

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

گردآوری: سیدابوبکر فاضل

با شروع پاندمی کرونا که منجر به تعطیلی آموزش حضوری در مراکز آموزشی گردید و آموزش مجازی به اشکال مختلف به عنوان یک شیوه آموزش به طور جدی معرفی شد، بر آن شدم برای آن دسته از دانش آموزانی که به صورت صحیح آموزش مجازی دسترسی ندارند و همکارانی که بستر مناسبی برای تدریس مجازی در اختیار نداشتند، مجموعه‌ای شامل فیلم و جزوه برای درس حسابان ۲ آماده کنم تا شاید در آن ایام سخت کمکی هر چند ناچیز به آموزش مفهومی ریاضیات و گسترش عدالت آموزشی شده باشد. آن دوران تمام شد ولی دیگر آموزش‌های تلفیقی و ترکیبی جای آموزش‌های سنتی را گرفت و فصلی جدید در امر آموزش گشوده شد.

با توجه به حجم بالای کار و تهیه همزمان فیلم و جزوه برای این درس و درس‌های دیگر قطعاً اشتباهاتی در جزوه وجود دارد که از علاقه‌مندان پوزش‌می‌طلبم و خوشحال می‌شوم با شناسه شاد بنده به آدرس @seyedfazelian در میان بگذارند تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح شود.

همانطور که خواهید دید جزوه به صورت جلسه‌ای و با قلم نوری تنظیم شده که فیلم هر جلسه در کانال آپارات <https://www.aparat.com/s.a.fazelian> در دسترس می‌باشد.

در پایان یادآوری می‌شوم استفاده از این جزوه به هر صورت مجاز و هزینه آن فقط دعا برای عاقبت بخیری نگارنده است.

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل اول: تابع

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس اول: تبدیل نمودار تابع

جلسه اول: صفحات ۲ تا ۱۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در این درس می‌خواهیم عددی مانند a را در دامنه و بر تاج f اثر دهیم و تغییرات f را بررسی کنیم.

الف) انتقال افقی و عمودی:

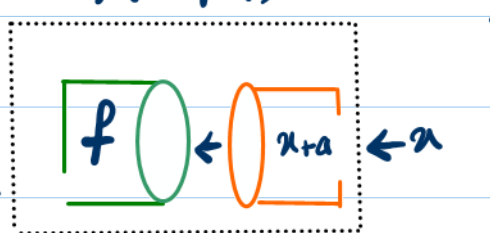
۱- $f(x \pm a)$: برای رسم نمودار $y = f(x+a)$ نمودار f را روی محور x ها

a واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $y = f(x-a)$ نمودار

f را روی محور x ها a واحد به سمت راست منتقل کنیم. (انتقال افقی)

همچنین نقطه $(x_0 - a, y_0)$ از نمودار تاج $y = f(x+a)$ مشابه با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y = f(x)$ است.

دامنه تاج $f(x+a)$ ، x های هشتاد به سمت چپ می‌شوند.
عبارت $(x+a)$ اجازه ورود به f را پیدا کند.



$$h(x) = f(x+a) \Rightarrow h(x_0 - a) = f(x_0 - a + a) = f(x_0) = y_0.$$

۲- $f(x) \pm a$: برای رسم نمودار $y = f(x) + a$ نمودار f را روی محور y ها

a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $y = f(x) - a$ نمودار

f را روی محور y ها a واحد به سمت راست منتقل کنیم. (انتقال عمودی)

همچنین نقطه $(x_0 + a, y + a)$ از نمودار تابع $y = f(x) + a$ مشاطر با نقطه (x_0, y) از نمودار $y = f(x)$ است.

(ب) انقباض و انبساط (متی و عمودی):

۱- $f(ax)$: اگر $0 < a < 1$. باشد نمودار f را در راستای محور x ها با

ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می کنیم. (رابطه انقباض)

اگر $a > 1$ باشد نمودار f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض

می کنیم. (انقباض متی)

همچنین نقطه $(\frac{x_0}{a}, \frac{y}{a})$ از نمودار تابع $y = f(ax)$ مشاطر با نقطه (x_0, y) از نمودار $y = f(x)$ است.

رابطه تابع $f(ax)$ ، x ها هشتاد و یک درصد می شوند و $f(ax)$

اجازه ورود به f را پیدا کند.

$$h(x) = f(ax) \Rightarrow h(\frac{x_0}{a}) = f(a \times \frac{x_0}{a}) = f(x_0) = y$$

نکته: در حالت انقباض و انقباض متی x با طول نقاط f بر a تقسیم می شوند.

۲- $a f(x)$: اگر $a < 1$ باشد مقدار f را در راستای محور y ها با

ضرب a منقبض می‌کنیم. (انقباض عمودی)

اگر $a > 1$ باشد مقدار f را در راستای محور y ها با ضرب a منبسط

می‌کنیم. (انبساط عمودی)

همچنین نقطه (a, y) از نمودار تابع $y = a f(x)$ و شایط نقطه (x, y) از نمودار $y = f(x)$ است.

نکته: در حالت انبساط و انقباض عمودی y یا عرض نقاط f در a ضرب می‌شوند.

پایان بخش:

۱- $-f(x)$: نمودار f را نسبت به محور x ها قمرینه می‌کنیم.

۲- $f(-x)$: نمودار f را نسبت به محور y ها قمرینه می‌کنیم.

نکته: در انبساط و انقباض ها اگر a منفی باشد ابتدا a را مثبت می‌گیریم و انبساط یا انقباض

لازم را در پی می‌دهیم، پس انقباض را احوال می‌کنیم.

ت، ترکیبی:

اگر خواهیم نمودار تابعی به صورت $y = af(bx+c)+d$ را رسم کنیم،
اولویت تأثیرها را به صورت زیر رعایت می‌کنیم:

$c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d$

یعنی اول داخل پذیر تغییرات روی x را اعمال می‌کنیم بعد بیرون پذیر
تغییرات روی y . وقت کنید باز هم داخل پذیر اعمال عکس حال کاری داریم
می‌شوند یعنی اول انتقال افقی (c) و بعد انبساط یا انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{b}$.

در حالیکه در بیرون پذیر اول انبساط یا انقباض با ضریب a و بعد انتقال عمودی (d)

اعمال می‌شود (به یاد دارید در اولویت اعمال اولویت ضرب و تقسیم از جمع و تفریق

بالاتر بود)

ث) تأثیر قدر مطلق:

۱- $|f|$: مقدار f را رسم می‌کنیم، قسمتی از نمودار که زیر محور x قرار دارد را مثبت به محور x ها قدرتی می‌کنیم.

۲- $f(|x|)$: قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قدرتی قسمتی را که سمت راست محور y است مثبت به محور x رسم می‌کنیم.

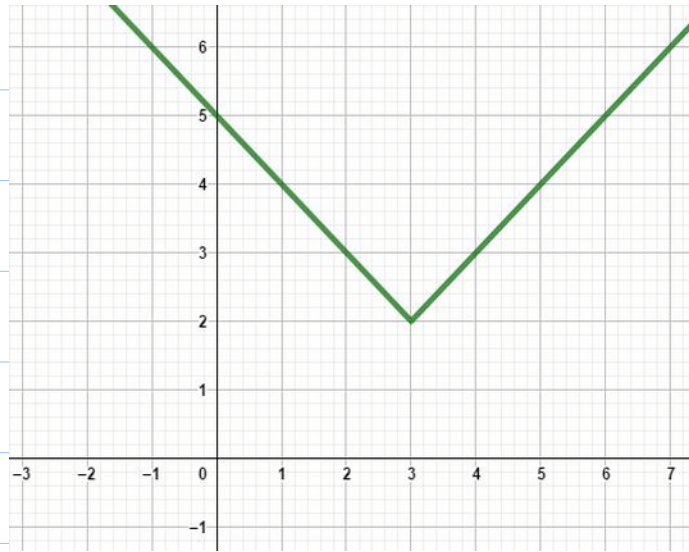
نکته: برای رسم نمودارهای تبدیلیافته کافی است تأثیرات را روی چند نقطه (نقاط شکستگی یا نقاط استبداد آنها یا تغییرات یا محل برضرب با محورها) اعمال کنید و باها چند نقطه نمودار را رسم کنید.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$|A| = |-A| \text{ یا درجری} \quad f(x) = |-x-3| + 2 \text{ دایره}$$

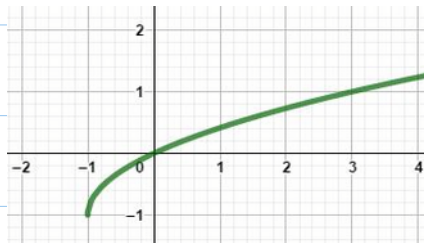
$$f(x) = |-(-x-3)| + 2 = |x+3| + 2$$

دایره اولی ۳ واحد سمت راست
دایره دوم ۲ واحد سمت چپ

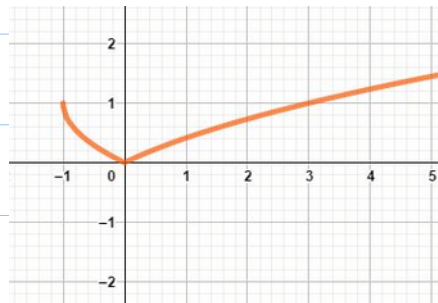


د ب $y = -|\sqrt{x+1} - 1|$

انتقال انحنی یک واحد کت چپ و انتقال عمودی یک واحد کت پائین
 $y = \sqrt{x+1} - 1$

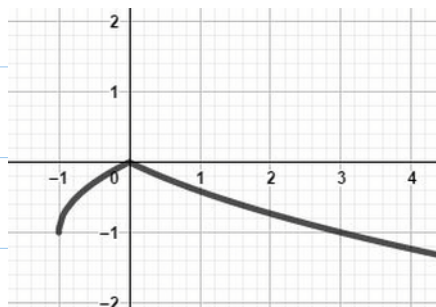


$y = |\sqrt{x+1} - 1|$



تأثیر قدر مطلق :
 قسمتی که زیر محور ماضی
 نسبت به محور ماضی قدرتی می‌گردد

$y = -|\sqrt{x+1} - 1|$

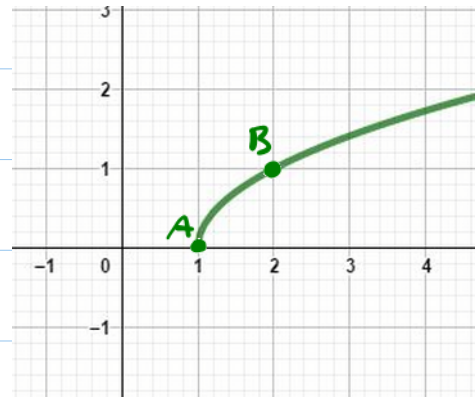


انعکاس :
 سبزه را نسبت به محور ماضی
 قدرتی می‌کنیم.



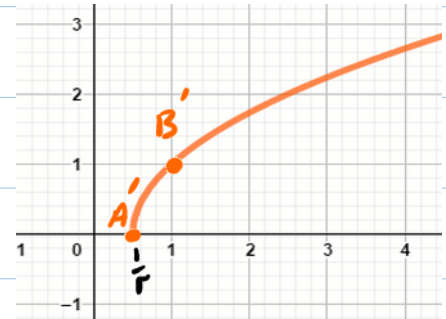
$$y = \sqrt{2x-1} + 1$$

انتقال از منحنی یک واحد به سمت راست
 $y = \sqrt{2x-1}$



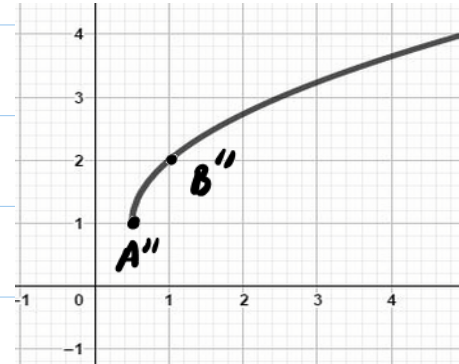
$$y = \sqrt{2x-1}$$

انتقال از منحنی با ضرب $\frac{1}{2}$



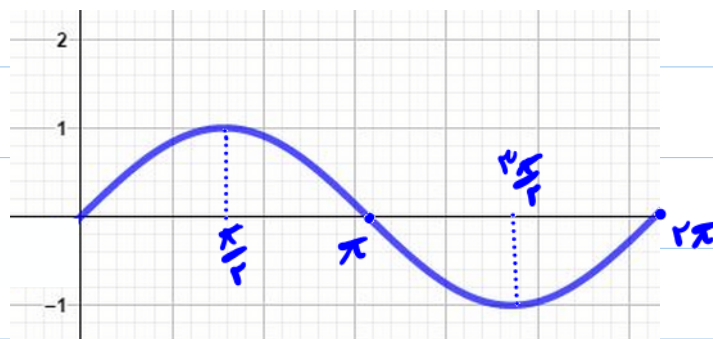
$$y = \sqrt{2x-1} + 1$$

انتقال عمودی یک واحد به سمت بالا

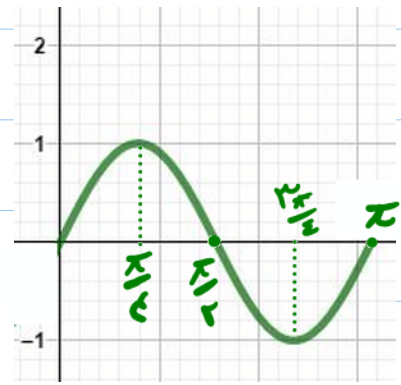


$$y = |\sin 2x - 1| \quad [0, \pi]$$

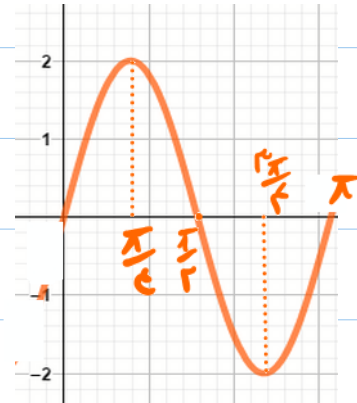
$$y = \sin x$$



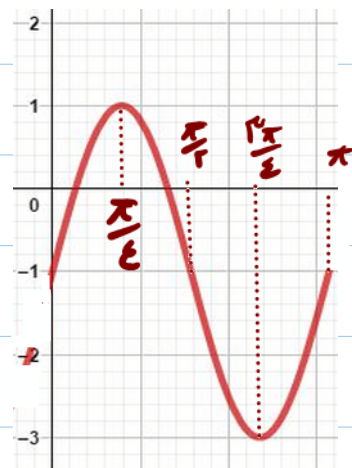
انقباض انتی با ضرب $\frac{1}{2}$
 $y = \sin 2x$



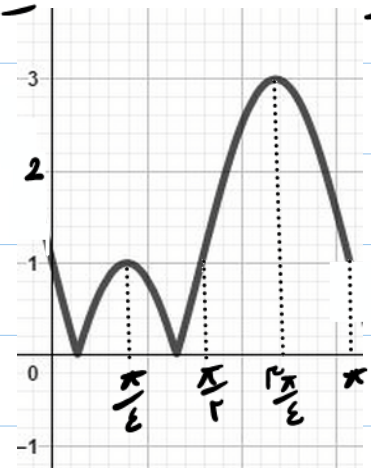
انساط عمودی با ضرب 2
 $y = 2 \sin 2x$



انتقال عمودی با اضافه یا من
 $y = 2 \sin 2x - 1$

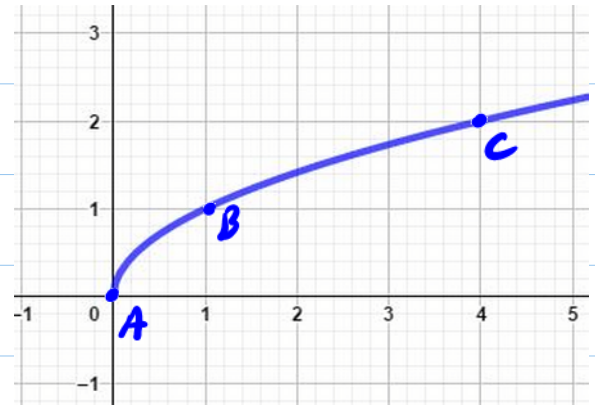


تأثیر مقدار سطح: قسمتی که زیر محور است قدرش منفی می‌شود.
 $y = |2 \sin 2x - 1|$

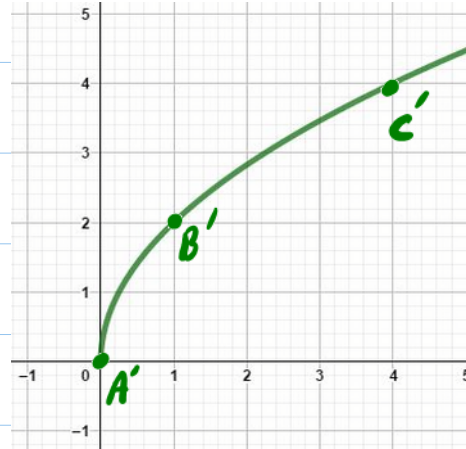


2) $f(x) = -2\sqrt{x} + 1$

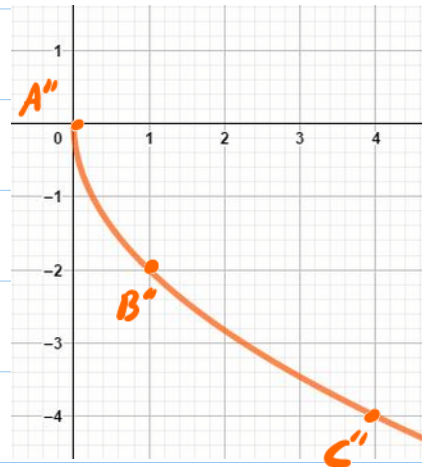
$y = \sqrt{x}$



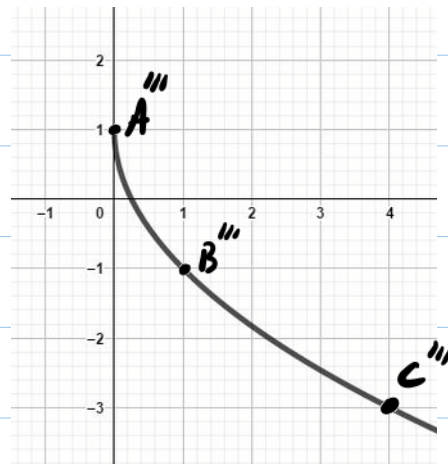
3) $y = 2\sqrt{x}$ انبساطی با ضرب ۲



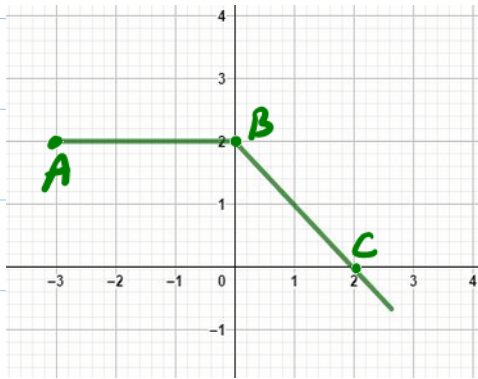
4) $y = -2\sqrt{x}$ انعکاس نسبت به محور x



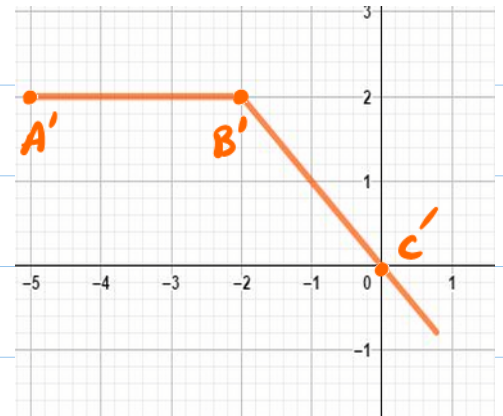
5) انتقال عمودی یک واحد به بالا $f(x) = -2\sqrt{x} + 1$



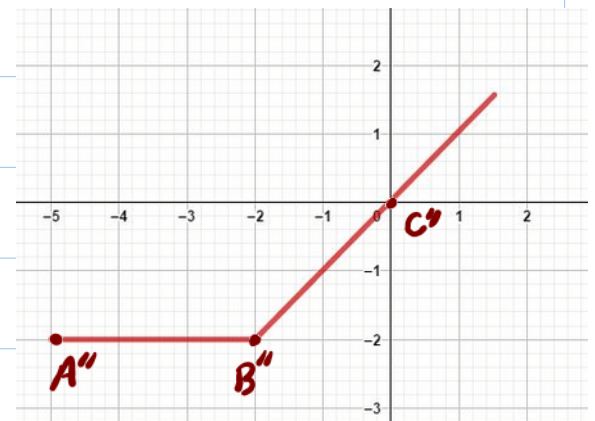
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = 1 - f(x+2)$ را رسم کنید.



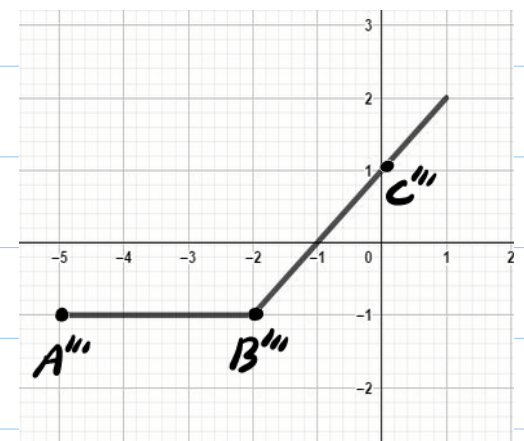
انتقال افقی ۲ واحد چپ $y = f(x+2)$



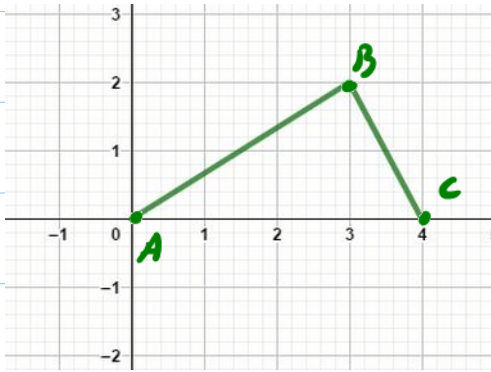
انعکاس نسبت به محور x ها $y = -f(x+2)$



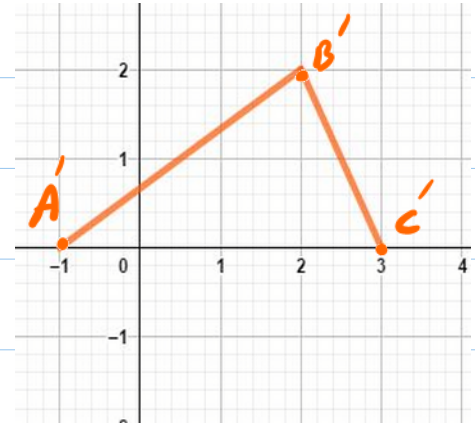
انتقال عمودی یک واحد به بالا $y = 1 - f(x+2)$



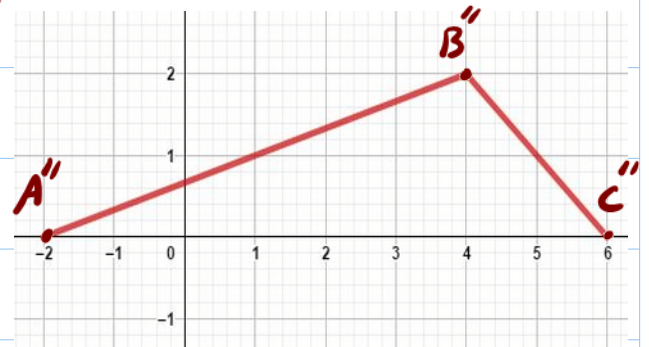
مثال: نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر است. نمودار $y = f(\frac{1}{2}x + 1)$ را رسم کنید.



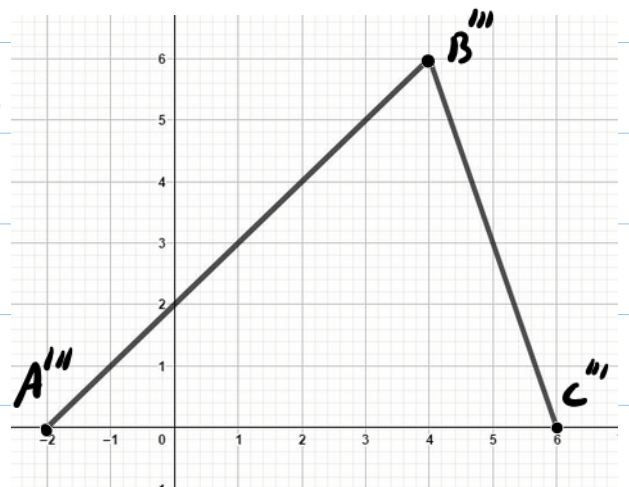
انتقال انحنای یک واحد به چپ
 $y = f(x+1)$



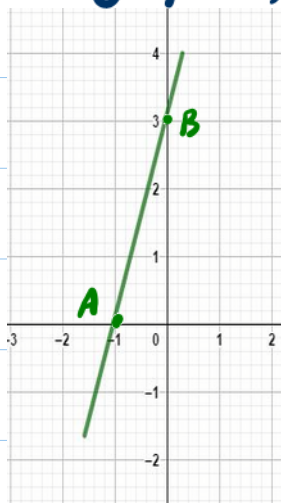
رابطه انحنای با ضرب $\frac{1}{2} = 2$
 $y = f(\frac{1}{2}x + 1)$



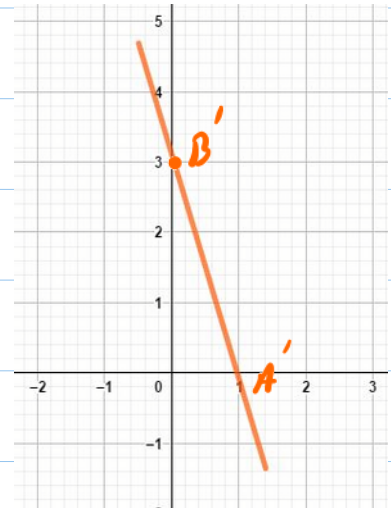
رابطه انحنای با ضرب 2
 $y = f(\frac{1}{2}x + 1)$



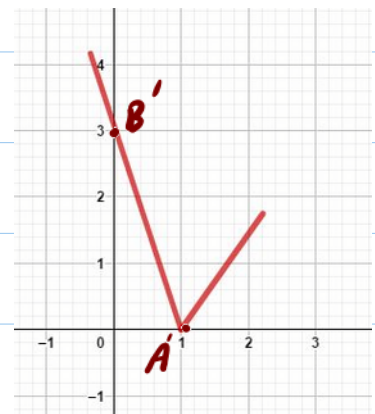
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = |f(-x)| - 2$ را رسم کنید.



