac{1}{2} \log r = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

ج) $\log(\omega + r\sqrt{4}) + \log(\omega - r\sqrt{4}) = \log(\omega^2 - (r\sqrt{4})^2)$

$$= \log(\omega^2 - (r^2 \cdot 4)) = \log(10 - 4) = \log 6 = 0$$

د) $\log \frac{(\sqrt{5} + r)}{(\sqrt{5} - r)}$

$$(\sqrt{5} + r)(\sqrt{5} - r) = (\sqrt{5})^2 - r^2 = 5 - r^2 = 1$$

$$\sqrt{5} + r = \frac{1}{\sqrt{5} - r}$$

$$= \log \frac{1}{\sqrt{5} - r} = \log (\sqrt{5} - r)^{-1} = -\log \sqrt{5} - r = -1$$



$$\frac{1}{1+\log_r^r} + \frac{1}{1+\log_r^r} = \frac{1}{1+\log_r^r} + \frac{1}{\frac{1}{1} + \log_r^r}$$

$$= \frac{1}{1+\log_r^r} + \frac{1}{\frac{\log_r^r + 1}{\log_r^r}} = \frac{1}{1+\log_r^r} + \frac{\log_r^r}{1+\log_r^r} = \frac{1+\log_r^r}{1+\log_r^r} = 1$$

ج) $(a^{\log_r^r})^{\log_a^a} = a^{\log_r^r \times \log_a^a}$

ملاحظة: $\log_r^r \times \log_a^a = \frac{\log_r^r}{\log_r^r} \times \frac{\log_a^a}{\log_a^a} = \frac{\log_r^r}{\log_r^r} \times \frac{\log_r^r}{\log_a^a}$

$$= \frac{\log_r^r}{\cancel{r \log_r^r}} \times \frac{\cancel{r \log_r^r}}{\log_a^a} = \frac{r}{r} \frac{\log_r^r}{\log_a^a} = \frac{r}{r} \log_a^a$$

$$\text{ناتج} = a^{\frac{r}{r} \log_a^a} = (a^{\log_a^a})^{\frac{r}{r}} = r^{\frac{r}{r}} = \sqrt{r^r} = r\sqrt{r}$$

ج) $\log_{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a}} + \log_{\sqrt{a}} \sqrt{a} + 1 \cdot \log_r^r$

$$\log_{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a}} = \log_{r^{\frac{r}{r}}} r^{-\frac{r}{r}} = \frac{-\frac{r}{r}}{\frac{r}{r}} \log_r^r = -\frac{1r}{r} = -1$$

$$\log_{r^{\frac{r}{r}}} r^{\frac{r}{r}} = \frac{\frac{r}{r}}{\frac{r}{r}} \log_r^r = \frac{r}{r}$$



$$\log_2 2^2 = 1, \log_2 2^4 = 2, \log_2 2^8 = 3$$

$$\text{حاصل عبارت} = -4 + \frac{2}{8} + 9 = 4 + \frac{2}{8} = \frac{27}{8}$$

(۴) اگر $3^a = A$ ، مقدار $\log_3 A^2$ را بر حسب a بدست آورید.

$$\log_3 (3^a)^2 = \log_3 3^{2a} = \log_3 3^{2+2a}$$

$$= (2+2a) \log_3 3 = 2+2a$$

(۵) اگر $\log_2 2 = a$ ، $\log_2 2 = b$ ، مقدار $\log_2 \sqrt[4]{2}$ را بر حسب a ، b بیابید.

$$\log_2 \sqrt[4]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_2 2 = \frac{1}{4} \log_2 (2^2 \times 2)$$

$$= \frac{1}{4} (\log_2 2^2 + \log_2 2) = \frac{1}{4} (2 \log_2 2 + \log_2 2)$$

$$= \frac{1}{4} (2a + b)$$

(۶) اگر $\log_2 3 = \frac{5}{8}$ باشد، مقدار $\log_{12} 6$ کدام است؟

$$\frac{7}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{8}{11} \quad (۲)$$

$$\frac{13}{18} \quad (۱)$$

$$11 = \log_2 2 = \log_{2^2} 2^2 = \frac{1}{2} \log_2 2^2 \rightarrow \log_2 2^2 = 1, 4$$



$$\log_{12} 12^{\frac{1}{2}} = \frac{\log_{12} 12^{\frac{1}{2}}}{\log_{12} 12} = \frac{\log_{12} 12 + \log_{12} 1}{\log_{12} 12 + \log_{12} 1} = \frac{1 + 1}{2 + 1} = \frac{2}{3} = \frac{1}{1.5}$$

گزینہ ۱

(v) اگر $(\frac{5}{4})^{2x-1} = (\frac{125}{8})^x$ باشد، $\log_8(9x+1)$ کددام است؟

$$\frac{3}{2} \text{ (f)}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (g)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (h)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (i)}$$

$$\left(\frac{1}{0}\right)^{2n-1} = \left(\left(\frac{0}{1}\right)^3\right)^{2n} \rightarrow \left(\frac{1}{0}\right)^{2n-1} = \left(\left(\frac{1}{0}\right)^{-3}\right)^{2n}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{0}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{0}\right)^{-6n} \rightarrow 2n-1 = -6n$$

$$\rightarrow 2n + 6n = 1 \rightarrow 8n = 1 \rightarrow n = \frac{1}{8}$$

$$n = -1 \rightarrow \log_8(-9+1) = \log_8^{-8} \quad \times$$

$$n = \frac{1}{8} \rightarrow \log_8(9 \times \frac{1}{8} + 1) = \log_8 2 = \log_{2^3} 2^1$$

$$= \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3}$$

گزینہ ۱

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل
معادله‌های لگاریتمی قسمت سوم

جلسه هفتم صفحات: ۸۷ تا ۸۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

معادلاتی که در آنجا، مجهول در جلوی لگاریتم یا در پایه قرار دارد را معادلات لگاریتمی می‌گویند.
برای حل معادلات لگاریتمی در صورت لزوم از ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنیم تا به یکی از دو صورت زیر درآید:

۱) هر دو طرف فقط یک عبارت لگاریتمی هم پایه باشد. در این حالت چون تابع لگاریتم یک به یک است می‌توانیم لگاریتم‌ها را از دو طرف خط بزنیم و معادله حاصل را حل کنیم.

$$\text{غنی:} \quad \log_a u = \log_a v \Rightarrow u = v$$

۲) یک طرف لگاریتم و طرف دیگر عدد (یا عبارت) باشد. در این حالت از تعریف لگاریتم استفاده می‌کنیم و معادله را به شکل توان می‌نویسیم غنی:

$$\log_a u = b \Rightarrow u = a^b$$

تذکره مهم: بعد از یافتن جواب یا جواب‌ها آن‌ها را در معادله لگاریتمی قرار می‌دهیم.

طبق آنچه در تویج نگارشی گفتیم باید جوابی نگاریم مثبت و منهای مثبت ری

یک باشد. جوابی که یکی از شرطها را نقض کند مورد قبول نیست.

مثال: معادلات گارسی زیر را حل کنید.

$$\log(2x-1) + \log(x+3) = \log 20 - \log 2 \quad \text{الف}$$

$$\log(2x-1)(x+3) = \log \frac{20}{2} \rightarrow \log(2x^2 + 4x - 2) = \log 10$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 2 = 10 \rightarrow 2x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$\Delta = 20 - 4(2)(-12) = 20 + 96 = 116 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{116}}{4} \begin{cases} \frac{-4 + \sqrt{116}}{4} = 2 \checkmark \\ \frac{-4 - \sqrt{116}}{4} = -\frac{4}{2} \times \end{cases}$$

$$x = -\frac{4}{2} \rightarrow \log(2x(-\frac{4}{2}) - 1) = \log -10 \times, \log(-\frac{4}{2} + 3)x$$

$$\text{ب) } \log(x+1) = \frac{1}{3} \log(x^2 + x^2 + 3)$$

$$\times^3 \rightarrow 3 \log(x+1) = \log(x^2 + x^2 + 3)$$

$$\rightarrow \log(x+1)^3 = \log(x^2 + x^2 + 3)$$

$$\rightarrow x^2 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 + x^2 + 3 \rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$$



$$\Delta = 9 - 4 = 5 \quad f(r)(-r) = 9 + 14 = 23 \rightarrow n = \frac{-r \pm 0}{4} < \begin{matrix} \frac{1}{r} \checkmark \\ -r \times \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \log_r(rn+1) - \log_r(n+r) = 1$$

$$\rightarrow \log_r \frac{rn+1}{n+r} = 1 \rightarrow \frac{rn+1}{n+r} = r^1 \rightarrow rn+1 = rn+r$$

تویں

$$\rightarrow rn - rn - 0 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 4(r)(-0) = 9 + 4 = 13$$

$$n = \frac{r \pm 0}{4} < \begin{matrix} \frac{0}{r} \checkmark \\ -1 \checkmark \end{matrix}$$

$$=) \log_n(rn+1) = r - \log_n(n-r)$$

$$\rightarrow \log_n(rn+1) + \log_n(n-r) = r$$

$$\rightarrow \log_n(rn+1)(n-r) = r \rightarrow (rn+1)(n-r) = n^r$$

$$rn^r - 1 \cdot n + 1 \cdot n - r \cdot 1 = n^r \rightarrow rn^r - 1 \cdot n - r \cdot 1 = 0$$

$$\div r \rightarrow n^r - 0 \cdot n - r \cdot 1 = 0 \rightarrow (n-1)(n+r) = 0$$

$$< \begin{matrix} n = 1 \checkmark \\ n = -r \times \end{matrix}$$



$$\text{ii) } \log_r(r + \log_r n) = r$$

بہ توان

$$\rightarrow r + \log_r n = r^r \rightarrow \log_r n = r^r - r$$

$$\rightarrow \log_r n = r \rightarrow n = r^r = 9$$

بہ توان

$$\text{ج.) } \log_\delta n + \log_{\frac{1}{\delta}} n - r \log_{\frac{1}{\delta}} n = \log_r \delta$$

$$\rightarrow \log_\delta n + \log_{\frac{1}{\delta}} n - r \log_{\frac{1}{\delta}} n = \log_r \delta$$

$$\rightarrow \log_\delta n + \frac{1}{\frac{1}{r}} \log_\delta n - r \times \frac{1}{r} \log_\delta n = r \log_r \delta$$

$$\rightarrow \log_\delta n + r \log_\delta n - \log_\delta n = r \log_r \delta$$

$$\rightarrow r \log_\delta n = r \log_r \delta \rightarrow \log_\delta n = \log_r \delta$$

بہ توان

$$\rightarrow n = \delta^{\log_r \delta}$$

کاربرد نگارشم:

۱) مسائل زلزله : اگر قدرت زلزله (زمن دوره M ریشتر و انرژی آزاد شده

از آن E (با واحد اِرت) باشد داریم:

$$\log E = 11.8 + 1.5 M$$

مثال: در یک زلزله ۵ ریشتری مقدار انرژی آزاد شده چقدر است؟

$$\log E = 11.8 + 1.5 \times 5 = 11.8 + 7.5 = 19.3 \rightarrow E = 10^{19.3}$$

۲) مثل نیمه عمر، رشد و زوال :

هرگاه در این مثل مجهول در توان باشد (غالباً) با گرفتن نگارشم از دو طرف سری

و استفاده از ویژگی $\log a^n = n \log a$ و مقدار نگارشم داده شده، مقدار مجهول را می‌یابیم.
مثال:

مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر مورد نظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی مانده را از دست

بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ ($\log 3 = 0.48$)

۲۴۰ (۴)

۲۷۰ (۳)

۳۰۰ (۲)

۳۶۰ (۱)





ما با درصد ۲۰ روز

$$A = A_0 (1 - \frac{1}{10})^t \xrightarrow{\div 24} \frac{1}{2} = (0.9)^t \xrightarrow{\log} \log \frac{1}{2} = \log 0.9^t$$

$$\log 2^{-1} = t \log \frac{9}{10} \rightarrow -\log 2 = t (\log 9 - \log 10)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{48} = t (2 \times \frac{1}{48} - 1) \rightarrow t = \frac{-\frac{1}{48}}{-\frac{1}{24}} = 12 \text{ روز}$$

$$\text{روز} = 12 \times 2 = 24$$

مثال: یک قایق کاملاً باری روزانه ۵ درصد بادش را از دست می‌دهد. باد این قایق پس

از چند روز به نصف بار روز اول می‌رسد؟ ($\log 19 = 1.287$, $\log 2 = 0.301$)

$$\frac{1}{2} A_0 = A_0 (1 - 0.05)^t \rightarrow \frac{1}{2} = 0.95^t$$

$$\xrightarrow{\log} \log \frac{1}{2} = \log 0.95^t \rightarrow \log 2^{-1} = t \log 0.95$$

$$\rightarrow -\log 2 = t \log \frac{19}{20} \rightarrow -\log 2 = t (\log 19 - \log 2 - \log 10)$$

$$\rightarrow -\log 2 = t (\log 19 - \log 2 - \log 10)$$

$$\rightarrow -0.301 = t (1.287 - 0.301 - 1) \rightarrow -0.301 = t (-0.014)$$

$$t = \frac{-0.301}{-0.014} = 21.5$$

مثال: نیمه عمر یک ماده رادیو اکتیو ۱۵ سال است. پس از چند سال از ۱۰۰ میلی گرم

۴ میلی گرم باقی می ماند؟ ($\log 2 = 0.3$, $\log 14 = -0.15$)

$$t_0 = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{15}} \rightarrow \frac{4}{100} = 2^{-\frac{t}{15}}$$

$$\log \rightarrow \log \frac{4}{100} = \log 2^{-\frac{t}{15}}$$

$$\rightarrow -0.15 = -\frac{t}{15} \times 0.3 \rightarrow t = \frac{-0.15}{-0.02} = 7.5$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

رسم توابع لگاریتمی

جلسه هشتم

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

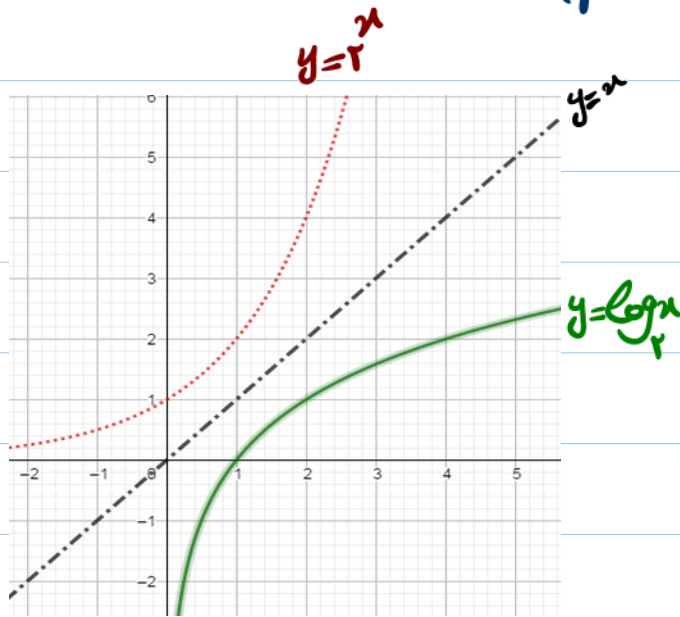
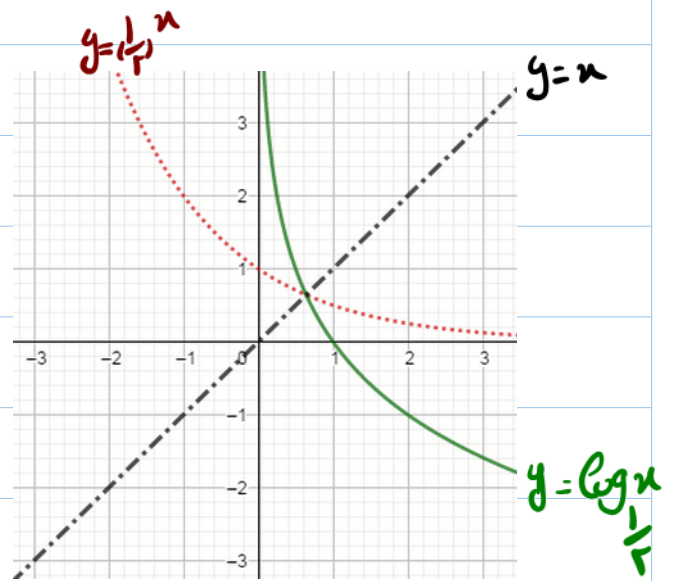
اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

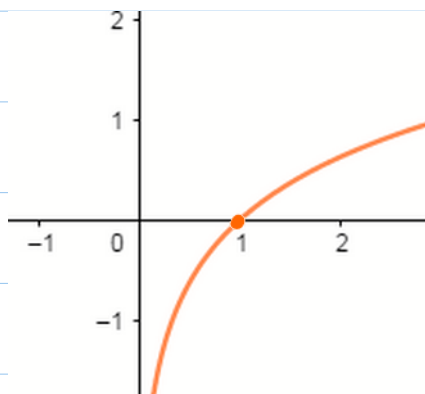
رسم نمودار تابع گسسته :

همانگونه که گفتیم تابع گسسته دارای تابع معکوس است. پس نمودار آن متوسعه نمودار تابع معکوس

نسبت به خط $y=x$ (نیم‌راشه اول و دوم) است.

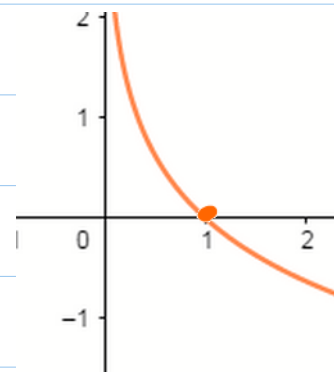


در حالت کلی نمودار تابع $y=\log_a x$ با توجه به مقدار a به یکی از دو صورت زیر است:



$a > 1$

افزاینده، $D=(0, +\infty)$, $R=\mathbb{R}$



$0 < a < 1$

کاهنده، $D=(0, +\infty)$, $R=\mathbb{R}$



برای رسم توابع لگاریتمی ساده مانند $y = \log_a x$ از روش نقطه‌ای استفاده می‌کنیم.

سه مقدار زیر را به x می‌دهیم :

۱) مبدا ۲) یک ۳) معکوس مبدا

مثال: مندرار سه تابع $y = \log_2 x$ ، $y = \log_3 x$ و $y = \log_5 x$ را رسم کنید.

با یکدیگر مقایسه کنید.

$$y = \log_2 x$$

x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-1	0	1

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

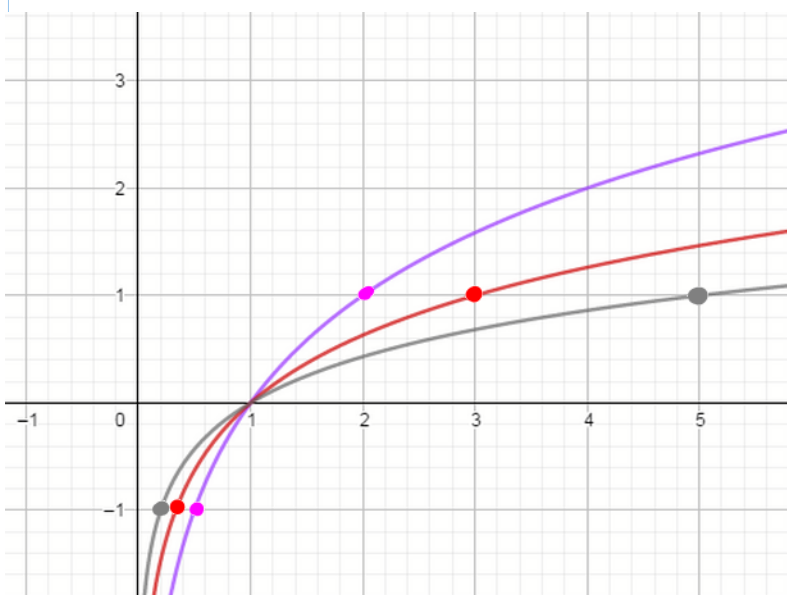
$$y = \log_3 x$$

x	$\frac{1}{3}$	1	3
y	-1	0	1

$$y = \log_5 x$$

x	$\frac{1}{5}$	1	5
y	-1	0	1

هر چه پایه بزرگتر شود مندرار



$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_3 x$$

$$y = \log_5 x$$

در دامنه‌ی مجزای هر دو

فشارده‌تر می‌شود و

به محدر x نزدیک‌تر می‌شود.

نکته: توابع $y = \log_a x$ ، $y = \log_a x$ و $y = \log_a x$ را رسم کنید و با هم مقایسه کنید.

تذکره: از قدرین انتقال برای رسم توابع لگاریتمی به صورت $y = k \log_a (x \pm b) \pm c$ استفاده کنیم.

نکته: هر توان از نقطه‌ری هم برای رسم اسکونه توابع استفاده کرد. وقت کنه هم به یاداری

به جای a قرار دهید تا به $\log_a a$ ، $\log_a a^m$ یا $\log_a a^{\frac{m}{n}}$ برسیم.

نکته: برای یافتن محل برخورد نمودار تابع لگاریتمی با محورهای مختصات کافی است y را با 0 یا x را با 1 قرار دهیم و محاسبه کنیم.

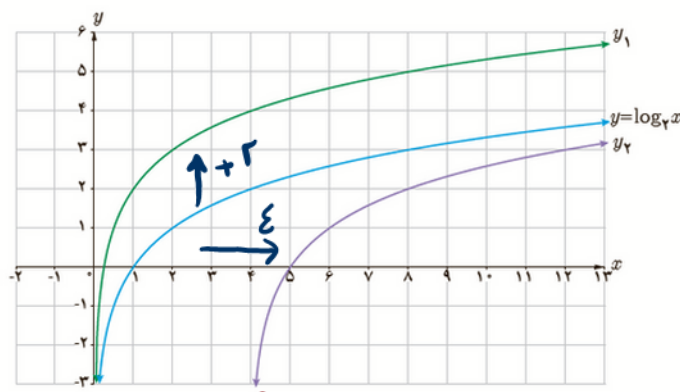
نکته: برای یافتن خط‌های که تابع لگاریتمی به آن نزدیک می‌شود (مجاورت قائم) دامنه تابع را باید بدید.

مثال

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطه توابع انتقال یافته را بنویسید.



الف



ب

الف $y_1 = 4^x + 2$ و $y_2 = -4^x - 2$

ب $y_1 = \log_2 x + 2$ و $y_2 = \log_2(x-4)$ $\begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=4 \rightarrow y=1 \end{cases}$

کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۱) $y = \log_2(x-1)$

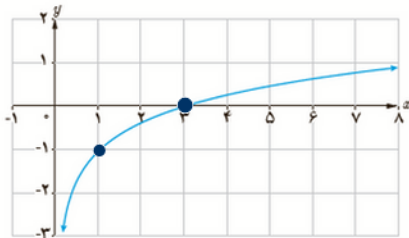
۲) $y = 3^x + 1$

۳) $y = 1 - 3^x$

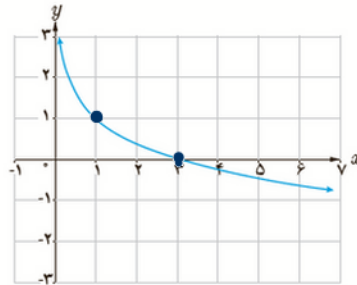
۴) $y = \log_2 x - 1$

۵) $y = 1 - \log_2 x$

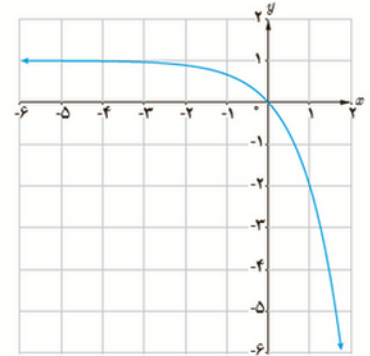
۶) $y = 3^{(x-2)}$



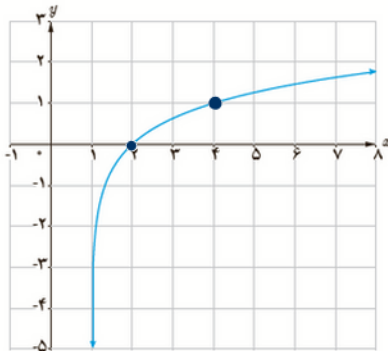
(الف)



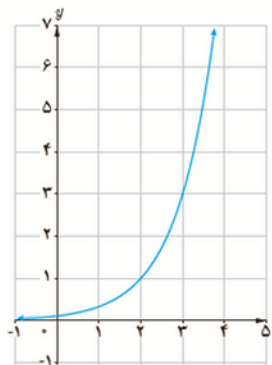
(ب)



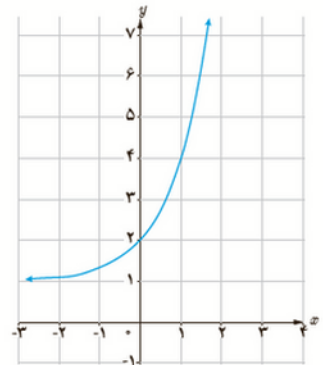
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

الف) ۴) $y = \log_2 x - 1$

$\begin{cases} x=2 \rightarrow y=1-1=0 \\ x=1 \rightarrow y=0-1=-1 \end{cases}$

ب) ۵) $y = 1 - \log_2 x$

$\begin{cases} x=2 \rightarrow y=1-1=0 \\ x=1 \rightarrow y=1-0=1 \end{cases}$

پ) ۳) $y = 1 - 3^x$

$x=0 \rightarrow y=1-1=0$

ث) ۱) $y = \log_2(x-1)$

$\begin{cases} x=2 \rightarrow y=0 \\ x=3 \rightarrow y=\log_2(3-1)=\log_2 2=1 \end{cases}$

ج) ۶) $y = 3^{(x-2)}$

ث) ۲) $y = 3^x + 1$

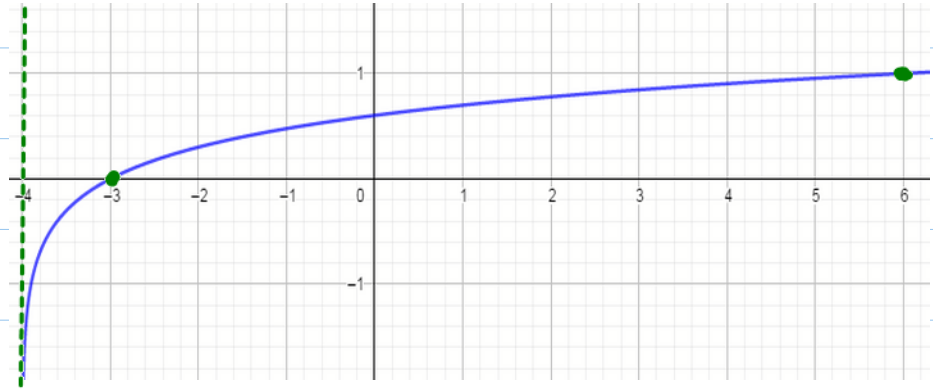
مثال: نمودار تابع لگاریتمی زیر را رسم کنید.