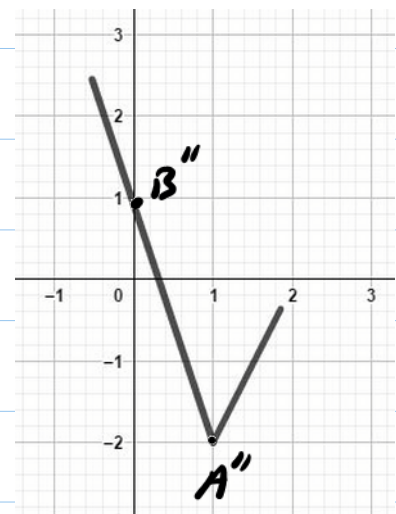
انعکاس: قدرینبت به محورها
 $y = f(-x)$



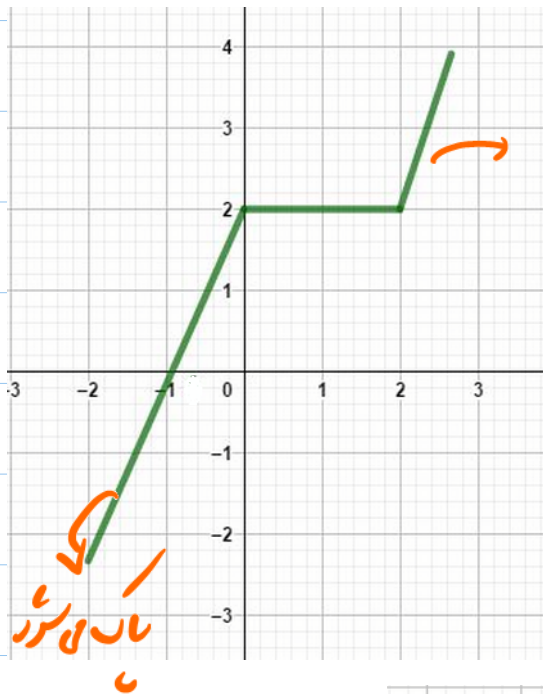
تأثیر قدر مطلق: قسمت‌های که زیر محور است
است قدرینبت می‌شود.
 $y = |f(-x)|$



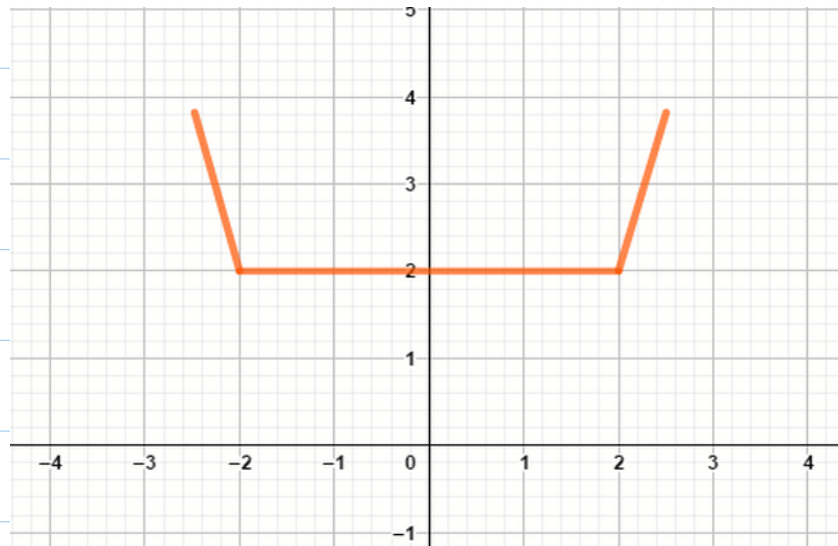
انتقال عمود بر محور و واحد یابش
 $y = |f(-x)| - 2$



مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = f(|x|)$ را رسم کنید.



$y = f(|x|)$



مثال: نقاط نمودار تابع f را در جدول زیر بنویسید. پس نمودار جدید رسم کرده و آن را یک واحد به چپ منتقل کنید.

یکنه: منطبق تابعی که نمودار آن رسم شده را بنویسید.

$$f\left(\frac{x}{4}\right) \rightarrow f\left(\frac{x+1}{4}\right) \Rightarrow y = f\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

مثال: مزدار تابع $g(x) = 2f(3x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

پس طول عرض نقاط این مزدار را نصف می‌کنیم. ضابطه تابعی که مزدار آن بدست آمده است را بنویسیم.

$$2f(3(x-1)) = 2f(3x-3)$$

$$\rightarrow 2f(3x-3) + 2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(2f(3x-3) + 2) = f(3x-3) + 1$$

$$\Rightarrow h(x) = f(3x-3) + 1$$

مثال: منحنی تابع $y = |x-2|$ را سه واحد به چپ انتقال داده و قدرش ثقل حاصل را ثبت

به کرد و حاصلش می‌کنیم و با ضرب ۲ انبساط عمودی می‌دهیم پس قدرش را ثبت

به کرد و حاصلش می‌کنیم، حاصل منحنی جدید را بدست آوریم.

$$f(x+3) : y = |x+3-2| = |x+1|$$

$$f(-x+1) : y = |-x+1|$$

$$2f(-x+3) : y = 2|-x+1|$$

$$-2f(-x+4) : y = -2|-x+1| = -2|1-x|$$

سؤال: با احتمال مدار کدام گزینیم، نمودار $y = f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y = -\frac{1}{4}(1-x)$ شود؟

۱) انتقال یک واحد به راست، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای y نمی

۲) انتقال یک واحد به چپ، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای x می

۳) انتقال یک واحد به چپ، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای y نمی

۴) انتقال یک واحد به راست، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای x می

گزینه ۲

$$y = -\frac{1}{4}(1-x)$$

انقباض x می با $\frac{1}{4}$ ←
 قدریم ثبت به محور x ها ←
 انتقال x می یک واحد چپ ←
 قدریم ثبت به محور x ها ←

قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

$x = 2.5$ (۴)

$x = 2$ (۳) ✓

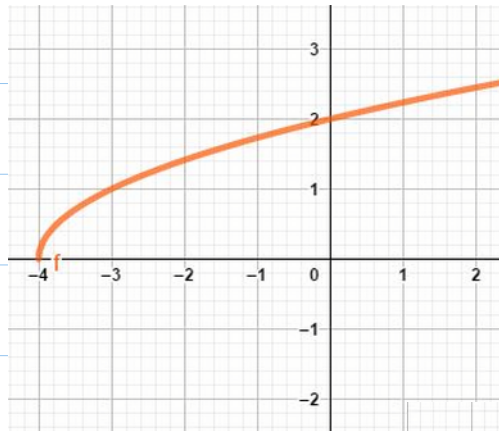
$x = 1.5$ (۲)

$x = 1$ (۱)

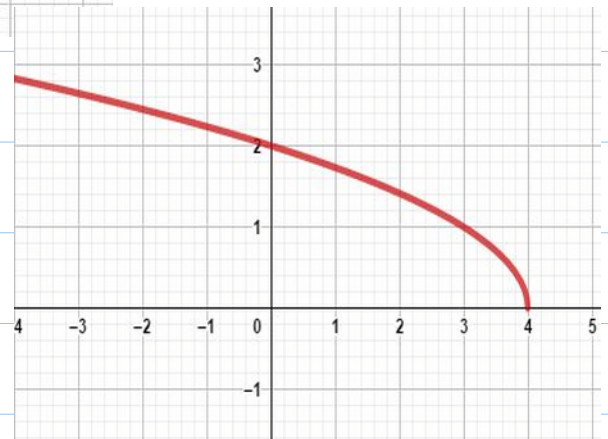
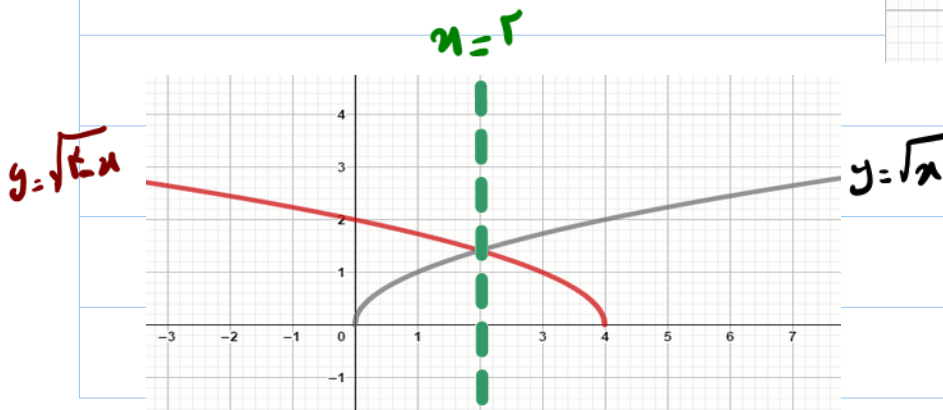
$f(-x) : y = \sqrt{-x}$

$f(-(x-4)) : y = \sqrt{-(x-4)} = \sqrt{-x+4} = \sqrt{4-x}$

$y = \sqrt{4+x}$
۴ واحد به چپ



انفکس: قرینه نسبت به محور y ها $y = \sqrt{4-x}$



قرینه ۴

مثال: کثرت ریاضی ۹۹ (خارج)

ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

(۴) ۱، ۲

(۳) ۲، ۱

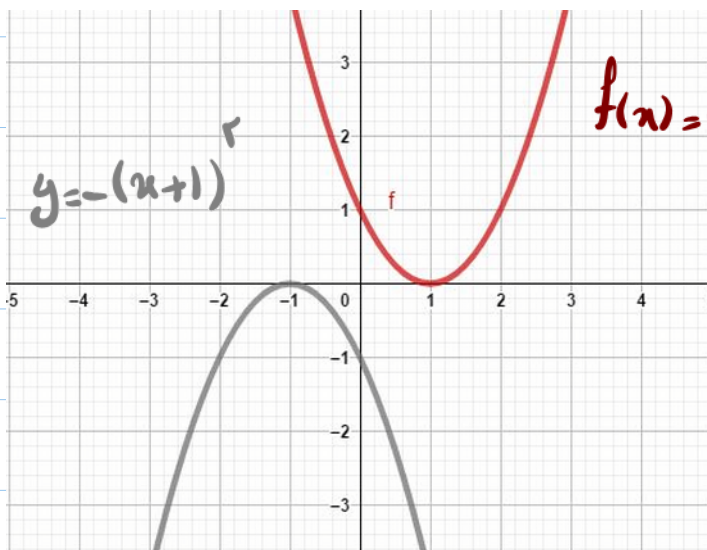
(۲) ۱، ۱

(۱) ۲، ۰

$$\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$$

$$-y = (-x-1)^2 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow y = -(x+1)^2 + \epsilon \quad g(x) = -(x+1)^2 + \epsilon$$



$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 = -(x+1)^2 + \epsilon \rightarrow (x-1)^2 + (x+1)^2 = \epsilon$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = \epsilon \rightarrow 2x^2 + 2 = \epsilon \rightarrow 2x^2 = \epsilon - 2$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

گزین ۲: طول نقاط تلاقی

مثال: کسر تجوی ۹۹

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۶√۱۰ (۴)

۴√۱۷ (۳)

۶√۷ (۲)

۴√۱۵ (۱)

$$g(x) = \sqrt{x-12} + 2$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2 \xrightarrow{\text{تکون}} \sqrt{x} - 2 = \sqrt{x-12} \xrightarrow{\text{تکون}} x - 4 = x - 12 \Rightarrow x = 16$$

$$1 = \sqrt{x-12} \xrightarrow{\text{تکون}} 1 = \sqrt{x-12} \xrightarrow{\text{تکون}} 1 = x - 12 \Rightarrow x = 16$$

$$f(16) = \sqrt{16} = 4 \quad \text{نقطه برخورد } A(16, 4)$$

$$OA = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{256 + 16} = \sqrt{272} = \sqrt{16 \times 17} = 4\sqrt{17}$$

گزینۀ ۳

مثال: کسر تجوی ۹۹ (خارج)

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x$ ($x > 1$)، مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور x ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۲√۵ (۴)

۵√۲ (۳)

۶√۲ (۲)

۴√۵ (۱)

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$

فردینث به محور x ها : $-f(x) = -(x-1)^2 + 1$

انتقال محور در جهت y : $g(x) = -(x-1)^2 + 1 + 16 = -(x-1)^2 + 17$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 - 1 = -(x-1)^2 + 17$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \stackrel{\div 2}{\Rightarrow} (x-1)^2 = 9$$

$$\sqrt{\quad} \Rightarrow x-1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \rightarrow x=4 \\ x-1=-3 \rightarrow x=-2 \end{cases} \text{ غنقن}$$

نقطه بر خور : $A(4, 1)$ $f(4) = (4-1)^2 - 1 = 8$

گزین 1 : $OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$

نکته: گاهی اوقات معادلات نقطه ای روی $f(x)$ داده می شود و معادلات نقطه مشاط با آن

در $a f(bx+c)+d$ خواسته می شود. در این حالت تمام مواردی که برای رسم بنویس.

رینم می راریم روی نقطه راره شده اعمال می کنیم. همچنین برای تأثیر داری می توانیم، نقطه را

$$y = bn + c \text{ را بدست کردیم.}$$

مثال: نقطه $A(-1, 2)$ روی منحنی $y = f(x)$ است. نقطه مشاخر با آن روی منحنی

$$y = 2f(2x - 5) - 7 \text{ ، } A'(a, b) \text{ است. } a - b \text{ کدام است؟}$$

$$(1) -2 \quad (2) \checkmark \quad (3) 2 \quad (4) 4$$

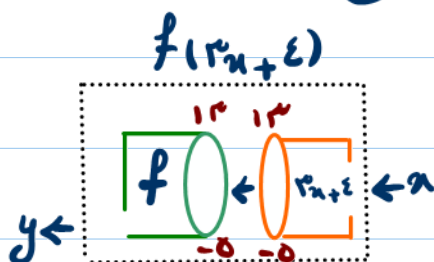
$$t = 2x - 5 \Rightarrow t + 5 = 2x \xrightarrow{\div 2} x = \frac{t+5}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2 = a$$

$$b = 2 \times 2 - 7 = -1 \Rightarrow A'(2, -1) \rightarrow a - b = 2 - (-1) = 3$$

گزینه ۳

نکته: در تابع $y = a f(bx + c) + d$ ، a ، d روی بر f ، b ، c روی دامنه f تأثیری ندارند.

مثال: اگر دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $(-5, 13)$ باشد دامنه تابع $y = f(3x + 4)$ را بیابید.





$$-0 < 3n + \varepsilon < 12 \xrightarrow{-\varepsilon} -4 < 3n < 4$$

$$\xrightarrow{\div 3} -\frac{4}{3} < n < \frac{4}{3}$$

$$D_{f(3n+\varepsilon)} = (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$$

نشان: اگر در تابع f بازه $(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ باشد، در تابع $g(n) = 3f(n+1) - 1$ ، برابر است.

$$-\frac{4}{3} < f(n) < \frac{4}{3} \xrightarrow{\times 3} -4 < 3f(n+1) < 12$$

$$\xrightarrow{-1} -4 < 3f(n+1) - 1 < 11 \Rightarrow -\frac{4}{3} < g(n) < 11$$

$$R_{g(n)} = (-\frac{4}{3}, 11)$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع

یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

قسمت اول: تابع درجه سوم

جلسه دوم: صفحات ۱۳ تا ۱۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

توابع چندجمله‌ای :

توابعی که ضرایب آن‌ها به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ است و

آن a_n تا a_0 اعداد حقیقی و $a_n \neq 0$ است، تابع چندجمله‌ای درجه n نامیده می‌شود.

در مت‌کنید توان n ها باید اعداد حسابی باشند. بیشترین توان n ها درجه چندجمله‌ای است.

مثال: کدامیک از توابع زیر چندجمله‌ای است ؟

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$ نیست

ب) $g(x) = 4x^2 + \sqrt{5}x - 1$ هست (تابع درجه دوم)

پ) $k(x) = \sqrt{x+2}$ نیست

ت) $q(x) = 7x + \frac{1}{2}$ هست (تابع خطی)

ث) $p(x) = 5$ هست (ثابت)

ج) $k(x) = x^{\frac{1}{2}} + 2x$ نیست

نکته: توابع خطی و هبانی، ثابت و درجه دوم، همگی تابع چندمجهدی هستند.

$y = an^2 + bn + c$ $y = c$ $y = n$ $y = an + b$

نکته: دامنه تمام توابع چندمجهدی $\mathbb{R}$ است. همچنین بردار تمام توابع چندمجهدی از درجه

فرجه $\mathbb{R}$ است.

تابع چندمجهدی درجه سوم:

هر تابع با ضابطه $f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ که در آن $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$

باشد، یک تابع چندمجهدی درجه سوم می نامیم.

مانند:

$$f(n) = 2n^3 - \frac{1}{5}n^2 + \sqrt{5}n + \pi$$

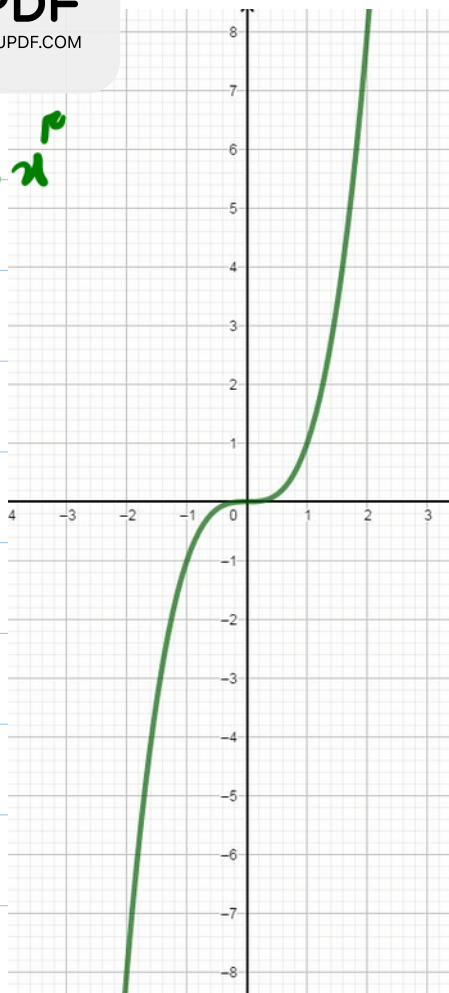
$g(n) = 8n^3 + 1$ ، $h(n) = 5n^3 - 7n^2$

منو دار توابع $y = n^3$ و $y = -n^3$

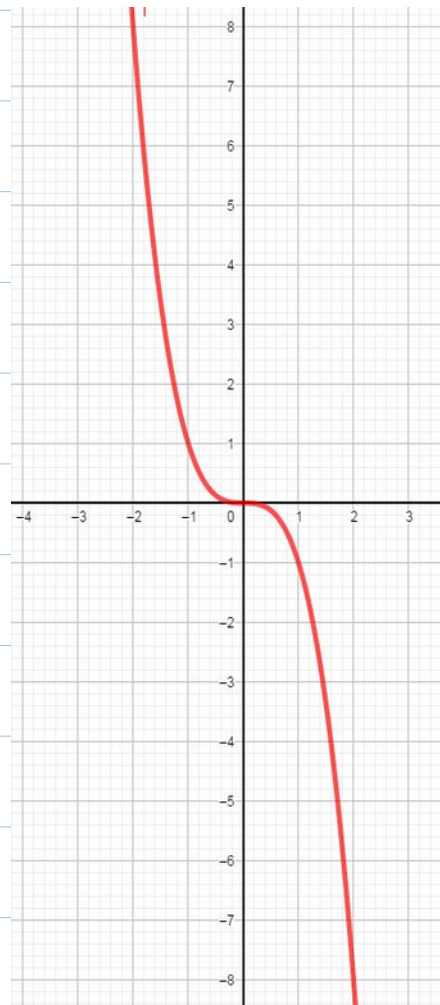
n	-1	0	1	2
$y = n^3$	-1	0	1	8

n	-1	0	1	2
$y = -n^3$	1	0	-1	-8

$$y = x^4$$



$$y = -x^4$$



هر دو مندرار نسبت به مبدأ مختصات متقارن اند

تذکر: برای رسم توابع درجه سوم از قوانین انتقال برای رسم مندرارها کمک می گیریم.

مثال: مندرار تابع $f(x) = x^4 + 3x^2 + 4x + 4$ را رسم کنید.

باید تابع درجه سوم را به صورت $y = k(x-a)^4 + b$ در آوریم.

یادآوری: اتحاد مطلق درجه چهارم:

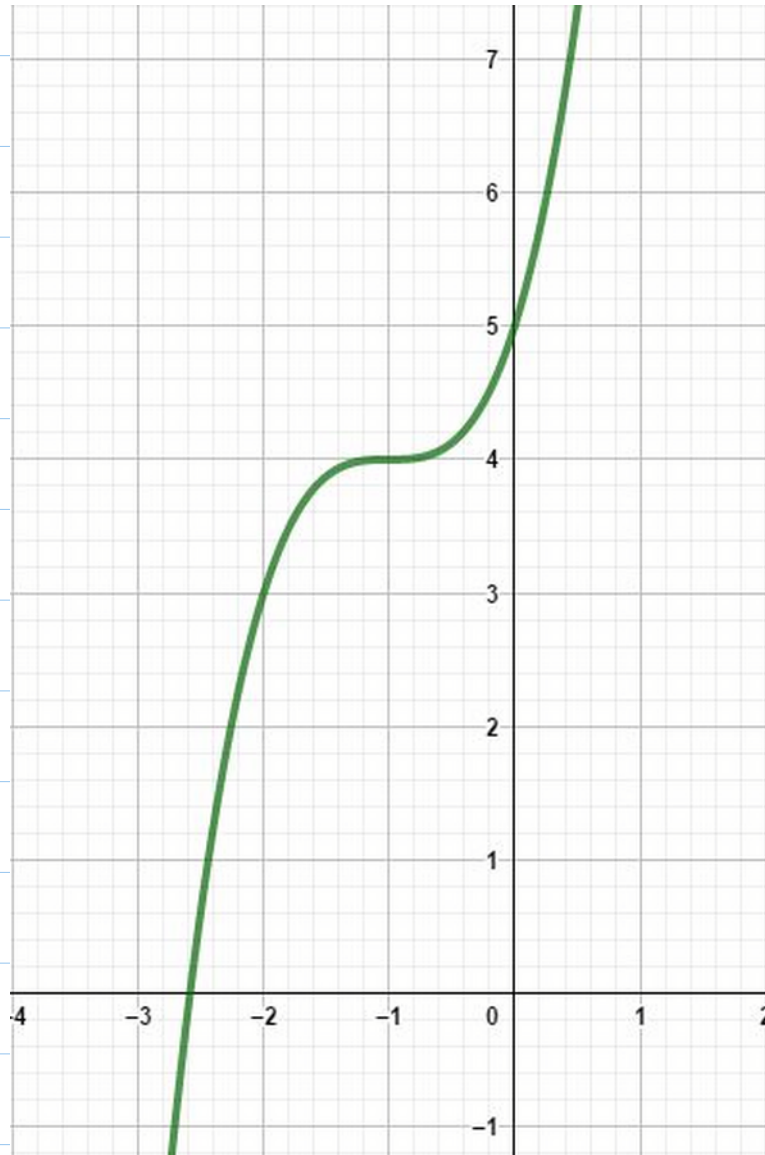
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$



$$f(n) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 4 = (n+1)^3 + 4$$

انتقال

نمودار $y = n^3$ را چهار واحد به سمت بالا و یک واحد به سمت چپ انتقال می دهیم.



به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y = (x-1)^3 + 2$ ۶

ب) $y = (x+1)^3 - 1$ ۷

ج) $y = x^3 + 1$ ۸

د) $y = (x-2)^3$ ۹

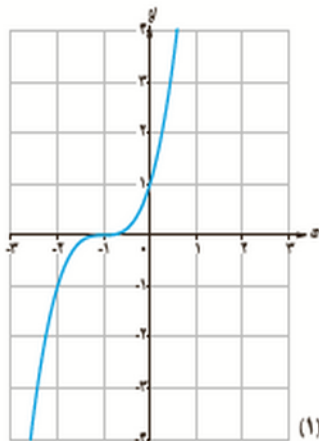
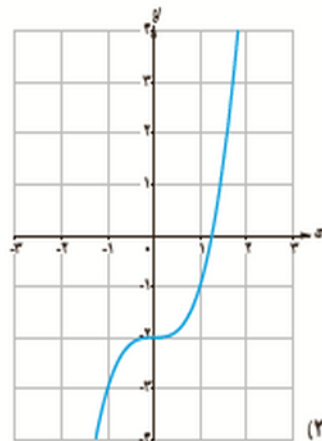
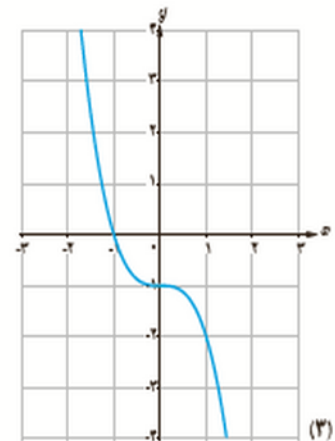
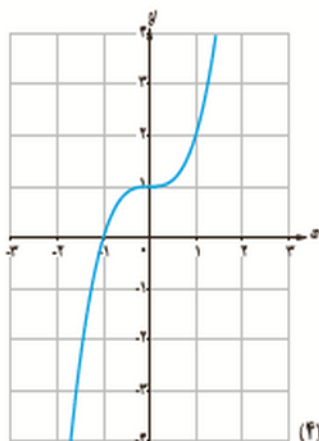
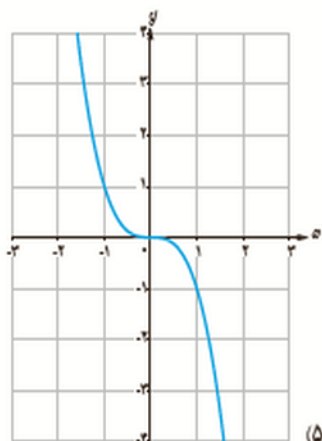
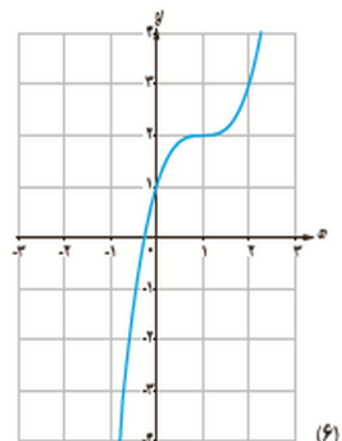
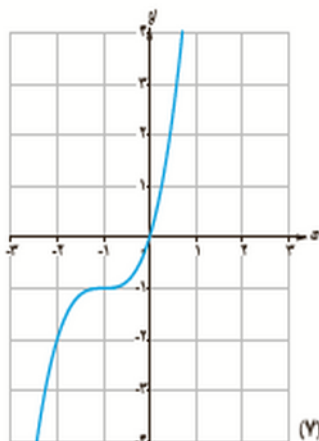
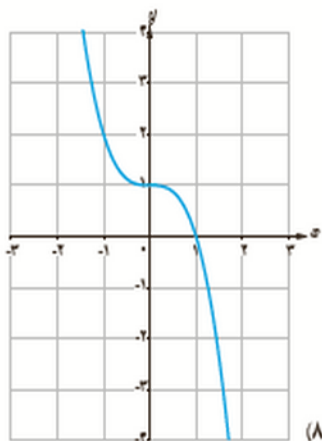
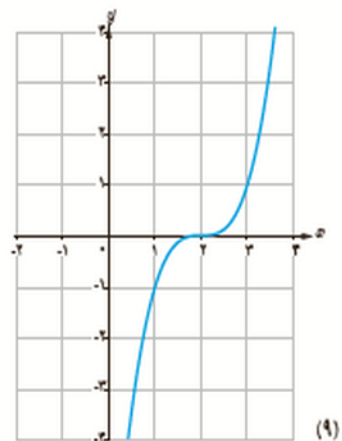
ه) $y = -x^3$ ۵

و) $y = -x^3 - 1$ ۴

پ) $y = -x^3 + 1$ ۸

ت) $y = (x+1)^3$ ۱

ث) $y = x^3 - 2$ ۲



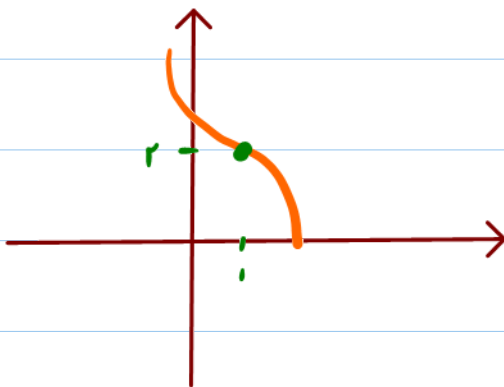
نکته: در توابع درجه سوم به صورت $y = k(x-a)^3 + b$ ، نقطه (a, b) مرکز تقارن

است. می توان از این نقطه در رسم سریع نمودار توابع درجه سوم کمک گرفت.