الف) $y = \log_{10}(x+4)$

x	-4	4
y	0	1

$\log_{10}$ $\rightarrow$ $\log_{10}$

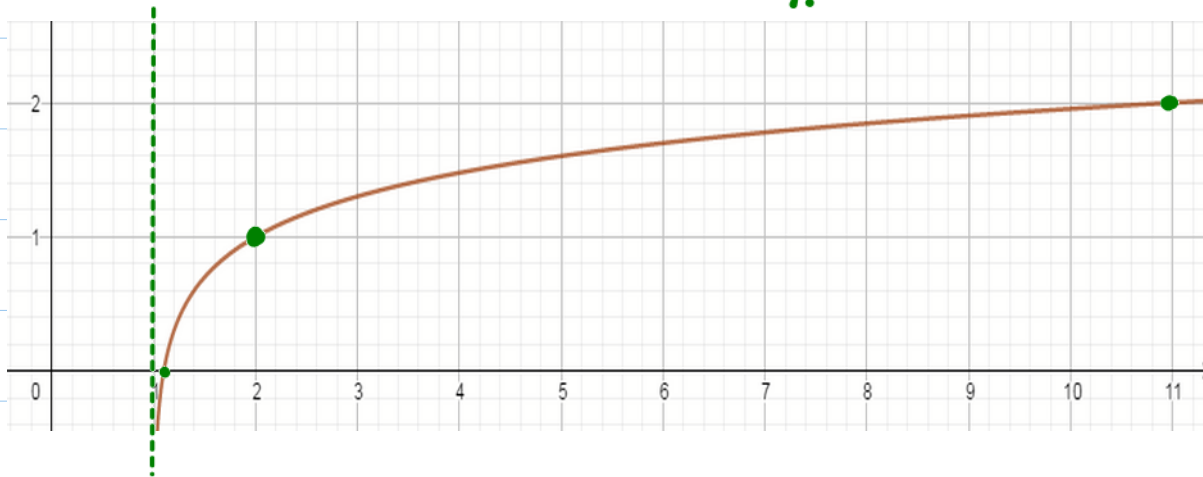
D: $x+4 > 0$
 $x > -4$



ب) $y = 1 + \log_{10}(x-1)$

x	1	11
y	0	1

$1 + \log_{10}$ $\rightarrow$ $1 + \log_{10}$



محور برعکس را به خط x : $0 = 1 + \log_{10}(x-1) \rightarrow -1 = \log_{10}(x-1)$

$\rightarrow x-1 = 10^{-1} = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{1}{10} + 1 = \frac{11}{10}$

D: $x-1 > 0 \rightarrow x > 1$

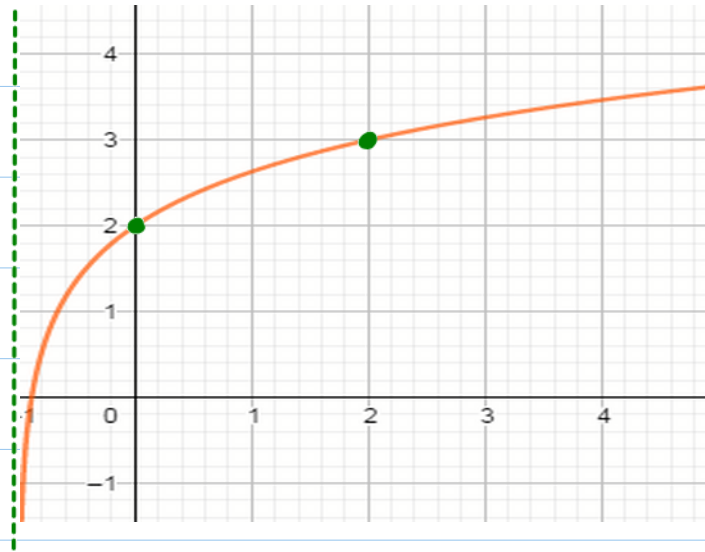


$$y = 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$$

$$x=2 \quad \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{2^{-1}} 2 = -1$$

x	0	2
y	2	3

نقشه: محل ریشه‌ها را با محور x ها مشخص کنید.



$$D: x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: رادیان

جلسه اول: صفحات ۹۲ تا ۹۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

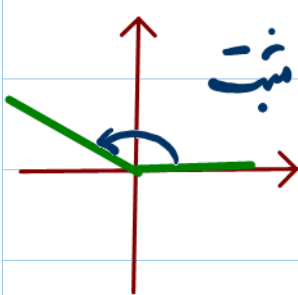
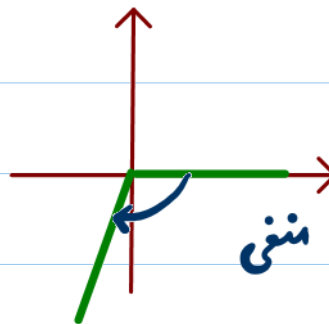
گروه ریاضی
استان همدان

زاویه و موقعیت استاندارد :

زاویه از یک رأس و دو ضلع تشکیل شده است. اگر رأس زاویه روی مبدأ مختصات

و ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور x باشد می‌گوئیم زاویه در موقعیت استاندارد

مشخص شده است. اگر زاویه مثبت باشد چار ساعتگرد و اگر منفی باشد ساعتگرد می‌چرخیم.

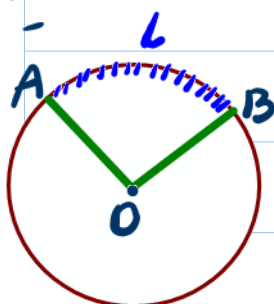


چند تعریف در دایره :

۱) زاویه مرکزی : زاویه ای است که رأس آن روی مرکز دایره است و اضلاع آن

شعاع دایره اند.

۲) کمان : هر دو نقطه روی دایره آن را به دو قسمت تقسیم می‌کنند به جز آنکه می‌گوئیم.



و به اندازه ای از محیط دایره که جدا کرده اند. طول کمان می‌گوئیم.

$$\widehat{AB} = L$$

۳) اندازه کمان: اندازه کمان همان زاویه مرکزی مقابل به آن است: $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$

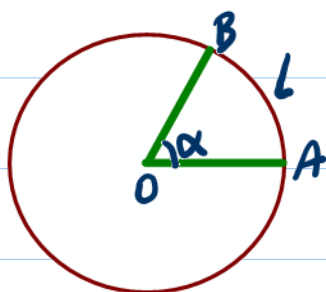
واحدهای اندازه گیری زاویه:

الف) درجه: اگر قوس را بره را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، زاویه مرکزی مقابل

به هر کمان ۱ است.

اگر در دایره $C(0, r)$ داشته باشیم $\widehat{AOB} = \alpha$ و طول کمان AB

را L بگیریم نگاه:

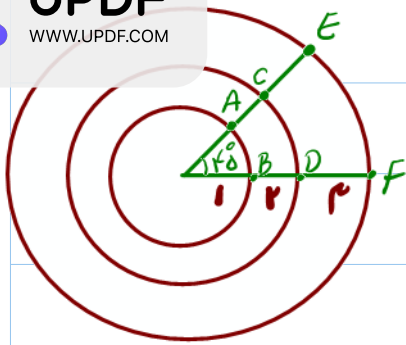


$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{L}{2\pi r}$$

$$L = \frac{\alpha}{360} (2\pi r) = \frac{\alpha}{180} \pi r$$

مثال: طول کمان مقابل به زاویه ۴۵ در دایره‌ای به شعاع ۳، ۲ را حساب کنید.



$$\widehat{AB} = \frac{40}{180} \pi \times 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\widehat{CD} = \frac{40}{180} \pi \times 2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{EF} = \frac{40}{180} \pi \times 3 = \frac{3\pi}{4}$$

مثال: در مثال قبلی نسبت طول کمان به ضلع را در هر حالت بیابید.

$$\frac{\widehat{AB}}{r} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$$

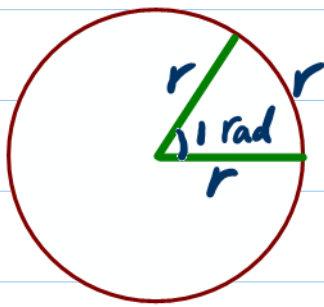
$$\frac{\widehat{CD}}{r} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\widehat{EF}}{r} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

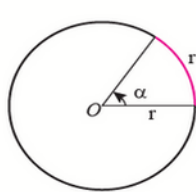
نتیجه: نسبت طول کمان روبرو به یک زاویه خاص به ضلع دایره در هر دایره ای همواره متساوی است.

نتایج است. از این مقدار ثابت بر روی بیان زاویه به واحدی خرد درجه استفاده می کنیم.

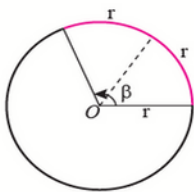
باید داریم: یک دایره، اندازه زاویه مرکزی مقابل کمانی است که طول آن برابر



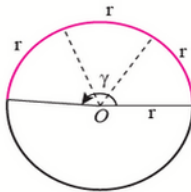
شعاع دایره است. یک دایره تقریباً ۵۷٫۲۹ است.



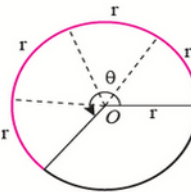
$$\alpha = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad}$$



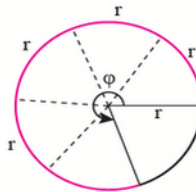
$$\beta = \frac{2r}{r} = 2 \text{ rad}$$



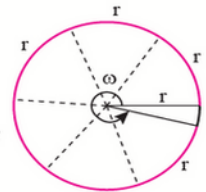
$$\gamma = \frac{3r}{r} = 3 \text{ rad}$$



$$\theta = \frac{4r}{r} = 4 \text{ rad}$$



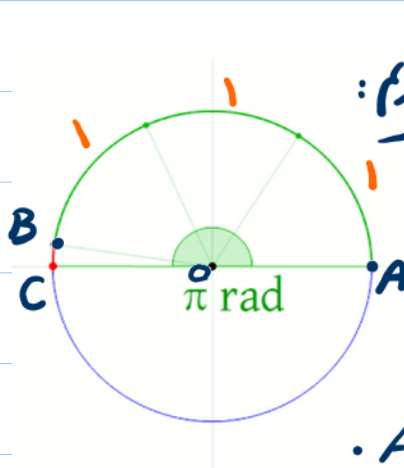
$$\phi = \frac{5r}{r} = 5 \text{ rad}$$



$$\omega = \frac{6r}{r} = 6 \text{ rad}$$

تبدیل واحدهای زاویه:

طول کمان درجه درجه زاویه ۱۸۰، نصف محیط دایره است پس: $\alpha = \frac{2\pi r}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$ پس ۱۸۰، π رادیان است.



به صورت دیگری نیز می‌توانیم به این نتیجه برسیم. دایره ای به شعاع واحد داریم:

باتوجه به شکل: $\hat{AOB} = 3 \text{ rad}$

زاویه $\hat{AOC}$ یک زاویه نیمه است پس $\hat{AOC} = 180^\circ$.

جواب است بدانید از $\widehat{ACB}$ ، قوس دایره معروف π است پس:

$$\hat{AOC} = \pi \text{ rad}$$

پس نتیجه داریم π رادیان 180° است.

نتیجه: اگر D اندازه زاویه بر حسب درجه و R اندازه زاویه بر حسب رادیان باشد داریم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

با استفاده از تناسب بالا:

(الف) تبدیل رادیان به درجه:

$$D = R \times \frac{180}{\pi}$$

(ب) تبدیل درجه به رادیان

$$R = D \times \frac{\pi}{180}$$

مثال: زوایای زیر را به رادیان تبدیل کنید.

$$1) \quad 30^\circ \quad R = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$2) \quad 45^\circ \quad R = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

$$3) \quad 60^\circ \quad R = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

۲) ۲۷.°

$$R = 27. \times \frac{\pi}{180.} = \frac{3\pi}{2}$$

۵) ۳۶.°

$$R = 36. \times \frac{\pi}{180.} = 2\pi$$

۶) ۱۳۵.°

$$R = 135 \times \frac{\pi}{180.} = \frac{3\pi}{2}$$

۷) ۲۱.°

$$R = 21. \times \frac{\pi}{180.} = \frac{7\pi}{6}$$

۸) ۳۳.°

$$R = 33. \times \frac{\pi}{180.} = 11 \frac{\pi}{6}$$

۹) ۷۲.°

$$R = 72 \times \frac{\pi}{180.} = 2 \frac{\pi}{5}$$

۱۰) ۹.°

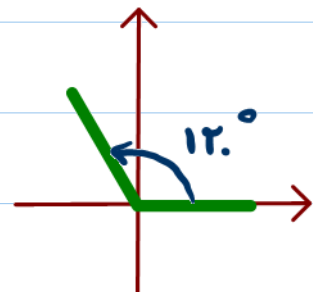
$$R = 90 \times \frac{\pi}{180.} = \frac{\pi}{2}$$

مثال: زوایای زیر را به درجه تبدیل کنید و درجه‌های آن را به رادیان نیز بنویسید.

۱) $\frac{2\pi}{3}$

$$D = \frac{2\pi}{3} \times \frac{180.}{\pi} = 120.°$$

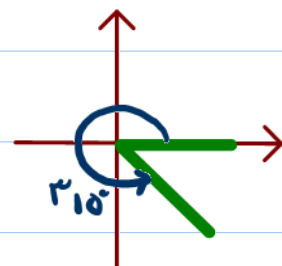
۱۲۰.°



۲) $\frac{7\pi}{6}$

$$D = \frac{7\pi}{6} \times \frac{180.}{\pi} = 210.°$$

۲۱۰.°

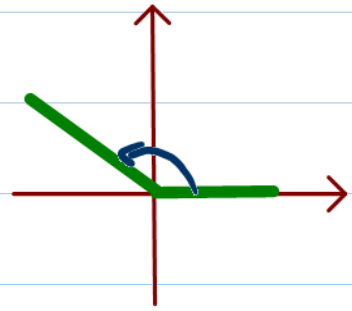


۲)

$$\frac{4\pi}{5}$$

$$D = \frac{4\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = 144^\circ$$

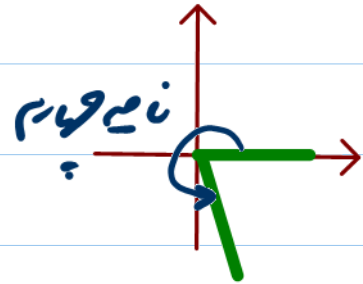
نیم دایره



$$۴) \omega \text{ rad}$$

$$D = \omega \times \frac{180}{\pi} = \frac{90}{\pi}$$

$$D = \frac{90}{\pi} \approx 28.65^\circ$$

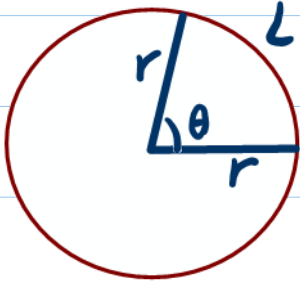


نکته: اگر در دایره ای به شعاع r اندازه ای زاویه مرکزی بجهت رادیان θ باشد

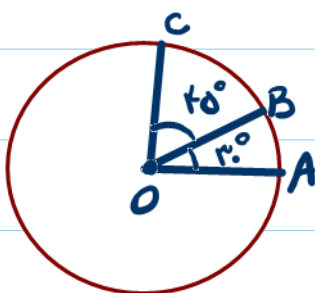
طول کمان در برابر بزرگن زاویه یعنی L از رابطه زیر بدست می آید:

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow L = r\theta$$

رادیان



مثال: در شکل زیر طول کمان AB برابر 4π است. طول کمان BC را بیابید.



$$\begin{cases} \widehat{AB} = 4\pi \\ \theta_1 = \widehat{AB} \text{ اندازه کمان } = 30^\circ \xrightarrow{\text{رادیان}} \frac{\pi}{6} \\ \theta_2 = \widehat{BC} \text{ اندازه کمان } = 40^\circ \xrightarrow{\text{رادیان}} \frac{\pi}{9} \\ \widehat{BC} = ? \end{cases}$$



$$AB = r\theta_1 \rightarrow 4\pi = r \times \frac{\pi}{4} \times \frac{4}{\pi} \rightarrow r = 4\pi \times \frac{4}{\pi} = 16$$

$$\widehat{BC} = r\theta_2 \rightarrow \widehat{BC} = 16 \times \frac{\pi}{4} = 4\pi$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: رادیان

حل تمرین: صفحات ۹۶ و ۹۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

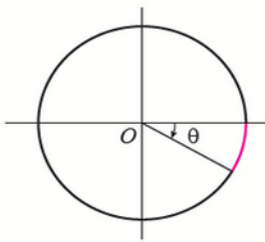
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

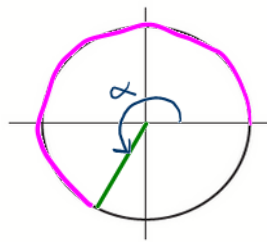
گروه ریاضی
استان همدان

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



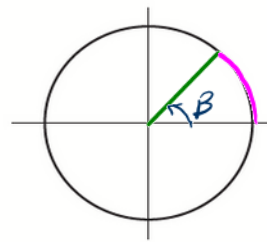
$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



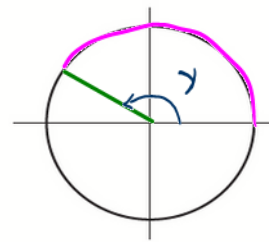
$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

انتهای کمان در ربع سوم است.



$$\beta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

انتهای کمان در ربع اول است.



$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع دوم است.

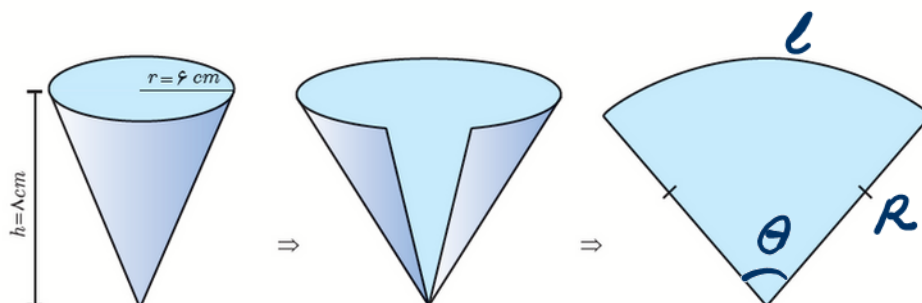


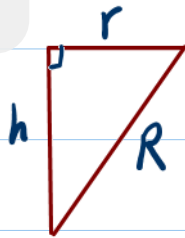
۲ طول برف پاک‌کن عقب خودرویی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف پاک‌کن، کمانی به اندازه 12° طی می‌کند. ($\pi \approx 3/14$)
الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به دست آورید.
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

الف) $\theta = 12^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{15}$

ب) $l = r\theta \rightarrow l = 24 \times \frac{2\pi}{15} = 16\pi \approx 16 \times 3.14 = 50.24 \text{ cm}$

۳ شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6 \text{ cm}$ و ارتفاع آن $h = 8 \text{ cm}$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟





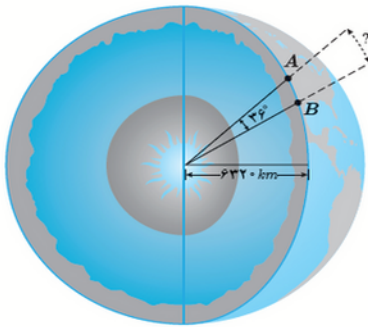
$$R^2 = h^2 + r^2$$

$$R^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$R = 5$$

$$\ell = \text{محیط دایره} = 2\pi r = 2\pi \times 4 = 8\pi$$

$$\theta = \frac{\ell}{R} = \frac{8\pi}{5} = \frac{16\pi}{10} \text{ Rad}$$



۴ فاصله دو نقطه A و B از کره زمین، که بر روی یک نصف النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.

$$\theta = 39^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$$

$$\widehat{AB} = r\theta = 6370 \times \frac{\pi}{9} = 2211.94 \text{ km}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

قسمت اول

جلسه دوم: صفحات ۹۸ تا ۱۰۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

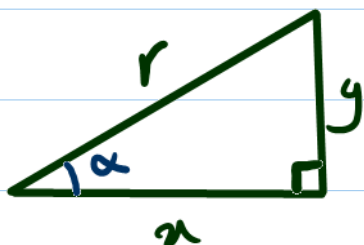
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

نسبت های مثلثاتی:



$$1) \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}}$$

$$2) \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$$

$$3) \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha}$$

$$4) \cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha}$$

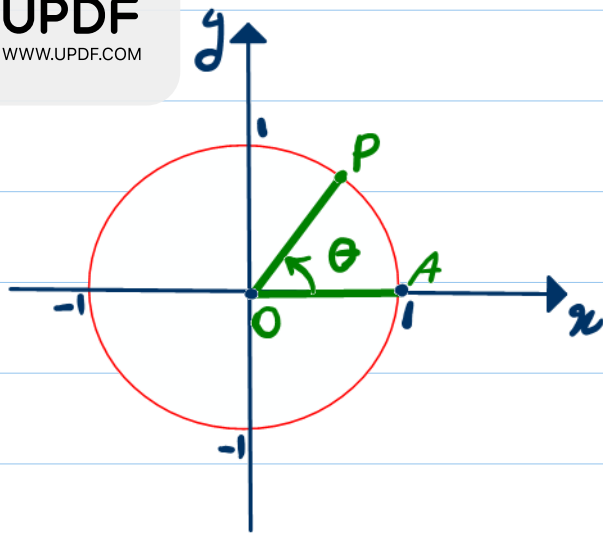
تعریف دایره مثلثاتی: دایره ای به شعاع یک واحد که مرکز آن مبدأ مختصات است.

زاویه در دایره مثلثاتی: ضلع ابتدای هر زاویه روی قسمت مثبت محور x ها واقع است و ضلع

دوم حرکت می کند (این ضلع خط دایره را قطع می کند) اگر ضلع دوم در خلاف

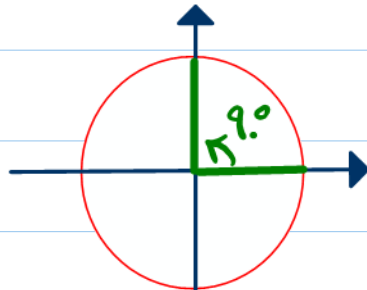
جهت عقربه های ساعت حرکت کند زاویه مثبت می سازد و اگر در جهت

عقربه های ساعت حرکت کند زاویه منفی می سازد.