مثال: نمودار تابع $y = -(x-1)^3 + 2$ را رسم کنید.

پایه: $y = -x^3$

$(1, 2)$ مرکز تقارن



$y = x^2$

$y = x^3$

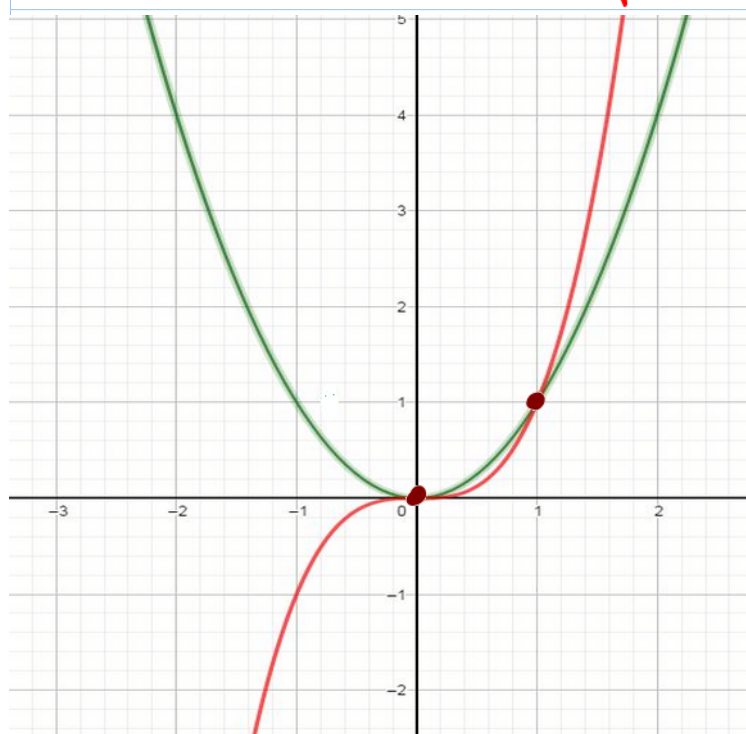
مقایسه نمودارهای $y = x^2$ و $y = x^3$:

۱- دو نمودار در نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ متقاطع اند.

۲- برای $x > 1$ ، $y = x^3$ بزرگتر از $y = x^2$ است.

۳- برای $0 < x < 1$ و $x < 0$ نمودار

$y = x^2$ بزرگتر از $y = x^3$ است.

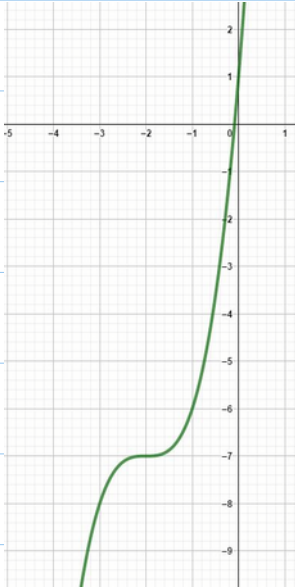




مثال: مقدار تابع $y = x^3 + 4x^2 + 12x + 1$ از کدام ناحیه محور مختصات عبور می‌کند؟

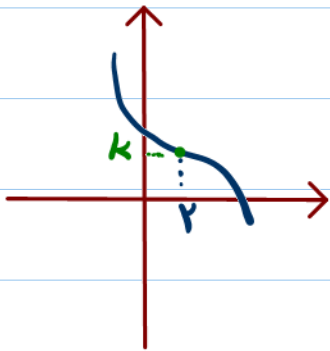
$$y = x^3 + 4x^2 + 12x + 1 = (x+2)^3 - 7$$

انتقال



از ناحیه چهارم محور مختصات.

مثال: مقدار تابع $g(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ به شکل زیر است. مقدار a, b را بیابید.



مکزقن (2, k)

ر برعكس: فریب x منفی

$$g(x) = -(x-2)^3 + k = -(x^3 + 3x^2(-2) + 3x(-2)^2 + (-2)^3) + k$$

$$g(x) = -x^3 + 4x^2 - 12x + 8 + k = -x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-12 \end{cases}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع

یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

قسمت دوم: توابع صعودی و نزولی

جلسه سوم: صفحات ۱۵ تا ۱۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف تابع صعودی :

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq \mathbb{R}$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

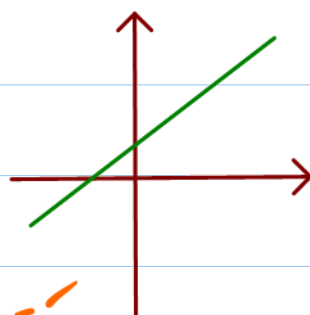
$$f(x_1) < f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع صعودی می نامیم.

به عبارت دیگر در تابع صعودی، با افزایش x ، y افزایش می یابد یا ثابت می ماند.



با دقت از چپ به راست هیچگاه پائین نمی رویم



مثال :

تعریف تابع ابتداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq \mathbb{R}$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$$f(x_1) < f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع ابتداً صعودی می نامیم.

به عبارت دیگر در تابع ابتداً صعودی، با افزایش x ، y هم افزایش می یابد.



مثال :

با دقت از چپ به راست همواره پائین نمی رویم

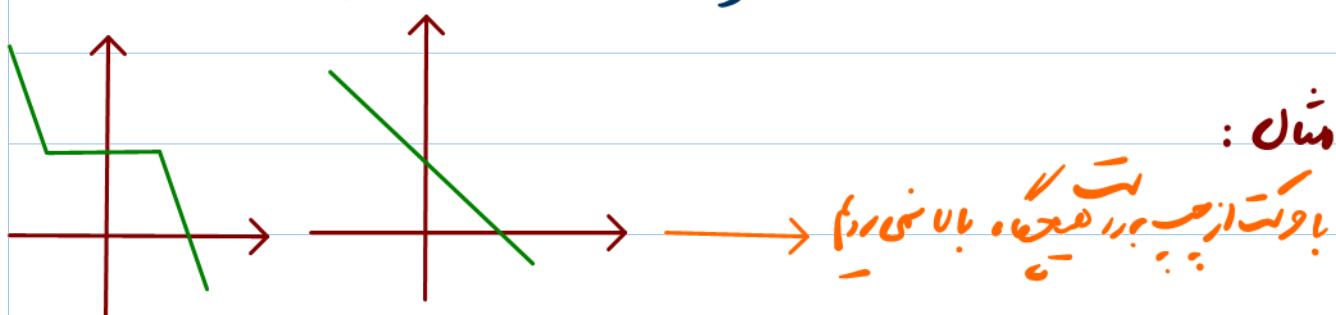
تعریف تابع نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 > x_2$ داشته باشیم

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع نزولی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع نزولی، با افزایش x یا کاهش y ثابت می‌ماند.



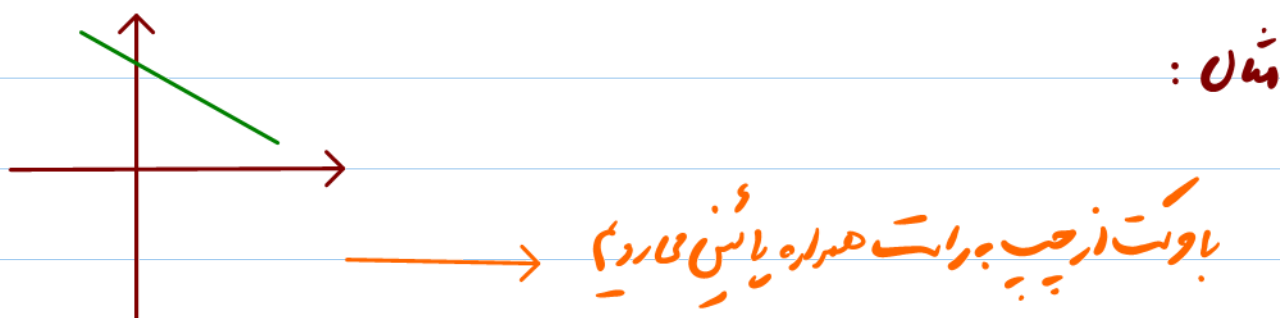
تعریف تابع اکیداً نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 > x_2$ داشته باشیم

$$f(x_1) < f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع اکیداً نزولی می‌نامیم.

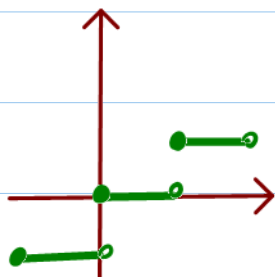
به عبارت دیگر در تابع اکیداً نزولی، با افزایش x ، y کاهش می‌یابد.



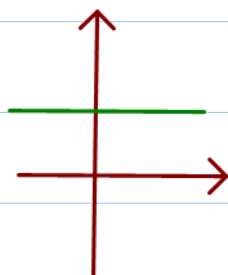
نکته: هر تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و هر تابع اکیداً نزولی، نزولی هم

ولی عکس این مطلب درست نیست.

مثال: تابع $y = [x]$ صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.



نکته: اگر با افزایش x ، y ثابت بماند می‌گوئیم تابع ثابت است. تابع ثابت هم صعودی است



مثال:

در هم نزولی.

تعریف تابع اکیداً یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی

باشد، می‌گوئیم تابع f روی مجموعه A اکیداً یکنوا است.

تعریف تابع یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) صعودی یا نزولی باشد، می‌گوئیم

تابع f روی مجموعه A یکنوا است.

نکته: اگر در تابع با افزایش x حرکت از چپ به راست روی نمودار، y گاهی اوقات

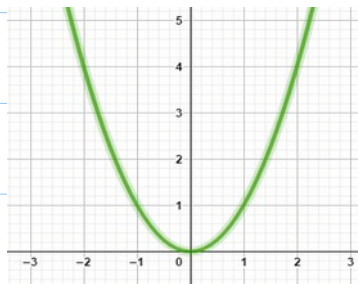
افزایش دهی اوقات کاهش یابد، این تابع را **فزیلنوا** می گویند.

درقت کنید ممکن است تابعی روی دامنه اش فزیلنوا باشد ولی روی زیرمجموعه های

از دامنه اش فزیلنوا باشد.

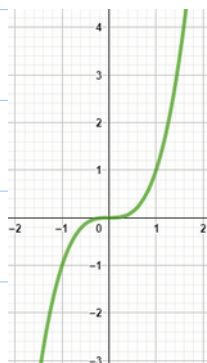
بررسی فزیلنوی توابع معروف:

۱) $y = x^2$



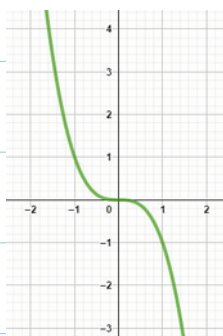
فزیلنوا روی $[-\infty, 0]$ (کمراتری)
و در $[0, +\infty)$ (کمراتروری)

۲) $y = x^3$



کمراتر فزیلنوا (کمراتروری)

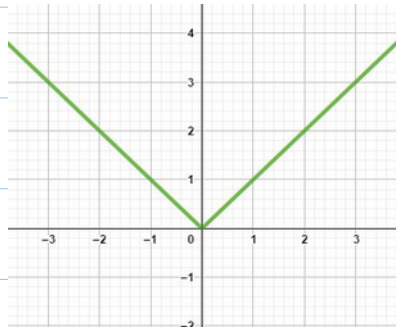
۳) $y = -x^3$



کمراتر فزیلنوا (کمراتروری)

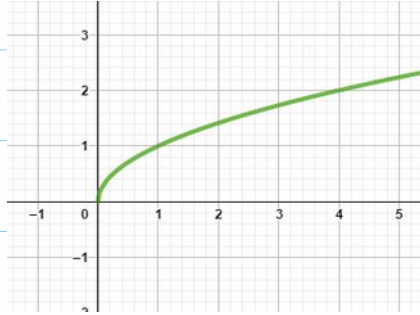


۴) $y = |x|$



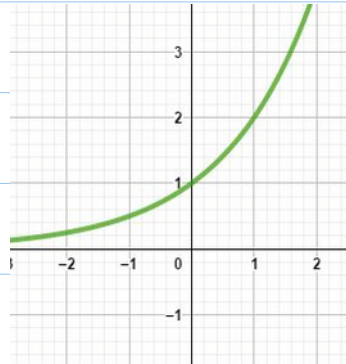
غیر منفرد
دلی در $[-\infty, 0]$ (کثیراً نزولی)
و در $[0, +\infty]$ (کثیراً صعودی)

۵) $y = \sqrt{x}$



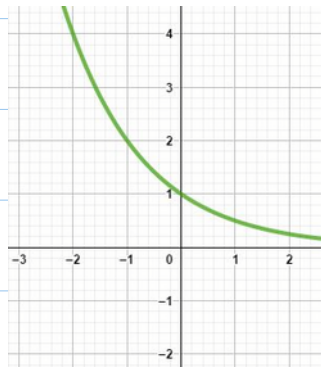
کثیراً منفرد (کثیراً صعودی)

۶) $y = a^x$ ($a > 1$)



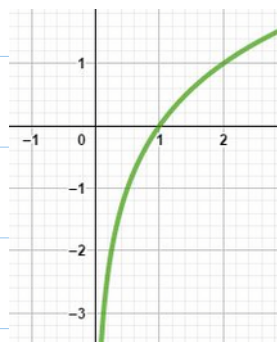
کثیراً منفرد (کثیراً صعودی)

۷) $y = a^x$ ($0 < a < 1$)



کثیراً منفرد (کثیراً نزولی)

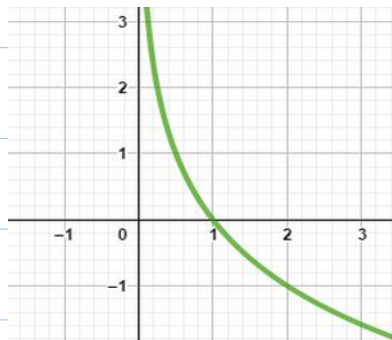
۸) $y = \log_a x$ ($a > 1$)



کثیراً منفرد (کثیراً صعودی)

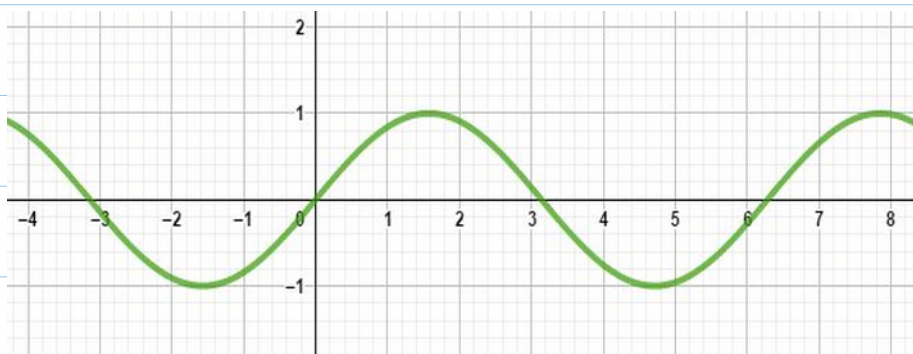


9) $y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$



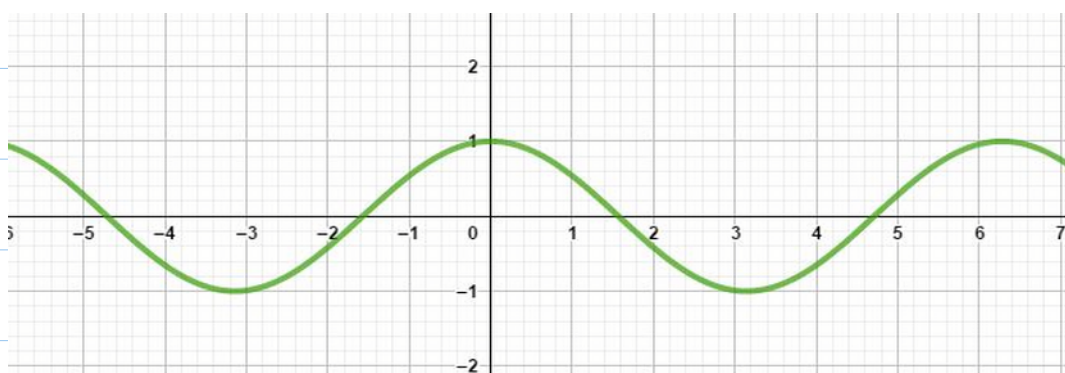
اگر $a < 1$ (اگر نزولی)

۱۰) $y = \sin x$



خوب بگویم دی مثلاً در $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ تابع اگه معکوس در $[\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ تابع اگه نزولی است.

۱۱) $y = \cos x$

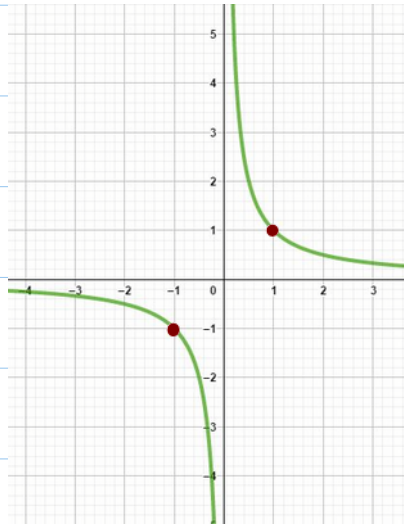


خوب بگویم دی مثلاً در $[\pi, 2\pi]$ تابع اگه نزولی است در $[\pi, 2\pi]$ تابع اگه معکوس است.



۱۲) $y = \frac{1}{x}$

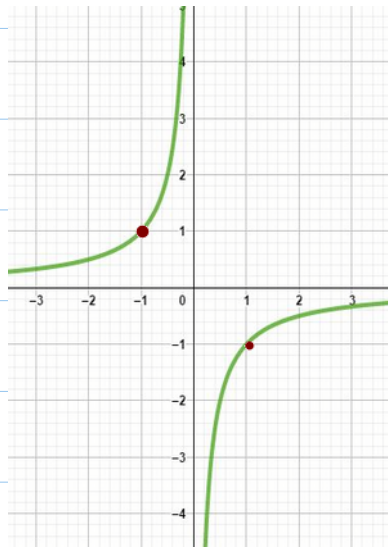
$f(1) < f(-1) \rightarrow 1 < -1$
محور



خیز یکنوا دی در $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$
اکسید نزدیکی است

۱۳) $y = -\frac{1}{x}$

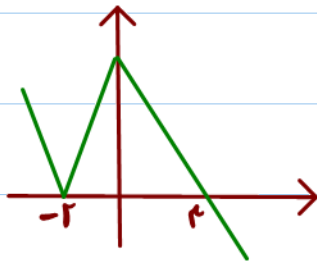
$f(1) > f(-1) \rightarrow 1 > -1$
نزدر



خیز یکنوا دی در $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$
اکسید محوری است

مثال: با توجه به نمودار تابع f ، یکنوایی آن را بررسی کنید.

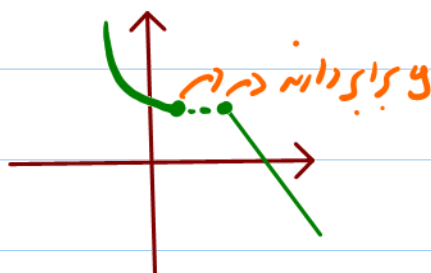
الف)



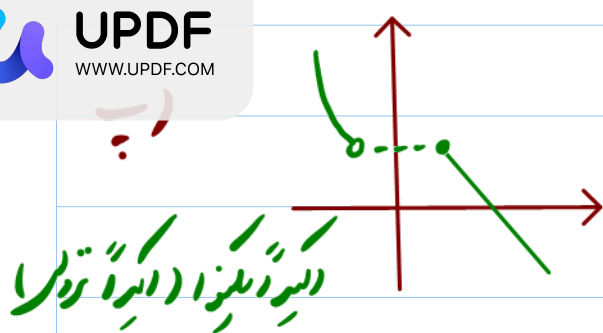
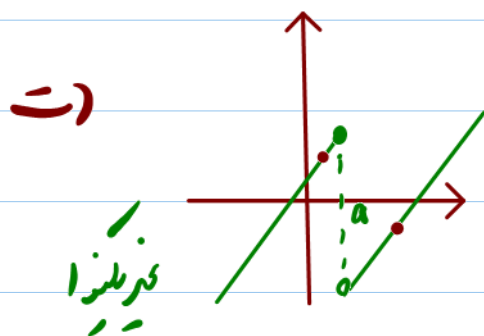
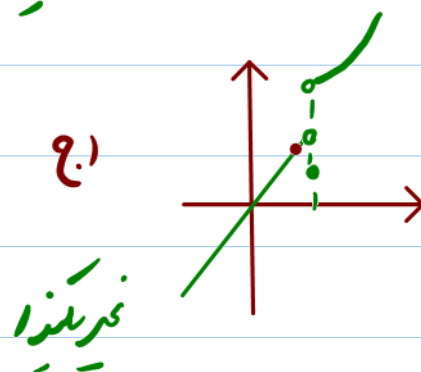
خیز یکنوا دی در $[-2, -\infty)$ و $(-\infty, +\infty]$

اکسید نزدیکی در $[0, 2]$ اکسید محوری

ب)



یکنوا (نزدیکی)



مثال: تابع $f = \{(1, 2), (2, m-1), (3, 7-m)\}$ صعودی است. عدد m را بیابید.

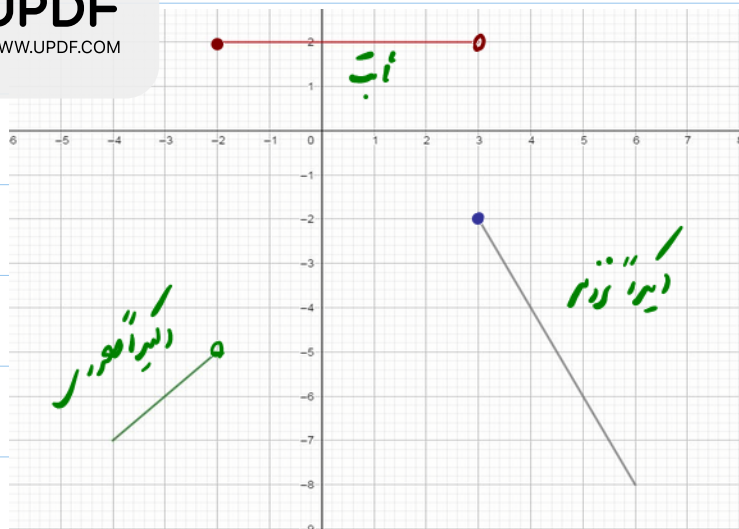
$$1 < 2 \rightarrow f(1) \leq f(2) \Rightarrow 2 \leq m-1 \Rightarrow 3 \leq m \quad (1)$$

$$2 < 3 \rightarrow f(2) \leq f(3) \Rightarrow m-1 \leq 7-m \Rightarrow 2m \leq 8 \rightarrow m \leq 4 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 3 \leq m \leq 4$$

مثال: تابع $y = \begin{cases} x-4 & x < -2 \\ 2 & -2 \leq x < 3 \\ -2x+4 & x \geq 3 \end{cases}$ روی بازه $(-\infty, a)$ صعودی است.

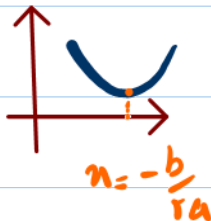
بیشترین مقدار برای a را بیابید.

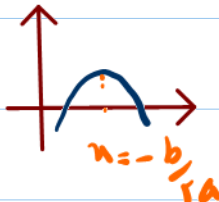


تابع صعودر : $(-\infty, 2)$
↓
 a

$$\Rightarrow a = 2$$

نکته: طبق رفته دیدیم تابع $y = ax^2 + bx + c$ روی $\mathbb{R}$ غیر یکنواخت دی

$a > 0$ (اف)  $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ کیرا نزدر و $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ کیرا صعودر

$a < 0$ (ب)  $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ کیرا صعودر و $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ کیرا نزدر

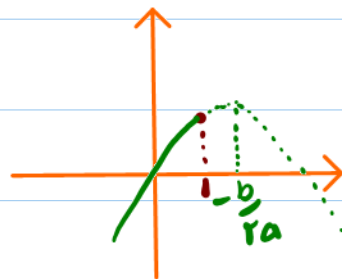
همچنین می توان گفت سعی در هر بازه ای که در آن همی درون آن بازه باشد غیر یکنواخت

سوال: تابع درجه دوم $f(x) = (k+2)x^2 + x$ با دامنه $(-\infty, 1]$ صعودی است.

عدد k را بیابید.

$$a < 0 \Rightarrow k+2 < 0 \Rightarrow k < -2 \quad (1)$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(k+2)} \geq 1$$



$$\frac{-1}{2(k+2)} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2(k+2)} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+2k+2}{2(k+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2k+3}{2(k+2)} \leq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-2	$+\infty$
$2k+3$	$-$	0	$+$	$+$
$2(k+2)$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2k+3}{2(k+2)}$	$+$	0	$-$	$+$

$$-\frac{3}{2} \leq k < -2 \quad (2) \Rightarrow (1) \cap (2) = -\frac{3}{2} \leq k < -2$$

مثال: تابع $y = (k-1)^x$ را برای k را بدست آورید.

$$a > 1 \Rightarrow k-1 > 1 \Rightarrow k > 2 \Rightarrow k > \sqrt{2} \text{ یا } k < -\sqrt{2}$$

قضیه: (الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صوری باشد و a, b مقادیر جابجایی فاصله

باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a < b$.