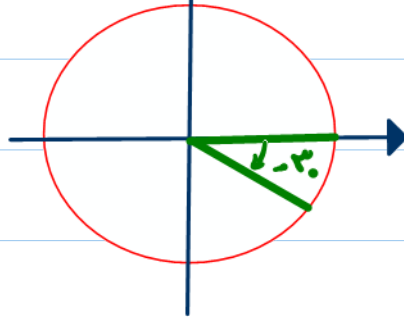


مثال: زوایای زیر را در دایره شش متعین کنید.

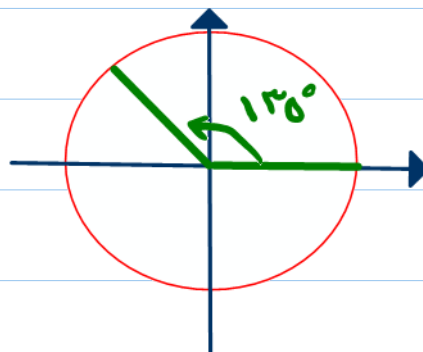
الف) 9°



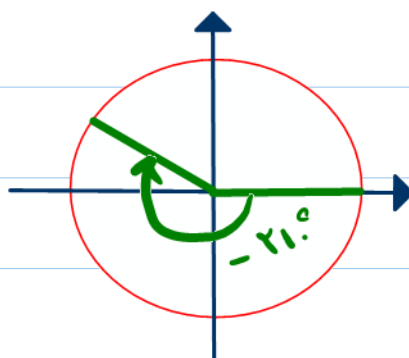
ب) -3°



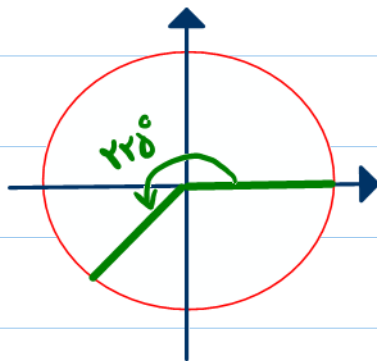
ج) 135°



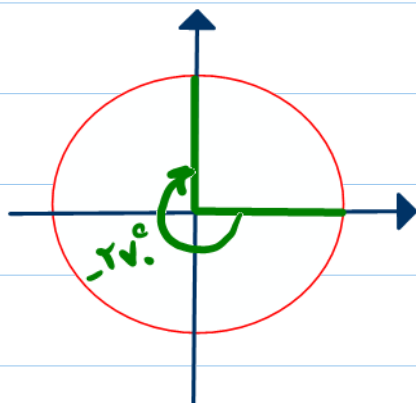
د) -21°



۲۲۵°



۲۷۰° - ۲) ۲۷۰°

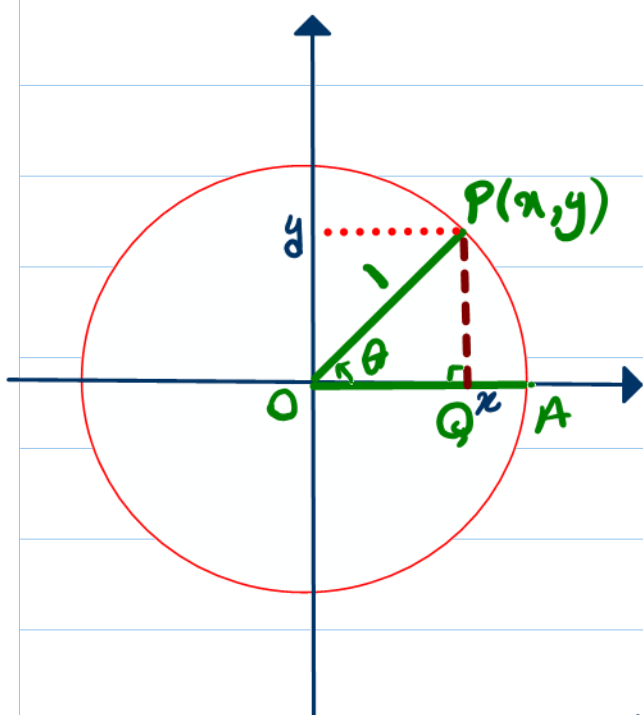


نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی :

زاویه θ را دایره مثلثاتی در نظر بگیرید.

اگر ضلع دوم این زاویه محاط دایره را

در نقطه $P(x, y)$ قطع کند و از این نقطه



به کمر x ها عبور کنیم تا این محور را در Q قطع کند، مثلث قائم‌الزاویه $\triangle OPQ$ بدست

می‌آید. حال داریم :



$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin \theta$$

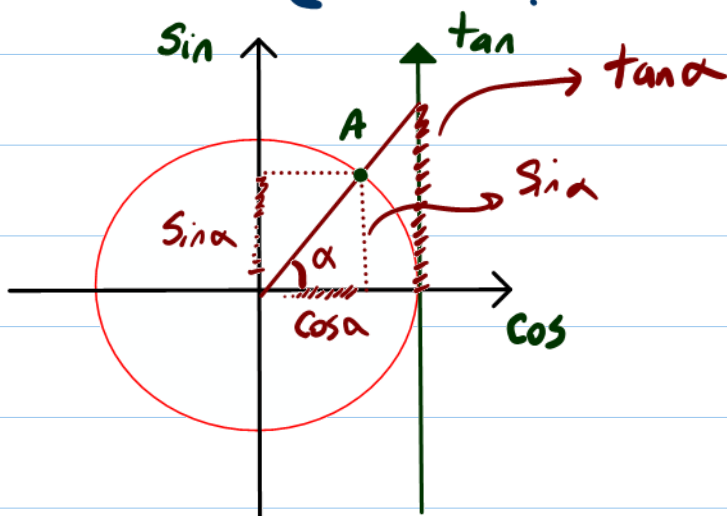
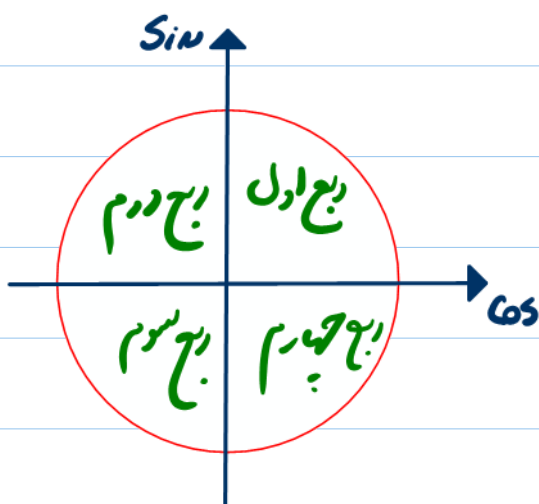
$$\cos \theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \theta$$

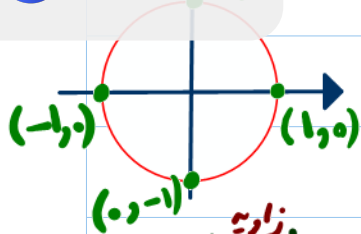
$$\cot \theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \cot \theta$$

تواردار: در دایره مثلثاتی محور x ما را $\cos$ ها، محور y ما را $\sin$ ها می نامیم.

این دو محور به هم، دایره مثلثاتی را به چهار ناحیه یا ربع مثلثاتی تقسیم می کنند.

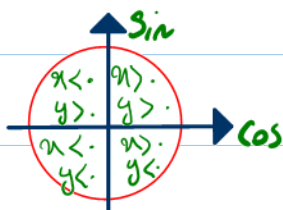


$0^\circ < \theta < 90^\circ$	: θ در ربع اول
$90^\circ < \theta < 180^\circ$	: θ در ربع دوم
$180^\circ < \theta < 270^\circ$	: θ در ربع سوم
$270^\circ < \theta < 360^\circ$	: θ در ربع چهارم



جدول نسبت های مثلثاتی زوایای مرتزی ۰، ۹، ۱۸، ۲۷، ۳۶

نسبت \ زاویه θ	۰	۹°	۱۸°	۲۷°	۳۶°
$\sin \theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan \theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده



* جدول علامت های نسبت های مثلثاتی در نواحی چهارخانه

نسبت \ ناحیه	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin$	+	+	-	-
$\cos$	+	-	-	+
$\tan$	+	-	+	-
$\cot$	+	-	+	-

نکته: $\sin$ و $\cos$ برای هر زاویه دایره واحدی بین -۱ و ۱ هستند.

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

* جدول نبت های مثلثاتی زوایای ۳۰° ، ۴۵° و ۶۰°

زاویه نبت	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

کمان های هم خانواده :

زاویه حاده $0 < \alpha < 90^\circ$

نوع اول : برای بدست آوردن نبت های مثلثاتی زوایای به صورت $k\pi \pm \alpha$

اگر k زوج باشد $k\pi$ را حذف می کنیم و اگر k فرد باشد، k را حذف

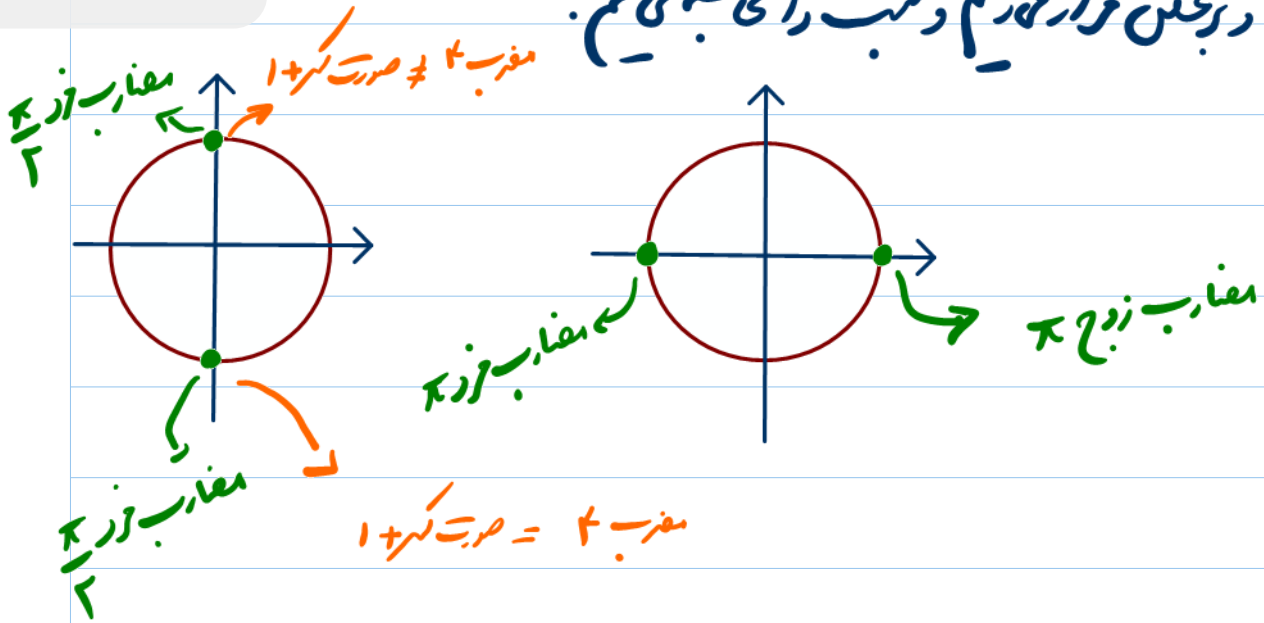
می کنیم (غنی $\pi \pm \alpha$) . حال ناحیه مربوط به زاویه را یافته و نبت را می بینیم .

نوع دوم : برای بدست آوردن نبت های مثلثاتی زوایای به صورت $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$

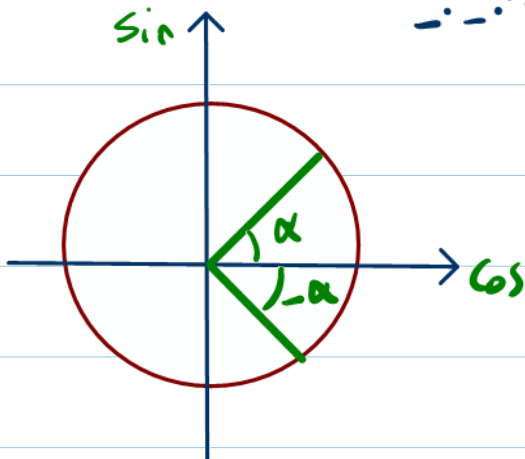
غنی مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ ، استر ناحیه و کسایت نبت را مشخص می کنیم . در آخر

اسم نبت را عوض می کنیم غنی به جای $\sin$ ، $\cos$ و برعکس و به جای $\tan$ ،

تو در یکس قرار هم دهنه رای به جی نم.



مثال: نهته شتهای زاویه α - (قرینه زاویه) را بیایید.



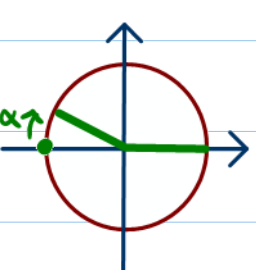
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

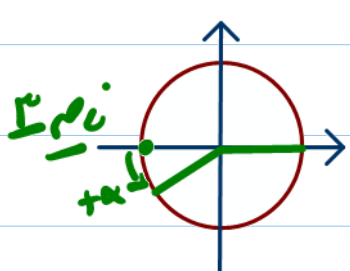
$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

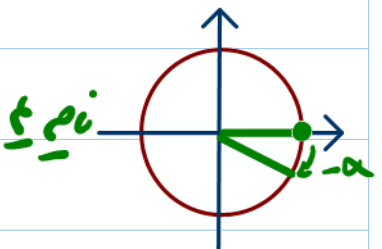
$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

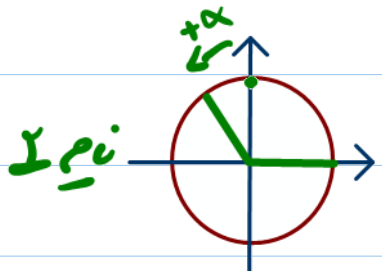
$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

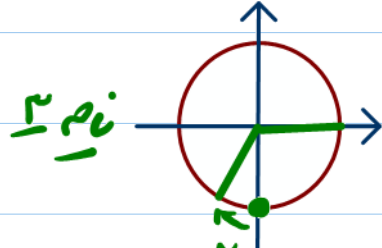
مثال: سترهای مشتقاتی زیر را بحسب α بنویسید.

1) $\sin(2\pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ 

2) $\cos(2\pi + \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ 

3) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$ 

4) $\sin\left(\frac{20\pi}{7} + \alpha\right) = \cos \alpha$ $20+1=21 \neq 2k$ 

5) $\tan\left(\frac{11\pi}{7} - \alpha\right) = \cot \alpha$ $11+1=12 = 2k$ 

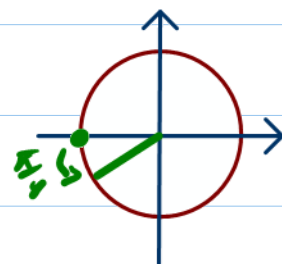


نکته: اگر زوایا به صورت مجموع یا تفاضل با $k\pi$ یا $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ داده نشود باید...

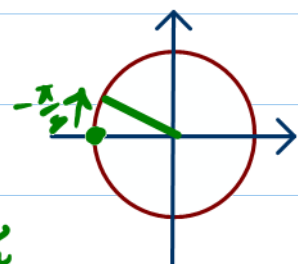
با شکستن زاویه آنرا به یکی از دو نوع گفته شده در آوریم.

مثال: مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را بیابید.

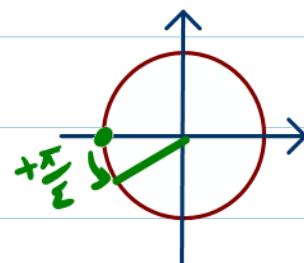
$$1) \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$



$$2) \tan(-10^\circ) = -\tan 10^\circ = -\tan(180^\circ - 3^\circ) = -\tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -(-\tan \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

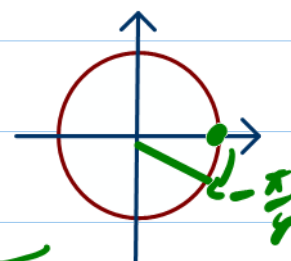


$$3) \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$4) \cot 330^\circ = \cot(360^\circ - 30^\circ) = \cot(2\pi - \frac{\pi}{6})$$

$$= \cot(-\frac{\pi}{6}) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$





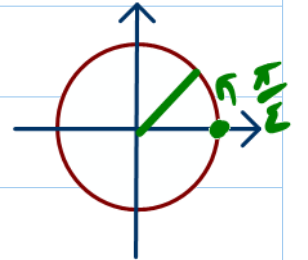
$$0) \sin \frac{13\pi}{4} = \sin \left(\frac{13\pi + \pi}{4} \right) = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



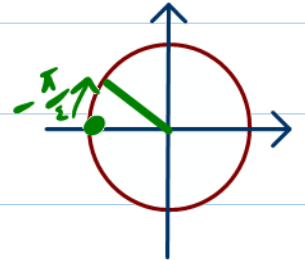
$$7) \cos \left(-\frac{17\pi}{2} \right) = \cos \frac{17\pi}{2} = \cos \frac{17\pi + \pi}{2}$$

$$= \cos \left(4\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



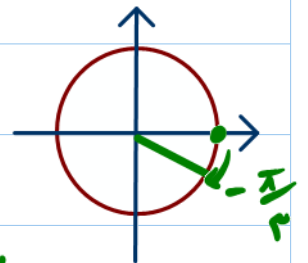
$$5) \tan \frac{3\pi}{4} = \tan \frac{4\pi - \pi}{4} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$



$$1) \sin \frac{23\pi}{4} = \sin \frac{24\pi - \pi}{4} = \sin \left(6\pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

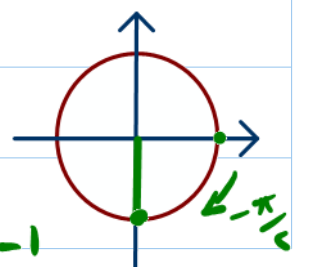


نکته: حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید:

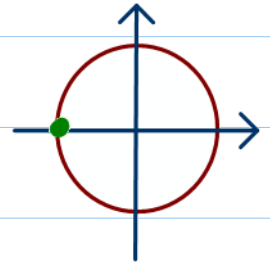
$$1) \sin 63^\circ + \tan (-54^\circ) = 2 \times 14.$$

$$\sin 42^\circ = \sin (72^\circ - 30^\circ) = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -1$$



$$\tan(-0^\circ) = -\tan(0^\circ) = -\tan(\pi \times 18) = -\tan(\pi) = 0$$



$$\sin \omega = -1 + 0 = -1$$

2) $\cos(-72^\circ) + \cot(-4^\circ) + \tan 72^\circ - \tan(-4^\circ) =$

$$\cos(-72^\circ) = \cos 72^\circ = \cos(\pi \times 18) = \cos \pi = 1$$

$$\cot(-4^\circ) = -\cot 4^\circ = -\cot(\pi \times 18) = -\cot(\pi + \frac{\pi}{18})$$

$$= -\cot(\pi + \frac{\pi}{18}) = -\cot \frac{\pi}{18} = -\frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\tan 72^\circ = \tan \pi = 0$$

$$\tan(-4^\circ) = -\tan 4^\circ = -\tan(\pi + \frac{\pi}{18}) = -\tan \frac{\pi}{18} = -\sqrt{17}$$

$$\sin \omega = 1 - \frac{\sqrt{17}}{17} + 0 + \sqrt{17} = \frac{17 - \sqrt{17} + 17\sqrt{17}}{17} = \frac{17 + 16\sqrt{17}}{17}$$

3) $\sin(\frac{20\pi}{3}) - \cos(\frac{23\pi}{4}) =$

$$\sin(\frac{20\pi}{3}) = \sin \frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \omega = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$$

$$f) \frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} =$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{4\pi - \pi}{4} = \sin \pi - \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \frac{4\pi - \pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\tan \frac{4\pi}{3} = -\tan \frac{\pi + \pi}{3} = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \omega = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}}{\frac{-\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

قسمت دوم

جلسه سوم: صفحات ۹۸ تا ۱۰۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

باتوجه به کتبه قبل در باره همان های هم خانواده گفتیم، نتایج زیر را برای زوایای متمم داریم:

مکمل داریم:

الف) دو زاویه متمم:

می دانیم هرگاه مجموع دو زاویه 90° یا $\frac{\pi}{2}$ شود می گوئیم آن دو زاویه متمم یکدیگرند.

پس α و $\frac{\pi}{2} - \alpha$ متمم اند زیرا: $\frac{\pi}{2} - \alpha + \alpha = \frac{\pi}{2}$

حال باتوجه به زوایای نوع دوم خواهیم داشت:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

ب) دوزادیه مکمل:

ما داریم هرگاه جمع دوزادیه 180° یا π دارند باشد، مکمل یکدیگر خوانده می‌شوند.

پس α ، $\pi - \alpha$ مکمل هم‌اند زیرا: $(\pi - \alpha) + \alpha = \pi$

حال با توجه به زوایای نوع اول داریم:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

تسمه $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$ $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$ ✓ (الف)

ب) $\tan 20^\circ = \cot 5^\circ$ ✗ $20^\circ + 5^\circ = 25^\circ \neq 90^\circ$



$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ \quad \checkmark$$

$$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \quad \text{مکمل}$$

$$\text{ii) } \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ \quad \times$$

$$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \quad \text{مکمل}$$

$$\text{iii) } \tan 120^\circ = -\tan 60^\circ \quad \checkmark$$

$$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \quad \text{مکمل}$$

$$\text{iv) } \cot 110^\circ = -\cot 70^\circ \quad \times$$

$$110^\circ + 70^\circ = 180^\circ \neq 180^\circ$$

مثال: کدام دو زاویه مکمل هم هستند؟

$$10^\circ, \frac{7\pi}{12} \quad 227,0^\circ, -\frac{13\pi}{8} \quad 122^\circ, \frac{\pi}{6} \quad 2^\circ, \frac{4\pi}{3}$$

$$1) \quad \frac{4\pi}{3} = 240^\circ \rightarrow 240^\circ + (-2^\circ) = 238^\circ \neq 180^\circ \quad \times$$

$$2) \quad \frac{\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ \rightarrow 122^\circ + 58^\circ = 180^\circ \quad \checkmark$$

$$3) \quad -\frac{13\pi}{8} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -292,5^\circ \rightarrow 227,0^\circ - 292,5^\circ = -65,5^\circ \neq 180^\circ \quad \times$$

$$4) \quad \frac{7\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 105^\circ \rightarrow 105^\circ + 10^\circ = 115^\circ \neq 180^\circ \quad \times$$



مثال: اگر $\sin \theta = 1/4$ ، θ زاویه حاده باشد، حاصل $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ را بیابید.

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$$

$$\text{یادآوری: } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - (1/4)^2 = 1 - 1/16 = 15/16$$

$$\rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{15/16} \xrightarrow{0 < \theta < 90^\circ} \cos \theta = \sqrt{15}/4$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta = \sqrt{15}/4$$

مثال: حاصل عبارت $A = \sin 14^\circ + \sin 14^\circ + \sin 14^\circ + \cos 10^\circ + \cos 11^\circ + \cos 13^\circ$ را بدست آورید.

$$\sin 14^\circ = \sin 2^\circ, \sin 14^\circ = \sin 2^\circ, \sin 14^\circ = \sin 2^\circ$$

$$\cos 10^\circ = -\cos 8^\circ, \cos 11^\circ = -\cos 7^\circ, \cos 13^\circ = -\cos 5^\circ$$

$$A = \sin 2^\circ + \sin 2^\circ + \sin 2^\circ - \cos 8^\circ - \cos 7^\circ - \cos 5^\circ$$

$$\cos 8^\circ = \sin 1^\circ, \cos 7^\circ = \sin 2^\circ, \cos 5^\circ = \sin 3^\circ$$

$$A = \sin 2^\circ + \sin 2^\circ + \sin 2^\circ - \sin 1^\circ - \sin 2^\circ - \sin 3^\circ = 0$$



مثال: مقدار عبارت $A = \frac{-\sin^2 t^\circ - \sin^2 0^\circ + 1 - \sin 2^\circ}{\tan t^\circ \tan 0^\circ - 1 - 2 \cos 2^\circ}$ را بدست آورید.

$$-\sin^2 t^\circ - \sin^2 0^\circ = -(\sin^2 t^\circ + \sin^2 0^\circ) = -(\cos^2 0^\circ + \sin^2 0^\circ) = -1$$

$$\tan t^\circ \times \tan 0^\circ = \cot 0^\circ \times \tan 0^\circ = 1$$

یادآوری: $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \rightarrow \tan \theta \times \cot \theta = 1$

$$A = \frac{-1 + 1 - \sin 2^\circ}{1 - 1 - 2 \cos 2^\circ} = \frac{-\sin 2^\circ}{-2 \cos 2^\circ} = \frac{\sin 2^\circ}{2 \cos 2^\circ} = \frac{1}{2}$$

مثال: اگر $\tan 10^\circ = a$ حاصل عبارت $B = \frac{\sin 70^\circ + 2 \sin 10^\circ}{2 \sin 140^\circ - \sin 140^\circ}$ را بدست آورید.