(ب) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً نزولی باشد و a, b مقادیر جابجایی فاصله

باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a > b$.

اثبات: (الف) چون تابع f اکیدا صعودی است پس اگر $a > b$ آنگاه $f(a) > f(b)$
 $f(a) > f(b)$ فرض کنیم

حال اگر یک نقطه بین a و b بنویسیم اثبات انجام می پذیرد:

اگر $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \leq b$ □

ب) به عنوان تمرین، حل شود.

تذکره: پس می توان گفت اگر تابع f (اکیدا) صعودی باشد و آن را از دو طرف نامیاری

حذف کنیم، جهت نامیاری تغییر نمی کند و اگر f (اکیدا) نزولی باشد، با حذف آن از

دو طرف، جهت نامیاری برعکس می شود.

مثال: اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد و $f(3a+2) > f(a^2-1)$ ، حد در a را بیابید.

$$f(a^2-1) > f(3a+2) \xrightarrow{f \text{ نزولی}} a^2-1 < 3a+2$$

$$a^2-3a-2 < 0 \Rightarrow (a+1)(a-4) < 0 \Rightarrow -1 < a < 4$$

مثال: بجزء جواب نامعادله زیر را بنویسید.

رابطه $2^{n-2} \geq 8^{n-1}$

$$(2)^{2n-2} \geq (2)^{6n-6} \Rightarrow \cancel{2^{2n-2}} \geq \cancel{2^{6n-6}} \xRightarrow{a>1} 2n-2 \geq 6n-6$$

$$2n-6n \geq -6+2 \Rightarrow -4n \geq -4 \Rightarrow n \leq 1 \rightarrow \text{ج. ر.} = (-\infty, 1]$$

ب) $\log_{\frac{1}{2}}(n+1) > 2$ (1) $(n+1) > 0 \Rightarrow n > -1$ دانه

$$\cancel{\log_{\frac{1}{2}}(n+1)} > \cancel{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2} \xRightarrow{a<1} n+1 < \frac{1}{4} \rightarrow n < \frac{1}{4} - 1$$

$n < -\frac{3}{4}$ (2) (1) $\cap$ (2) $-1 < n < -\frac{3}{4} \rightarrow \text{ج. ر.} = (-1, -\frac{3}{4})$

پ) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{n+1} > (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{n+2}$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{n+1} > ((\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1})^{n+2} \Rightarrow \cancel{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{n+1}} > \cancel{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-n-2}}$$

$$\xRightarrow{\sqrt{3}-\sqrt{2} < 1} 2n+1 < -n-2 \Rightarrow 3n+1 < -2 \Rightarrow 3n < -3$$

$$\Rightarrow n < -1 \rightarrow \text{ج. ر.} = (-\infty, -1)$$

نکته:

۱) اگر توابع f و g صوری باشند آنگاه $f+g$ هم صوری است.

۲) اگر توابع f و g نزدی باشند آنگاه $f+g$ هم نزدی است.

۳) اگر توابع f و g صوری باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $f \times g$ هم صوری است.

۴) اگر توابع f و g نزدی باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $f \times g$ هم نزدی است.

۵) اگر f صوری باشد آنگاه $f(x) - g$ نزدی است.

و اگر g نزدی باشد آنگاه $f(x) - g$ صوری است.

۶) اگر f صوری باشد و مقادیر f همگی مثبت و همگی منفی باشد آنگاه $f \pm g$ نزدی است.

۷) اگر g نزدی باشد و مقادیر g همگی مثبت و همگی منفی باشد آنگاه $f \pm g$ صوری است.

۸) اگر f صوری و g نزدی باشد و f صوری و g نزدی است.

مثال: اگر f تابعی نزولی با مقدار منفی باشد، کدام تابع نزودی است؟

✓ (۱) $y = x^n f(x)$ (۲) $y = \frac{f(x)}{x^n}$ (۳) $y = x^n + f(x)$ (۴) $y = x^n - f(x)$

تابع f تابعی نزولی با مقدار منفی است. پس تابع f - تابعی صعودی با مقدار مثبت است.

همچنین تابع $x^n = x^n$ تابعی صعودی با مقدار مثبت است. پس ضرب این دو تابع منفی

$y = x^n \times (-f) = -x^n f$ تابعی صعودی است. پس $y = x^n f$ تابعی نزودی است.

مثال: اگر f و g توابعی نزولی باشند، کدام تابع صعودی است؟

(۱) f (۲) g (۳) $-f$ (۴) $-g$ ✓

صعودی نزولی منفی نزولی نزولی
 $h = (f+g) + (g-f) = 2g \Rightarrow k = -\frac{1}{4}(2g) = -g$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع

یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

قسمت سوم: تقسیم و بخش پذیری

جلسه چهارم: صفحات ۱۸ تا ۲۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در پایه‌های پائین‌تر با تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای آشنا شدیم.

مراحل این تقسیم عبارت بودند از:

(۱) آنگاه در نوشتن مقسوم و مقسوم علیه.

(۲) تقسیم جمله اول مقسوم بر جمله اول مقسوم علیه و نوشتن حاصل آن در خارج قسمت و

ضرب آن در مقسوم علیه و کم کردن حاصل آن از مقسوم بدین یافتن مقسوم جدید.

(۳) تقسیم جمله اول مقسوم جدید بر جمله اول مقسوم علیه و انجام مرحله ۲.

(۴) تکرار مرحله ۲ تا جایی که درجه مقسوم جدید (جای مانده) از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

نکته: اگر درجه مقسوم n و درجه مقسوم علیه m باشد ($n \geq m$)، درجه خارج قسمت $n-m$ و

درجه باقی مانده حداکثر $m-1$ خواهد بود.

مثال: چندجمله‌ای $x^4 + 2x^3 - 1$ را بر $x^2 - 2$ تقسیم کنید.



$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 2x - 1 \\
 - (2x^2 - 4x) \\
 \hline
 6x^2 + 6x - 1 \\
 - (6x^2 - 18x) \\
 \hline
 24x^2 + 24x - 1 \\
 - (24x^2 - 72x) \\
 \hline
 96x^2 + 96x - 1
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \text{مقدم کنیم} \\
 x^2 - 2 \\
 2x^2 + 3x + 4 \\
 \hline
 \text{خارج نت}
 \end{array} \right.$$

$$\frac{2x^2}{x^2} = 2x^2$$

$$\frac{3x^3}{x^2} = 3x$$

$$\frac{4x^4}{x^2} = 4x^2$$

$$4x + 7 \rightarrow \text{باقی مانده}$$

روش هورنر برای تقسیم چندجمله‌ای درجه n بر درجه یک به صورت $x + a$:

این روش را بابک مثال توضیح دهیم:

$$3x^3 + 11x^2 + 0x - 7 \quad | \quad x + 2$$

ضرایب یک جمله‌ای را می‌نویسیم

رشته مقدم کنیم $(x + 2 = 0)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 3 & & 11 & & 0 & & -7 \\
 & \swarrow \times (-2) & & \swarrow \times (-2) & & \swarrow \times (-2) & \\
 3 & & -5 & & -10 & & -22 \\
 & \swarrow \times (-2) & & \swarrow \times (-2) & & \swarrow \times (-2) & \\
 & & 1 & & 0 & & -14 \\
 & & & & & & -28
 \end{array}$$

$$3x^2 + 2x + 1$$

باقی مانده
خارج نت:

قصد تقسیم (الگوریتم تقسیم) برای چند جمله‌ای:

اگر $p(n)$ و $B(n)$ چند جمله‌ای باشند و درجه $B(n)$ از صفر بزرگتر باشد، آنگاه

چند جمله‌ای منتهی‌بزرگ $Q(n)$ و $R(n)$ وجود دارند به طوری که:

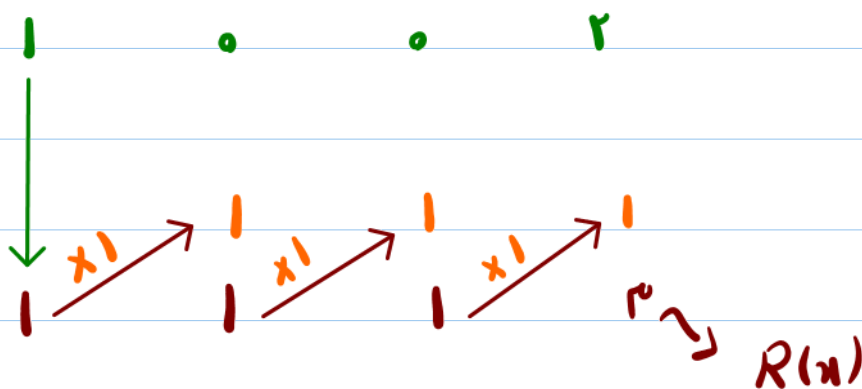
$$\begin{array}{r} p(n) \\ \hline B(n) \\ \hline Q(n) \\ \hline R(n) \end{array}$$

$$p(n) = B(n)Q(n) + R(n)$$

که در آن درجه $R(n)$ از درجه $B(n)$ کمتر است.

اگر $R(n) = 0$ باشد $p(n)$ بر $B(n)$ بخش پذیر است.

مثال: الگوریتم تقسیم را برای تقسیم $p(n) = n^3 + 1$ بر $B(n) = n - 1$ بنویسید.



$$Q(n) = n^2 + n + 1$$

$$n^3 + 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1) + 3$$



نقشه (۱): باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای درجه یک $ax+b$ برابر $p(-\frac{b}{a})$ است.

است. یعنی برای یافتن باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر چندجمله‌ای درجه یک کافی است

ریشه چندجمله‌ای درجه یک (معنوم علیه) را به جای متغیر $p(x)$ (معنوم) قرار دهیم.

اثبات: اگر انگیزیم تقسیم را بنویسیم، داریم:

$$p(x) = (ax+b)Q(x) + R$$

اگر به جای x ریشه معنوم علیه $(ax+b=0 \rightarrow ax=-b \rightarrow x=-\frac{b}{a})$ را قرار دهیم

داریم:

$$p(-\frac{b}{a}) = 0 \times Q(-\frac{b}{a}) + R \Rightarrow p(-\frac{b}{a}) = R \quad \square$$

سوال: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^5 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1$ بر $x-2$ را بیابید.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow p(2) = R$$

$$p(2) = 2^5 - 4(2)^3 + 3(2)^2 - 2 + 1 = 32 - 32 + 12 - 2 + 1 = 11$$

مثال: اگر چند جمله‌ای $p(x) = 3x^5 - 4ax - 5$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد، a را بیابید.

$$x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow p(1)=0 \rightarrow p(1) = 3(1)^5 - 4a(1) - 5 = 0$$

$$3 - 4a - 5 = 0 \rightarrow -4a = 2 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

مثال: کثرت را بیابید

به ازای مقداری از a چند جمله‌ای $p(x) = x^4 + ax^3 - 11x^2 + 2x + 1$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است.

کوچکترین ریشه صحیح $p(x)=0$ کدام است؟

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10)$$

$$x+2=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow p(-2)=0 \Rightarrow p(-2) = (-2)^4 + a(-2)^3 - 11(-2)^2 + 2(-2) + 1 = 0$$

$$16 - 8a - 44 - 4 + 1 = 0 \rightarrow -8a = 30 \rightarrow a = -\frac{15}{4}$$

$$p(x) = x^4 + \frac{15}{4}x^3 - 11x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^4 + \frac{15}{4}x^3 - 11x^2 + 2x + 1 = (x+2)Q(x)$$

$$\begin{array}{rccccccc} 1 & & \frac{15}{4} & & -11 & & 2 & & 1 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + 0$$

باقی‌مانده



$$p(x) = (x+2)(x^2+2x-4) = 0 \Rightarrow (x+2)x(x^2+2x-4) = 0$$

$$\swarrow x+2=0 \rightarrow x=-2$$

$$\rightarrow x=0$$

$$\searrow x^2+2x-4=0 \Rightarrow x^2+2x=4 \Rightarrow x^2+2x+1=4+1 \Rightarrow (x+1)^2=5$$

$$\sqrt{} \Rightarrow x+1 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow x = \sqrt{5}-1, x = -\sqrt{5}-1$$

مثال: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $x^4 - ax^2 + x^2 + b$ بر $x+1$ برابر 9 است. اگر

این چندجمله‌ای بر $x-2$ بخش پذیر باشد، a, b را بیابید.

$$x+1=0 \rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=9 \Rightarrow p(-1)=(-1)^4 - a(-1)^2 + (-1)^2 + b = 9$$

$$1+a+1+b=9 \Rightarrow a+b=7 \quad (1)$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \Rightarrow p(2)=0 \Rightarrow p(2)=2^4 - a(2)^2 + (2)^2 + b = 0$$

$$16-4a+4+b=0 \Rightarrow -4a+b=-2. \quad (2)$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ -4a+b=-2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ 5a=9 \rightarrow a=2 \end{array}$$

مثال: کسور ۹۹ ریاضی خارج:

برای یک مقدار a ، چندجمله‌ای $p(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x - 1$ بر $x-1$

بخش پذیر است. در این حالت باقی‌مانده $p(x)$ بر $x+2$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

$$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + a\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{8}a + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 0 \xrightarrow{\times 8} 1 + a + 4 - 12 = 0 \rightarrow a = 7$$

$$p(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x - 1 \Rightarrow x+2=0 \rightarrow x=-2$$

$$p(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) - 1 = 32 - 56 + 8 + 6 - 1 = -1$$

گزینه ۱

مثال: اگر $f(x-1) = x-2$ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-3$ را بیابید.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2) = R$$

باید عددی را جای x در $f(x-1)$ قرار دهیم که $f(2)$ بدست آید:

$$f(n-1) = 2 \Rightarrow 2n = 4 \rightarrow n = 2$$

$$f(n-1) = n - 2 \xrightarrow{n=2} f(2(2)-1) = 2 - 2 \rightarrow f(3) = -1 = R$$

مثال: چند جمله‌ای $p(n) = n^4 + 3n^3 + an^2 - 9$ بر $n+3$ بخش پذیر است. بقیه مانده

تقسیم چند جمله‌ای $p(n+1)$ بر $n+2$ کدام است؟

$$(1) -14 \quad (2) -2 \quad (3) -1 \quad (4) -8$$

$$n+3=0 \rightarrow n=-3 \rightarrow p(-3)=0 \rightarrow p(-3) = (-3)^4 + 3(-3)^3 + a(-3)^2 - 9 = 0$$

$$81 - 81 + 9a - 9 = 0 \rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow p(n) = n^4 + 3n^3 + n^2 - 9$$

$$n+2=0 \rightarrow n=-2 \Rightarrow p(-2+1) = R \Rightarrow p(-1) = R$$

$$p(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + (-1)^2 - 9 = 1 - 3 + 1 - 9 = -10 \quad \text{گزینه ۴}$$

مثال: بقیه مانده تقسیم چند جمله‌ای $p(n) + n$ و $Q(n)$ بر $n-2$ به ترتیب

۳، ۴ است. اگر چند جمله‌ای $1 + Q(n) + kp(n)$ بر $n-2$ بخش پذیر باشد،

مقدار k کجاست؟

$$(1) -5 \quad (2) 0 \quad (3) -4 \quad (4) 4$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow p(2)+2=3 \Rightarrow p(2)=1$$

$$\rightarrow x=2 \rightarrow 2Q(2)=4 \rightarrow Q(2)=2$$

$$x=2 \rightarrow k p(2) + Q'(2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow k \cdot 1 + (2)' + 1 = 0 \rightarrow k + 0 = -1 \rightarrow k = -1$$

گزینا

روش یافتن باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای از درجه بزرگتر از یک :

اگر هم تقسیم را می‌نویسیم. فقط وقت‌کننده درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر است.

مثلاً اگر مقسوم علیه از درجه دو باشد باقی مانده حداکثر از درجه یک است و همانند باقی مانده

راه هجرت $ax+b$ بنویسیم. برای همه ضرایب باقی مانده باید کاری کنیم $Q(x)$ حذف شود.

از ریشه‌های معنوم علیه برای این کار استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر ریشه‌های معنوم علیه

بابت ستاری معنوم و باقی مانده می‌شود:

$$\begin{array}{r|l} p(n) & (n-\alpha)(n-\beta) \\ \hline & Q(n) \\ \hline R(n) \end{array}$$

$$p(n) = (n-\alpha)(n-\beta)Q(n) + R(n)$$

$$n = \alpha \rightarrow p(\alpha) = (\cancel{\alpha-\alpha})(\alpha-\beta)Q(\alpha) + R(\alpha) \Rightarrow p(\alpha) = R(\alpha)$$

$$n = \beta \rightarrow p(\beta) = (\beta-\alpha)(\cancel{\beta-\beta})Q(\beta) + R(\beta) \Rightarrow p(\beta) = R(\beta)$$

مثال: باقی مانده تقسیم $x^5 + 2x^4 + 0x^3 - 1$ را بر $x^2 - 1$ بدست آورید.

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^4 + 0x^3 - 1 & x^2 - 1 \\ \hline & Q(n) \\ \hline R(n) = ax + b \end{array}$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow p(1) = 1^5 + 2(1)^4 + 0(1)^3 - 1 = R(1) = a(1) + b$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 0 - 1 = a + b \Rightarrow a + b = 2 \quad (1)$$

$$x = -1 \Rightarrow p(-1) = (-1)^5 + 2(-1)^4 + 0(-1)^3 - 1 = R(-1) = a(-1) + b$$

$$\Rightarrow -1 + 12 + 8 - 1 = -a + b \Rightarrow -a + b = 6 \quad (2)$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow \begin{cases} a+b=11 \\ -a+b=6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ a+7=11 \rightarrow a=4 \end{matrix}$$

$$2b=12 \rightarrow b=6$$

$$R(n) = n + 7$$

مثال: سطر ریاضی ۹۹

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(n)$ بر $n-1$ و $2n+1$ به ترتیب ۸ و ۵ است.

باقی مانده تقسیم $P(n)$ بر $2n^2 - n - 1$ کدام است؟

$$(1) -n+1 \quad (2) n+1 \quad (3) 2n+6 \quad (4) 2n-1$$

$$n-1=0 \rightarrow n=1 \rightarrow P(1)=8$$

$$2n+1=0 \rightarrow n=-\frac{1}{2} \rightarrow P(-\frac{1}{2})=5$$

$$\begin{array}{r} P(n) \mid 2n^2 - n - 1 \\ \hline Q(n) \end{array}$$

$$R(n) = an + b$$

$$P(n) = (2n^2 - n - 1)Q(n) + (an + b)$$

$$P(n) = (n-1)(2n+1)Q(n) + (an + b)$$

 $x=1 \Rightarrow$

$$p(1) = (1-1)(2+1)Q(1) + (a+b) = 1 \Rightarrow a+b=1 \quad (1)$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow p(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}-1)(2 \times (-\frac{1}{2})+1)Q(-\frac{1}{2}) + a(-\frac{1}{2})+b = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}a+b=0 \quad (2)$$

$$\times \frac{1}{2} \begin{cases} a+b=1 \\ -\frac{1}{2}a+b=0 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}b=1 \times \frac{2}{2} \rightarrow b=\frac{1 \times 2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{2}b=1 \times \frac{2}{2} \rightarrow b=\frac{1 \times 2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a+b=1 \rightarrow a=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

نیزه ۳

مثال: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-4 و x^2-9 به ترتیب $x+1$ و $x+2$

است. باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-5x+6 کجاست؟

$$(1) \quad 2x+0 \quad (2) \quad 0x+2 \quad (3) \quad 0x-2 \quad (4) \quad 2x-0$$

$$p(x) = (x^2-2)Q_1(x) + (x+2) \Rightarrow p(2) = 2+2 = 4$$

$$p(x) = (x^2-9)Q_2(x) + (2x+1) \Rightarrow p(3) = 6 \times 2 + 1 = 13$$

$$p(x) = (x^2-5x+6)Q_3(x) + (ax+b) = (x-2)(x-3)Q_3(x) + (ax+b)$$



$$p(2) = (2-2)(2-4)Q(2) + (a(2)+b) = 1 \Rightarrow 2a+b=1$$

$$p(4) = (4-2)(4-4)Q(4) + (a(4)+b) = 14 \rightarrow 2a+b=14$$

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a+b=14 \end{cases} \rightarrow 10+b=1 \rightarrow b=-9$$

$$a=0$$

$$R(n) = 0n - 9$$

گزین ۳ :

مثال: اگر باقی مانده تقسیم $f(n)$ بر $(n-1)(n-4)$ برابر $2n+5$ باشد، باقی مانده تقسیم $f(n)$ بر $n-3$ را بیابید.

$$f(n) = (n-1)(n-4)Q(n) + (2n+5)$$

$$n-4=0 \rightarrow n=4 \rightarrow f(4) = R$$

$$f(4) = (4-1)(4-4)Q(4) + (4+5) = 11 = R$$

نکته: اگر یک چندجمله‌ای بر حاصلضرب چند چندجمله‌ای بخش‌پذیر باشد، بر هر یک از این

چندجمله‌ای‌ها هم بخش‌پذیر خواهد بود.

مثال: اگر چندجمله‌ای $P(x) = x^5 + mx^2 + nx + 42$ بر $x^2 - 4$ بخش‌پذیر باشد، m, n را بیابید.

پس طبق نکته چون P بر $(x-2)(x+2)$ بخش‌پذیر است پس هم بر $x+2$ بخش‌پذیر

است هم بر $x-2$. **ارائه به عنوان تمرین.**

روش دیگر برای یافتن باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه ۲

این روش را با حل یک مثال توضیح می‌دهیم.

می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^5 + 4x^2 + 5x - 1$ را بر $x^2 - 1$ بیابیم.

مرحله اول: مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم: $x^2 = 1 \rightarrow x^2 - 1 = 0$

مرحله دوم: مقسوم را بر حسب x^2 مرتب می‌کنیم: $x^5 + 4x^2 + 5x - 1$

مرحله سوم: جای x^2 مقدارش را در مقسوم می‌نذاریم تا باقی‌مانده بدست آید:



$$R = 1 \times n + 4(1) + 0 \times 1 - 1 = n + 4 + 0 - 1 = n + 3$$

تذکره: گاهی اوقات نیاز است بر حسب نوع، ضرایب تکرار شود.

مثال: تکنیک ریاضی خارج ۴

اگر عبارت $n^4 + an^3 - bn + c$ بر $(n-1)^2$ بخش پذیر باشد، a و b کماست؟

$$n^4 \quad n^3 \quad n^2 \quad n \quad 1$$

$$(n-1)^2 = 0 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \rightarrow n^2 = 2n - 1$$

$$(n^4)^2 + an^3 - bn + c \Big|_{n^2=2n-1} = (2n-1)^2 + a(2n-1) - bn + c$$

$$= 4n^2 - 4n + 1 + 2an - a - bn + c \Big|_{n^2=2n-1}$$

$$= 4(2n-1) - 4n + 2an - a - bn + c = \underline{8n - 4} - \underline{4n} + 2an - a - bn + c =$$

$$= 4n + 2an - bn - a + 1 = n(4 + 2a - b) - a + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 4 + 2a - b = 0 \\ -a + 1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases} \quad 4 + 2 - b = 0 \rightarrow b = 6 \quad \text{پس } a=1, b=6$$

موضوعی چندرکاتر جدید :

در سال های گذشته با رکتاد و جمع رکتاد چان رلا نر اشنا سدر :

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$x^n \pm y^n = (x \pm y)(x^{n-1} \mp xy + y^{n-1})$$

می خردیم رکتادهای فرد ابرای توان های بهتر از ۳، تعمیم دهیم :

۱) تعمیم $x^n - y^n$ بر $x - y$:

$$x - y = 0 \rightarrow x = y \rightarrow p(y) = y^n - y^n = 0 = R$$

پس $x^n - y^n$ همواره بر $x - y$ بخش پذیر است.

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}$$

۲) تعمیم $x^n - y^n$ بر $x + y$:

$$x + y = 0 \rightarrow x = -y \rightarrow p(-y) = (-y)^n - y^n \stackrel{n \text{ زوج}}{=} y^n - y^n = 0$$

پس $x^n - y^n$ برای n های زوج بر $x+y$ بخش پذیر است.

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + x y^{n-2} - y^{n-1}) : n=2k$$

۳) تقسیم $x^n + y^n$ بر $x+y$:

$$x+y=0 \rightarrow x=-y \rightarrow p(-y) = (-y)^n + y^n$$

پس $x^n + y^n$ برای n های فرد بر $x+y$ بخش پذیر است.

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - x y^{n-2} + y^{n-1}) : n=2k+1$$

سوال: تحت چه شرایطی برای n ، $x^n + y^n$ بر $x-y$ بخش پذیر است؟

$$x-y=0 \rightarrow x=y \rightarrow p(y) = y^n + y^n \neq 0$$

هیچگاه $x^n + y^n$ بر $x-y$ بخش پذیر نیست.

مثال: کسرهای زیر را ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = x+1$$



$$\frac{(1-t+t^2-t^3+t^4)(1+t)}{1-t^5} = \frac{1+t^0}{1-t^1}$$

$$= \frac{1+t^0}{(1-t^0)(1+t^0)} = \frac{1}{1-t^0}$$

$$\frac{(7+1)(0^9+0^8+0^7+\dots+1)}{(0^{10}-1)(4^8-4^7+4^6-\dots+1)}$$

$$7^9+1 = (7+1)(7^8-7^7+7^6-\dots+1)$$

$$0^{10}-1 = (0-1)(0^9+0^8+\dots+1)$$

$$\text{جواب} = \frac{(7+1)(7^8-7^7+\dots+1)(0^9+0^8+\dots+1)}{(0-1)(0^9+0^8+\dots+1)(7^8-7^7+\dots+1)}$$

$$= \frac{7}{-1}$$

سؤال: اگر $f(x) = \frac{x^8-1}{(x^4+x)(x^4-x^2+x^2-1)}$ ، مقدار $f(-\frac{1}{x})$ کدام است؟

1) $-\frac{1}{x}$ 2) $-\frac{1}{x^2}$ 3) $-\frac{1}{x^4}$ 4) $-\frac{1}{x^8}$

$$\text{پاسخ} = x(x^4+1) \underbrace{((x^4)^4 - (x^4)^2 + x^2 - 1)}_{\text{جان}} = x((x^4)^4 - 1) = x(x^{16}-1)$$



$$f(x) = \frac{x^{\cancel{1}} - 1}{x(x^{\cancel{1}} - 1)} = \frac{1}{x}$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2} \quad \text{نیز}$$

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

محل رسم: ششگ

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت اول: تناوب

جلسه اول: صفحات ۲۴ و ۲۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع متناوب :

اگر در تابعی برای هر مقدار از دامنه تابع، تساوی $f(x+\tau) = f(x)$ برقرار باشد،

حقی اضافه کردن τ ، اثری روی مقدار تابع نداشته باشد، می‌گوییم f متناوب است.