مستقیم: $\sin 10^\circ = \cos(-10^\circ) = \cos 10^\circ$ ، مستقیم: $\sin 70^\circ = \cos 10^\circ$
 $10^\circ + 90^\circ$

مکمل: $\sin 140^\circ = \sin(-10^\circ) = -\sin 10^\circ$ ، مکمل: $\sin 140^\circ = \sin 10^\circ$
 $10^\circ + 180^\circ$

$$B = \frac{\cos 10^\circ + 2 \cos 10^\circ}{2 \sin 10^\circ + \sin 10^\circ} = \frac{3 \cos 10^\circ}{3 \sin 10^\circ} = \cot 10^\circ = \frac{1}{\tan 10^\circ} = \frac{1}{a}$$

یادآوری: $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ، $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

مثال: شماره ۹۹ (تجربی)

حاصل عبارت $\tan(300^\circ)\cos(210^\circ) + \tan(480^\circ)\sin(840^\circ)$ کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند).

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = \tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\tan 60^\circ$$

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ$$

$$\tan 480^\circ = \tan(360^\circ + 120^\circ) = \tan(120^\circ) = \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\tan 30^\circ$$

$$\sin 840^\circ = \sin(720^\circ + 120^\circ) = \sin(120^\circ) = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$= (-\tan 60^\circ)(-\cos 30^\circ) + (-\tan 30^\circ)(\sin 60^\circ)$$

$$= -\tan 60^\circ (-\cos 30^\circ + \sin 60^\circ) = -\tan 60^\circ (-\sin 30^\circ + \sin 30^\circ)$$

$$= -\tan 60^\circ \times 0 = 0$$

گزینه ۲

مثال: شماره ۹۹ (تجربی خارج)

حاصل عبارت $\tan(285^\circ)\tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ)\cos(255^\circ)$ کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند).

- (۱) $\sin^2(15^\circ)$ (۲) $\cos^2(15^\circ)$ (۳) $-\sin^2(15^\circ)$ (۴) $-\cos^2(15^\circ)$



$$\tan 210 = \tan\left(2\pi + 10\right) = -\cot 10$$

$$\tan(-140) = -\tan 140 = -\tan(\pi - 10) = -(-\tan 10) = \tan 10$$

$$\sin(1.90) = \sin\left(\pi + 10\right) = \sin 10$$

$$\cos(200) = \cos(2\pi - 10) = -\sin 10$$

$$\text{جواب} = (-\cot 10)(\tan 10) - \sin 10(-\sin 10)$$

$$= -1 + \sin^2 10 = -(1 - \sin^2 10) = -\cos^2 10$$

گزینه ۴:

مثال: سطر ۹۸ (ریاضی)

حاصل عبارت $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۱)$$

$$\tan \frac{11\pi}{4} = \tan \frac{12\pi - \pi}{4} = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin \frac{15\pi}{4} = \sin \frac{16\pi - \pi}{4} = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{13\pi}{4} = \cos \frac{12\pi + \pi}{4} = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{جواب} = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{2}{4} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۲

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

حل تمرین: صفحه ۱۰۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

$$\text{الف) } \sin(30^\circ) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ب) } \cot(75^\circ) = \cot\left(72^\circ + 3^\circ\right) = \cot\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\text{پ) } \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ت) } \cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) &= \cos\frac{23\pi}{4} = \cos\frac{16\pi - \pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ث) } \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{4\pi + \pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ج) } \tan(-14^\circ) = -\tan(14^\circ) = -\tan(90^\circ - 76^\circ) = -\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -(-\tan\frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\text{چ) } \tan(-15^\circ) = -\tan(15^\circ) = -\tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -(-\tan\frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

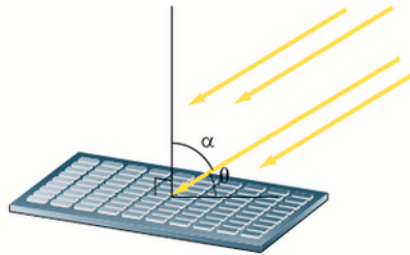
$$\text{ح) } \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{8\pi + \pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{9\pi + \pi}{3}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم،

رابطه $I = k \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به دست می دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب کسینوس زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} - \alpha \rightarrow I = k \sin \theta \Rightarrow I = k \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

ب) شدت نور را برای زاویه های $\theta = 0^\circ$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

$$I = k \sin \theta \xrightarrow{\theta=0} I = k \sin 0 = k \times 0 = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{6} = k \times \frac{1}{2} = \frac{k}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{3} = k \sqrt{\frac{3}{4}}$$

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی)

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \xrightarrow{\text{max}} I = \underset{\text{max}}{K \sin \theta} = K \sin 9^\circ = K \times 1 = K$$

$$\underset{\text{max}}{\theta} = 9^\circ$$

۳ درست یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا بر حسب رادیان است).

الف) $\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$

$$\cos \theta - \cos \theta = 0 \quad \text{درست}$$

ب) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + \cos \theta = 1$

$$\cos \theta + \cos \theta = 2 \cos \theta \neq 1 \quad \text{نادرست}$$

ج) $\cos(\pi - \theta) = \cos(-\theta)$ درست ($\cos(-\theta) = \cos \theta$)

د) $\tan(\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \quad \text{درست}$$

درست

$$\tan \pi - \tan \theta = 0 - \tan \theta = -\tan \theta \quad \text{درست}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس سوم: توابع مثلثاتی

جلسه چهارم: صفحات ۱۰۵ تا ۱۰۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

نسبت های مثلثی را می توان بعنوان تابع نیز در نظر گرفت زیرا برای هر زاویه عنوان درونی

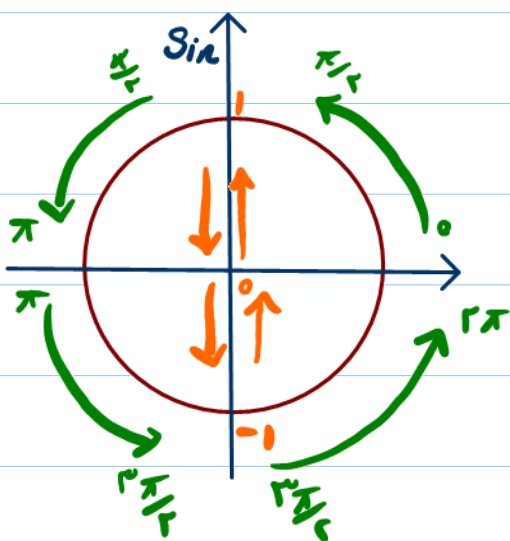
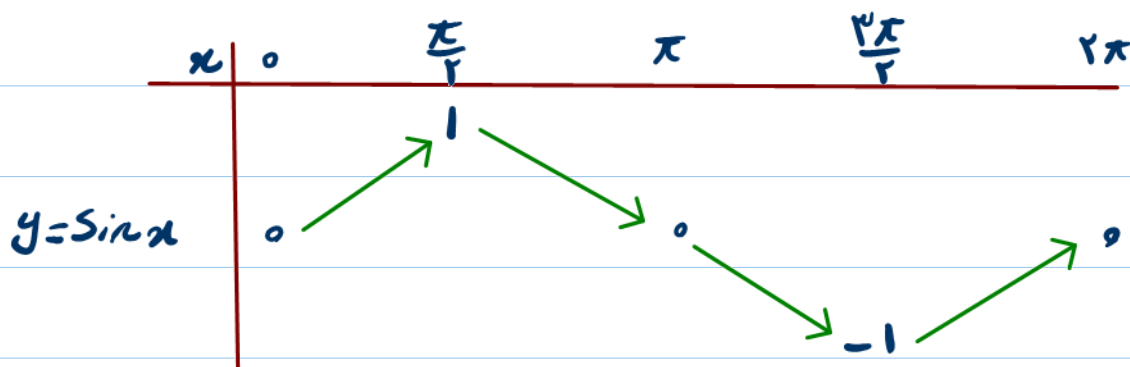
فقط یک مقدار نسبت مثلثی بعنوان خروجی داده می شود مثلاً برای سینوس :

$$y = \sin x$$

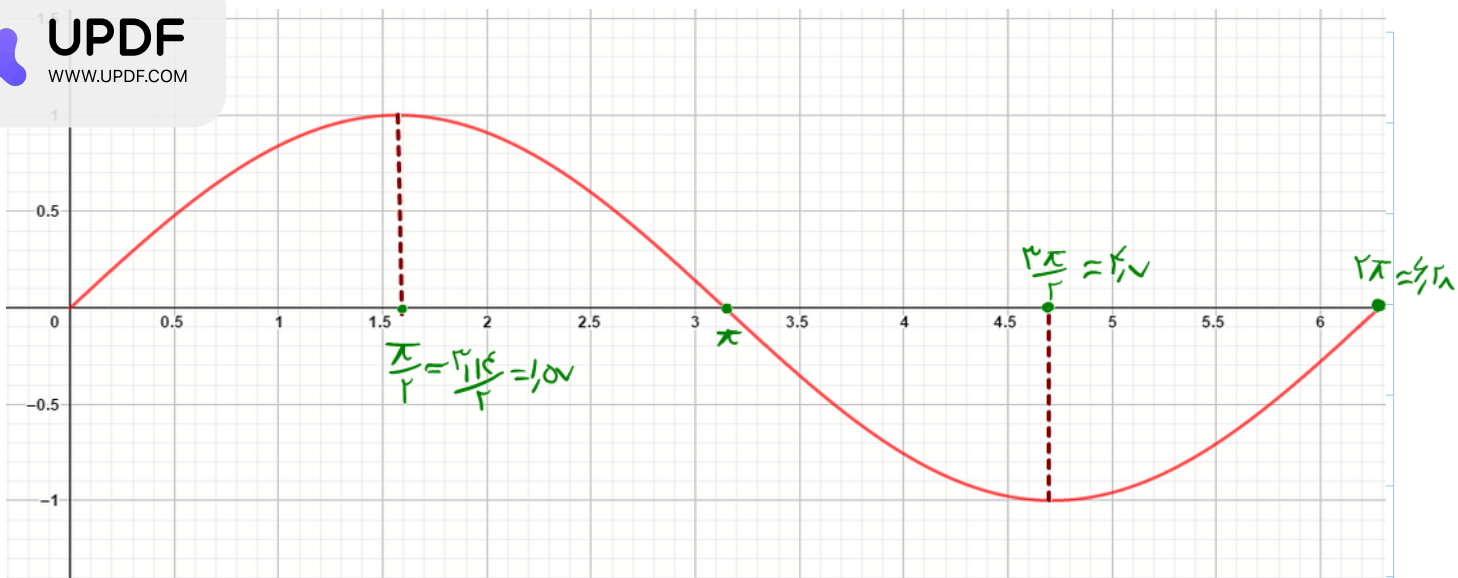
$$y = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

دفعه رسم نمودار تابع $y = \sin x$

اگر x بر حسب رادیان باشد با استفاده از دایره مثلثاتی جدول زیر را نتیجه می گیریم:

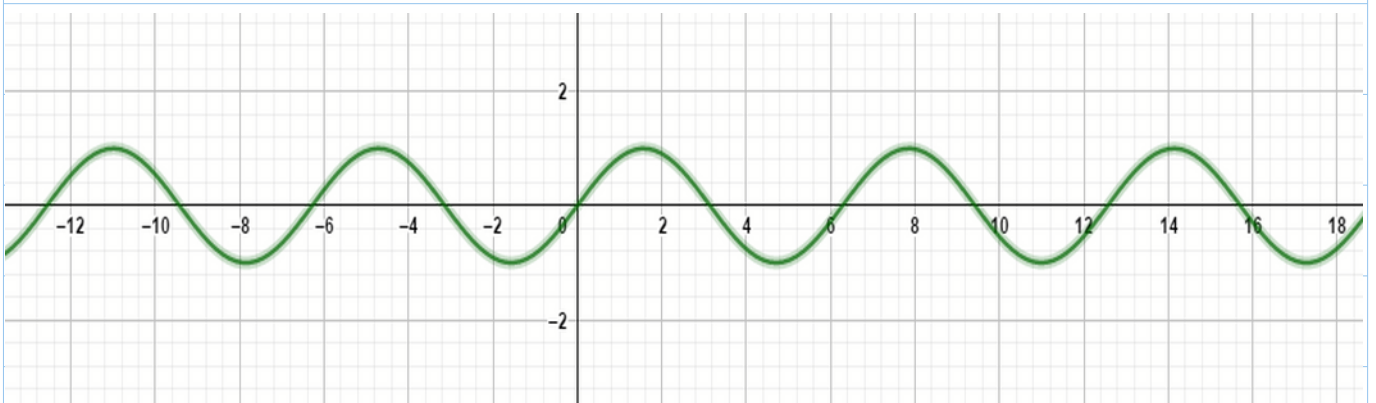


حال با داشتن چند زاویه دیگر به سینوس نمودار زیر را می توانیم رسم کنیم :



از نمودار $y = \sin x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

(۱) نمودار تابع سینوس در بازه‌هایی به طول 2π تکراری شود زیرا داریم: $\sin(x+2\pi) = \sin x$



(۲) $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [-1, 1]$

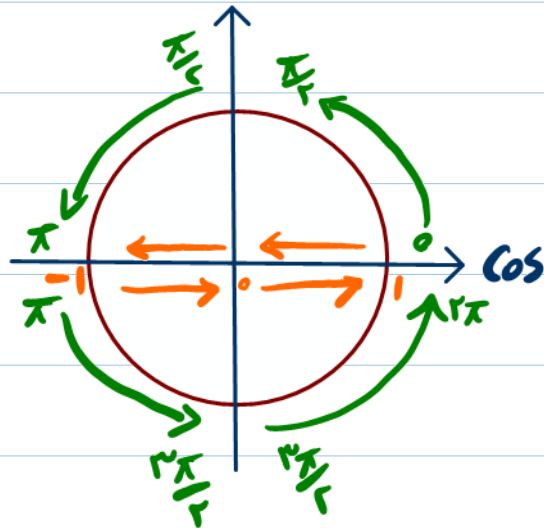
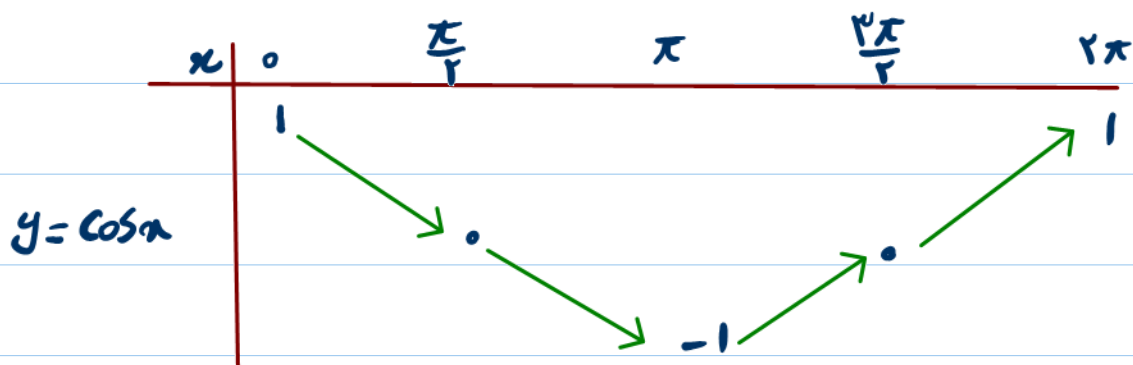
(۳) نمودار این تابع در $x = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ عدد x را قطع می‌کند.

(۴) بیشترین مقدار تابع $y = \sin x$ برابر یک است که در $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهند.

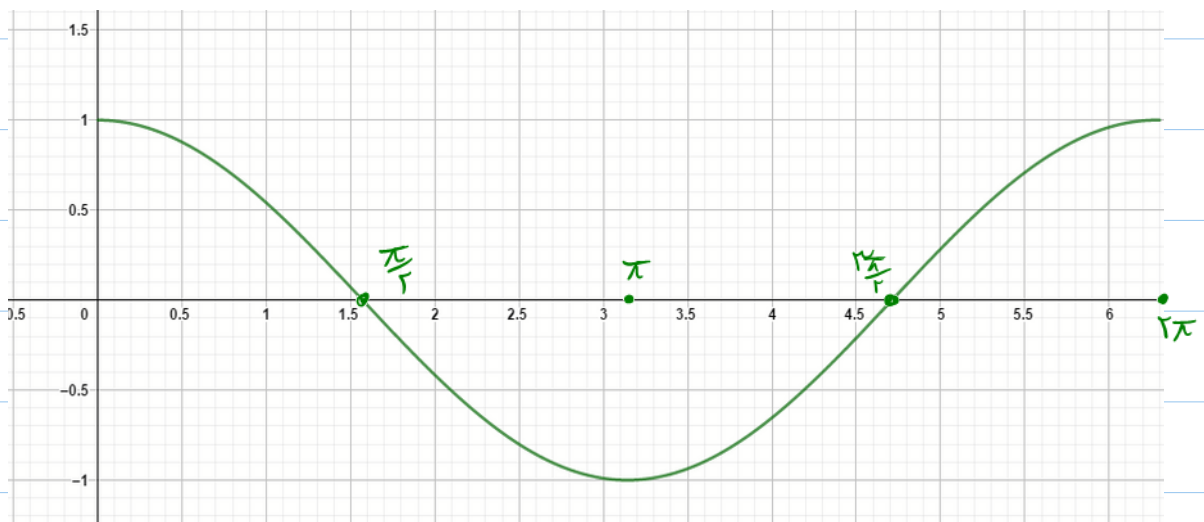
(۵) کمترین مقدار تابع $y = \sin x$ برابر -۱ است که در $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهند.

ب) رسم نمودار تابع $y = \cos x$

اگر x بر حسب درایان باشد از دوره مشتقات جدول زیر را نتیجه گیریم :

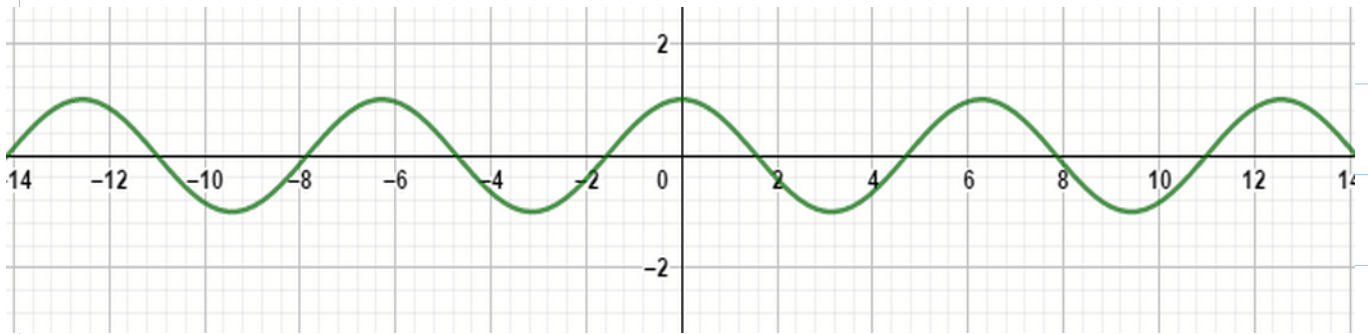


حال با داشتن چند زاویه دیگر به کسینوس نمودار زیر را می‌توانیم رسم کنیم :



از نمودار $y = \cos x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

(۱) نمودار تابع کسینوس در بازه‌هایی به طول 2π تکراری شود زیرا داریم: $\cos(x+2\pi) = \cos x$



(۲) $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [-1, 1]$

(۳) نمودار این تابع در $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ معبر x را قطع می‌کند.

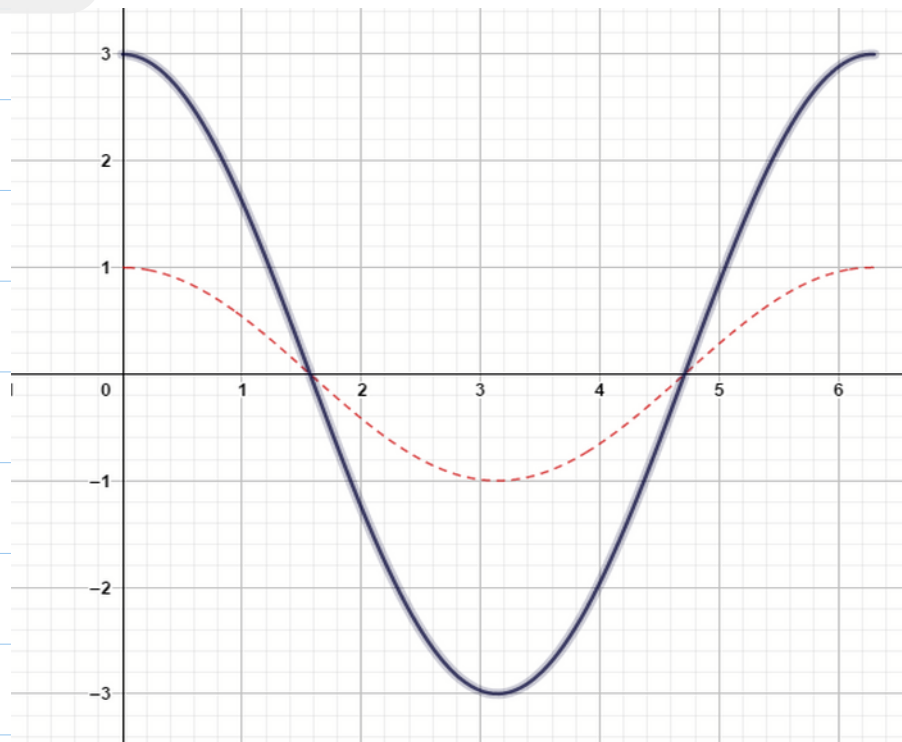
(۴) بیشترین مقدار تابع $y = \cos x$ برابر یک است که در $x = 2k\pi$ رخ می‌دهند.
 مغایب زوج π

(۵) کمترین مقدار تابع $y = \cos x$ برابر -۱ است که در $x = (2k+1)\pi$ رخ می‌دهند.
 مغایب فرد π

نکته: از قوانین انتقال برای رسم نمودار توابع مشتقاتی کمک می‌گیریم.

مثال: با توجه به نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

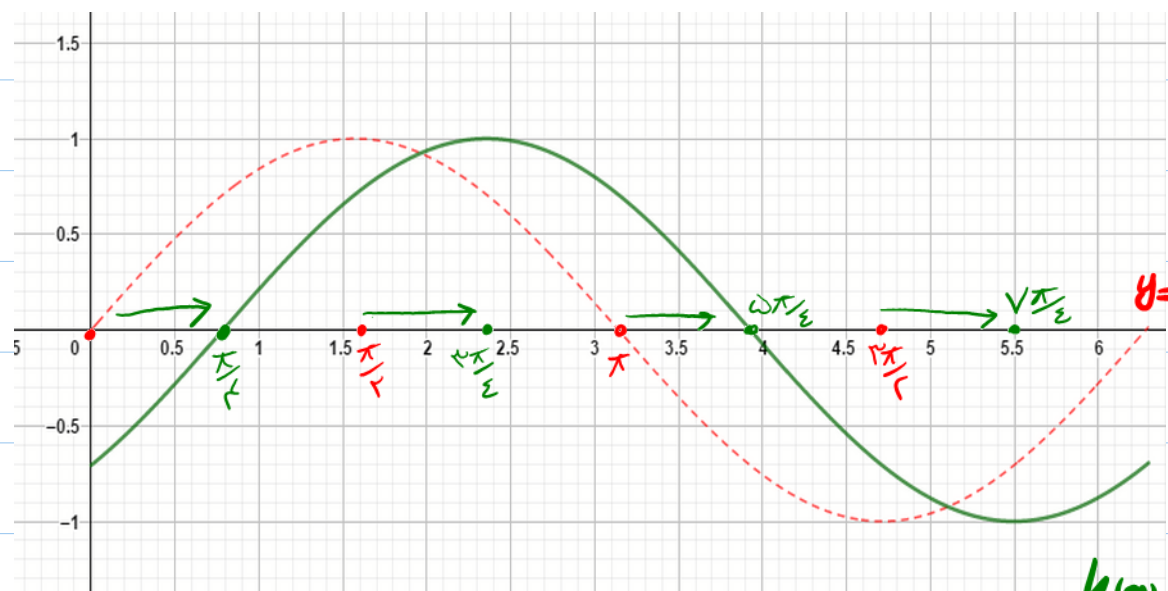
(الف) $f(x) = 3 \cos x$



$$f(u) = r \cos u$$

$$y = \cos u$$

$$\text{—) } h(u) = \sin(u - \frac{\pi}{\epsilon})$$

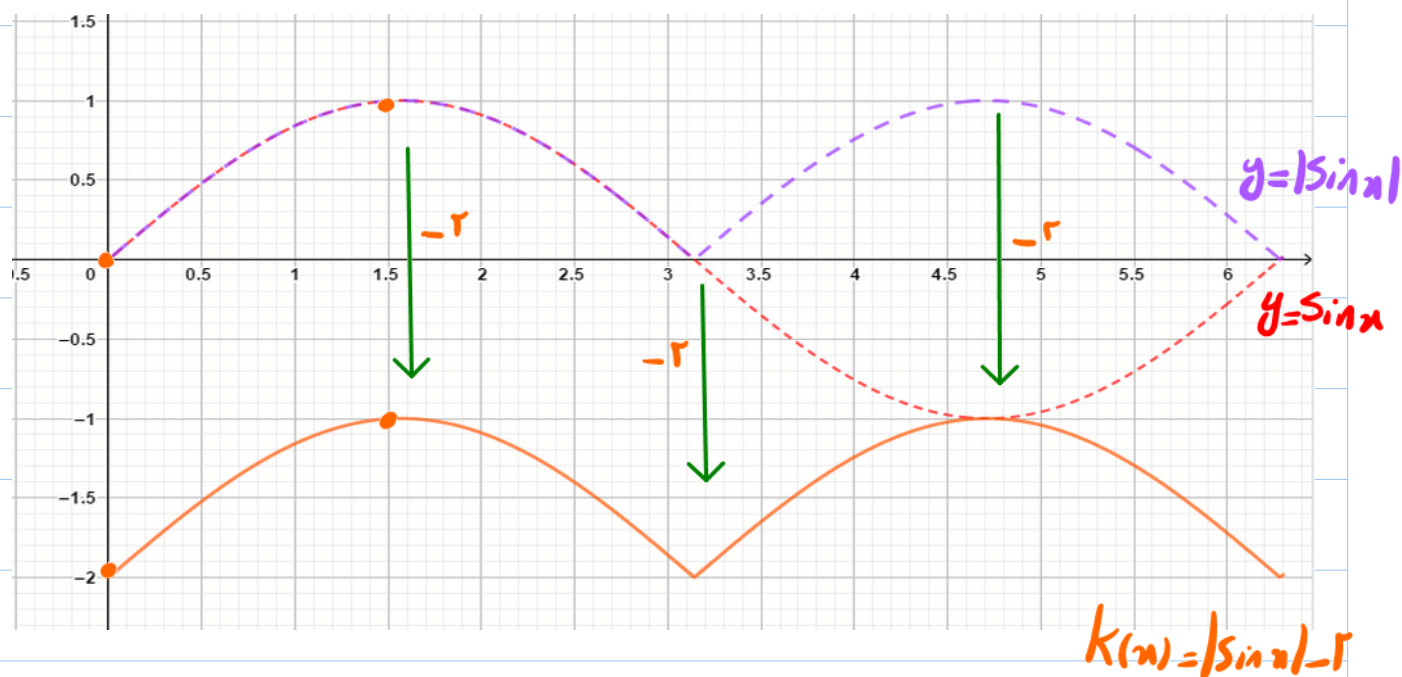


$$y = \sin u$$

$$h(u) = \sin(u - \frac{\pi}{\epsilon})$$



$$K(x) = |\sin x| - 2$$



سؤال:

آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق اند یا خیر؟

۱) $y = \sin x$, $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

۲) $y = \cos x$, $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

۳) $y = \cos x$, $y = \cos(2\pi - x)$

۴) $y = \sin x$, $y = \sin(5\pi - x)$

۱) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(-(\frac{\pi}{2} - x)) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ بله

۲) $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ بله

۳) $y = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$ بله

۴) $y = \sin(5\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$ بله

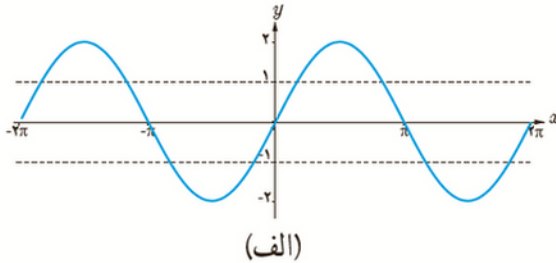
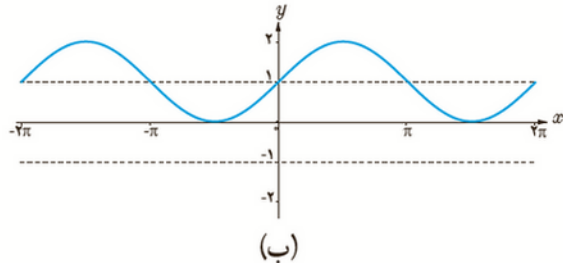
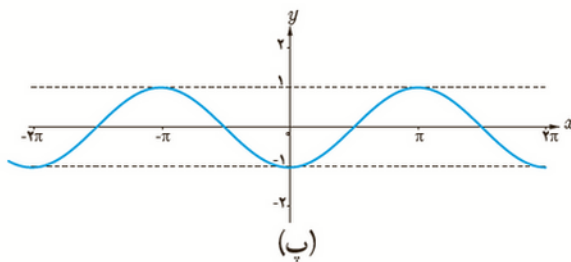
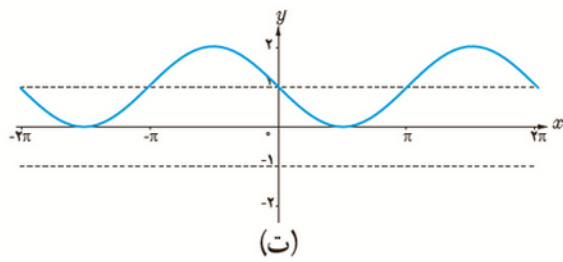
هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱) $y = 2 \sin x$

۲) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

۳) $y = \sin x + 1$

۴) $y = -\sin x + 1$



۱) $y = 2 \sin x$ نمودار (الف)

۲) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(-(\frac{\pi}{2} - x)) = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x$ نمودار (ب)

۳) $y = \sin x + 1$ نمودار (پ)

۴) $y = -\sin x + 1$ نمودار (ت)

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد. **نادرست** $x \in \mathbb{R}$

ب) $\sin \sqrt{5}$ یک عدد حقیقی است. **درست**

پ) $\cos 3 = \cos 3^\circ$. **نادرست**

ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر ۲- باشد. **نادرست**

ت) اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ آنگاه $0 < \cos x < 1$ است. **نادرست**

ج) $x = \pi$ صفر تابع $f(x) = \cos x$ است. **نادرست**

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس سوم: توابع مثلثاتی

حل تمرین: صفحه ۱۰۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

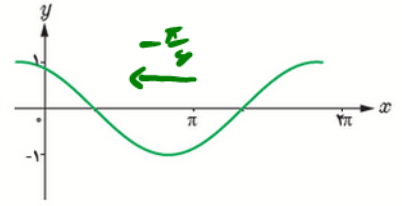
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

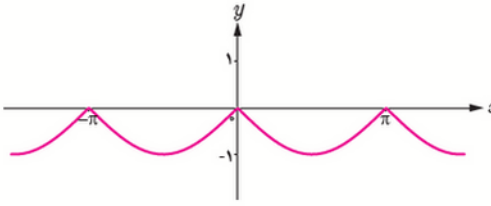
گروه ریاضی
استان همدان

۱) توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

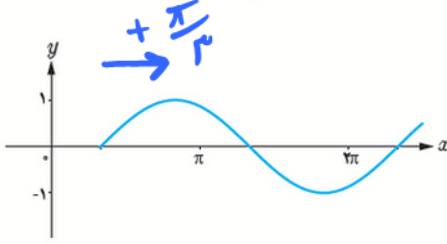
الف) $y = -|\sin x|$



ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$



پ) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$



الف) $y = -|\sin x|$

مت زیر محور x ها به بالا منتقل می شود
پس نسبت به محور x ها قرینه می شود
و همه مت ها زیر محور x ها می افتند.

ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$

منو دار به اندازه $\frac{\pi}{6}$ مت
راست منتقل می شود.

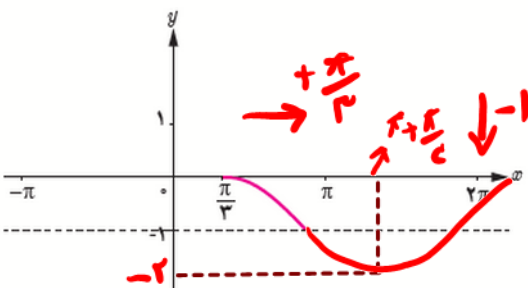
منو دار به اندازه $\frac{\pi}{6}$
مت چپ منتقل می شود.

۲) در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$

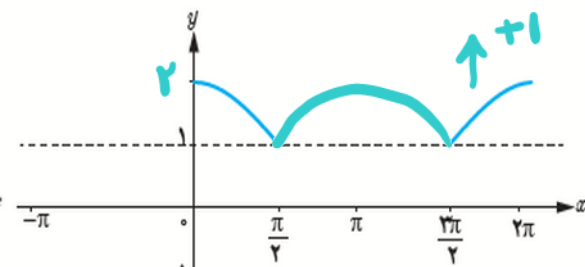
ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$

پ) $y = 1 + |\cos x|$

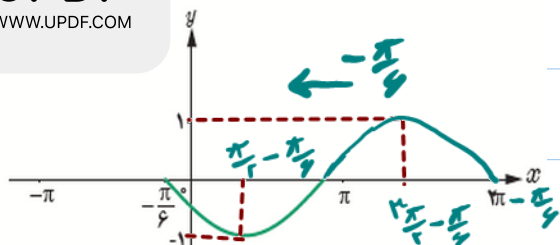


الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$

ب) $y = 1 + |\cos x|$



متها زیر محور x ها قرینه شده به مت ها بالا می افتند



نسبت به محور ها قرینه شده

$$y = -\sin(x + \frac{\pi}{4}) \quad \text{الف)}$$

۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می دهد؟

$$\begin{aligned} y_{\max} = 1 & : x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ y_{\min} = -1 & : x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$y = \cos(x - \frac{\pi}{6}) - 1 \quad \text{ب)}$$

$$y_{\max} = 0 : x = \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$y_{\min} = -2 : x = \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} y = |\cos x| + 1 \quad \text{ج)}$$

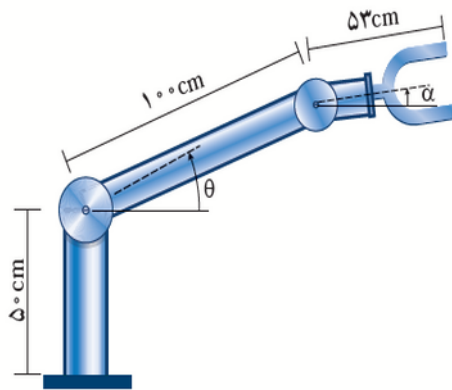
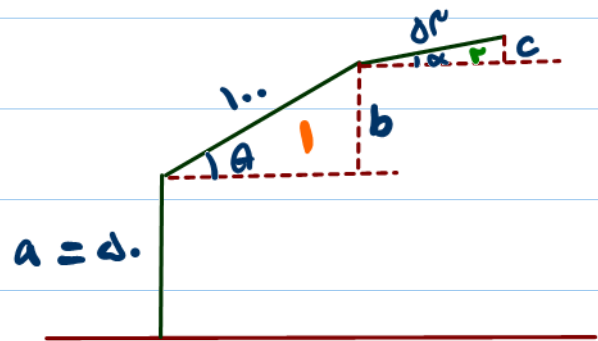
$$y_{\max} = 2 : x = 0, \pi, 2\pi$$

$$y_{\min} = 1 : x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازه $(0, \pi)$ یک به یک است؟

هیچکدام یک به یک نیستند.

۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.



الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل سازی کنید. $(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

$$h = a + b + c = 50 + b + c$$

$$\text{مث ۱: } \sin \theta = \frac{b}{100} \rightarrow b = 100 \sin \theta$$

$$\text{مث ۲: } \sin \alpha = \frac{c}{53} \rightarrow c = 53 \sin \alpha$$

$$h = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin \alpha$$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $23/5 \text{ cm}$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -3^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟



$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \rightarrow h = r_{1,0} = 0. + 1. \sin \theta + 0.3 \sin(-\frac{\pi}{2})$$

$$\rightarrow r_{1,0} - 0. = 1. \sin \theta - 0.3 \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow r_{1,0} - 0. + \frac{0.3}{1} = 1. \sin \theta$$

$$\rightarrow \underline{r_{1,0}} - 0. + \underline{r_{2,0}} = 1. \sin \theta$$

$$\rightarrow 0. - 0. = 1. \sin \theta \rightarrow 1. \sin \theta = 0 \rightarrow \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow \theta = 0$$

پس بازو کا نزدیکتر بہرہ افقی ہے۔

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و

تفاضل زوایا

قسمت اول

جلسه پنجم: صفحات ۱۱۰ و ۱۱۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در سال گذشته با روابط زیر که به آن‌ها (کارهای مثلثاتی) می‌گویند آشنا شدید:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$2) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow (\tan \alpha)(\cot \alpha) = 1$$

$$3) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$4) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

مثال: تمرین ۹۸

اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$ ✓

$$\text{جواب} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} (2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sin^2 x) = \frac{1}{|\cos x|} (2 \times \frac{1}{4} - \sin^2 x)$$

$$\xRightarrow{\cos x < 0} \text{جواب} = \frac{1}{-\cos x} (1 - \sin^2 x) = \frac{1}{-\cos x} \times \cos^2 x = -\cos x$$

پایان

$$۱) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$۲) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

مثال : مقادیر زیر را بیابید .

$$\sin ۱۰۰^\circ = \sin(۶۰^\circ + ۴۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ \cos ۴۰^\circ + \sin ۴۰^\circ \cos ۶۰^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{ب) } \cos ۷۰^\circ = \cos(۳۰^\circ + ۴۰^\circ) = \cos ۳۰^\circ \cos ۴۰^\circ - \sin ۳۰^\circ \sin ۴۰^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{پ) } \cos ۲۰۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) = -\cos ۲۰^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$



مثال: اگر $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ و $\cos \beta = \frac{12}{13}$ و α و β به ترتیب در ربع سوم و دوم

باشند، $\cos(\alpha + \beta)$ را بیابید.

$$\cos(\alpha + \beta) = \overset{?}{\cos \alpha} \overset{\checkmark}{\cos \beta} - \overset{\checkmark}{\sin \alpha} \overset{?}{\sin \beta}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sin \beta = \pm \frac{5}{13}$$

$$\xrightarrow{\text{در ربع دوم}} \sin \beta = \frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5} \times \frac{12}{13} - \left(-\frac{3}{5}\right) \left(\frac{5}{13}\right) = \frac{-48}{65} - \frac{10}{65} = \frac{-58}{65}$$

مثال: اگر $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = a$ مقدار $\cos 17^\circ$ را بر حسب a بدست آورید.

$$\cos 17^\circ = \cos(45^\circ - 28^\circ) = \cos 45^\circ \cos 28^\circ + \sin 45^\circ \sin 28^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 28^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 28^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 28^\circ + \cos 28^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$



مثال: مقدار $\frac{\sin 41^\circ \sin 21^\circ + \sin 59^\circ \sin 29^\circ}{\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ}$ را بیابید.

$$41^\circ + 29^\circ = 90^\circ \rightarrow \sin 29^\circ = \cos 41^\circ$$

$$21^\circ + 59^\circ = 90^\circ \rightarrow \sin 59^\circ = \cos 21^\circ$$

$$\frac{\sin 41^\circ \sin 21^\circ + \cos 21^\circ \cos 41^\circ}{\sin(12^\circ + 18^\circ)} = \frac{\cos(41^\circ - 21^\circ)}{\sin(12^\circ + 18^\circ)} = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$= \cot 20^\circ = \sqrt{3}$$

مثال کنکور ۹۹:

- اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$-\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\cos(\frac{11\pi}{2} + \alpha) = \cos \frac{11\pi}{2} \cos \alpha - \sin \frac{11\pi}{2} \sin \alpha$$

$$\cos \frac{11\pi}{2} = \cos \frac{12\pi - \pi}{2} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{2}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{2}) = -\cos \frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{11\pi}{2} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{2}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - (\frac{\sqrt{2}}{10})^2 = 1 - \frac{2}{100} = \frac{98}{100} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{98}}{10}$$



$$\cos(\frac{13\pi}{2} + \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{\sqrt{48}}{10}) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{10}) = \frac{\sqrt{192}}{20} - \frac{2}{20}$$

$$= \frac{16}{20} - \frac{2}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال کنکور ۹۹:

اگر انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

$-\frac{3}{5}$ (۲)

$-\frac{4}{5}$ (۱) ✓

$$\sin(\frac{13\pi}{2} + \alpha) = \sin \frac{13\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{13\pi}{2}$$

روش اول: برای $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ از یک مثلث قائم الزامی

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



روش دوم:

$$\sin \frac{13\pi}{2} = \sin \frac{12\pi + \pi}{2} = \sin(6\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{2}) = -\sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{13\pi}{2} = \cos(\pi + \frac{\pi}{2}) = -\cos \frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\frac{13\pi}{2} + \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5} \quad \text{گزینه ۱}$$

۲×۲



مثال: ثابت کنید: $\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} \pm \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\sin \alpha \pm \cos \alpha) = \sin \alpha \pm \cos \alpha = \text{ثابت}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} = 1$

مثال: حاصل $\sin 10^\circ + \cos 10^\circ$ را بدست آورید.

$$\sin 10^\circ + \cos 10^\circ = \sqrt{2} \sin(10^\circ + 20^\circ) = \sqrt{2} \sin(30^\circ) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{2}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و

تفاضل زوایا

قسمت دوم

جلسه ششم: صفحات ۱۱۰ و ۱۱۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

نسبت های مشتقاتی (دو برابر شدن) (2α)

الف) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

اثبات: $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$

$= 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \square$

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

اثبات: $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$

$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \square$

پ) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

اثبات: می دانیم: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

بجای $\sin^2 \alpha$ در (ب) داریم:

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

$\square$



$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad (2)$$

(نکته: باجای α مقدار $\cos \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ در رابطه بکاریم):

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \square$$

مثال: اگر $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ باشد، α در ناحیه دوم واقع باشد مقدار $\sin \alpha$ را بیابید.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه دوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

مثال: حاصل $\cos 160^\circ \cos 10^\circ$ را بدست آورید.

$$\cos 160^\circ = \cos (180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

$$\cos 10^\circ = \cos (90^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$$

$$\text{پس:} = (-\cos 20^\circ)(\sin 80^\circ) = -\sin 10^\circ \cos 10^\circ$$

ثبات: $\frac{1}{2} \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha$

$\Rightarrow$ ثبات $= \frac{1}{2} \sin 2(15^\circ) = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

مثال: اگر $\sin 40^\circ = k$ باشد، حاصل $\sin 4^\circ$ را بر حسب k بدست آورید.

$k = \sin 40^\circ = \cos 50^\circ$: $40^\circ + 10^\circ = 50^\circ$

$\sin 4^\circ = \cos 5^\circ$: $4^\circ + 1^\circ = 5^\circ$

$\sin 4^\circ = \cos 5^\circ = \cos(2 \times 2.5^\circ) = 2 \cos^2 2.5^\circ - 1 = 2k^2 - 1$

مثال: اگر $\cos(n + \frac{\pi}{4}) + \cos(n - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos 2n$ را بدست آورید.

$\cos n \cos \frac{\pi}{4} - \sin n \sin \frac{\pi}{4} + \cos n \cos \frac{\pi}{4} + \sin n \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

$\rightarrow 2 \cos n \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cos n (\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} \rightarrow \cos n = \frac{1}{4}$

$\cos 2n = 2 \cos^2 n - 1 = 2 (\frac{1}{4})^2 - 1 = 2 \times \frac{1}{16} - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$

مثال: روابط زیر را ثابت کنید.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \text{الف}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{ب}$$

$$\text{اثبات الف: } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\div 2 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\text{اثبات ب: } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \rightarrow \cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2 \alpha$$

$$\div 2 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

مثال: برای زاویه 10° ، سینوس و کسینوس را بیابید.

$$\sin^2 10^\circ = \frac{1 - \cos 2(10^\circ)}{2} = \frac{1 - \cos 20^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin^2 10^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin 10^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos^2 10^\circ = \frac{1 + \cos 2(10^\circ)}{2} = \frac{1 + \cos 20^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \rightarrow \cos 10^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل چهارم: مثلثات

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و

تفاضل زوایا

حل تمرین: صفحه ۱۱۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

ب) $\tan 15^\circ$

روش اول: $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$ به‌عنوان مخرج

روش دوم: استفاده از رابطه: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

پ) $\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

ت) $\sin 12^\circ$

روش اول: $\sin(12^\circ) = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

روش دوم: $\sin(12^\circ) = \sin(9^\circ + 3^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ردش سوم :

$$\sin(12^\circ) = \sin(2 \times 6^\circ) = 2 \sin 6^\circ \cos 6^\circ$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ث) $\cos 135^\circ$

ردش اول : $\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ردش دوم : $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ردش سوم : $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \sin 45^\circ$

$$= 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می گیرد؟

الف)

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{اول ربع } \alpha} \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{169 - 144}{169} = \frac{25}{169}$$

$$\rightarrow \sin \beta = \pm \frac{5}{13} \xrightarrow{\text{دوم ربع } \beta} \sin \beta = \frac{5}{13}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{-12}{65} + \frac{20}{65} = \frac{8}{65}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{1}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-48 + 5}{65} = \frac{-43}{65}$$

ب) α ربع اول، β ربع دوم، $\sin(\alpha + \beta)$ منفی شده است پس $\alpha + \beta$

در ناحیه سوم است.

۳ با استفاده از روابط نسبت های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

الف) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

پ) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

ت) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

در متن درس اثبات کردیم.

۴ نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$



$$= \frac{r - \sqrt{r}}{r} \xrightarrow{\sqrt{}} \sin \angle r, O = \frac{\sqrt{r - \sqrt{r}}}{r}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \cos^2 \angle r, O = \frac{1 + \cos \angle O}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{r}}{r}}{2} = \frac{r + \sqrt{r}}{2r}$$

$$= \frac{r + \sqrt{r}}{2r} \xrightarrow{\sqrt{}} \cos \angle r, O = \frac{\sqrt{r + \sqrt{r}}}{\sqrt{2}r}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس اول و دوم: مفهوم حد و فرایندهای
حدی-حدهای یک طرفه

جلسه اول: صفحات ۱۱۴ تا ۱۲۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

قبل از اینکه تعریف دقیق حد یک تابع را بگیریم، لازم است با مفاهیم زیر درگیر شویم.

(۱) فزاینده‌ی:

- در شکل‌های زیر در هر مرحله یک n ضلعی منتظم درون دایره قرار داریم. اگر n را زیاد کنیم

مساحت n ضلعی به مساحت دایره نزدیک‌تر شود.



پس می‌توانیم بگوییم مساحت چند ضلعی‌های داخلی را به همان اندازه که خود هم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه مقدار اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

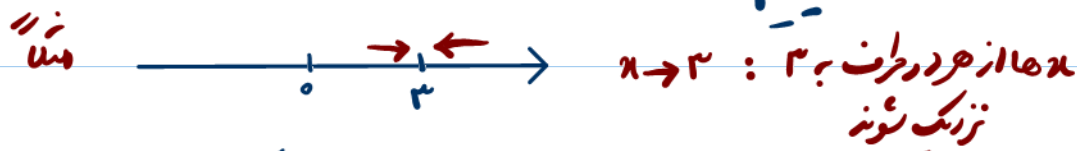
- دنباله $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ را در نظر بگیرید. اگر n غنی‌تر شود، محله را بزرگ‌تر و بزرگ‌تر کنیم، محلات دنباله کوچکتر شده و به صفر نزدیک‌تر می‌شود.

مثال‌ها را بالا بنویسید از فزاینده‌های حدی هستند.

۱۲) میل کردن :

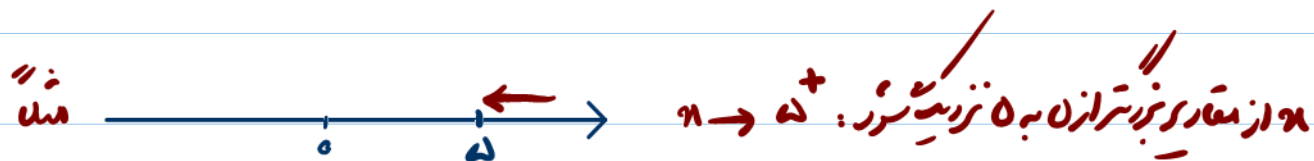
وقتی می‌گوئیم a به a میل می‌کند یعنی a بسیار به عدد a نزدیک می‌شود ولی هرگز

برابر عدد a نمی‌شود و می‌نویسیم $a \rightarrow a$.