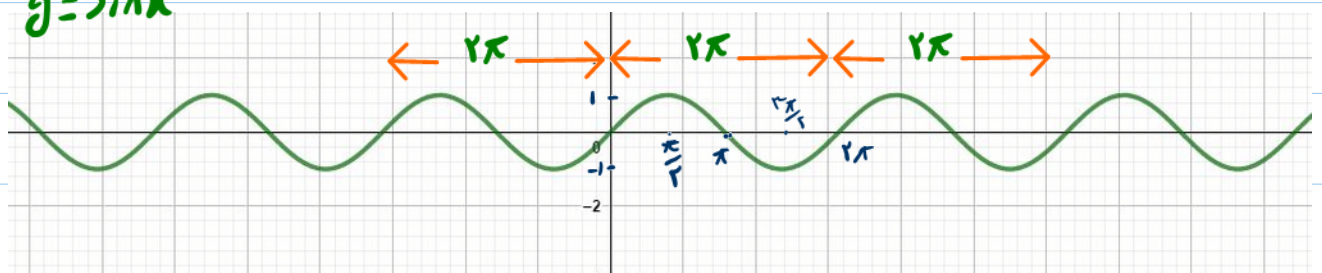
به کوچک‌ترین مقدار مثبت τ دوره متناوب می‌گوئیم.

به عبارت دیگر در توابع متناوب، قسمتی از نمودار در حال تکرار شدن است. به کوچک‌ترین

اندازه انفع این قسمت تکرار شونده دوره متناوب می‌گوئیم.

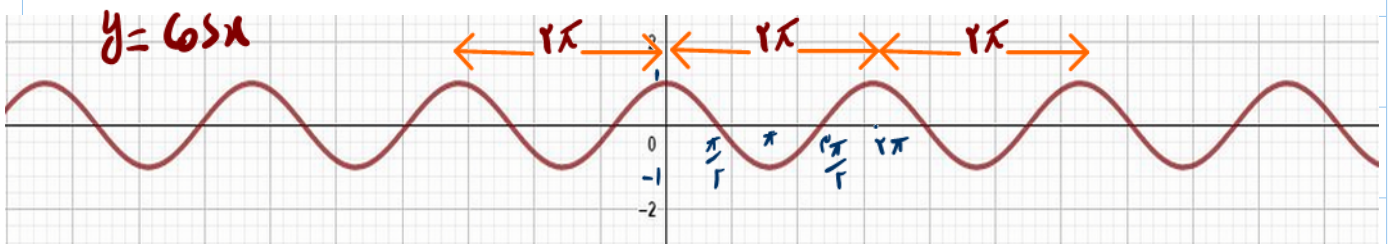
مثال: دوره متناوب توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را بیابید.

$$y = \sin x$$



$$\tau = 2\pi$$

$$y = \cos x$$



$$\tau = 2\pi$$

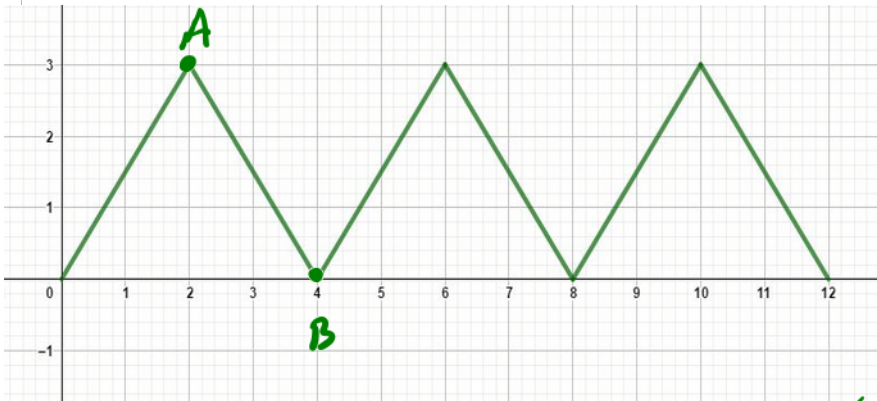


نکته: اگر f تابع متناوب با دوره تناوب T باشد، اضافه یا کم کردن مقدار T به x مقدار $f(x)$ را تغییر نمی دهد:

$$f(x + kT) = f(x)$$

مثال: اگر قسمتی از نمودار تابع f به شکل زیر باشد، $f(1399)$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{3}{4} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) \frac{5}{4}$$



$$T = 4$$

باید مغربی از ۴ را به ۱۳۹۹ اضافه یا کم کنیم تا قدری بین ۰ تا ۴ بدست آید.

$$f(1399) = f(1399 + (-349) \cdot 4) = f(1399 - 1396) = f(3)$$

$$\text{خط } AB : A(2,3), B(4,0) \quad m = \frac{0-3}{4-2} = -\frac{3}{2}$$

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$f(3) = -\frac{3}{2}(3) + 6 = -\frac{9}{2} + 6 = \frac{3}{2} \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال: ضابطه تابع مشابه f در بازه (a, b) به صورت $f(x) = k$ است. اگر دوره مشابه

تابع برابر k باشد، $f(-5, 4) = k$ کدام است؟

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$

گزینه ۱ $f(-5, 4) = f(-5, 4 + 4(1)) = f(1, 4) = \sqrt{16} = 4$

نکته: اگر دوره مشابه $f(x)$ برابر T باشد، دوره مشابه $af(bx+c)+d$

برابر $\frac{T}{|a|}$ است. یعنی برای y به دوره مشابه فقط به ضرب x توسط a توجه کنید.

سایر ضرایب و انتقال‌ها اثری روی دوره مشابه ندارند.

مثال: دوره مشابه $y = 2f(4x-1)+4$ برابر ۲ است. دوره مشابه $g(x) = -f(2x)-1$

را بیابید. $y: 2 = \frac{T_f}{4} \Rightarrow T_f = 8$

$g: T_g = \frac{T_f}{2} = \frac{8}{2} = 4$



نتیجه: دوره شادب توابع $y = a \sin(bx+c)+d$, $y = a \cos(bx+c)+d$

برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال: اگر دوره شادب تابع $f(x) = k \cos(kx) + 3$ برابر π باشد، مقدار $f(0)$

کدام است؟ ۱۱ ۱۲ ۷ ۵ ۴

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{1} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k\pi = 2\pi \rightarrow k = 2$$

گزینه ۱ $f(x) = 2 \cos 2x + 3 \Rightarrow f(0) = 2 \cos(2 \times 0) + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$

نکته: گاهی اوقات لازم است با استفاده از روابط بین این‌ها مشتق، تابع را ساده

آحاد امکان ساده کنیم، پس دوره شادب را می‌سپاریم.

مثال: دوره شادب تابع $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) 2π

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x (1 - \tan^2 x) = \cos^2 x \cos 2x$$



یادآوری: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cos x$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

یادآوری: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2x$$

گزینه ۲
 $T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{\pi}{2}$

مثال: اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \sqrt{2} \cos^2(mx - \frac{\pi}{2})$ برابر $\frac{3\pi}{2}$ باشد، مقدار m کدام

می‌تواند باشد؟

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{ک}$$

$$\frac{\pi}{3} \quad \text{ب}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{د}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{ا}$$

$$f(x) = \sqrt{2} \times \frac{1 + \cos 2(mx - \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \cos(2mx - \pi))$$

گزینه ۱

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{|2m|} \Rightarrow 2\pi|m| = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |m| = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{3}$$



نکته: دوره شادب. تابع $y = \tan x$, $y = \cot x$ برای $T = \frac{\pi}{|a|}$

مثال: دوره شادب. تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ کجاست؟

$$\frac{\pi}{2} \quad \pi \quad 2\pi \quad 3\pi$$

$$f(x) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \quad \text{نیز}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت دوم: بررسی توابع مثلثاتی با

ضابطه $y = asinbx + c$ یا

$y = acosbx + c$

جلسه دوم: صفحات ۲۶ تا ۲۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

بررسی توابع مشتقات به صورت $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$

پارامتر a بهشت انبساط یا انقباض عمودی تابع سینوس و کسینوس و c بهشت انتقال عمودی

رابطه هم در حد پس مقادیر ماکزیمم و مینیمم این گونه توابع عبارتند از:

$$y_{\max} = |a| + c \quad y_{\min} = -|a| + c$$

در درس قبلی هم دیدیم پارامتر a که بهشت انبساط یا انقباض افقی می شود در دوره ثابت

$$\text{مژرات} \quad T = \frac{2\pi}{|b|}$$

مثال: مقادیر $\max$, $\min$ و دوره ثابت توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف) } y = 4 - \cos\left(\frac{1}{8}x\right) \quad T = \frac{2\pi}{\frac{1}{8}} = 16\pi$$

$$y_{\max} = 1 - 1 + 4 = 1 + 4 = 5 \quad y_{\min} = -1 - 1 + 4 = -1 + 4 = 3$$

$$\text{ب) } y = -2 \sin(\pi x) + \sqrt{3} \quad T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$y_{\max} = 1 - 2 + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} \quad y_{\min} = -1 - 2 + \sqrt{3} = -3 + \sqrt{3}$$

نکته: اگر نمودار تابع به صورت $y = a \sin bx + c$ یا $y = a \cos bx + c$

باشد، برای بدست آوردن ضابطه تابع غنی یا فاش یا دامنه ها a, b, c و تشخیص

سنوپی و کسنوپی بودن تابع به صورت زیر عمل می کنیم:

(۱) اگر معده y از $\max$ یا $\min$ نمودار عبور کند تابع کسنوپی است در غیر این صورت سنوپی است.

(۲) با جمع و کم کردن روابط گفته شده برای مقادیر $\max$ و $\min$ داریم ..

$$y_{\max} = |a| + c \quad + \Rightarrow y_{\max} + y_{\min} = 2c \Rightarrow c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$$

$$y_{\min} = -|a| + c$$

$$\Rightarrow y_{\max} - y_{\min} = 2|a| \Rightarrow |a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$$

(۳) برای یافتن b از دوره شتاب یک می گیریم $(T = \frac{2\pi}{|b|})$

(۴) برای تشخیص علامت a و b این گونه عمل می کنیم:

الف- در توابع سنوپی اگر نمودار بعد $x=0$ روند صعودی داشته باشد، a و b هم علامت

هستند غنی: $a \times b > 0$

و اگر نمودار عبور $n=0$ روند نزولی داشته باشد، a و b هر دو هم علامت اند یعنی: $a \times b < 0$

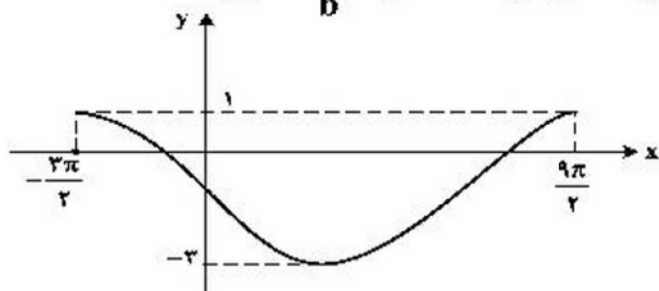
ب- در توابع گسری اگر نمودار، روی محور y ها، ماکزیمم داشته باشد $a > 0$ است

و اگر مینیمم داشته باشد $a < 0$ است.

با توجه به رابطه $\cos(-x) = \cos x$ ، b می تواند مثبت یا منفی باشد.

مثال: گسری 49 بچوب:

شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟



(1) -2

(2) -3

(3) -4

(4) -6

$$T = \frac{9\pi}{2} - (-\frac{3\pi}{2}) = \frac{12\pi}{2} = 6\pi \Rightarrow 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

$$|a| = \frac{1 - (-3)}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

چون عبور $n=0$ بهنج نزول است پس $a < 0$ و در حالت داریم:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} : \frac{a}{b} = \frac{-2}{\frac{1}{3}} = -6$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} : \frac{a}{b} = \frac{2}{-\frac{1}{3}} = -6$$

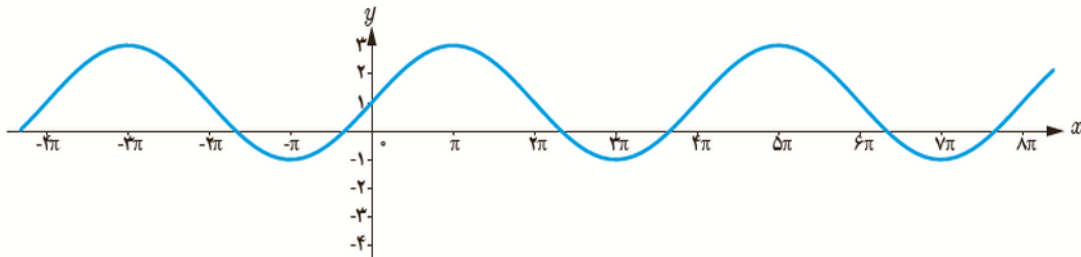
گزینه ۴



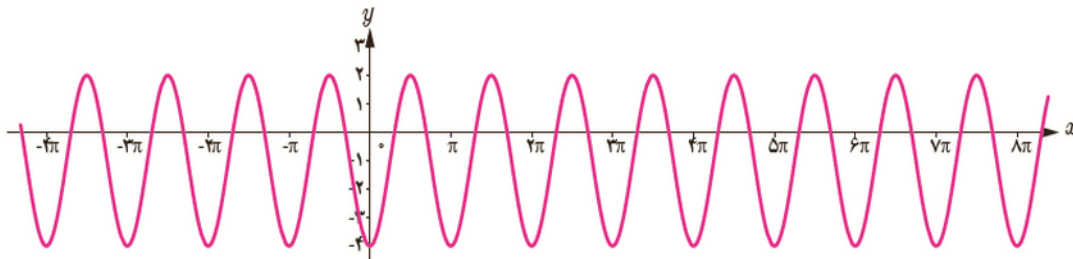
مثال: ضابطه توابع زیر به صورت $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$

ضابطه آنها را مشخص کنید.

الف)



ب)



تابع سینوسی است $T = 8\pi \Rightarrow 8\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{4}$

$$|a| = \frac{3 - (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad c = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

بعد $x=0$ تابع در نقطه صوری دارد پس $a > 0$

ضابطه تابع: $y = 2 \sin \frac{1}{4} x + 1$ و $y = -2 \sin(-\frac{1}{4} x) + 1$

ب) $T = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$

تابع کسینوس

$$|a| = \frac{3 - (-2)}{2} = \frac{5}{2} = 2.5, \quad c = \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$



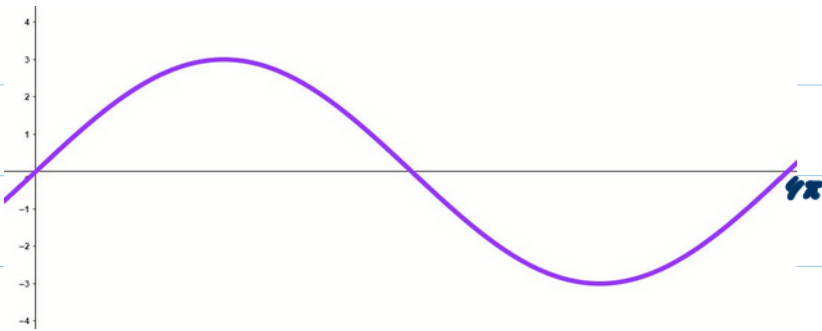
چون معرر و هاز $\min$ می نذر پس $a < 0$ یعنی $a = -4$ است:

$$y = -4 \cos(2x) - 1 \quad \text{یا} \quad y = -4 \cos 2x - 1$$

ضبطه تابع

مثال: شکل زیر مندرج تابع $f(x) = a \sin bx$ است. مقدار ab کدام است؟

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4



$$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi |b| = 2\pi \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$|a| = \frac{2 - (-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

عبارت $a = 0$ و $b = 0$ در تابع معرر است پس $ab > 0$ است:

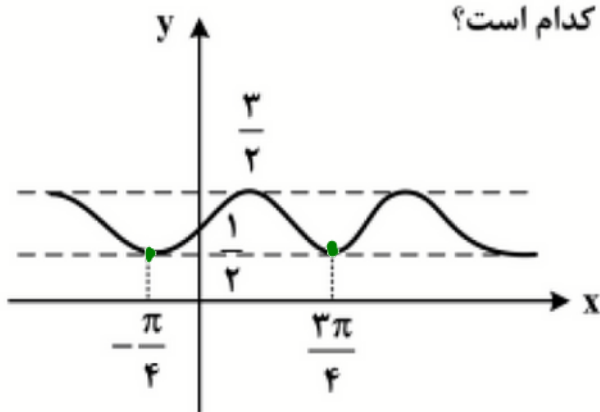
$$a = 2, b = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$a = -2, b = -\frac{1}{2} \Rightarrow ab = -2 \times (-\frac{1}{2}) = 1$$

گزینه ۱

مثال: کنکور سراسری ۹۸ ریاضی:

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. کدام $a + b$ است؟



(۱) ۱

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۲

(۴) ۳

معرف دوره تناوب $\sin$ مزدی

$$y = 1 + a \sin bx \cos bx = 1 + \frac{1}{2} a \sin 2bx$$

$$T = \frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{4\pi}{4} = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow \pi |b| = \pi \Rightarrow |b| = 1$$

$$|\frac{1}{2}a| = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

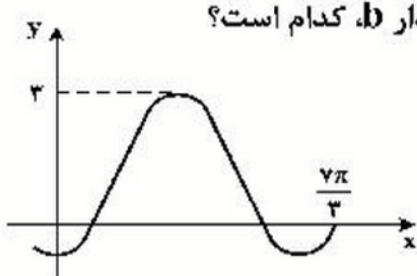
ه‌ا از $n=0$ رنده تابع ه‌ا است $a > 0$ است:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \quad a+b=2, \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \quad a+b=-2$$

گزین ۴

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجرب

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(\frac{\pi}{4} + x)$ است. مقدار b ، کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۲

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{r} + x\right) = a + b \cos x$$

$$y_{\max} = 4 = |b| + a$$

چون موجها از min خبر برده است پس $b < 0$: (1) $a - b = 4$

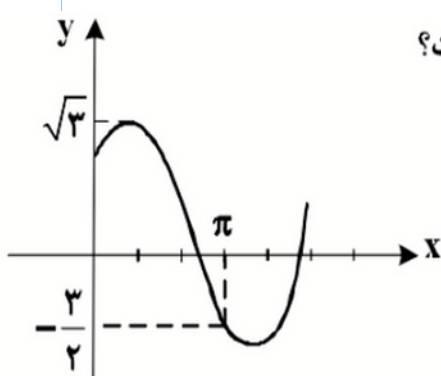
$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{r}}, 0\right) \xrightarrow{\text{ریشه}} 0 = a + b \cos \sqrt{\frac{\pi}{r}} \Rightarrow 0 = a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{r}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{r} \Rightarrow 0 = a + b \times \frac{1}{r} \Rightarrow a + \frac{b}{r} = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 4 \\ a + \frac{b}{r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{r} = -4 \Rightarrow \frac{b}{2} = -4$$

$$\Rightarrow b = -8 \quad \text{نیز}$$

مثال: نمودار سری ۹۸ تری:



شکل روبه رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. b کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$y_{\max} = |b| + a \Rightarrow |b| + a = \sqrt{4}$$

چون تابع معبر از $n=0$ در نزد محور دار پس b با یک (ضرب n) هم‌علامت و مثبت است.

$$a+b=\sqrt{3} \quad (1)$$

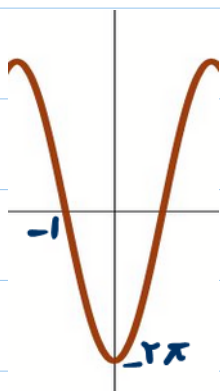
$$\left(\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \xrightarrow{\text{نقطه}} -\frac{\sqrt{3}}{2} = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=\sqrt{3} \\ a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow b + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3} \quad \text{گزینه ۳}$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = a \cos x$ به صورت زیر است. $f\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟



$$(1) \sqrt{2}\pi \quad (2) -\sqrt{2}\pi \quad (3) \sqrt{\frac{1}{2}}\pi \quad (4) -\sqrt{\frac{1}{2}}\pi$$

$$y_{\min} = -|a| + 0 = -2\pi \Rightarrow |a| = 2\pi$$

چون محور y ها از $\min$ عبور کرده پس $a < 0$ است:

$$\Rightarrow -a = 2\pi \Rightarrow a = -2\pi$$

چون $f(-1) = 0$:

$$a = -2\pi \cos(-b) \Rightarrow \cos(-b) = 0 \Rightarrow -b = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$$

ادین نقطه‌ای که تابع $\cos$ قبل از $n=0$ برابر خری شود $-\frac{\pi}{2}$ است.

$$f(x) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} = -2\pi \times \sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}\pi$$

گزینه ۲

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت سوم: تانژانت

جلسه سوم: صفحات ۲۹ تا ۳۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تأثیرات در دایره مثلثاتی :

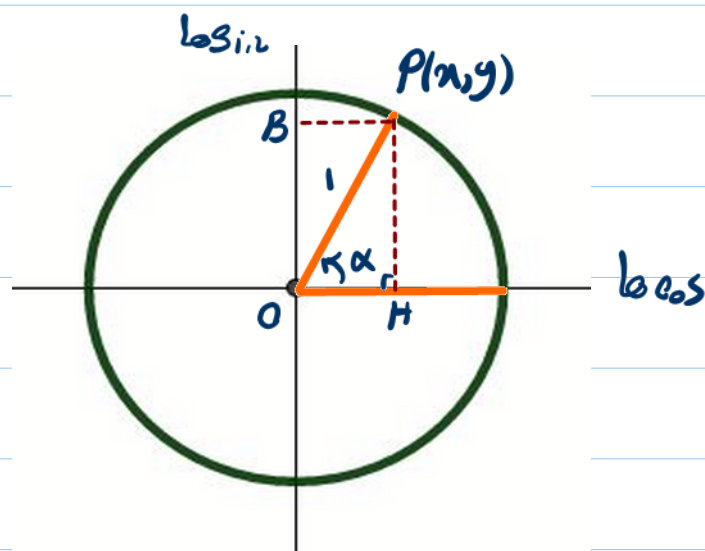
یادآوری : دایره مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدأ مختصات است.

ضلع ابتدای هر زاویه در دایره مثلثاتی، بر قسمت مثبت محور x ها واقع است.

اگر اندازه زاویه $\alpha > 0$ باشد به اندازه α در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

دوران می‌کنیم و اگر $\alpha < 0$ باشد به اندازه α در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخیم.

اگر ضلع انتهایی زاویه محیط دایره را در نقطه $P(x, y)$ قطع کند داریم :



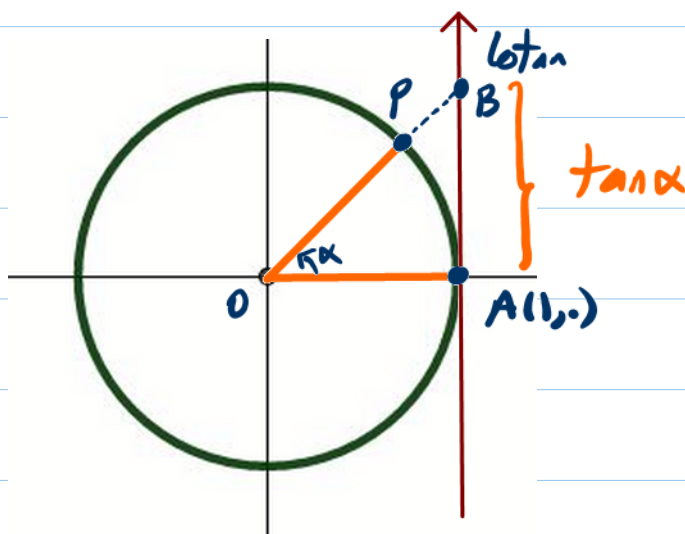
$$\triangle OHP : \sin \alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{PH}{1} \Rightarrow \sin \alpha = PH = BO \Rightarrow y_P = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{OH}{1} \Rightarrow \cos \alpha = OH \Rightarrow x_P = \cos \alpha$$

معدرات تارانت ها را مولزی معدر سینوس ها و کسینوس ها را بر دایره ارتفاع $A(1,0)$

در نظریه گریم. بعد از این معدر $A(1,0)$ است و جهت مثبت آن مانند محور سینوس ها است.

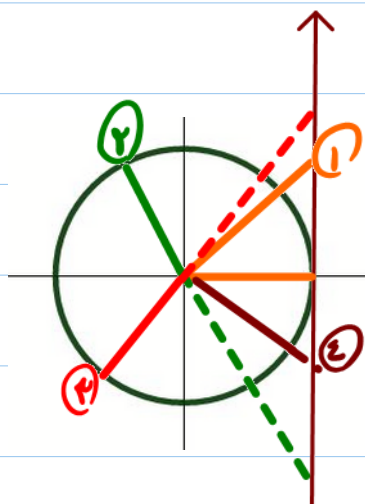
یعنی برای A تارانت مثبت و پائین A تارانت منفی است.



اگر شعاع OP را امتداد دهیم، محور تارانت ها در B قطع می کند.

$$\triangle OAB : \tan \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} \Rightarrow \tan \alpha = AB$$

نوم: کسینوس تارانت در نواحی چهارگانه به صورت زیر است:

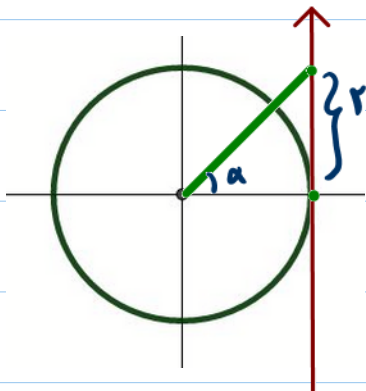


	اول	دوم	سوم	چهارم
$\tan$	+	-	+	-

نکته: در زاویه های $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و بجز یکی در مقابل و در $\frac{\pi}{4}$ ، هر دو مقدار

هم مقدار تناظر است هارا قطع نمی کند. در این زاویه ها تناظر است تعریف نشده است.