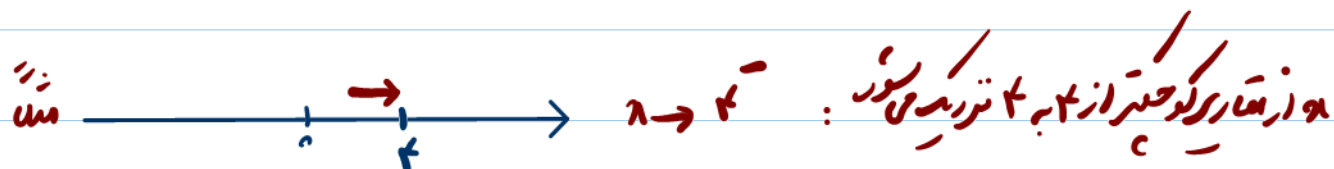
وقتی می‌نویسیم $a \rightarrow a^+$ یعنی a از مقدار بزرگتر از a ، به a بسیار نزدیک می‌شود. در این

حالت می‌گوئیم a از سمت راست به a میل می‌کند.



وقتی می‌نویسیم $a \rightarrow a^-$ یعنی a از مقدار کوچکتر از a ، به a بسیار نزدیک می‌شود. در این

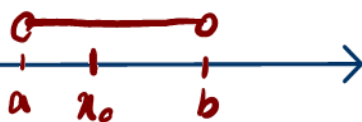
حالت می‌گوئیم a از سمت چپ به a میل می‌کند.



۱۳) همسانگی :

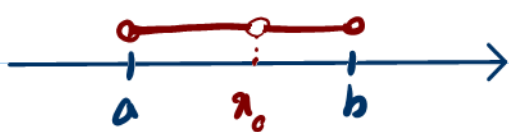
فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد، هر باره بازشامل a را یک همسانگی a می‌گوئیم.

(a, b) یک‌هستی x_0



مثال: بازه $(5, 8)$ یک‌هستی عدد ۶ است.

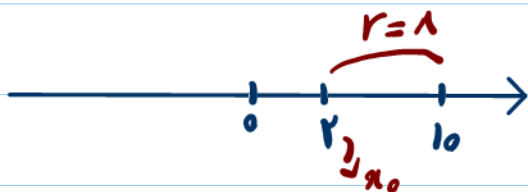
اگر عدد x_0 را از هستی (a, b) حذف کنیم یعنی $(a, b) - \{x_0\}$ ، به مجموعه بدلت رسیده



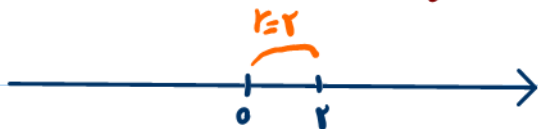
یک‌هستی معزوف x_0 می‌گیریم.

اگر $r > 0$ باشد بازه باز $(x_0 - r, x_0 + r)$ را یک‌هستی راست عدد x_0 و بازه باز

$(x_0 - r, x_0)$ را یک‌هستی چپ x_0 می‌گیریم.



مثال: $(2, 10)$ یک‌هستی راست ۲



$(0, 2)$ یک‌هستی چپ ۲

حال می‌توانیم تعریف حد را بیان کنیم.

تعریف حد تابع:

فرض کنید تابع $y = f(x)$ در یک‌هستی معزوف a تعریف شده باشد (یعنی در حوزه a تعریف شود)

یا نشود (مقدار ندارد). می‌گوئیم حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ برابر عدد L است.

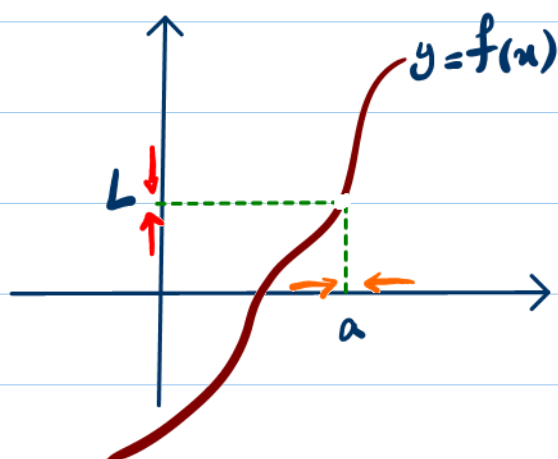
با نزدیک شدن x به a مقادیر تابع f (هنگامی‌ها) به L نزدیک شوند و این را می‌گوییم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

تعریف بالا را به این صورت هم می‌توان گفت:

حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ برابر L است هرگاه مقادیر تابع f (هنگامی‌ها) را به هر اندازه

درخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود.



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

مثال: تابع $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول و نمودار، حد تابع را وقتی $x \rightarrow 1$

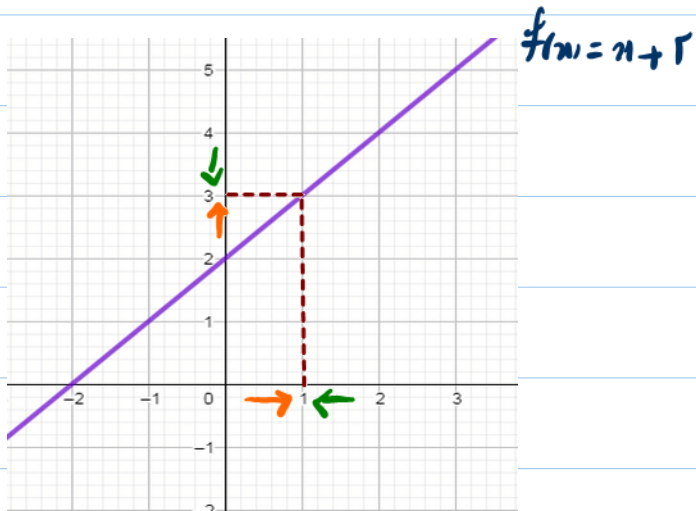
یابید.



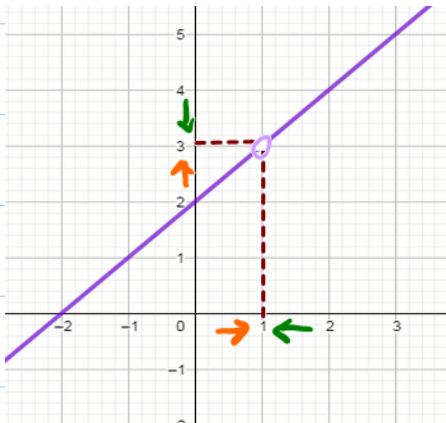
$$y = x + 2$$

$\cdot 0$	$\cdot 9$	$\cdot 99$	$\rightarrow 1$	$\leftarrow 1,1$	$1,1$	$1,0$	2
2	$2,0$	$2,9$	$2,99 \rightarrow 3$	$3 \leftarrow 3,1$	$3,1$	$3,0$	3

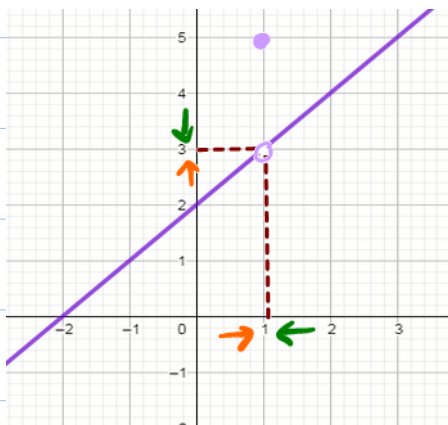
$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$



در دو حالت زیر هم حد تابع در $x = 1$ برابر ۳ است.



$$g(x) = x + 2, \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$



$$h(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$$

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همگرایی راست a تعریف شده باشد و گوئیم حد راست تابع f در نقطه $a = x_0$

برابر L است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد،

به شرط آنکه x درست راست به قدر کافی به a نزدیک شود و می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

تعریف حد چپ :

اگر تابع f در یک همگرایی چپ a تعریف شده باشد و گوئیم حد چپ تابع f در نقطه $a = x_0$

برابر L است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد،

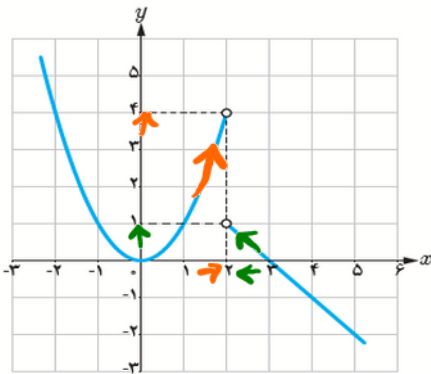
به شرط آنکه x درست چپ به قدر کافی به a نزدیک شود و می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

نکته: حد تابع f در $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد راست و چپ تابع در $x=a$ برابر باشند یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x > 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت روبه رو است:



آیا تابع f در نقطه $x=2$ حد دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$$

توجه: در $x=2$ حد ندارد زیرا $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

مثال: با توجه به نمودار f ، حدهای خواسته شده را، در صورت وجود، به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 3$$

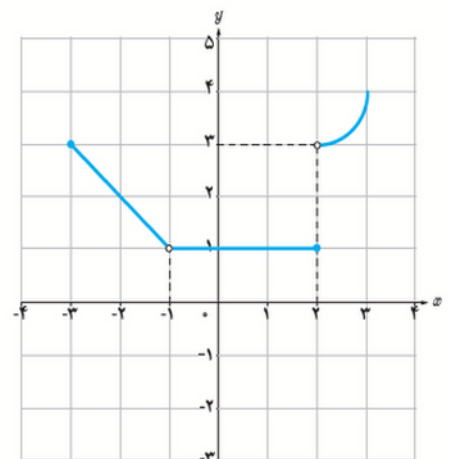
$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

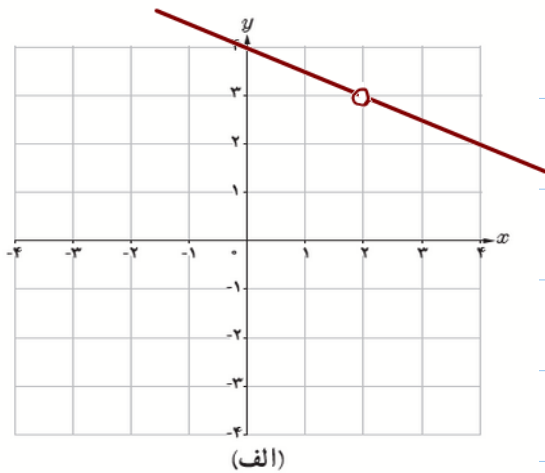
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$



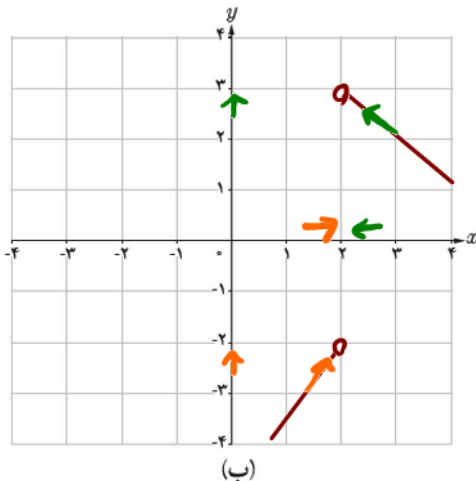
نمونه: نموداری از یک تابع رسم کنید که:

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

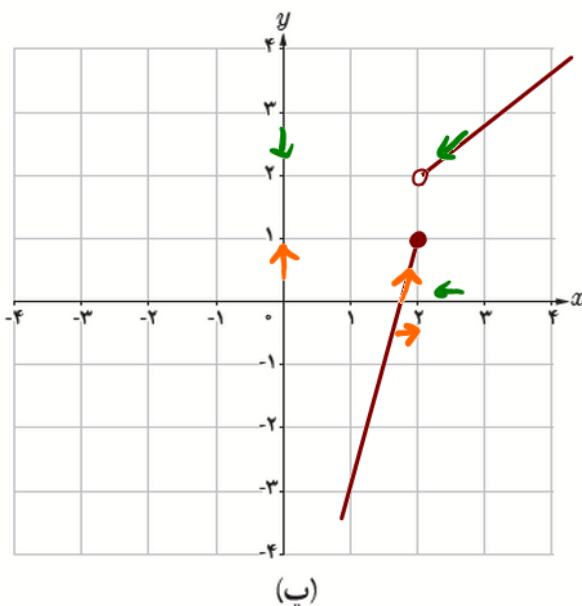
$$x \rightarrow 2^+$$

در $x=2$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2$$

$$x \rightarrow 2^-$$

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

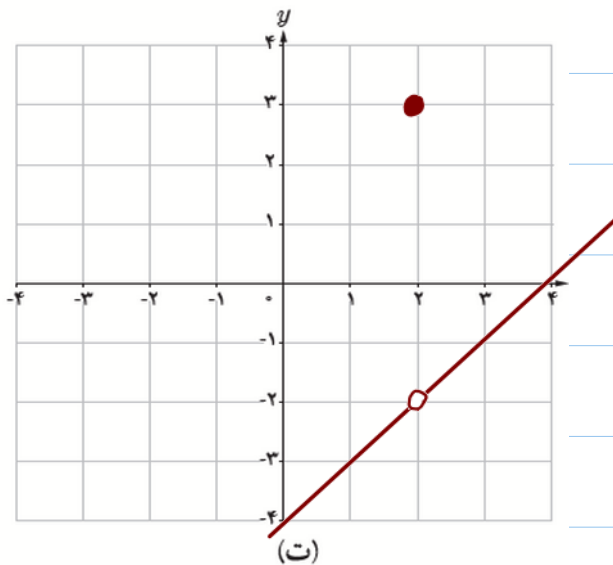
$$x \rightarrow 2^+$$

در $x=2$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$x \rightarrow 2^-$$

ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



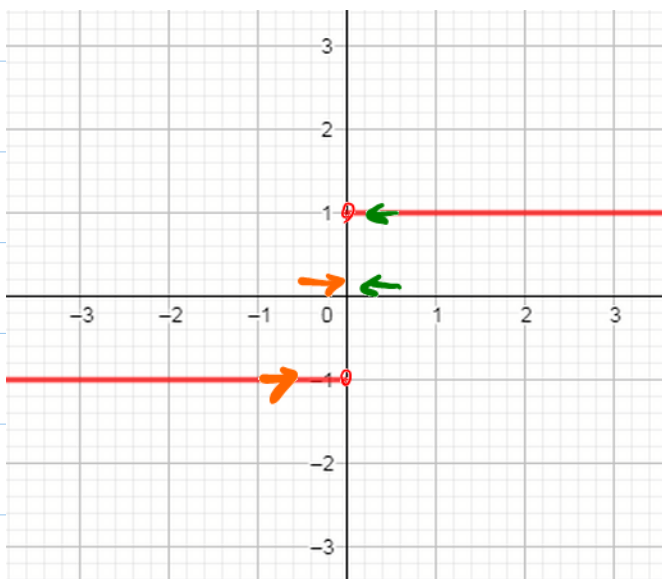
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$$

$$f(2) = 3$$

مثال: عددهای زیر را با اشاره از رسم نموداری بسنجید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \text{ را بف}$$

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ -\frac{x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



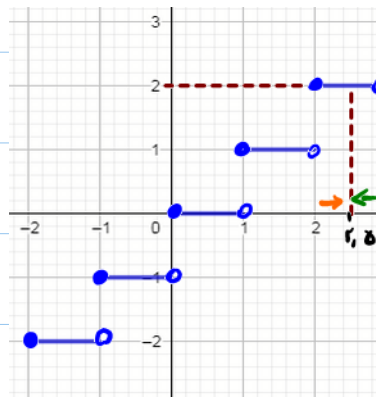
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

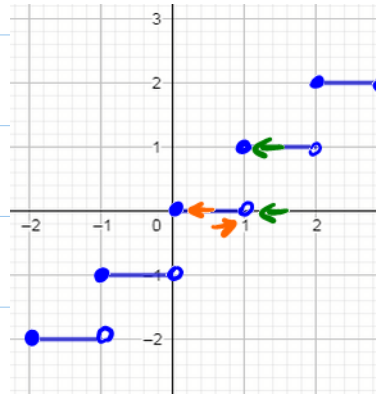
تابع در $x=0$ حد ندارد.



ب) $\lim_{n \rightarrow \frac{\omega}{2}} [n] = 2$



پ) $\lim_{n \rightarrow 1} [n] = \text{حد ندارد}$

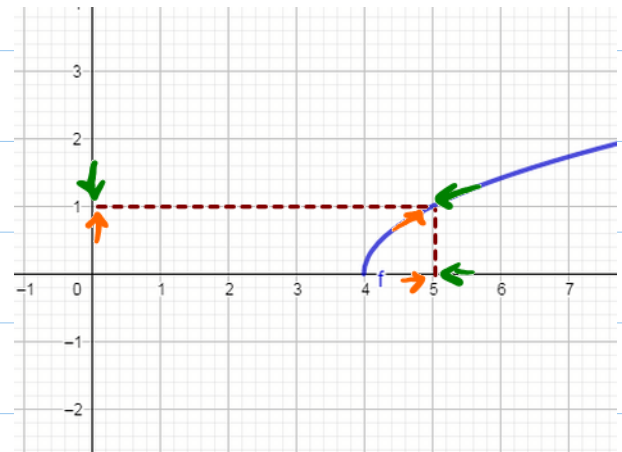


$\lim_{n \rightarrow 1^+} [n] = 1$

$\lim_{n \rightarrow 1^-} [n] = 0$

$n \rightarrow 1^-$

ث) $\lim_{n \rightarrow 5} \sqrt{n-4} = 1$



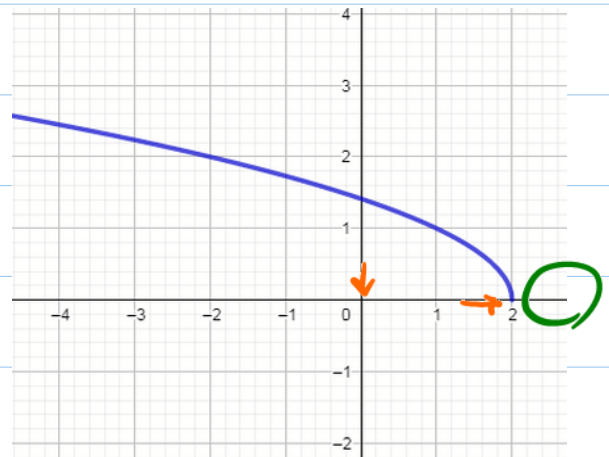
ث) $\lim_{n \rightarrow 2} \sqrt{2-n} = \text{حد ندارد}$

تابع در همگی رابت ۲ بتویف نشده است پس:

$\lim_{n \rightarrow 2^+} \sqrt{2-n} = \text{محدود نیست}$

$\lim_{n \rightarrow 2^-} \sqrt{2-n} = 0$

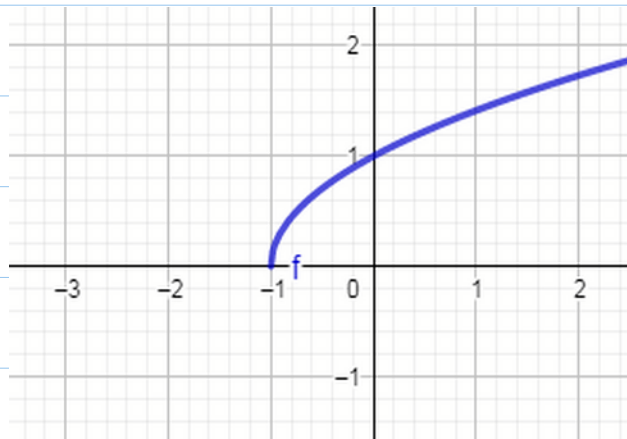
$n \rightarrow 2^-$





ج. ۱) $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x+1} = \text{حد ندارد}$

زیرا تابع در $x = -3$ تعریف نشده است.

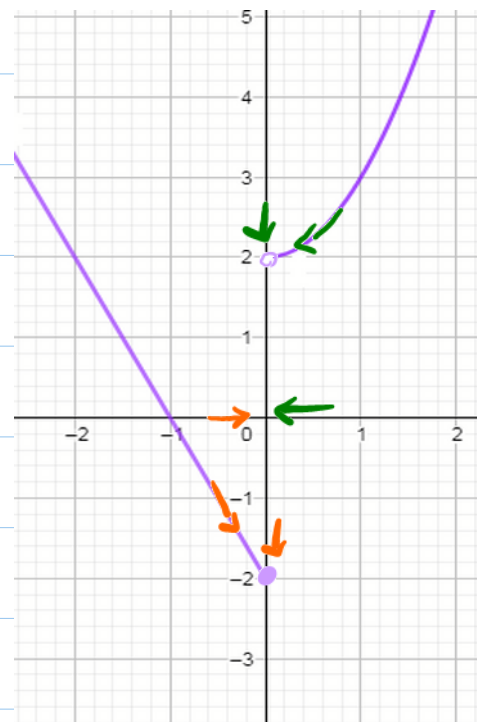


مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ -2x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

تابع در $x = 0$ حد ندارد.



حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس سوم: قضایای حد

جلسه دوم: صفحات ۱۳۰ تا ۱۳۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

برای محاسبه حد توابع از قضیه‌های زیر کمک می‌گیریم:

قضیه ۱) حد تابع ثابت $f(x) = c$ در هر عدد دلخواه a ، همان مقدار ثابت c است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

مثال $\lim_{x \rightarrow 5} 3 = 3$

قضیه ۲) حد تابع همانی $f(x) = x$ در هر عدد دلخواه a ، برابر a می‌شود یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

مثال $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

قضیه ۳) فرض کنید توابع f و g در نقطه $x = a$ حد داشته باشند و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

آنگاه

(الف) مجموع و تفاضل حاصل ضرب این دو تابع در $x = a$ حد دارند و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm \frac{1}{x} g(x)) = L_1 \pm \frac{1}{x} L_2$$

ب) اگر $L_2 \neq 0$ باشد، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ در $x = a$ حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۴) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، $c \in \mathbb{R}$ باشد آنگاه

مثال $\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 2 \times 2 = 4$

ا) $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cL$

مثال $\lim_{x \rightarrow 2} (x)^3 = 2^3 = 8$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = L^n$

قضیه ۵) اگر $f(x)$ یک تابع چند جمله‌ای باشد حد تابع در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر است:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

قضیه ۶) اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$:

ا) اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همگرایی نقطه a تعریف شده باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \sin(f(x)) = \sin L$ ، $\lim_{x \rightarrow a} \cos(f(x)) = \cos L$

نتیجه: اگر تابع f در همگرایی a تعریف شده باشد و با جایگذاری a به جای x در تابع به یک

عدد مشخص برسیم، مقدار حد همین عدد خواهد شد، جز مواردی که به آن‌ها اشاره می‌کنیم.



مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$ ، آنگاه حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (7g(x) - \frac{1}{2}f(x)) = 7 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 7 - 1 = 6$$

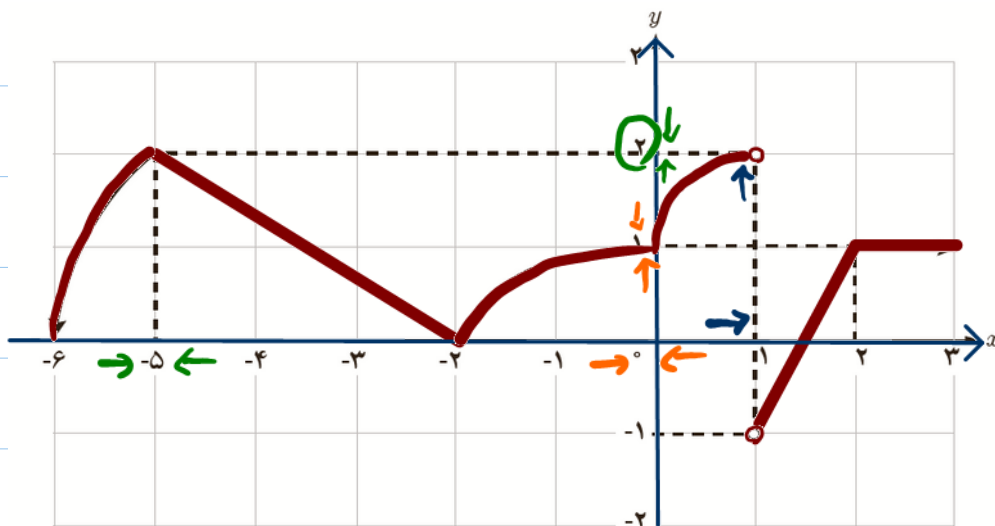
$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1 + f(x))g(x)}{g(x) + 2} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} 1 + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)) \lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow 2} 2}$$

$$= \frac{(1 + 2) \times 1}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} (g(x) + \frac{2}{f(x)})^3 = (1 + \frac{2}{1})^3 = (1 + 2)^3 = 3^3 = 27$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{5x-1} + \frac{f(x)}{g(x)}) = \sqrt{5 \times 2 - 1} + \frac{2}{1} = \sqrt{9} + 2 = 3 + 2 = 5$$

مثال: نمودار تابع f داده شده است. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید:





$$1) \lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{x}{5} - 1 \right)^2 \times f(x) = \left(-\frac{5}{5} - 1 \right)^2 \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = (-2)^2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x}}{x^2 + f(x)} = \frac{\sqrt{4-0}}{0^2 + \lim_{x \rightarrow 0} f(x)} = \frac{2}{0+1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x - (f(x))^2) = 1^2 + 1 - (\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x))^2 = 1 + 1 - (2)^2 = 2 - 4 = -2$$

مثال: حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (2x^4 - x^3 - 5x^2 + 4) = 2(-1)^4 - (-1)^3 - 5(-1)^2 + 4$$

$$= 2 - (-1) - 5 + 4 = 2 + 1 - 5 + 4 = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \left(1 + \frac{x}{2} \right)^2 (x^2 - 6x) = \left(1 + \frac{4}{2} \right)^2 (4^2 - 6 \times 4) = 3^2 (16 - 24)$$

$$= 9(-8) = -72$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^0} (5x^3 - 6|x| + 1) = 5(1^3) - 6 \times 1 + 1 = 5 - 6 + 1 = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{\lambda x^r + r x^r + r x}{r x + 1} = \frac{\lambda \left(\frac{1}{r}\right)^r + r \left(\frac{1}{r}\right)^r + r \times \frac{1}{r}}{r \times \frac{1}{r} + 1} = \frac{\lambda \times \frac{1}{\lambda} + r \times \frac{1}{r} + 1}{r + 1}$$

$$= \frac{1 + 1 + 1}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$0) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{r}}{1 - \cos \frac{\pi}{r}} = \frac{1 + 1}{1 - 0} = \frac{r}{1} = r$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{r}} (r \sin x + \cos^r x) = r \sin\left(-\frac{\pi}{r}\right) + \cos^r\left(-\frac{\pi}{r}\right)$$

$$= -r \sin \frac{\pi}{r} + \cos^r \frac{\pi}{r} = -r \times \frac{1}{r} + \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^r$$

$$= -r + \frac{r}{r} = \frac{-r + r}{r} = \frac{-0}{r}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{0x - 9} = \sqrt{0 \times 0 - 9} = \sqrt{r0 - 9} = \sqrt{14} = r$$

$$1) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\pi \cos x}{x} = \frac{\pi \cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{\pi \cos \pi}{-\pi} = \frac{\pi \times (-1)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

۱) توابع چندضابطه‌ای : اگر حد تابع در نقطه‌ای که ضابطه تابع تغییری کند (نقطه‌ای)

خواسته شده باشد باید حد چپ و حد راست از ضابطه‌ها مربوط به آن می‌شوند.

مثال: حد تابع f را در نقطه a (در صورت وجود) بیابید

$$۱) f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ x-2 & x < 0 \end{cases}, \quad a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

$0 \neq 0$ پس تابع در $x=0$ حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2) = 0-2 = -2$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} 5 & x < 3 \\ x+2 & x > 3 \end{cases}, \quad a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+2) = 3+2 = 5$$

$5 = 5$ پس تابع در $x=3$ حد دارد

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$$



$$۳) f(x) = \begin{cases} ۳-x & x < ۲ \\ -۱ & x = ۲ \\ x^۲-۴ & x > ۲ \end{cases}, \quad a = ۲$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^+} (x^۲ - ۴) = ۲^۲ - ۴ = ۴ - ۴ = ۰$$

۱. $\neq ۰$ پس تابع در $x=۲$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow ۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^-} (۳ - x) = ۳ - ۲ = ۱$$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} (a+۱)x + ۳ & x > -۲ \\ -۲x^۲ + ۱ & x < -۲ \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع f در نقطه $x = -۲$ حد داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^+} (a+۱)x + ۳ = \widehat{(a+۱)(-۲)} + ۳ = -۲a - ۲ + ۳ = -۲a + ۱$$

$$\lim_{x \rightarrow -۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^-} -۲x^۲ + ۱ = (-۲)(-۲)^۲ + ۱ = -۸ + ۱ = -۷$$

$$\lim_{x \rightarrow -۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^-} f(x) \Rightarrow -۲a + ۱ = -۷ \Rightarrow -۲a = -۸ \Rightarrow a = ۴$$

۱۲ حد توابع شامل رادیکال با فرض زوج :

در این توابع باید بررسی شود عبارت رادیکالی در همگی نقطه تعریف شده است یا خیر.

اگر تعریف شود مقدار تابع حد تابع خواهد بود اگر نه حد موجود نیست.

در این توابع هم برای نقای که رسم داخل رادیکال هستند حد چپ و راست را می‌نویسیم.

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{2x+4}$$

x	-2
$2x+4$	$- \quad 0 \quad +$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{2x+4} = \sqrt{2(2)+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{2x+4} = \text{حد ندارد}$$

تابع در همگی چپ
-2 تعریف نمی‌شود

پس این حد موجود نیست.

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2+3x}$$

x	-0	0	$+0$
x^2+3x	$+$	0	$- \quad +$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2+3x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2+3x} = \text{حد ندارد}$$

پس این حد موجود نیست.



$$\sqrt{4-x}$$

$$x \rightarrow 4$$

$$D: 4-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -4 \Rightarrow x \leq 4$$

$$D = (-\infty, 4]$$

تابع در مسائلی که در ۵ تعريف نمی شود پس در این نقطه حد ندارد.

۳) حد توابع شامل جزء صحیح :

بیانیم اگر $a^+ \rightarrow x$ یعنی $x > a$ و اگر $a^- \rightarrow x$ یعنی $x < a$ است. در محاسبه حد

توابع شامل جزء صحیح از این نکته استفاده کرده حدت داخل جزء صحیح را می سازیم و

مقدار عبارت جزء صحیح را در مسائلی a می بینیم تا ببینیم با کدام تابع ثابت برابر

می شود. پس با جی گذاری این مقدار در تابع، حد را بدست می آوریم.

مثال: حدهای زیر را می بینید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 3)[x]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 3)[x] = (0 + 3) \times 0 = 0$$



$$\lim_{n \rightarrow 0^-} (n+3) [n] = (0+3) \times (-1) = -3$$

$$n \rightarrow 0^-$$

۳-۵ این حد موجود نیست

$$۱) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x}{[x] + 1} = \frac{2^2 + 3 \times 2}{[2] + 1} = \frac{10}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$$

$\swarrow$
 $1 < x < 2$

$$۲) \lim_{n \rightarrow 1^-} [-2n] : \quad n < 1 \xrightarrow{x(-۲)} -2n > -۲$$

در نتیجه عبارت $-2n$ بزرگتر از -۲ و نزدیک آن است پس $-۲ < -2n < -۲$

$$\lim_{n \rightarrow 1^-} [-2n] = -۲$$

$$n \rightarrow 1^-$$

باید دقت کرد که به همین نتیجه می رسیم.

$$۳) \lim_{n \rightarrow 2} n + \left[\frac{n}{2} \right]$$

$$n \rightarrow 2$$

پس $\frac{n}{2}$ بزرگتر از یک و نزدیک آن است. $n \rightarrow 2^+ : n > 2 \xrightarrow{\div 2} \frac{n}{2} > 1$

$$1 < \frac{n}{2} < 2 \rightarrow \lim_{n \rightarrow 2^+} n + \left[\frac{n}{2} \right] = 2 + 1 = 3$$



پس $\frac{n}{m}$ از یک نزدیک تر می شود به ۱ : $\frac{n}{m} < 1 \xrightarrow{n \rightarrow m^-} \frac{n}{m} < 1$: $n < m$: $n \rightarrow m^-$

$$0 < \frac{n}{m} < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow m^-} n + \left[\frac{n}{m} \right] = m + 0 = m$$

۳ ≠ ۴ پس این صورت درست نیست.

$$۵) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\sqrt{2-2}}{[2^+]+2} = \frac{0}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$۶) \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} n[n] = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$\frac{1}{2} < n < 1$

$$۷) \lim_{n \rightarrow \frac{0}{2}} r[n] = 2 \times 2 = 4$$

$2 < n < 2$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس چهارم: محاسبه حد توابع

کسری (حالت صفر صفرم)

قسمت اول

جلسه سوم: صفحات ۱۴۱ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

اگر $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n)}{g(n)}$ خودسته شده باشد و عدد از قرار دار a به چپ a ، صورت و مخرج

نزدیک صفر

هر دو صفر شوند با توجه به نوع صفر $\pm$ حالت خوار هم را بگفت.

صفرها در دسته اند: ۱- صفر مطلق (خرد صفر) ۲- صفر نسبی یا جدی (± 0)

نوع اول: $\frac{0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

نوع دوم: $\frac{\pm 0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

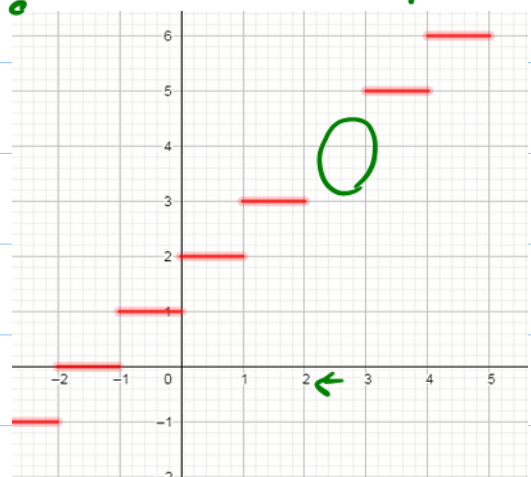
نوع سوم: $\frac{0}{\pm 0}$ صورت صفر مطلق و مخرج غیر صفر (مفردی) پس حد کسر صفر است.

نوع چهارم: $\frac{\pm 0}{\pm 0}$ به این حالت، حالت مبهم میگویند و باید رفع ابهام شود.

مثال: حد های زیر را محاسبه کنید.

حد وجود ندارد

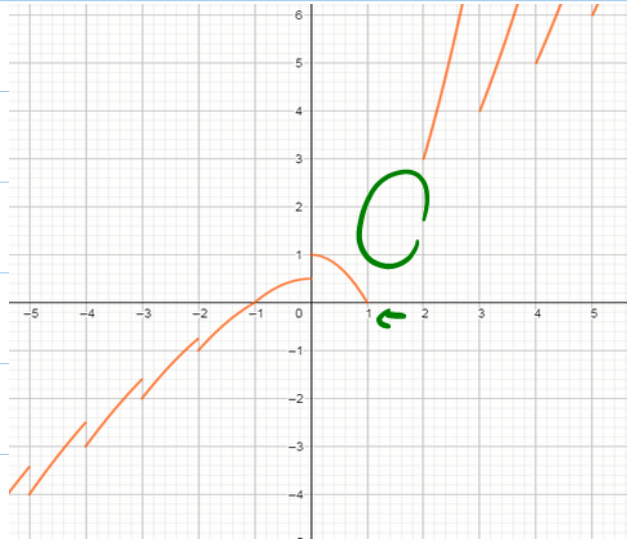
$$\lim_{n \rightarrow 2^+} \frac{[n]^2 - 4}{[n] - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$



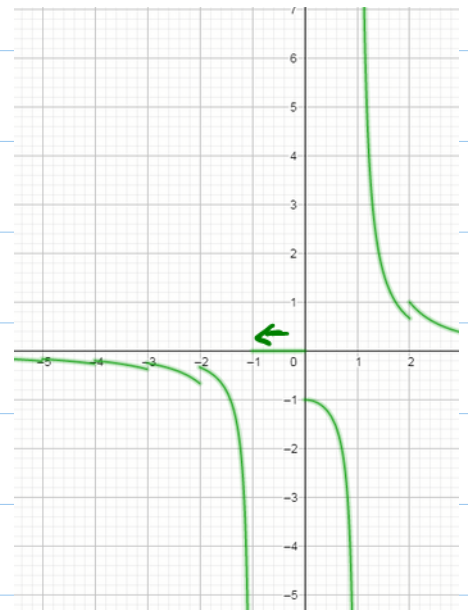


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{[x] - 1} = \frac{1^+ - 1}{1 - 1} = \frac{0^+}{0^+}$$

حد موجود نیست



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{[x] + 1}{x^2 - 1} = \frac{-1 + 1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$



مسئله: نتایج تجربی ۹۹

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} \text{ حاصل کدام است؟}$$

۱ (۴)

✓ (۳) صفر

۱ (۲)

۱ (۱) $-\infty$

$$\frac{-2 + 3}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

گذراند

رنج اهام $\frac{0}{\pm}$

چون $a \rightarrow n$ و صورت و مخرج هر دو صفر شده اند پس هم صورت هم مخرج

صل $(n-a)$ را دارا هستند. به $(n-a)$ صل اهام یا صفر نشده می نویسم

الف) رنج اهام $\div$ وقتی صورت و مخرج هر دو صفر شده ای باشند.

با استفاده از روش های تجزیه (فاکتورگیری در کدها) صل اهام را در صورت و مخرج

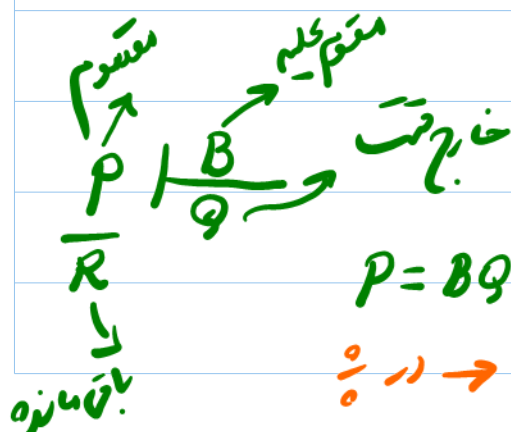
ایجاد و با یکدیگر حذف می کنیم تا حد قابل محاسبه باشد.

بصره: هرگاه نتوانیم باریک ها یا فاکتورگیری صل اهام را ای کنیم، چاره ای

جز به تقسیم آن عبارت بر صل اهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت

حاصل ضرب $(n-a)$ (ها) مقسوم علیه در خارج قسمت را می نویسم.

یادآوری



$$P = BQ + R$$

صل اهام

$$R = 0 \rightarrow P = BQ$$

۱۱ رابطه تقسیم:

۱۲ تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای :

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad x+1 \\
 \underline{-(2x^2 + 2x)} \\
 -x^2 + 1 \\
 \underline{-(-x^2 - x)} \\
 x + 1 \\
 \underline{-(x+1)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$$

روشن اول :

$$\frac{-x^2}{x} = -x$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

روشن دوم (روشن هوزی) : برای تقسیم درجه n بر درجه یک

ضرایب مقوم

2	1	0	1
2	1	0	1
2	1	0	1

ریشه مقسوم علیه

باقی مانده

باقی مانده

خارج قسمة : $2x^2 - x + 1 \rightarrow 2x^2 - 1x + 1$

سؤال: حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \frac{0}{0}$ عامل اولی: $(x - (-3)) : (x + 3)$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{x} = \frac{-3-3}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

۲) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6} = \frac{0}{0}$ عامل اولی: $(x - 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+6} = \frac{1+1}{1+6} = \frac{2}{7}$$

۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{7}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} = \frac{0}{0}$ عامل اولی: $(x - \frac{1}{7})$

$$8x^3 - 1 = 8(x - \frac{1}{7}) = 8(x - \frac{1}{7})(x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{49})$$

روشن هوریز	$\frac{1}{7}$	-5	1
	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}x^2 - 5 = -5$	$\frac{1}{7}x(-5) + 1 = 0 \rightarrow$ نه!

باقی: $4x - 2$

$$8x^3 - 5x + 1 = (x - \frac{1}{7})(4x - 2)$$



$$\lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{(n - \frac{1}{r})(n^r + \frac{1}{r}n + \frac{1}{r})}{(n - \frac{1}{r})(7n - r)} = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{n(n^r + \frac{1}{r}n + \frac{1}{r})}{r(7n - 1)}$$

$$= r \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}}{\frac{r}{r} - 1} = \frac{r}{\frac{1}{r}} = r$$

$$*) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4} = \frac{0}{0} \quad \text{فصل (x+4)}$$

$$x^2 + 4x - 4 = (x+4)(x-1)$$

ریشه ها	-4	1	1	1
	1	$-4x + 4 = 0$	$-4x + 1 = 1$	$-4x + 4 = 0$

$$x^2 + 4x + 1 = x^2 + 1$$

اینجا!

$$x^2 + 4x^2 + x + 4 = (x+2)(x^2+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{-4-1}{16+1} = \frac{-5}{17}$$



$$\lim_{x \rightarrow -r} \frac{|x^r - r|}{x + r} = \frac{0}{0}$$

x	$-r$	r
$x^r - r$	$+$	$-$

$$\lim_{x \rightarrow -r^+} \frac{-(x^r - r)}{x + r} = \lim_{x \rightarrow -r^+} \frac{-(x - r)(x + r)}{x + r} = -(-r - r) = r$$

$$\lim_{x \rightarrow -r^-} \frac{x^r - r}{x + r} = \lim_{x \rightarrow -r^-} \frac{(x - r)(x + r)}{x + r} = -r - r = -r$$

∴ $\lim_{x \rightarrow -r} x^r \neq -r$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس چهارم: محاسبه حد توابع

کسری (حالت صفر صفرم)

قسمت دوم

جلسه چهارم: صفحات ۱۴۱ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

با رفع ابهام به وقتی صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات رادیکالی هستند:

در این حالت از مخرج و توان کردن و اتحادهای مزدوج یا حلق دلاغر استفاده می‌کنیم. به این صورت که

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارات رادیکالی (برای فرضیه‌های ۱) یا عبارات حلق عبارات رادیکالی

(برای فرضیه‌های ۲)، عامل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

مثال: حدود زیر را بیابید

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$$

(ن-۲) عامل ابهام

$$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n - \sqrt{3n-2}}{n^2 - 4} \times \frac{n + \sqrt{3n-2}}{n + \sqrt{3n-2}} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - (3n-2)}{(n-2)(n+2)(n+\sqrt{3n-2})}$$

$$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 3n + 2}{(n-2)(n+2)(n+\sqrt{3n-2})} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{(n-2)(n-1)}{(n-2)(n+2)(n+\sqrt{3n-2})}$$

$$= \frac{2-1}{(2+2)(2+\sqrt{4-2})} = \frac{1}{4(4)} = \frac{1}{16}$$



$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \quad \text{شکل اولی: } (x-4)$$

$$x \rightarrow 4$$

روش فاکتور
برای صورت

x^2	$-10x$	$+16$
$4 \times 4 = 16$	$4 \times 4 = 16$	$4 \times 4 = 16$

خارج قسمت: $2x + 4$

باقی مانده: $16 - 16 = 0$

$$x^2 - 10x + 16 = (x-4)(2x+4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(2x+4) \times \sqrt{2} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{2} - \sqrt{x} - 1 \times \sqrt{2} - \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(2x+4)(\sqrt{2} - \sqrt{x} + 1)}{2 - \sqrt{x} - 1}$$

مخرج

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(2x+4)(\sqrt{2} - \sqrt{x} + 1)}{2 - \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(2x+4)(\sqrt{2} - \sqrt{x} + 1)}{-(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{4} + 2)(12 + 4)(\sqrt{2} - \sqrt{4} + 1)}{-1} = -112$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2} = \frac{0}{0}$$

ن: $\lim_{x \rightarrow 0}$

مزدوج صفر

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{3n+4}-2} \times \frac{\sqrt{2n+1}+1}{\sqrt{2n+1}+1} \times \frac{\sqrt{3n+4}+2}{\sqrt{3n+4}+2}$$

مزدوج صفر

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(2n+1-1)(\sqrt{3n+4}+2)}{(3n+4-4)(\sqrt{2n+1}+1)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2n(\sqrt{3n+4}+2)}{3n(\sqrt{2n+1}+1)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2+2}{1+1} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

+) $\lim_{n \rightarrow r^-} \frac{|x^r - n - r|}{2n - \sqrt{x^r + 12}}$ $\lim_{n \rightarrow r^-}$

$x^r - n - r$	$\frac{-1}{0} \rightarrow \frac{r}{0+}$
---------------	---

$$= \lim_{n \rightarrow r^-} \frac{-(x^r - n - r) \times 2n + \sqrt{x^r + 12}}{2n - \sqrt{x^r + 12} \times 2n + \sqrt{x^r + 12}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow r^-} \frac{-(n+1)(n-r)(2n + \sqrt{x^r + 12})}{2n^r - (n^r + 12)}$$

$-n^r - 12$



$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{x^3(x^2-4)}$$

$$x \rightarrow 2^- \quad \frac{x^3-12}{x^3(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(\cancel{x-2})(2x+\sqrt{x^2+12})}{x^3(\cancel{x-2})(x+2)} = \frac{-(2+1)(2+2)}{2^3(2+2)} = \frac{-2 \times 8}{2^3 \times 4} = -2$$

یادآوری رتبه چاق و لاغر :

$$\underbrace{(a-b)}_{\text{لاغر}} \underbrace{(a^r+ab+b^r)}_{\text{چاق}} = a^r - b^r$$

$$(a+b)(a^r-ab+b^r) = a^r + b^r$$

نکته: ساختن عبارت چاق از رتبه عبارت لاغر :

۱- محب اول چاق : مخرج (توان دوم) محب اول لاغر

۲- محب دوم چاق : حاصل ضرب محب اول در دوم لاغر با علامت مثبت

۳- محب سوم چاق : مخرج محب دوم لاغر

حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow -8$ ، کدام است؟

(۴) -۶

(۳) -۱۲

(۲) -۱۸

(۱) -۲۴

طرح اول $(n+8)$

$$\lim_{n \rightarrow -8} \frac{(n+8)(n+2) \times (4-2\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n^2})}{4(2+\sqrt[n]{n}) \times (4-2\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n^2})}$$

جان $\rightarrow$ δ

$$= \lim_{n \rightarrow -8} \frac{(n+8)(n+2)(4-2\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n^2})}{4(8+n)}$$

$\downarrow$
 2^3 $(\sqrt[n]{n})^2$

$$= \frac{(-8+2)(4-2\sqrt[-8]{-8} + \sqrt[-8]{64})}{4} = \frac{-6(4-2(-2)+4)}{4}$$

$$= -1 \times 12 = -12$$

گزینه ۳

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$ ، کدام است؟

-۵/۶ (۴)

-۵/۸ (۳)

-۱/۲ (۲)

-۱/۵ (۱)

مثال ۱۴۱ (۱-۲)

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{2n+5-\sqrt{3n}}{2n-\sqrt{3n+1}} = \frac{0}{0}$$

مزدوج می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{2n+5-\sqrt{3n}}{2n-\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+5+\sqrt{3n}}{2n+5+\sqrt{3n}} \times \frac{2n+\sqrt{3n+1}}{2n+\sqrt{3n+1}}$$

مزدوج می‌شود

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(2n+5)^2 - 3n}{(2n^2 - (3n+1))(2n+5+\sqrt{3n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(4n^2 + 20n + 25 - 3n)(2n+\sqrt{3n+1})}{(4n^2 - 3n - 1)(2n+5+\sqrt{3n})}$$

در $n=1$ ، $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(4n^2 - 3n + 25)(2n+\sqrt{3n+1})}{(4n^2 - 3n - 1)(2n+5+\sqrt{3n})}$$

در $n=1$ ، $\frac{0}{0}$



$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{(n-1)(1n-20)(1n+\sqrt{1n+1})}{(n-1)(1n+1)(1n+0+\sqrt{1n})}$$

$$= \frac{(1-20)(1+1)}{(1+1)(1+0+\sqrt{1})} = \frac{-19 \times 1}{0 \times 1} = \frac{-19}{0} = -\frac{19}{0} = -1,2$$

گزینه ۱

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس چهارم: محاسبه حد توابع

کسری (حالت صفر صفرم)

قسمت سوم

جلسه پنجم: صفحات ۱۴۱ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

پایانخ اهرام : وقتی صورت یا مخرج یا هر دو توابع مشتقی باشند:

با استفاده از روابط مشتقی می توان اهرام را ریاضی کنیم.

مثال: حدی زیر را بیابید.