مثال: در شکل زیر $\cos \alpha$ کدام است؟

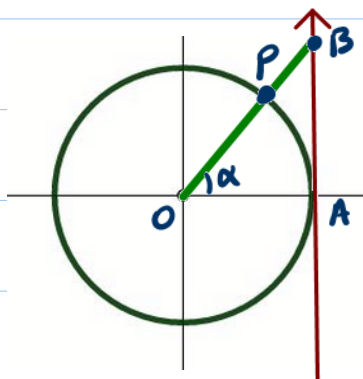


۱ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۲ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۳ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۴ $\frac{\sqrt{5}}{1}$

$$\tan \alpha = 2, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{مثبت}} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال: با توجه به داده شده های قبلی، اگر $P(2a-1, a)$ باشد، مساحت مثلث AOB چقدر است؟



۱ $\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{5}{4}$ ۳ $\frac{2}{8}$ ۴ $\frac{1}{2}$

$$x_p = 2a - 1 = \cos \alpha$$

$$y_p = a = \sin \alpha$$



$$\sin \alpha + \cos \alpha = 1 \Rightarrow a^r + (r a - 1)^r = 1 \Rightarrow a^r + r^2 a^r - r a + 1 - 1 = 0$$

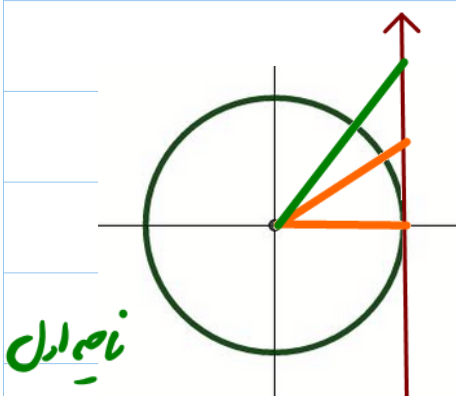
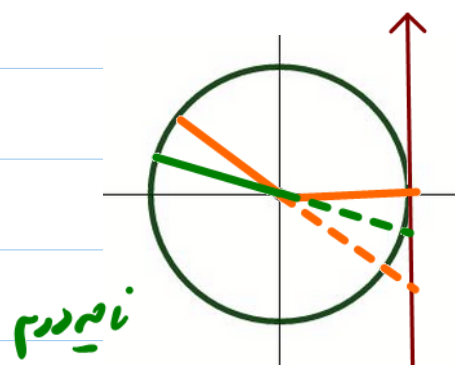
$$a a^r - r a = 0 \Rightarrow a(5a - r) = 0 \begin{cases} a = 0 \text{ } \vec{00} \\ 5a - r = 0 \rightarrow a = \frac{r}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{r}{5} \\ \cos \alpha = r \times \frac{r}{5} - 1 = \frac{r}{5} - 1 = \frac{r}{5} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{r}{5}}{\frac{r}{5}} = \frac{r}{r} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{r}{r} = AB$$

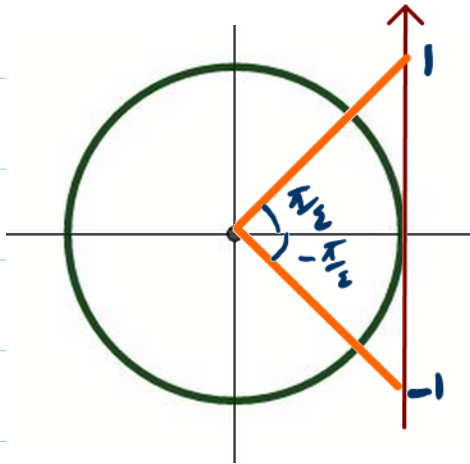
$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times AB = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{r}{r} = \frac{r}{r} \quad \text{گزینه ۲}$$

نکته: در تمامی نواحی چهارگانه با افزایش زاویه، مقدار تانژانت هم افزایش می‌یابد.



برای نواحی سوم و چهارم به صورت مشابه عمل کنید.

مثال: اگر $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ و $\tan \alpha = \frac{r_m - r}{\delta}$ باشد، محدوده m را بیابید.



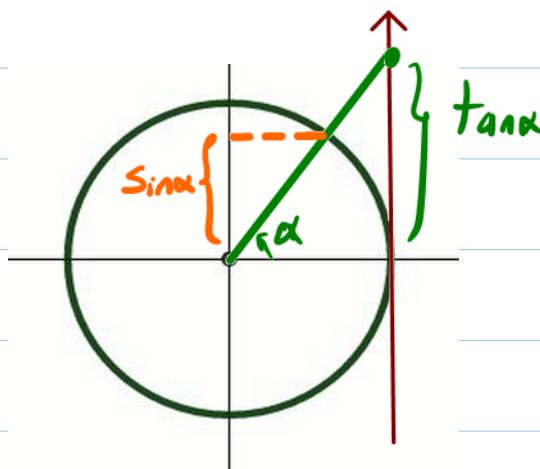
$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-1 \leq \tan \alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{r_m - r}{\delta} \leq 1 \quad \times \delta \Rightarrow -\delta \leq r_m - r \leq \delta$$

$$\stackrel{+r}{\Rightarrow} -1 \leq r_m \leq 1 \quad \stackrel{+r}{\Rightarrow} -1 \leq m \leq 1$$

نکته: بار شماره از دایره بیشتر می‌توان گفت: $|\sin \alpha| < |\tan \alpha|$



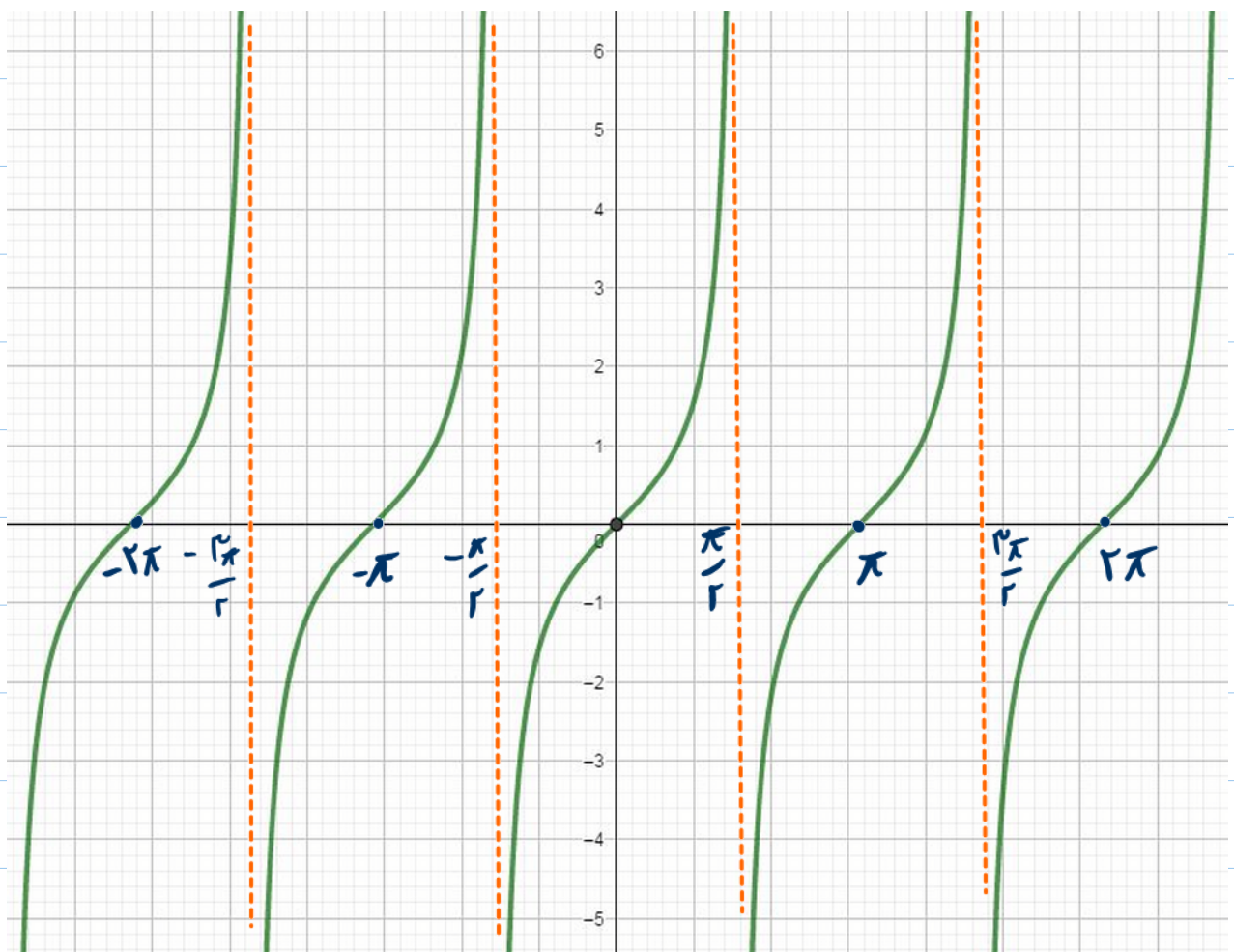
تابع تانژانت

اگر n عددی حقیقی باشد و $n \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، تابعی که به عدد n تانژانت n رانیت

$$n \neq (k+1)\frac{\pi}{2}$$

ی دهد تابع تانژانت نامیده می شود.

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \tan x$ با دنبال کردن روی داده مشخصات زیر به نمودار زیر رسم:



پس درباره تابع $f(x) = \tan x$ می توان گفت :

۱- $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

۲- $R_f = \mathbb{R}$

۳- تابع تناظر است، تابع مشابه است و $T = \pi$

۴- تابع تناظر است زیرا است ولی درباره های که در آن ترف می شود یعنی بازه های

که شامل $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ها نیستند، اکیداً ممنوع است.

تذکر: در مشابه تابع $y = a \tan(bx + c) + d$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2})$ می باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} \quad (1) \quad x \neq k \quad (2) \quad x \neq 2k+1 \quad (3) \quad x \neq 2k$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi$$

$$\times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq k\pi \times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq 2k$$

گزینه ۲



مثال: اگر $f(x) = \tan x - \frac{1}{\tan x}$ ، دوره شادب-تج $\frac{1}{f}$ ، را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x}$$

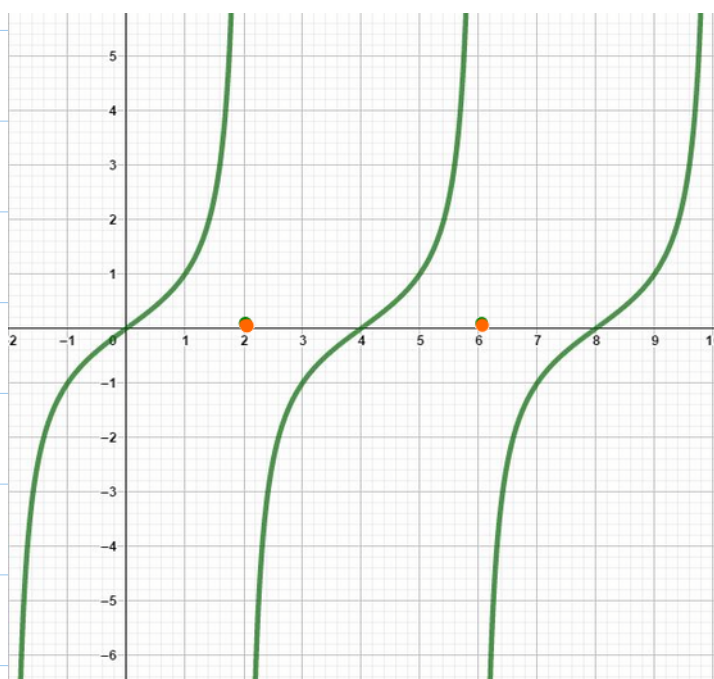
$$= -2 \cot 2x = -\frac{2}{\tan 2x}$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{2} \tan 2x \Rightarrow T_{\frac{1}{f}} = \frac{\pi}{2}$$

مثال: تج f با ضابطه $f(x) = \tan(\frac{\pi}{4}x)$ و دامنه $(2, 8)$ روی دایره نشان دهید.

حد اکثر مقدار a کدام است؟ ۱۱ ۳ ۱۲ ۴ ۱۳ ۶ ۱۴ ۸

باید طول تمام نقاط بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم یا در $\frac{\pi}{4}$ ضرب شود:



حد اکثر مقدار برای a به جابجایی

تج در دایره $(2, 8)$ ایده آلودی

بسته ۶ است پس گزینه ۳ درست است.

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

قسمت اول: معادلات سینوسی و کسینوسی

جلسه چهارم: صفحات ۳۵ تا ۴۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

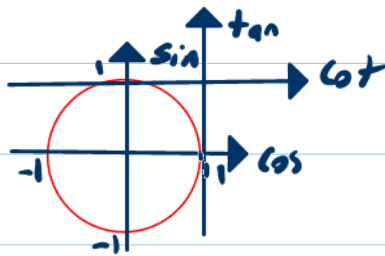
گروه ریاضی
استان همدان



یادآوری:

۱۱ جدول ششای ششای زوای معروف:

	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$	∞	۰	∞	۰
cot	∞	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰	∞	۰	∞



۱۲ جدول علامت ششای ششای:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

۱۳ ششای ششای زاویه (-α)

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$



۴) دوزادیه متمم : α, β متمم اند $\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{90^\circ}$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \sin \beta = \cos \alpha$$

$$\tan \alpha = \cot \beta, \quad \tan \beta = \cot \alpha$$

مثال: $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵) نسبت های مثلثاتی $\xrightarrow{\infty \mathbb{Z}}$ $(k\pi \pm \alpha)$

۱) اگر ضرب π طوری زوج باشد از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می کنیم.

$$\sin(k\pi \pm \alpha) = \sin(\pm \alpha)$$

$$\cos(k\pi \pm \alpha) = \cos(\pm \alpha)$$

۲) اگر ضرب π طوری فرد باشد از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می کنیم اما نسبت مثلثاتی را قرونوس می کنیم.

$$\sin((2k+1)\pi \pm \alpha) = -\sin(\pm \alpha)$$

$$\cos((2k+1)\pi \pm \alpha) = -\cos(\pm \alpha)$$

۳) ضرب π چه زوج و چه فرد باشد از کمان های $\tan$ و $\cot$ حذف می کنیم.

$$\tan(k\pi \pm \alpha) = \tan(\pm \alpha)$$

$$\cot(k\pi \pm \alpha) = \cot(\pm \alpha)$$

۶) نسبت های مثلثاتی $\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha \right)$ ^{مغرب وز $\frac{\pi}{2}$}

همیشه فرض می کنیم α حاده است و ناحیه ای که زاویه $\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha \right)$ در آن

است را مشخص می کنیم و علامت نسبت را مشخص می دهیم. حال مغرب وز

$\frac{\pi}{2}$ را حذف کرده و اسم نسبت را به صورت زیر بخیر می دهیم

$\sin \rightarrow \cos$, $\cos \rightarrow \sin$, $\tan \rightarrow \cot$, $\cot \rightarrow \tan$

$$\sin\left(\cancel{(2k+1)}\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \sin^{\text{وس}} \cos \alpha$$

$$\cos\left(\cancel{(2k+1)}\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos^{\text{وس}} \sin \alpha$$

$$\tan\left(\cancel{(2k+1)}\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \tan^{\text{وس}} \cot \alpha$$

$$\cot\left(\cancel{(2k+1)}\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cot^{\text{وس}} \tan \alpha$$

مثال: بسترهای مثلثاتی زیر را بر حسب α بنویسید.

$$1) \sin^{\text{وز}}(185\pi - \alpha) = \overbrace{-\sin}^{-\sin \alpha}(-\alpha) = \sin \alpha$$

$$2) \cos^{\text{وز}}(33\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

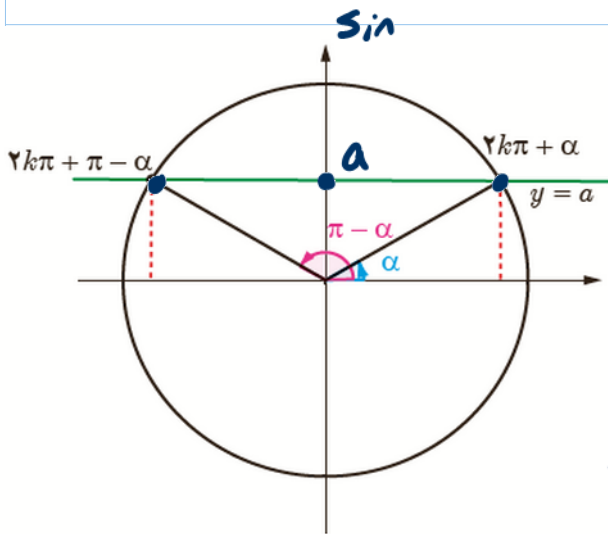
$$3) \cos^{\text{ز.د.}}(24\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$4) \sin^{\text{مغرب وز $\frac{\pi}{2}$ }}\left(\frac{20\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{20\pi + \pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\cancel{12\pi} + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha$$

به معادلاتی که مجهول در کنار سینوس قرار می گیرد، معادله سینوسی می نویسند.

روش شعوری حل معادله $\sin x = a$:

مکمل $\alpha + \beta = \pi \rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$



روی محور $\sin$ مقدار a را مشخص و از این

نقطه خطی بر محور $\sin$ عمودی کنیم تا دایره

سینوسی را قطع کند. نقطه برخورد همدو را جواب

مورد نظر است. البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی x ، جواب کلی معادله است.

نتیجه :

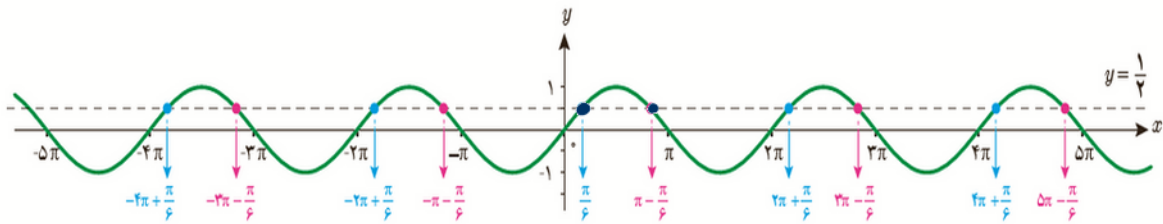
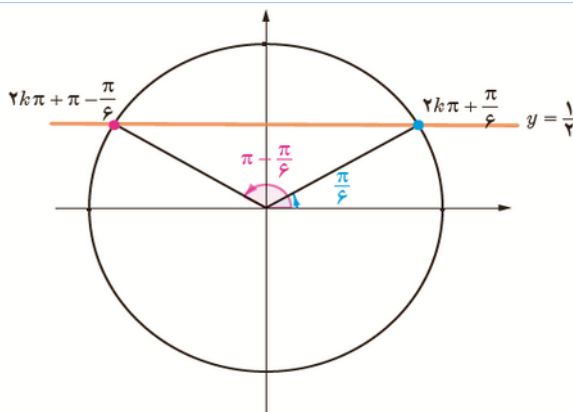
$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

قسمت $\rightarrow \sin 0 = \sin \square \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2k\pi + \square \\ 0 = 2k\pi + (\pi - \square) \end{cases}$

نکته مهم : اگر معادله به صورت استاندارد گفته شده هنوز، باید از روابط این سه تایی سینوسی و جیبی

عبارة و در صورت لزوم آخر متر استفاده کرده و به شکل $\sin \alpha \leq \sin \alpha$ یا $\cos \alpha \leq \cos \alpha$ برسیم.

مثال: چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است مثال بزنید.



$$\sin x = \frac{1}{4} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

ب) $4 \sin x + \sqrt{11} = 0$

الف) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

الف) $2 \sin x = \sqrt{3} \xrightarrow{\div 2} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

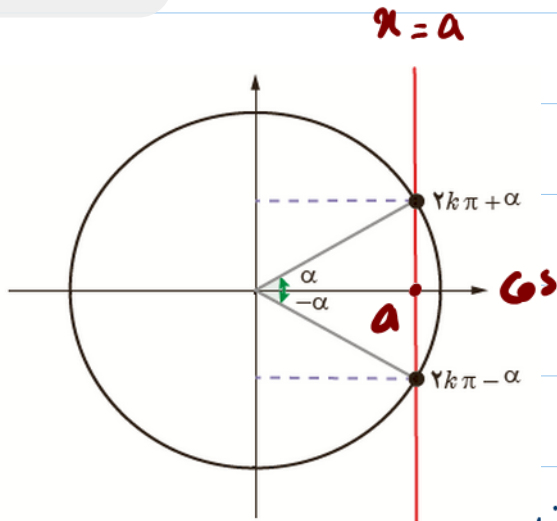
ب) $4 \sin x = -\sqrt{11} \xrightarrow{\div 4} \sin x = -\frac{\sqrt{11}}{4} = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{4}) = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

روش شهري حل معادله $\cos x = a$:



روی محور $\cos$ مقدار a را انتخاب و از این نقطه

خطی بر محور $\cos$ عمودی کنیم تا دایره میانه

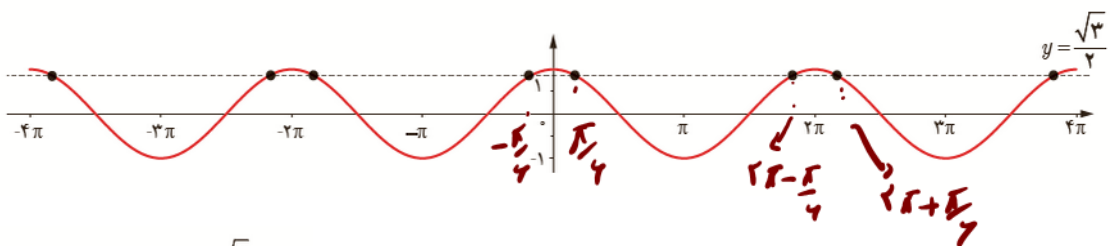
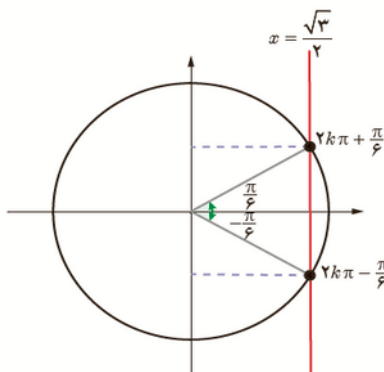
را قطع کند. نقطه بر دایره a یا جواب مدبر خط خواهد بود.

نتیجه:

$$\cos x = \cos a \Rightarrow x = 2k\pi \pm a$$

مثلاً $\cos 0 = \cos \square \Rightarrow 0 = 2k\pi \pm \square$

مثال: چند زاویه که مقدار کسینوس آنها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است مثال بزنید.



$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{جواب عمومی (مکمل)}$$

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{3}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

$$\cos x = \frac{1}{3} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

k	-1	0
x	$-2\pi \pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{3}$

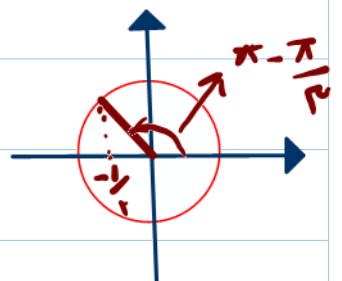
مثال: معادله مثلثاتی $\cos x (2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید

$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$$

$$\Delta = 81 - (4 \times 2 \times (-5)) = 81 + 40 = 121$$

$$\cos x = \frac{9 \pm 11}{4} \begin{cases} \frac{9+11}{4} = 5 \quad \times \\ \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2} \quad \checkmark \end{cases} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

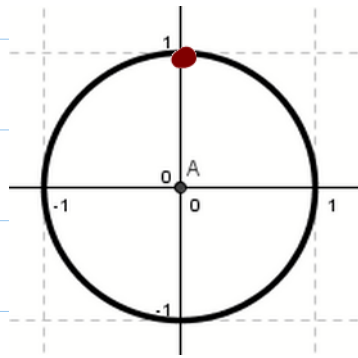


$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$



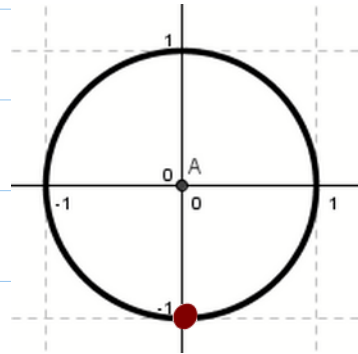
مقادیر خاص :

$$\sin \alpha = 1$$



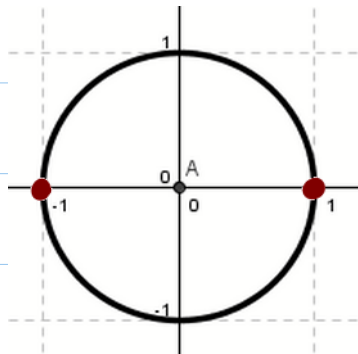
$$\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha = -1$$



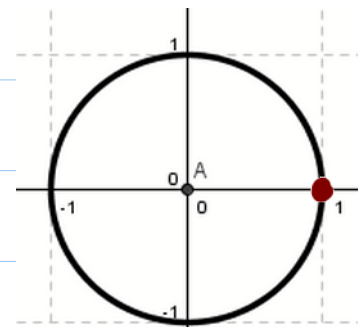
$$\alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha = 0$$



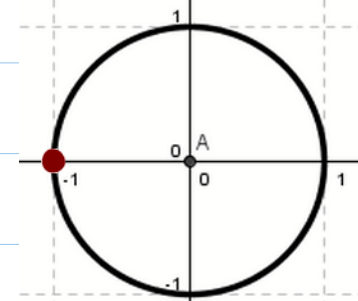
$$\alpha = k\pi$$

$$\cos \alpha = 1$$



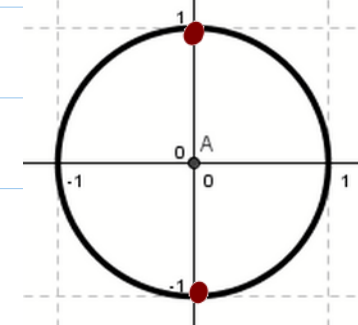
$$\alpha = 2k\pi$$

$$\cos \alpha = -1$$



$$\alpha = (2k+1)\pi$$

$$\cos \alpha = 0$$



$$\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

الف) $\sin \frac{\pi}{3} = \sin 3x \rightarrow 1 = \sin 3x$ **حالت خاص**

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 3} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (2\cos x - 1) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x = 1 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پ) $\cos x = \cos 3x$

$$3x = 2k\pi \pm x$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} = k\pi \end{cases}$$



$$\text{ت) } \cos^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \rightarrow 1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$-2 \sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0 \quad \Delta = 9 - (4 \times (-2) \times (2)) = 9 + 16 = 25$$

$$\sin x = \frac{2 \pm 5}{-2} \begin{cases} \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \times -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -\frac{7}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \quad \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{ث) } \cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{4} = 0$$

$$-\sin^2 x - \sin x + \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - (4 \times (-1) \times (\frac{3}{4})) = 1 + 3 = 4$$

$$\sin x = \frac{1 \pm 2}{-2} \begin{cases} \frac{3}{-2} \times -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{ج) } \sin x - \cos^2 x = 0$$

$$\sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - (4 \times 2 \times (-1)) = 1 + 8 = 9$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \\ -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



مثال: معادله ی مثلثاتی $2\sin x + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ را حل کنید.

$$2\sin x = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \xrightarrow{\div 2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال: جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

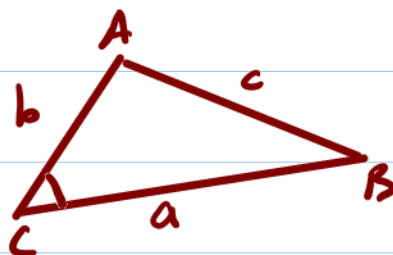
$$2\sin x \cos x = 2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin 2x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۲ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

$$S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin \hat{C}$$



$$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \hat{C} \rightarrow 3 = 6 \sin \hat{C}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{\pi}{6} \checkmark \\ \hat{C} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{5\pi}{6} \checkmark \end{cases}$$

دو مثلث

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

قسمت دوم: معادلات تانژانتی و رابطه

تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه

جلسه پنجم: صفحات ۴۱ تا ۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

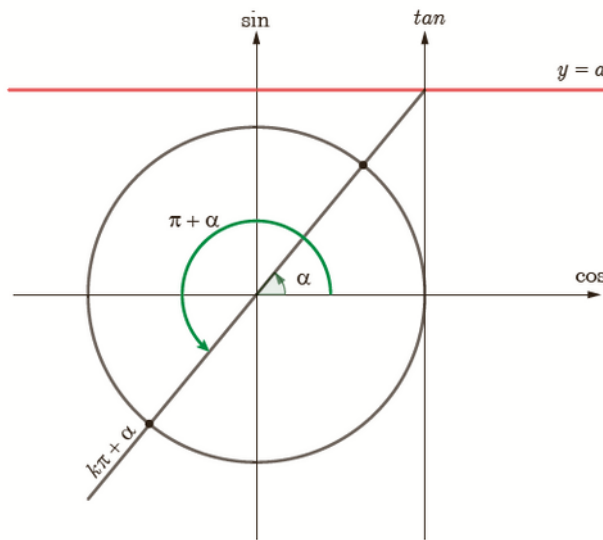
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

روش شعری حل معادله $\tan x = a$



روی محور $\tan$ مقدار a را مشخص می‌کنیم.

x های که اندازشان به a برخورد می‌کند

جواب معادله هستند.