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2 \cos 0 = 2 \times 1 = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

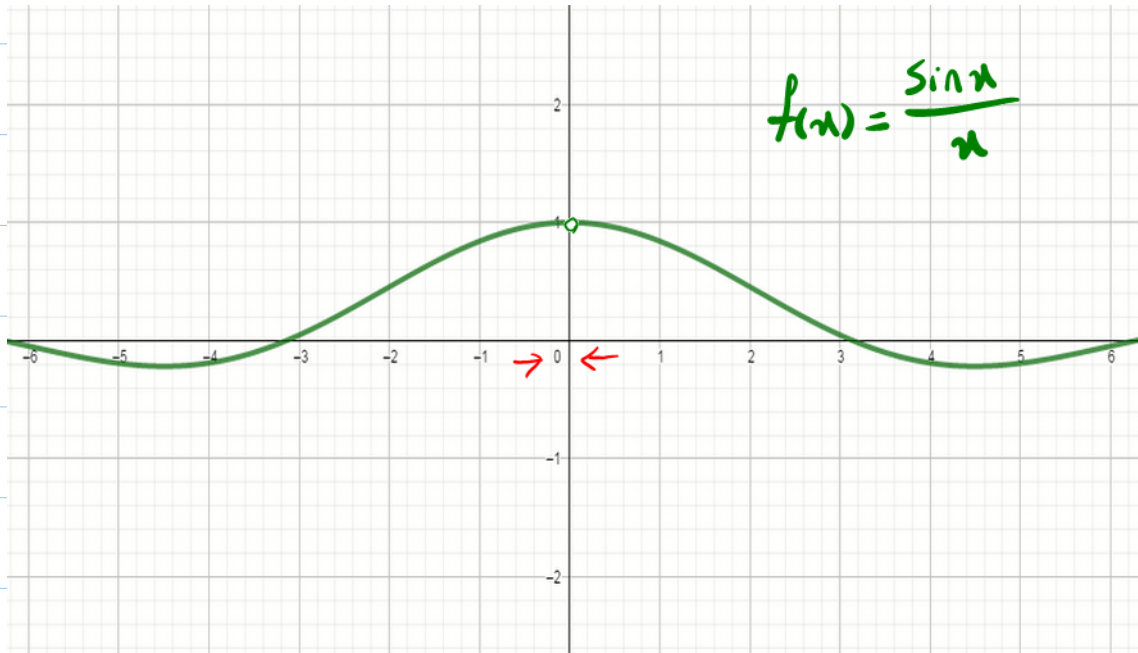
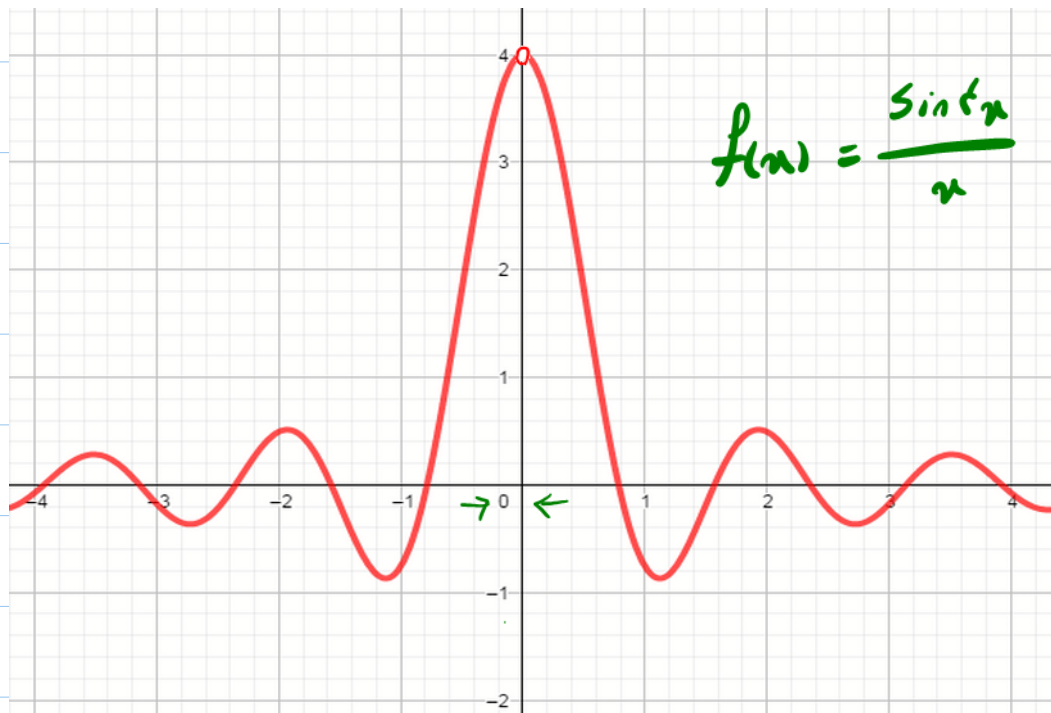
$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(2 \sin^2 x \cos^2 x)}{2 \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x}{2 \cos^2 x} = 2 \sin^2 \pi = 2 \times 1 = 2$$



نکته: با توجه به همزاد تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

در حالت کلی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = m$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = m$$

سؤال: حد زیر را بیابید.

الف) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2n}{n^2}$

$\cos 2n = 1 - 2\sin^2 n$

ضرب کنیم $2\sin^2 n = 1 - \cos 2n$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 n}{n^2} = 2 \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 = 2 \times 1^2 = 2 \times 1 = 2$$

ب) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2n)(1 + \cos n)}{n \sin n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 n (1 + \cos n)}{n \sin n}$

صورت و مخرج
بر n^2 تقسیم کنیم $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{2\sin^2 n (1 + \cos n)}{n^2}}{\frac{n \sin n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 (1 + \cos n)}{\frac{\sin n}{n}}$

$$= \frac{2 \times 1 \times (1 + 1)}{1} = 2$$

ج) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2n} - \sqrt{\cos n}}{n^2} \times \frac{\sqrt{\cos 2n} + \sqrt{\cos n}}{\sqrt{\cos 2n} + \sqrt{\cos n}}$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\cos 2n - \cos n}{n^2 (\sqrt{\cos 2n} + \sqrt{\cos n})}$$

$\sqrt{\cos 0} + \sqrt{\cos 0} = 1 + 1 = 2$



$$= \frac{1}{r} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1 - r \sin^r \frac{r_n}{r}) - (1 - r \sin^r \frac{n}{r})}{n^r}$$

$$= \frac{1}{r} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{r \sin^r \frac{n}{r} - r \sin^r \frac{r_n}{r}}{n^r}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^r \frac{n}{r}}{n^r} - \frac{\sin^r \frac{r_n}{r}}{n^r} \right) = \lim_{n \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\sin \frac{n}{r}}{n} \right)^r - \left(\frac{\sin \frac{r_n}{r}}{n} \right)^r \right)$$

$$= \left(\frac{1}{r} \right)^r - \left(\frac{r}{r} \right)^r = \frac{1}{r} - \frac{r}{r} = -\frac{1}{r} = -r$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} \left([rn] + [-rn] \right) \frac{1 - \cos^r n}{1 - \sqrt{1 + nr}}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} [rn] + [-rn] = 0 - 1 = -1$$

$$n \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} [rn] + [-rn] = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} [rn] + [-rn] = -1 + 0 = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^r n}{1 - \sqrt{1 + nr}} \times \frac{1 + \sqrt{1 + nr}}{1 + \sqrt{1 + nr}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos n)(1 + \cos n + \cos^r n)(1 + \sqrt{1 + nr})}{1 - (1 + nr)}$$



$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(r \sin^r \frac{n}{r}) (1 + \cos n + \cos^r n) (1 + \sqrt{1+n^r})}{-n^r}$$

$$= -r \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^r \frac{n}{r}}{n} \right)^r \times (1+1+1)(1+1) = -r \times \left(\frac{1}{r} \right)^r \times 4 = -r^{\frac{1}{r}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} \left([r n] + [-r n] \right) \frac{1 - \cos^r n}{1 - \sqrt{1+n^r}} = -1 \times (-r) = r$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n^r - |n| \sin^r n}{r n^r - |n| \sin^r n} = \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n^r - (-n) \sin^r n}{r n^r - (-n) \sin^r n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n^r + n \sin^r n}{r n^r + n \sin^r n} \xrightarrow{\div n^r} \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{\frac{n^r}{n^r} + \frac{n \sin^r n}{n^r}}{\frac{r n^r}{n^r} + \frac{n \sin^r n}{n^r}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{1 + \frac{\sin^r n}{n}}{r + \frac{\sin^r n}{n}} = \frac{1+4}{r+1} = \frac{5}{r}$$

مثال: تکثیر ریاضی ۹۹ (خارج)

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3n} - \sqrt{2-n}}{\sqrt{2\sin^2 \frac{n}{r}}} \times \frac{\sqrt{2+3n} + \sqrt{2-n}}{\sqrt{2+3n} + \sqrt{2-n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{2+3n - (2-n)}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{n}{r} \right| (\sqrt{2+3n} + \sqrt{2-n})} = \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{4n}{\sqrt{2} (-\sin \frac{n}{r})} \times \frac{1}{\sqrt{2+3n} + \sqrt{2-n}}$$

$(n \rightarrow 0^- : \frac{n}{r} \text{ رادیان} \rightarrow \sin \frac{n}{r} < 0)$

$$= -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n}{\sin \frac{n}{r}} = -\lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{\sin \frac{n}{r}}{n}} = -\frac{1}{\frac{1}{r}} = -r$$

گزینه ۱

روش تغییر متغیر برای رفع ابهام ÷

در این روش عامل صفرکننده را برابر متغیر جدیدی مانند t می‌گیریم و با عوض کردن متغیر

حد را ساده می‌سازیم.

مثال: حدهای زیر را می‌سازیم.

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{2x - \pi}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = t \quad \text{عامل ابهام}$$

$$(x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \rightarrow 0)$$

$$\begin{cases} x = t + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2t + \frac{\pi}{2} \\ 2x - \pi = 2t - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t + \frac{\pi}{2}) - 1}{2t + \frac{\pi}{2} - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - 1}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{(1 - \cos 2t)}{2t}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 t}{t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \sin t$$

$$= -\frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0$$



$$2) \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{\sin rn}{\cos rn}$$

$$n \rightarrow \frac{\pi}{r}$$

$$rn - \frac{\pi}{r} = t$$

$$(n \rightarrow \frac{\pi}{r} \Rightarrow t \rightarrow 0)$$

$$\begin{cases} n = t + \frac{\pi}{r} \\ rn = rt + \pi \\ rn = rt + r\frac{\pi}{r} \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(rt + \pi)}{\cos(rt + r\frac{\pi}{r})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin rt}{\sin rt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin rt}{t}}{\frac{\sin rt}{t}} = \frac{-r}{r}$$

حسابان ۱

پایه یازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم ریاضی

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس پنجم: پیوستگی

جلسه ششم: صفحات ۱۴۵ تا ۱۵۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع f در $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

پس برای اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد باید سه شرط زیر را داشته باشد:

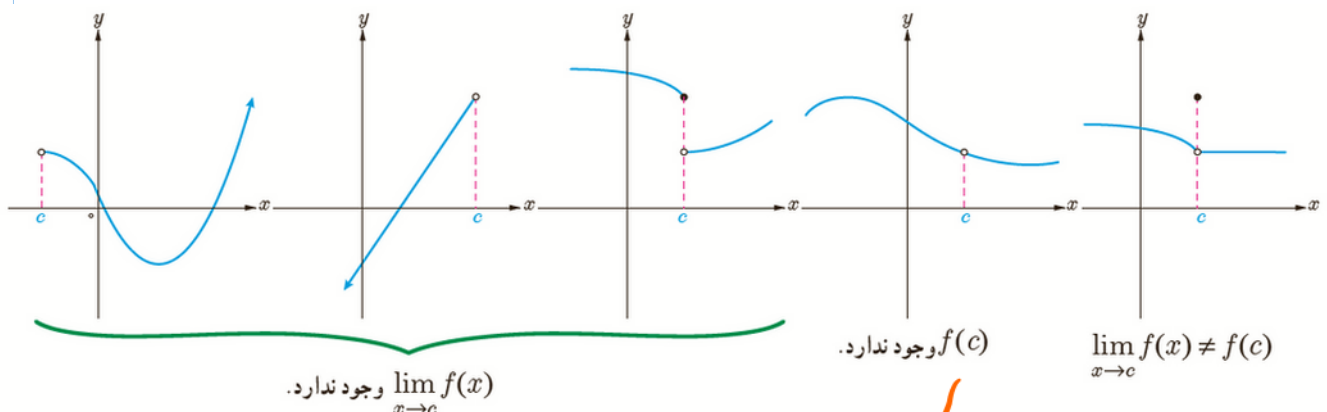
(۱) تابع f در a تعریف شده باشد یعنی $a \in D_f$.

(۲) حد تابع f در $x=a$ موجود باشد یعنی تابع در همگی a تعریف شده باشد و

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

(۳) حد تابع f در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر باشد یعنی: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

تذکر: وقتی f در $x=c$ پیوسته نباشد می‌گوییم در این نقطه ناپیوسته است.



$f \notin D_f$



مثال: پیوستگی هر تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-2) & x \leq 2 \\ 4-2x & x > 2 \end{cases} \quad x=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 4-2x = 4-4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2(x-2) = 4(2-2) = 0$$

$$f(2) = 2^2(2-2) = 0$$

تابع در $x=2$ پیوسته است. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} [x] & x < -1 \\ -x & x = -1 \\ \frac{x^2-1}{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad x=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1) = -1-1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} [x] = [-1] = -1$$

$$f(-1) = -1$$

تابع در $x=-1$ پیوسته نیست زیرا: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2 \neq f(-1) = -1$

$$پ) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

$$f(0) = -1$$

تابع در $x=0$ پیوسته نیست زیرا در این نقطه حد ندارد ولی در ادامه خواهیم دید

چون $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 = f(0)$ و در نیم تابع در $x=0$ پیوستگی چپ دارد.

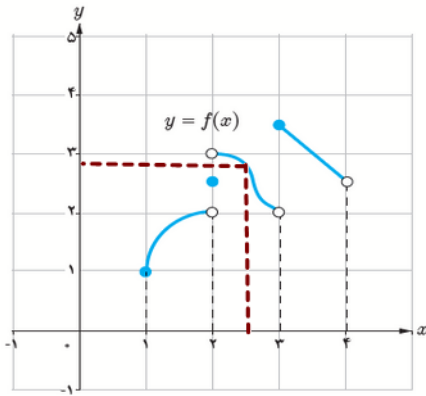
پیوستگی راست و پیوستگی چپ :

تابع f در $x=a$ پیوستگی راست دارد هرگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

تابع f در $x=a$ پیوستگی چپ دارد هرگاه $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

پس می‌توان گفت f در یک همبستگی a تفریق شده باشد:

f در $a = n$ پیوسته است اگر و تنها اگر f در a پیوسته راست و چپ داشته باشد.



مثال: نمودار تابع f به صورت روبه‌رو رسم شده است.

(۱) تابع f در کدام یک از نقاط مجموعه $\{1, 2, 2/5, 3, 4\}$ ناپیوسته است.

در $n=1$ ناپیوسته است زیرا حد چپ ندارد.

در $n=2$ ناپیوسته است زیرا: $\lim_{n \rightarrow 2^+} f(n) = 3$, $\lim_{n \rightarrow 2^-} f(n) = 2$, $f(2) = 2.5$

در $n=2.5$ پیوسته است.

در $n=3$ پیوسته نیست زیرا: $\lim_{n \rightarrow 3^+} f(n) = 2.5$, $\lim_{n \rightarrow 3^-} f(n) = 2$, $f(3) = 2.5$

در $n=4$ پیوسته نیست زیرا حد راست ندارد.

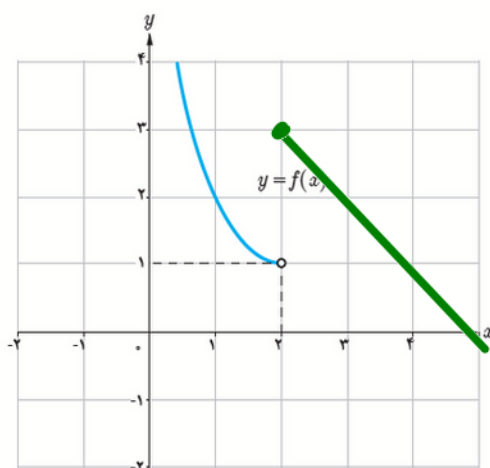
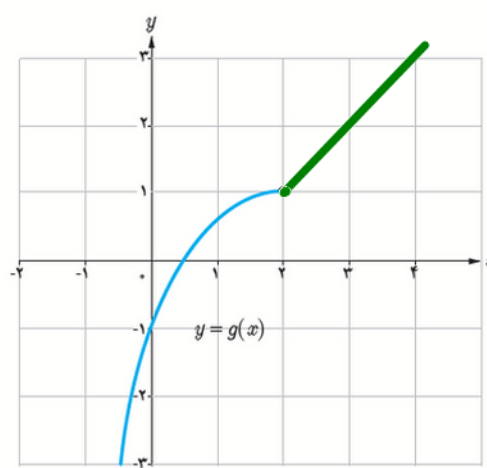
۲ در کدام نقطه a از مجموعه $\{1, 2, 2/5, 3, 4\}$ تساوی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ برقرار است؟

در $n=2$ پیوستگی راست دارد.

سؤال: در شکل‌های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده‌اند. در نقطه $x=2$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که:

۱ تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲ تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.



سؤال: پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ x + 1 & x < 1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$f(1) = 2$$

تابع در $x=1$ پیوسته نیست در پیوستگی چپ دارد.

(۱) توابع چند جمله‌ای درجه n یا R پیوسته‌اند.

(۲) توابع گویا فقط در ریشه‌های مخرجشان ناپیوسته‌اند.

(۳) توابع رادیکالی با فرض فرعی $\sqrt[n]{f(x)}$ درجه n نقای که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند.

(۴) تابع $f(x)$ درجه n نقای که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند.

(۵) تابع رادیکالی با فرض زوج فرعی $\sqrt[n]{f(x)}$ (پیوسته) در نقطه از دامنه‌اش نیز

از نقطه انتهای دامنه پیوسته است. مثلاً تابع $y = \sqrt[n]{x-2}$ درجه n نقطه $x=2$

پیوسته است و در $x=2$ پیوسته نیست زیرا در همگی $x=2$ حرف نمی‌نویسد.

(۶) توابع $\sin f$ ، $\cos f$ در نقطه‌ای که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند.

(۷) تابع $y = [u]$ در نقاط صحیح نشده u ناپیوسته‌اند.

(۸) تابع $f(x) = g(n(x))$ (و تابعی پیوسته) در $x=a \in \mathbb{R}$ پیوسته است هرگاه تابع $g(a) = 0$

سؤال: تابع $y = [2n]$ روی بازه $(1, 2)$ در چند نقطه ناپیوسته است.

$2n$ روی بازه $(1, 2)$ برای نقاط زیر صحیح است:

$$n = \frac{1}{2} : 2n = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \in \mathbb{Z}$$

$$n = 1 : 2n = 2 \times 1 = 2 \in \mathbb{Z}$$

$$n = \frac{0}{2} : 2n = 2 \times \frac{0}{2} = 0 \in \mathbb{Z}$$

در سه نقطه ناپیوسته است.

سؤال: تابع $f(n) = (-1)^n \sin \frac{\pi n}{2}$ در نقاط $n \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

تابع $y = (-1)^n$ در اعداد صحیح ناپیوسته است مثلاً:

$$\lim_{n \rightarrow \infty^+} (-1)^n = (-1) = -1 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty^-} (-1)^n = (-1)^2 = 1$$

در $\sin \frac{\pi n}{2}$ در n های زوج برابر صفر است ($\sin 0, \sin \pi, \sin 2\pi, \dots$)

و در n های فرد برابر یک یا منفی یک است ($\sin \frac{\pi}{2} = 1, \sin \frac{3\pi}{2} = -1, \dots$)

پس $\sin \frac{\pi n}{2}$ در n های زوج منبسط شده است در نتیجه تابع f در اعداد زوج صحیح پیوسته است.

مثال: کسری تجوی ۹۹ (خارج)

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{5}$

درجه ۲ که مجموع ضرایب: $2-1-1=0$
 $\sin x = 1, \sin x = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(n) = \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 n - \sin n - 1}{\cos^2 n} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin n - 1)(2\sin n + 1)}{1 - \sin^2 n} = \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin n - 1)(2\sin n + 1)}{(1 - \sin n)(1 + \sin n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(1 - \sin n)(2\sin n + 1)}{(1 - \sin n)(1 + \sin n)} = \frac{-(2\sin \frac{\pi}{2} + 1)}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{-(2 \times 1 + 1)}{1 + 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(n) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{3}{2} = a$$

گزینه ۴

فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a ، کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

$$|x-1| < 1 \rightarrow -1 < x-1 < 1 \xrightarrow{+1} 0 < x < 2$$

$$|x-1| \geq 1 \rightarrow x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

در ضابطه اول با توجه به رانده $[x]$ در $x=1$ ناپیوسته است در چپ $(x-1)$ در

$x=1$ مغز چپ $[x]$ در $x=1$ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + ax + b = 4 + 2a + b = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x] = (2-1) \times 1 = 1$$

$$4 + 2a + b = 1 \rightarrow 2a + b = -3 : \text{شرط پیوستگی}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)(x) = (0-1) \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + ax + b = b = f(0)$$

$$b = 0$$

شرط پیوستگی: $x = 0$

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a + 0 = -2 \rightarrow a = -\frac{2}{2} = -1$$

مسئله: ششدرجی ۹۹:

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^3}{|x+2|} & ; x \neq -2 \\ a & ; x = -2 \end{cases}$ در نقطه $x = -2$ ، فقط از چپ پیوسته است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۶

(۲) -۶

(۱) -۱۲

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1+x^3}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1+x^3}{-(x+2)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{-(x+2)} = \frac{1-2(-2)+(-2)^2}{-1} = \frac{12}{-1} = -12$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow -12 = a$$

گزینه ۱

مسئله ۹۸ ریاضی :

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ; x > 2 \\ ax-1 & ; x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{x-\sqrt{x+2}} \cdot \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)} = \frac{3(2+\sqrt{4})}{2+1} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax-1 = 2a-1 = f(2)$$

گزینه ۲ : شرط پیوستگی در $x=2$: $2a-1=4 \rightarrow 2a=5 \rightarrow a=\frac{5}{2}=2,5$

- یگانه‌ترین تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است هرگاه f در نقطه بازه پیوسته باشد.

- یگانه‌ترین تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه f روی بازه (a, b) پیوسته باشد

و a از راست و b از چپ پیوسته باشد.

برای بازه‌های (a, b) و $[a, b]$ هم تعریف‌های مشابهی داریم.

مثال: تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$$

(۱) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-1, 1]$ و $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

$$\lim_{n \rightarrow -1^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow -1} n^2 - 1 = 1 - 1 = 0 = f(-1)$$

$$\lim_{n \rightarrow -1^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow -1} 2n + 4 = -2 + 4 = 2$$

تابع در $n = -1$ پیوسته نیست و پیوسته نیست.

چون f در $n = 2$ پیوسته نیست.

ناپیوسته: $[-1, 1]$ پیوسته: $(2, 5)$ پیوسته: $[-2, 0]$

۲) درباره تابع f کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) f روی بازه $(-\infty, -1]$ پیوسته است. ب) f روی بازه $(-\infty, -1)$ پیوسته است.

ت) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$

پ) f روی بازه $[2, 5]$ پیوسته است.

ج) f روی بازه $(-2, 0)$ پیوسته است.

ث) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 0$

این نادرست زیرا تابع در $x=1$ برش چپ ندارد.

ب، درست

پ، نادرست $f \notin D_f$

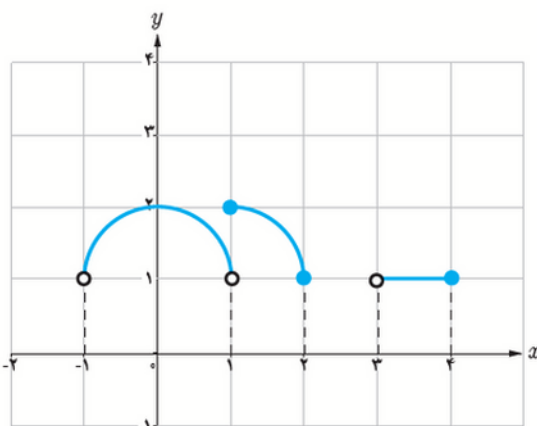
ت) $\lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = \text{تعریف نشده}$

نادرست زیرا

ث) $\lim_{n \rightarrow 0^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0} -n + 0 = -0 + 0 = 0$

درست زیرا

۹) نادرست زیرا تابع در $x=1$ پیوسته نیست.



مثال: در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام یک از

عبارات زیر درست و کدام یک نادرست هستند؟

الف) تابع f بر بازه $[1, 2]$ پیوسته است. ✓

ب) تابع f بر بازه $[3, 4]$ پیوسته است. ✗ $f \notin D_f$

پ) تابع f بر بازه $[0, 2]$ پیوسته است. ✗

ل) تابع در $x=1$ پیوسته نیست