برای حل معادله $\tan x = a$ ابتدا زاویه α را می‌یابیم که تانژانت آن برابر a شود.

اگر آن زاویه α باشد، بر یافتن جواب‌های کلی این معادله داریم:

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

مثال: جواب‌های صحیح معادلات زیر را بدست آورید.

$$1) \tan x = -1 \Rightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$2) \tan^2 x = \tan^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \Rightarrow x = k\pi$$

$$3) \tan x - \cot x = 0 \Rightarrow \tan x - \frac{1}{\tan x} = 0 \Rightarrow \frac{\tan^2 x - 1}{\tan x} = 0$$

$$\Rightarrow \tan^2 u - 2 = 0 \Rightarrow \tan^2 u = 2 \Rightarrow \tan u = \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan u = \tan\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow u = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

نکته مهم: از آنجایی که معادله تناظرانی محدودیت داشته دارند، باید جواب درست

گرفته را در معادله چک کرد. همچنین در حل معادله تناظرانی گری دارایی

هم باید به دانه توجه کرد.

مثال: جواب های معادله $2\cot u + \tan u = \cos^2 u$ در بازه $[0, 2\pi]$ را بیابید.

$$\text{نکته: } \cot u - \tan u = 2\cot u$$

$$\cot u - \tan u + \tan u = \cos^2 u \rightarrow \cot u = \cos^2 u$$

$$\rightarrow \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{\cos^2 u}{1} \rightarrow \cos^2 u (\sin u) = \cos u$$

$$\rightarrow \cos^2 u (\sin u) - \cos u = 0 \rightarrow \cos u (\sin u (\cos u - 1)) = 0$$

$$\cos u = 0 \rightarrow u = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{در این زمان } \tan \text{ تعریف نمی شود}$$

$$\sin u (\cos u - 1) = 0 \rightarrow \frac{1}{4} \sin^2 u - 1 = 0 \rightarrow \frac{1}{4} \sin^2 u = 1 \rightarrow \sin^2 u = 4 \rightarrow \sin u = 2 \text{ یا } \sin u = -2$$

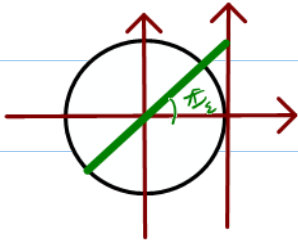
معادله جواب ندارد

مثال: معادله جواب های هر دو $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ را بیابید.

بر توان ۲

$$\Rightarrow \sin x = \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$



معمای که در ربع سوم هستند نمی توانند جواب هر دو باشند

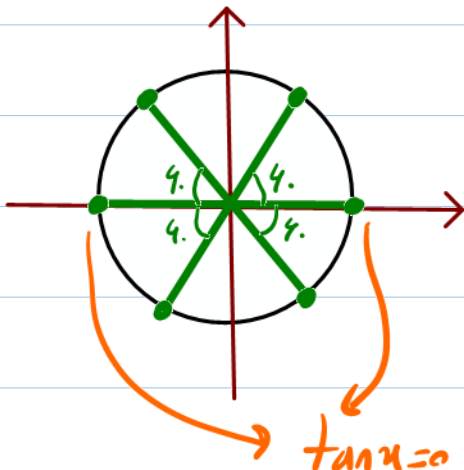
زیرا $\sin$ و $\cos$ در ربع سوم منفی هستند و زیر رادیکال نمی توانند منفی باشند.

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

مثال: جواب های هر دو $\frac{\tan 2x + \tan x}{\tan x} = 1$ را بیابید.

$$\tan 2x + \tan x = \tan x \Rightarrow \tan 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$



در $\tan x$ ، $x = k\pi$ که در ربع اول و سوم هستند

پس باید ریشه را از جواب های کلی کم کرد:

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

یادآوری :

سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان :

$$1) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$2) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

نسبت های مثلثاتی (دو برابر کمان) (2α)

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

تangent مجموع و تفاضل دو کمان

$$1) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$2) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

(اثبات ۱)

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

صورت ریخج را بر $\cos \alpha \cos \beta$ تقسیم می کنیم :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \square \end{aligned}$$

رابطه ۲ به طریقی ثابت می شود.

مثال: $\tan 10^\circ$ و $\tan 10^\circ$ را بیابید.

$$\tan 10^\circ = \tan(45^\circ - 35^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 35^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 35^\circ} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\tan 10^\circ = \tan(45^\circ - 35^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 35^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 35^\circ} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

مثال: مقدار جواب هر یک از معادلات $\tan 2x + \tan x + \sqrt{3} \tan 2x \tan x = \sqrt{3}$ را بیابید.

($0, \pi$) کدام است ؟ ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵ ۵

$$\tan^2 u + \tan u = \sqrt{r} - \sqrt{r} \tan^2 u \tan u$$

$$\tan^2 u + \tan u = \sqrt{r} (1 - \tan^2 u \tan u)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^2 u + \tan u}{1 - \tan^2 u \tan u} = \sqrt{r} \Rightarrow \tan(\pi u + u) = \sqrt{r}$$

$$\Rightarrow \tan \varepsilon u = \tan \frac{\pi}{r} \Rightarrow \varepsilon u = k\pi + \frac{\pi}{r}$$

$$\Rightarrow u = \frac{k\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{r}$$

k	0	1	2	3
u	$\frac{\pi}{12}$ ✓	$\frac{\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$ ✓	$\frac{2\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$ ✓	$\frac{3\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{12} = \frac{10\pi}{12}$

$$\begin{aligned} \tan^2 u &= \tan^2 \left(\frac{3\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \tan^2 \left(\frac{10\pi}{12} \right) = \tan^2 \left(\frac{5\pi}{6} \right) = \tan^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

جواب نهایی ۳ است.

تأثیرات دو برابر شدن:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \square \quad \text{ثبت:}$$

مثال: اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{4}$ و انتهای کمان x در ربع اول باشد، مقدار $\tan 2x$ را بیابید.

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\frac{5}{16}} = \frac{16}{5} \rightarrow \tan^2 x = \frac{16}{5} - 1 = \frac{11}{5}$$

$$\sqrt{\Rightarrow} \tan x = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2 \times \frac{4}{\sqrt{5}}}{1 - \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{\frac{8}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{16}{5}} = \frac{\frac{8}{\sqrt{5}}}{\frac{5-16}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \times \frac{5}{-11} = \frac{40}{-11\sqrt{5}} = -\frac{8\sqrt{5}}{11}$$

مثال: اگر $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan x$ را بیابید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{2} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{2} \tan x}$$

$$= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan x = 5 - 5 \tan x \Rightarrow 6 \tan x = 4 \Rightarrow \tan x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \left(\frac{2}{3}\right)}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$$

مثال: معادله $\tan^2 u = r \tan u$ را به ازای $(0, \frac{\pi}{r})$ چند جواب دارد؟

$$\tan^2 u = \frac{r \tan u}{1 - \tan^2 u} = r \tan u$$

$$\Rightarrow \frac{r \tan u}{1 - \tan^2 u} - r \tan u = 0 \Rightarrow \tan u \left(\frac{r}{1 - \tan^2 u} - r \right) = 0$$

$$\tan u = 0 \rightarrow u = \pi, 2\pi$$

$$\frac{r}{1 - \tan^2 u} - r = 0 \rightarrow \frac{r}{1 - \tan^2 u} = r \Rightarrow \frac{1 - \tan^2 u}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow 1 - \tan^2 u = \frac{1}{r} \rightarrow 1 - \frac{1}{r} = \tan^2 u \rightarrow \frac{1}{r} = \tan^2 u$$

$$\sqrt{\frac{1}{r}} \Rightarrow \tan u = \pm \frac{1}{\sqrt{r}} = \pm \frac{\sqrt{r}}{r} = \tan\left(\pm \frac{\pi}{r}\right)$$

$$\rightarrow u = k\pi \pm \frac{\pi}{r}$$

k	0	1	2
u	$\frac{\pi}{r}$ ①	$\pi + \frac{\pi}{r} = \frac{r+1}{r}\pi$ (2) $\pi - \frac{\pi}{r} = \frac{r-1}{r}\pi$ (3)	$2\pi + \frac{\pi}{r} = \frac{2r+1}{r}\pi$ (4) $2\pi - \frac{\pi}{r} = \frac{2r-1}{r}\pi$ (5)

۷ جواب دارد.

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل سوم: حد

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت اول: یادآوری مفهوم حد و قضایای حد

جلسه اول

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

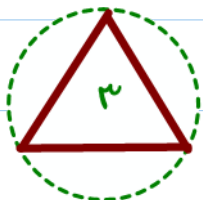
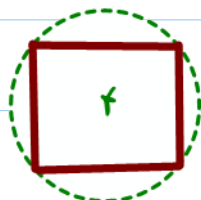
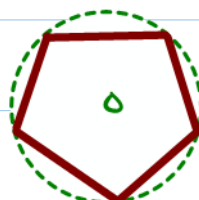
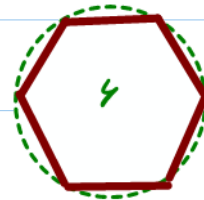
گروه ریاضی
استان همدان

قبل از اینکه تعریف دقیق حد یک تابع را بگیریم، لازم است با مفاهیم زیر درگیر شویم.

(۱) فزاینده‌ی:

- در شکل‌های زیر در هر مرحله یک n ضلعی منتظم درون دایره قرار داریم. اگر n را زیاد کنیم

مساحت n ضلعی به مساحت دایره نزدیک‌تر شود.



...

پس می‌توانیم بگوییم مساحت چند ضلعی‌های داخلی را به همان اندازه که خود هم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه مقدار اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

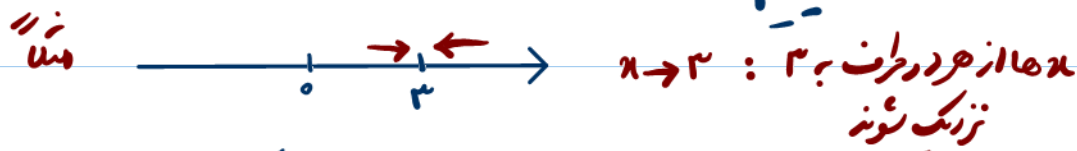
- دنباله $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ و $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ را در نظر بگیرید. اگر n غنی‌تر شود، محله را بزرگ‌تر و بزرگ‌تر کنیم، محلات دنباله کوچکتر شده و به صفر نزدیک‌تر می‌شود.

مثال‌ها را بالا بنویسید ای از فزاینده‌های حدی هستند.

۱۲) میل کردن :

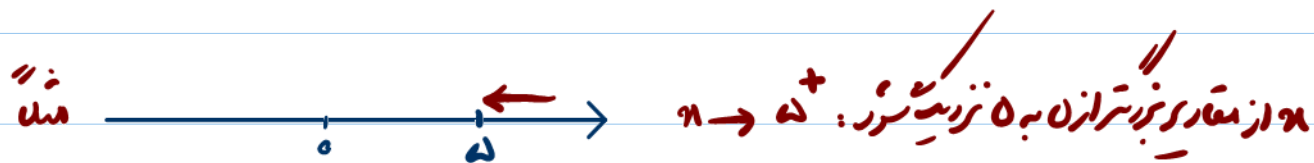
وقتی می‌گوئیم a به a میل می‌کند یعنی a بسیار به عدد a نزدیک می‌شود ولی هرگز

برابر عدد a نمی‌شود و می‌نویسیم $a \rightarrow a$.



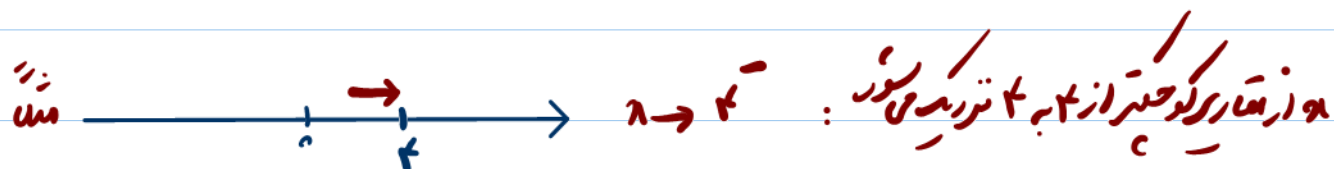
وقتی می‌نویسیم $a \rightarrow a^+$ یعنی a از مقدار بزرگتر از a ، به a بسیار نزدیک می‌شود. در این

حالت می‌گوئیم a از سمت راست به a میل می‌کند.



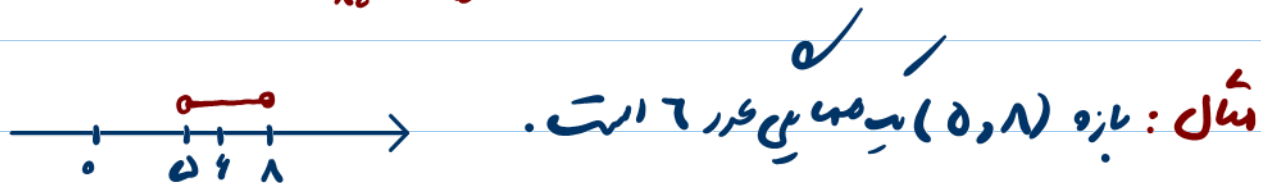
وقتی می‌نویسیم $a \rightarrow a^-$ یعنی a از مقدار کوچکتر از a ، به a بسیار نزدیک می‌شود. در این

حالت می‌گوئیم a از سمت چپ به a میل می‌کند.

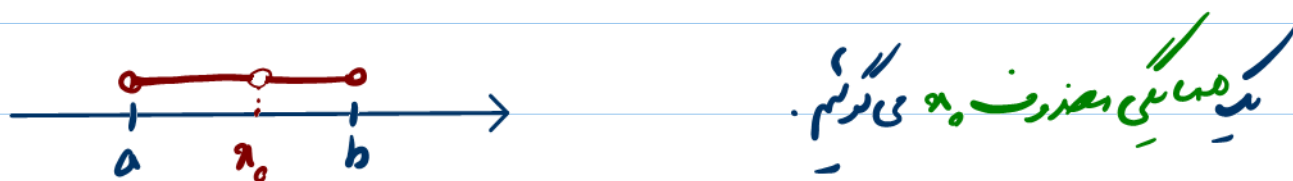


۱۳) همسانی :

فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد، هر باره بازشامل a را یک همسانی می‌گوئیم.

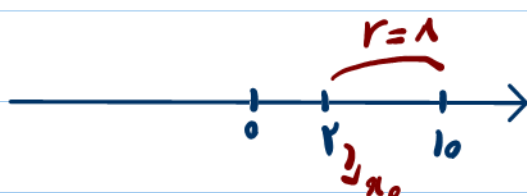
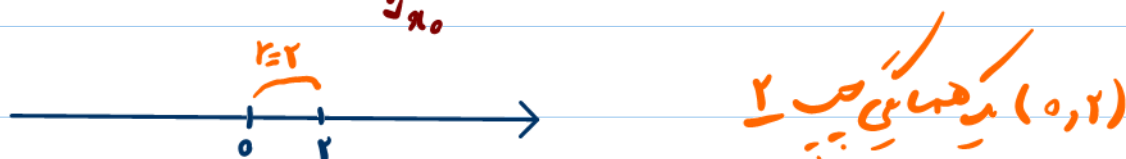


اگر عدد x_0 را از همسایگی (a, b) حذف کنیم یعنی $(a, b) - \{x_0\}$ ، به مجموعه بدلت رسیده



اگر $r > 0$ باشد بازه باز $(x_0 - r, x_0 + r)$ را یک‌هستی راست عدد x_0 و بازه باز

$(x_0 - r, x_0)$ را یک‌هستی چپ x_0 می‌گیریم.



حال می‌توانیم تعریف حد را بیان کنیم.

تعریف حد تابع:

فرض کنید تابع $y = f(x)$ در یک‌هستی معزوف a تعریف شده باشد (یعنی در حوزه a تعریف شود)

یا نشود (مقدار ندارد). می‌گوئیم حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ برابر عدد L است.

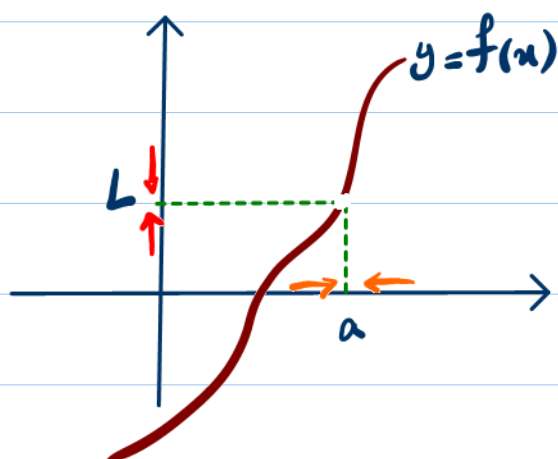
با نزدیک شدن x به a مقادیر تابع f (هنگامی‌ها) به L نزدیک شوند و این را می‌نامیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

تعریف بالا را به این صورت هم می‌توان گفت:

حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ برابر L است هرگاه مقادیر تابع f (هنگامی‌ها) را به هر اندازه

درخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود.



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

مثال: تابع $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول و نمودار، حد تابع را وقتی $x \rightarrow 1$

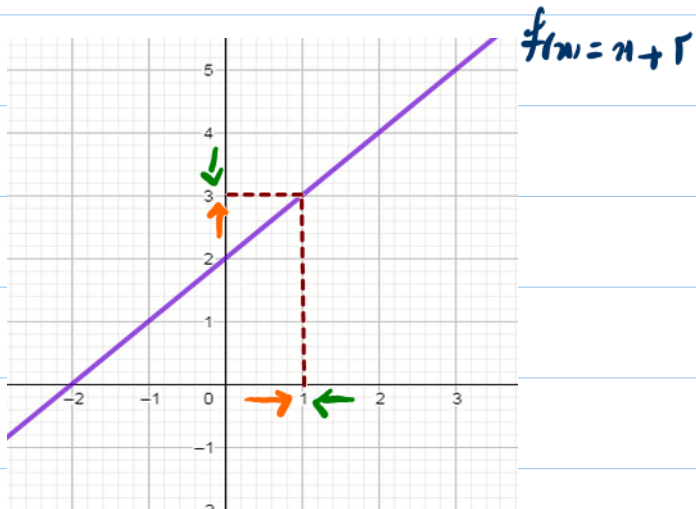
یابید.



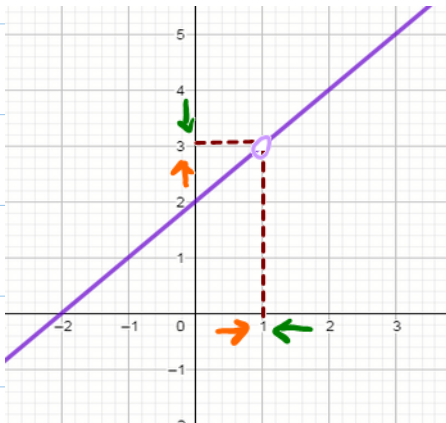
$$y = x + 2$$

$\cdot 0$	$\cdot 9$	$\cdot 99$	$\rightarrow 1$	$\leftarrow 1,1$	$1,1$	$1,0$	2
2	$2,0$	$2,9$	$2,99 \rightarrow 3$	$3 \leftarrow 3,1$	$3,1$	$3,0$	3

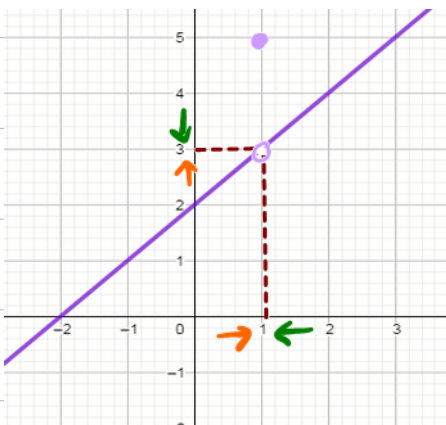
$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$



در دو حالت زیر هم حد تابع در $x=1$ برابر ۳ است.



$$g(x) = x + 2, \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$



$$h(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$$

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همگرایی راست a تعریف شده باشد و گوئیم حد راست تابع f در نقطه $a = x_0$

برابر L است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد،

به شرط آنکه x درست راست به قدر کافی به a نزدیک شود و می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

تعریف حد چپ :

اگر تابع f در یک همگرایی چپ a تعریف شده باشد و گوئیم حد چپ تابع f در نقطه $a = x_0$

برابر L است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد،

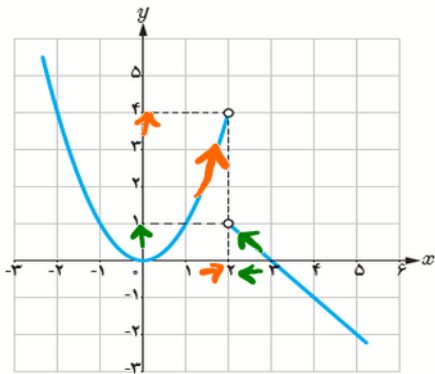
به شرط آنکه x درست چپ به قدر کافی به a نزدیک شود و می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

نکته: حد تابع f در $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد راست و چپ تابع در $x=a$ برابر باشند یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x > 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت روبه رو است:



آیا تابع f در نقطه $x=2$ حد دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$$

توجه: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ زیرا $x=2$ حد ندارد.

مثال: با توجه به نمودار f ، حدهای خواسته شده را، در صورت وجود، به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 3$$

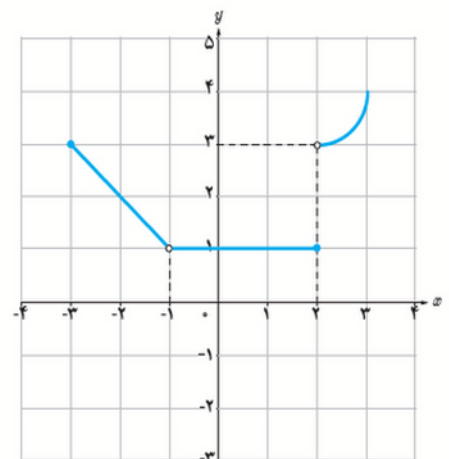
$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

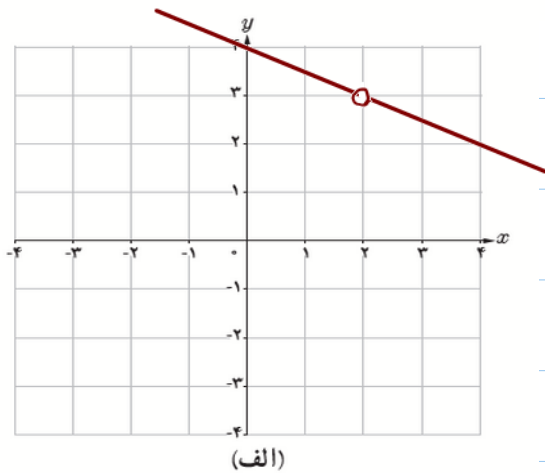
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$



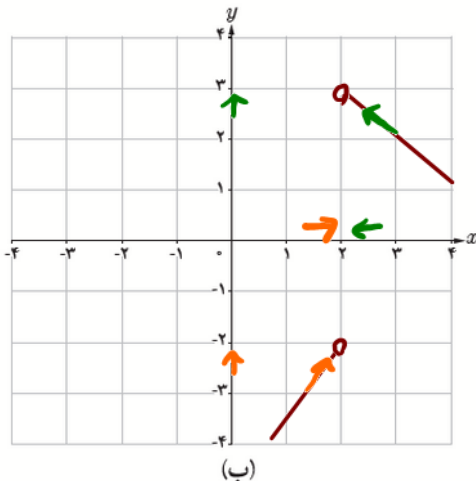
مثال: نموداری از یک تابع رسم کنید که:

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

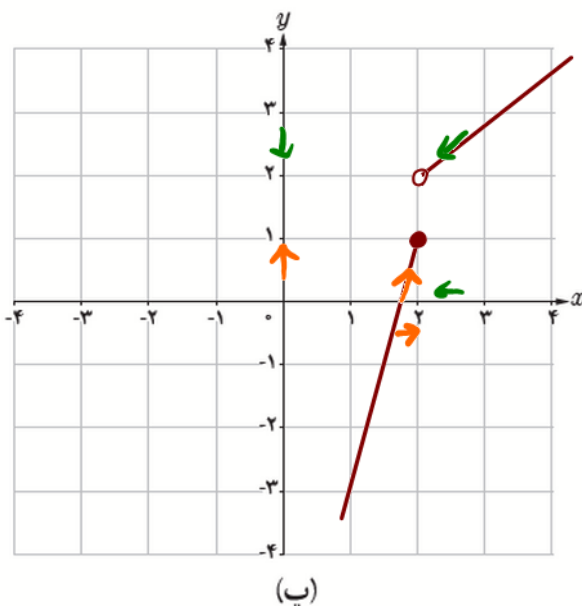
$$x \rightarrow 2^+$$

در $x=2$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2$$

$$x \rightarrow 2^-$$

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

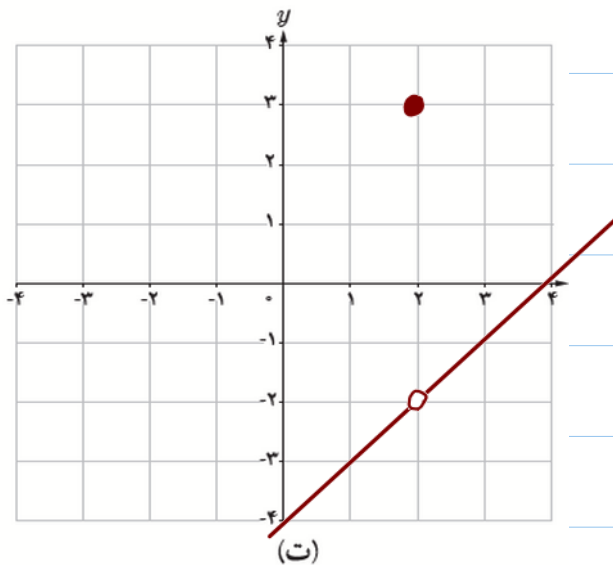
$$x \rightarrow 2^+$$

در $x=2$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$x \rightarrow 2^-$$

ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



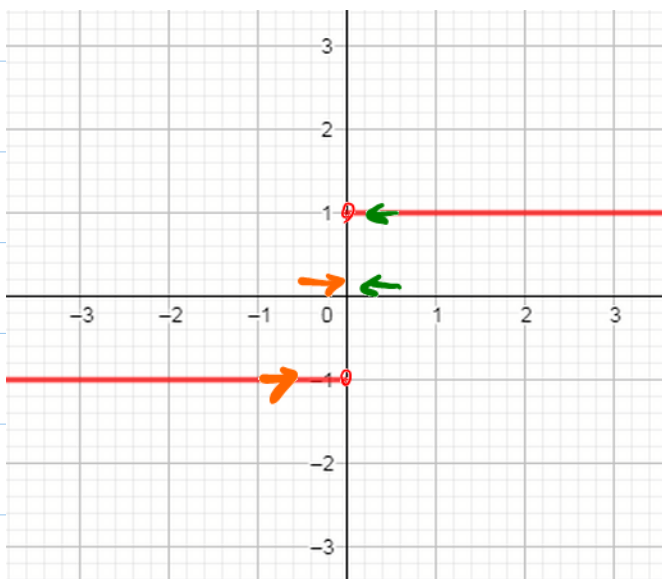
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$$

$$f(2) = 3$$

مثال: عددهای زیر را با اشاره از رسم نموداری بسنجید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ -\frac{x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



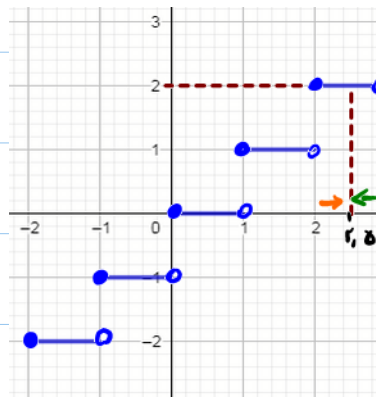
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

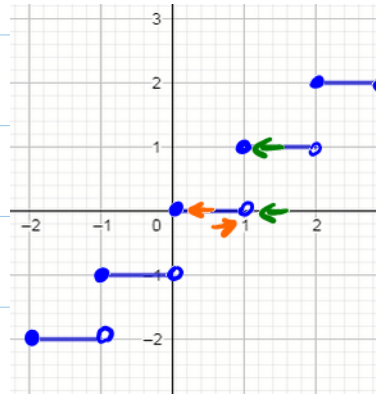
تابع در $x=0$ حد ندارد.



ب) $\lim_{n \rightarrow \frac{\omega}{2}} [n] = 2$



پ) $\lim_{n \rightarrow 1} [n] = \text{عدم تعین}$

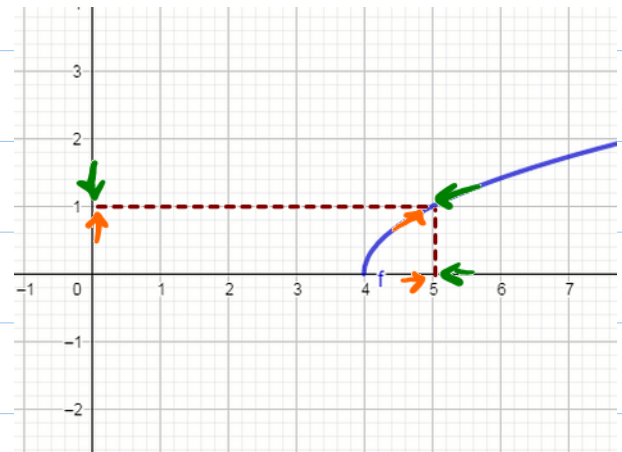


$\lim_{n \rightarrow 1^+} [n] = 1$

$\lim_{n \rightarrow 1^-} [n] = 0$

$n \rightarrow 1^-$

ت) $\lim_{n \rightarrow 5} \sqrt{n-4} = 1$



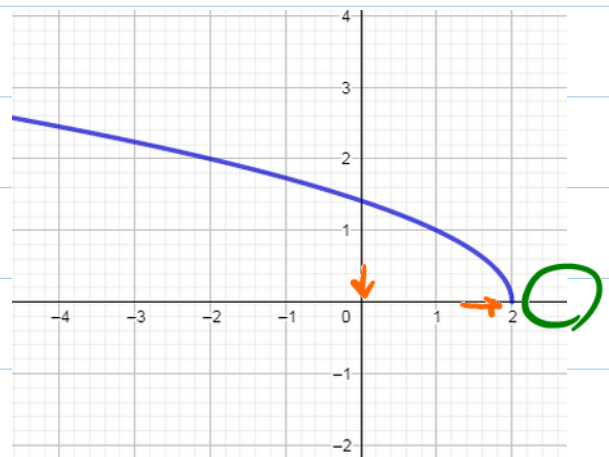
ث) $\lim_{n \rightarrow 2} \sqrt{2-n} = \text{عدم تعین}$

تابع درجه یک است ۲ بتویف نشده است پس:

$\lim_{n \rightarrow 2^+} \sqrt{2-n} = 0$

$\lim_{n \rightarrow 2^-} \sqrt{2-n} = 0$

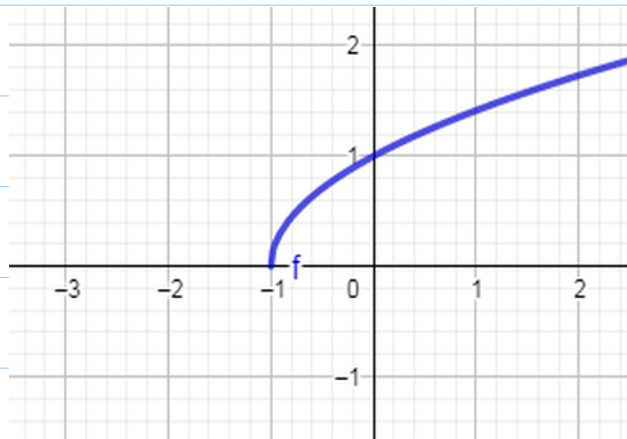
$n \rightarrow 2^-$





ج. ۱) $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x+1} = \text{حد ندارد}$

زیرا تابع در همگی ۲- منفی نشده است.

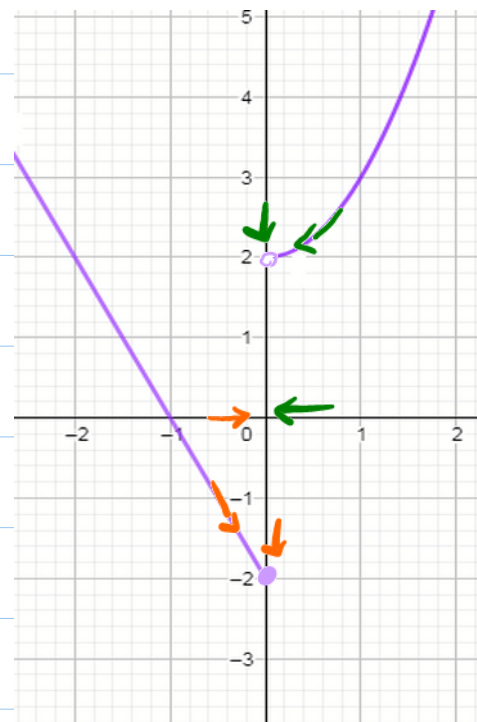


مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ -2x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$

تابع در $x=0$ حد ندارد.



برای محاسبه حد توابع از قنیه‌های زیر کمک می‌گیریم:

قنیه ۱) حد تابع ثابت $f(x) = c$ در هر عدد دلخواه a ، همان مقدار ثابت c است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

مثال $\lim_{x \rightarrow 5} 3 = 3$

قنیه ۲) حد تابع همانی $f(x) = x$ در هر عدد دلخواه a ، برابر a می‌شود یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

مثال $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

قنیه ۳) فرض کنید توابع f و g در نقطه $x = a$ حد داشته باشند و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

آنگاه

(الف) مجموع و تفاضل حاصل ضرب این دو تابع در $x = a$ حد دارند و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm \frac{1}{x} g(x)) = L_1 \pm \frac{1}{x} L_2$$

ب) اگر $L_2 \neq 0$ باشد، آنگاه $\frac{f}{g}$ تابع $\frac{f}{g}$ در $x = a$ حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۴) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، $c \in \mathbb{R}$ باشد آنگاه

ا) $\lim_{x \rightarrow a} (c f(x)) = cL$

مثال $\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 2 \times 2 = 4$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = L^n$

مثال $\lim_{x \rightarrow 2} (x)^3 = 2^3 = 8$

قضیه ۵) اگر $f(x)$ یک تابع چند جمله‌ای باشد حد تابع در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر است:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

قضیه ۶) اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$:

ا) اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همگرایی نقطه a تعریف شده باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \sin(f(x)) = \sin L$ ، $\lim_{x \rightarrow a} \cos(f(x)) = \cos L$

نتیجه: اگر تابع f در همگرایی a تعریف شده باشد و با جایگذاری a به جای x در تابع به یک

عدد مشخص برسیم، مقدار حد همین عدد خواهد شد، جز مواردی که به آن‌ها اشاره می‌کنیم.



مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$ ، آنگاه حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (7g(x) - \frac{1}{2}f(x)) = 7 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 7 - 1 = 6$$

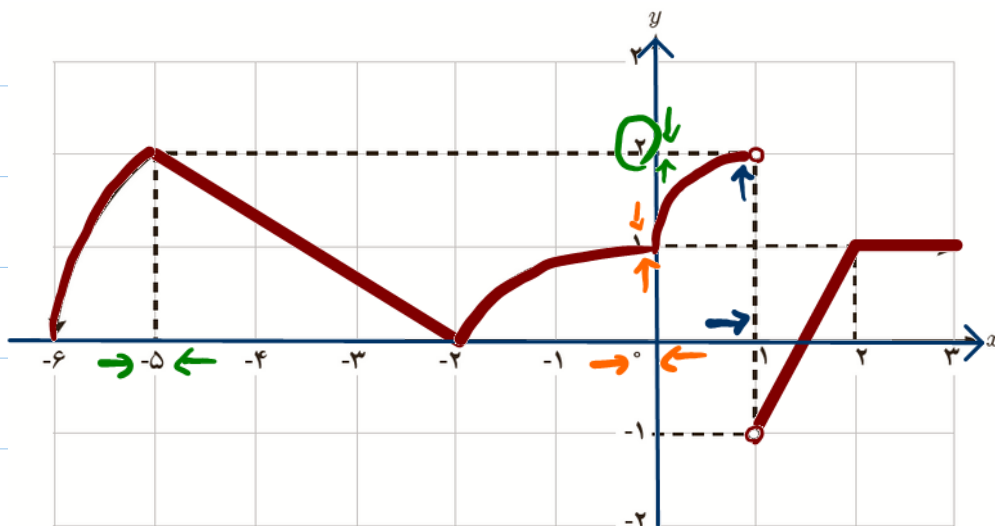
$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1 + f(x))g(x)}{g(x) + 2} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} 1 + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)) \lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow 2} 2}$$

$$= \frac{(1 + 2) \times 1}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} (g(x) + \frac{2}{f(x)})^3 = (1 + \frac{2}{1})^3 = (1 + 2)^3 = 3^3 = 27$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{5x-1} + \frac{f(x)}{g(x)}) = \sqrt{5 \times 2 - 1} + \frac{2}{1} = \sqrt{9} + 2 = 3 + 2 = 5$$

مثال: نمودار تابع f داده شده است. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید:





$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{\Delta} - 1\right)^2 \times f(x) = \left(-\frac{\infty}{\Delta} - 1\right)^2 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty)^2 \times 2 = \infty \times 2 = \infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x}}{x^2 + f(x)} = \frac{\sqrt{4-0}}{0^2 + \lim_{x \rightarrow 0} f(x)} = \frac{2}{0+1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x - (f(x))^2) = 1^2 + 1 - (\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x))^2 = 1 + 1 - (2)^2 = 2 - 4 = -2$$

مثال: حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (2x^4 - x^3 - 5x^2 + 4) = 2(-1)^4 - (-1)^3 - 5(-1)^2 + 4$$

$$= 2 - (-1) - 5 + 4 = 2 + 1 - 5 + 4 = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 (x^2 - 6x) = \left(1 + \frac{4}{2}\right)^2 (4^2 - 6 \times 4) = 3^2 (16 - 24)$$

$$= 9(-8) = -72$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^0} (5x^3 - 6|x| + 1) = 5(1^0) - 6 \times 1 + 1 = 5 - 6 + 1 = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{rx^r + rx^{r-1} + rx}{rx + 1} = \frac{r(\frac{1}{r})^r + r(\frac{1}{r})^{r-1} + r \times \frac{1}{r}}{r \times \frac{1}{r} + 1} = \frac{r \times \frac{1}{r} + r \times \frac{1}{r} + 1}{r + 1}$$

$$= \frac{1+1+1}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$0) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{r}}{1 - \cos \frac{\pi}{r}} = \frac{1+1}{1-0} = \frac{r}{1} = r$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{r}} (r \sin x + \cos^r x) = r \sin(-\frac{\pi}{r}) + \cos^r(-\frac{\pi}{r})$$

$$= -r \sin \frac{\pi}{r} + \cos^r \frac{\pi}{r} = -r \times \frac{1}{r} + (\frac{\sqrt{r}}{r})^r$$

$$= -r + \frac{r}{r} = \frac{-r+r}{r} = \frac{-0}{r}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{0x - 9} = \sqrt{0 \times 0 - 9} = \sqrt{0 - 9} = \sqrt{-9} = r$$

$$1) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\pi \cos x}{x} = \frac{\pi \cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{\pi \cos \pi}{-\pi} = \frac{\pi \times (-1)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

۱) توابع چندضابطه‌ای : اگر حد تابع در نقطه‌ای که ضابطه تابع تغییری کند (نقطه‌ای)

خواسته شده باشد باید حد چپ و حد راست از ضابطه‌ها مربوط به آن می‌شوند.

مثال: حد تابع f را در نقطه a (در صورت وجود) بیابید

$$۱) f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ x - 2 & x < 0 \end{cases}, \quad a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

$0 \neq 0$ پس تابع در $x=0$ حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 2) = 0 - 2 = -2$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} 5 & x < 3 \\ x + 2 & x > 3 \end{cases}, \quad a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 2) = 3 + 2 = 5$$

$5 = 5$ پس تابع در $x=3$ حد دارد

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$$



$$۳) f(x) = \begin{cases} ۳-x & x < ۲ \\ -۱ & x = ۲ \\ x^۲-۴ & x > ۲ \end{cases}, \quad a = ۲$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^+} (x^۲ - ۴) = ۲^۲ - ۴ = ۴ - ۴ = ۰$$

۱. $\neq ۰$ پس تابع در $x=۲$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow ۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^-} (۳ - x) = ۳ - ۲ = ۱$$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} (a+۱)x+۳ & x > -۲ \\ -۲x^۲+۱ & x < -۲ \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع f در نقطه $x = -۲$ حد داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^+} (a+۱)x+۳ = \widehat{(a+۱)(-۲)+۳} = -۲a-۲+۳ = -۲a+۱$$

$$\lim_{x \rightarrow -۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^-} -۲x^۲+۱ = (-۲)(-۲)^۲+۱ = -۸+۱ = -۷$$

$$\lim_{x \rightarrow -۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^-} f(x) \Rightarrow -۲a+۱ = -۷ \Rightarrow -۲a = -۸ \Rightarrow a = ۴$$



۱۲ حد توابع شامل رادیکال با فرض زوج :

در این توابع باید بررسی شود عبارت رادیکالی در همگی نقطه تعریف شده است یا خیر.

اگر تعریف شود مقدار تابع حد تابع خواهد بود اگر نه حد موجود نیست.

در این توابع هم برای نقای که رسم داخل رادیکال هستند حد چپ و راست را می‌نویسیم.

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{2x+4}$$

x	-2
$2x+4$	$- \quad 0 \quad +$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{2x+4} = \sqrt{2(2)+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{2x+4} = \text{حد ندارد}$$

تابع در همگی چپ
-2 تعریف نمی‌شود

پس این حد موجود نیست.

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2+3x}$$

x	-0	0	$+0$
x^2+3x	$+$	0	$- \quad +$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2+3x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2+3x} = \text{حد ندارد}$$

پس این حد موجود نیست.



$$\sqrt{4-x}$$

$$x \rightarrow 4$$

$$D: 4-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -4 \Rightarrow x \leq 4$$

$$D = (-\infty, 4]$$

تابع در مسائلی که در تعریف نمی شود پس در این نقطه حد ندارد.

۳) حد توابع شامل جزء صحیح :

بیانیم اگر $x \rightarrow a^+$ یعنی $x > a$ و اگر $x \rightarrow a^-$ یعنی $x < a$ است. در محاسبه حد

توابع شامل جزء صحیح از این نکته استفاده کرده حدت داخل جزء صحیح را می سازیم و

مقدار عبارت جزء صحیح را در مسائلی که بهی کتم تا بینیم با کرامت تابع ثابت برابر

می شود. پس با جای گذاری این مقدار در تابع، حد را بدست می آوریم.

مثال: حدهای زیر را می بیند.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 3) [x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 3) [x] = (0 + 3) \times 0 = 0$$



$$\lim_{n \rightarrow 0^-} (n+3) \lfloor n \rfloor = (0+3) \times (-1) = -3$$

$$n \rightarrow 0^-$$

۳-۵ این حد موجود نیست

$$۱) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x}{\lfloor x \rfloor + 1} = \frac{2^2 + 3 \times 2}{\lfloor 2 \rfloor + 1} = \frac{10}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$$

$\swarrow$
 $1 < x < 2$

$$۲) \lim_{n \rightarrow 1^-} \lfloor -2n \rfloor : \quad n < 1 \xrightarrow{x(-۲)} -2n > -۲$$

در نتیجه جارت $-2n$ - بزرگتر از -۲ - و نزدیک آن است پس $-۲ < -2n < -۲$

$$\lim_{n \rightarrow 1^-} \lfloor -2n \rfloor = -۲$$

$$n \rightarrow 1^-$$

باید دقت کرد که به همین نتیجه می رسیم.

$$۳) \lim_{n \rightarrow 2} n + \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$$

پس $\frac{n}{۲}$ بزرگتر از یک و نزدیک آن است. $n \rightarrow 2^+ : n > ۲ \xrightarrow{\div ۲} \frac{n}{۲} > ۱$

$$1 < \frac{n}{۲} < ۲ \rightarrow \lim_{n \rightarrow 2^+} n + \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor = ۲+1 = ۳$$



پس $\frac{n}{m}$ از یک نزدیک تر می شود به ۱ : $\frac{n}{m} < 1 \xrightarrow{n \div m} n < m$: $n \rightarrow m^-$

$$0 < \frac{n}{m} < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow m^-} n + \left[\frac{n}{m} \right] = m + 0 = m$$

۳ ≠ ۴ پس این صورت درست نیست.

$$۵) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\sqrt{2-2}}{[2^+]+2} = \frac{0}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$۶) \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} n[n] = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$0 < n < 1$

$$۷) \lim_{n \rightarrow \frac{0}{2}} r[n] = 2 \times 2 = 4$$

$2 < n < 3$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت دوم: رفع ابهام صفر صفر

جلسه دوم

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

اگر $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n)}{g(n)}$ خودسته شده باشد و عدد از قرار دار a به چپ a ، صورت و مخرج

نزدیک صفر

هر دو صفر شوند با توجه به نوع صفر $\pm$ حالت خوار هم را بگفت.

صفرها در دسته اند: ۱- صفر مطلق (خرد صفر) ۲- صفر نسبی یا جدی (± 0)

نوع اول: $\frac{0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

نوع دوم: $\frac{\pm 0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

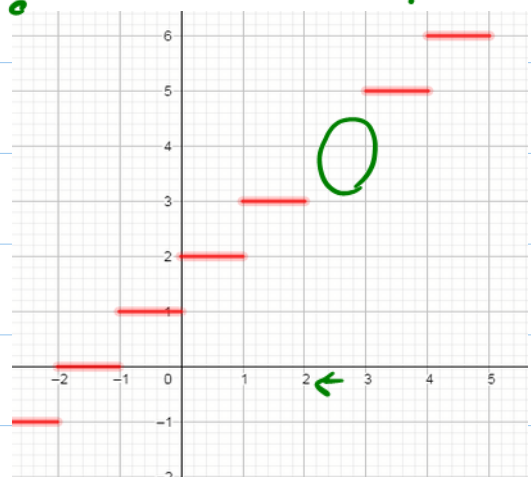
نوع سوم: $\frac{0}{\pm 0}$ صورت صفر مطلق و مخرج غیر صفر (مفردی) پس حد کسر صفر است.

نوع چهارم: $\frac{\pm 0}{\pm 0}$ به این حالت، حالت مبهم میگویند و باید رفع ابهام شود.

مثال: حد های زیر را محاسبه کنید.

حد وجود ندارد

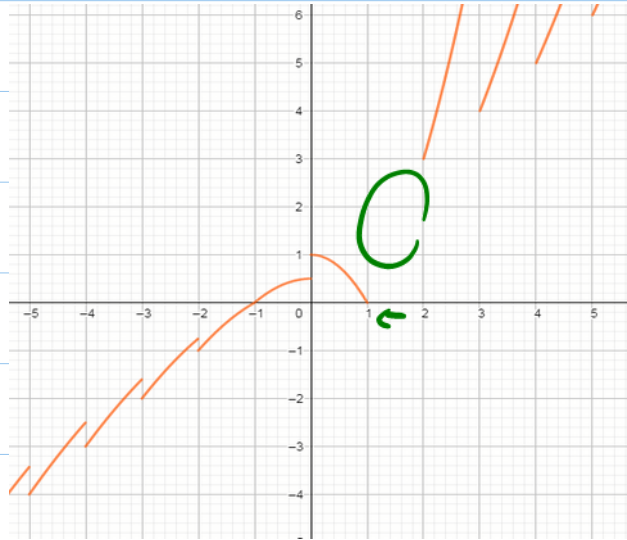
$$\lim_{n \rightarrow 2^+} \frac{[n]^2 - 4}{[n] - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$



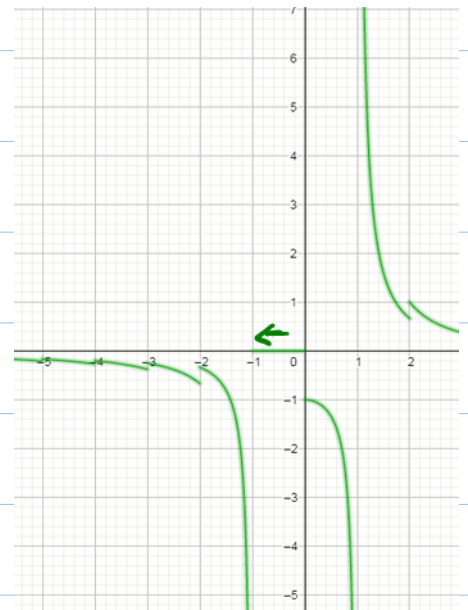


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{[x] - 1} = \frac{1^+ - 1}{1 - 1} = \frac{0^+}{0^+}$$

حد موجود نیست



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{[x] + 1}{x^2 - 1} = \frac{-1 + 1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$



مسئله: نتایج تجربی ۹۹

حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ ، کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) -1 (۳) صفر (۴) 1

$$\frac{-2 + 3}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

گزینه ۱

رنج اهام $\frac{0}{\pm}$

چون $a \rightarrow n$ و صورت و مخرج هر دو صفر شده اند پس هم صورت و هم مخرج

صل $(n-a)$ را دارا هستند. به $(n-a)$ صل اهام یا صفر نشده می نویسم

الف) رنج اهام $\div$ وقتی صورت و مخرج هر دو صفر شده ای باشند.

با استفاده از روش های تجزیه (فاکتورگیری در کاهها) صل اهام را در صورت و مخرج

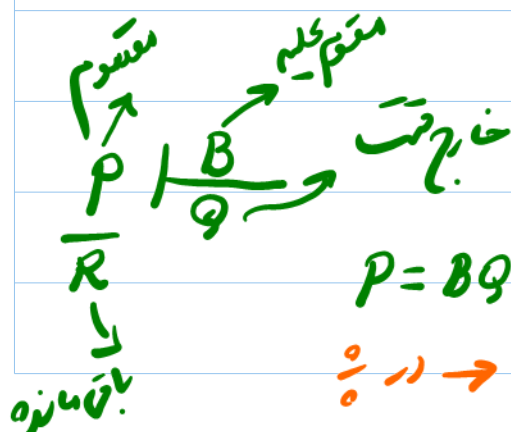
ایجاد و با یکدیگر حذف می کنیم تا حد قابل محاسبه باشد.

بصره: هرگاه نتوانیم باری کاهها یا فاکتورگیری صل اهام را ای کنیم، چاره ای

جزیه تقسیم آن عبارت بر صل اهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت

حاصل ضرب $(n-a)$ (ها) مقسوم علیه در خارج قسمت را می نویسم.

یادآوری



$$P = BQ + R$$

صل اهام

$$R = 0 \rightarrow P = BQ$$

۱۱ رابطه تقسیم:

۱۲ تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای :

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad x+1 \\
 \underline{-(2x^2 + 2x)} \\
 -x^2 + 1 \\
 \underline{-(-x^2 - x)} \\
 x + 1 \\
 \underline{-(x+1)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$$

روشن اول :

$$\frac{-x^2}{x} = -x$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

روشن دوم (روشن هوزی) : برای تقسیم درجه n بر درجه یک

ریشه مقسوم علیه

ضرایب مقسوم	۲	۱	۰	۱
ریشه مقسوم علیه	۲	۱	۰	۱
باقی مانده	-۱	-۱	۱	۰
محاسبه	$-1 \times 2 + 1 = -1$	$-1 \times (-1) + 0 = 1$	$-1 \times 1 + 1 = 0$	

خارج قسمة : $2x^2 - x + 1 \rightarrow 2x^2 - 1x + 1$

سؤال: حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \frac{0}{0}$ عامل $(x - (-3)) : (x + 3)$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{x} = \frac{-3-3}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

۲) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6} = \frac{0}{0}$ عامل $(x - 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+6} = \frac{1+1}{1+6} = \frac{2}{7}$$

۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{7}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} = \frac{0}{0}$ عامل $(x - \frac{1}{7})$

$$8x^3 - 1 = 8(x^3 - \frac{1}{8}) = 8(x - \frac{1}{7})(x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{49})$$

روشن هوریز	$\frac{1}{7}$	6	-5	1
	$\frac{1}{7}$	6	$\frac{1}{7} \times 6 - 5 = -\frac{29}{7}$	$\frac{1}{7} \times (-\frac{29}{7}) + 1 = 0 \rightarrow$ نه! $\frac{1}{7}$

نتیجه: $4x - 2$

$$8x^3 - 5x + 1 = (x - \frac{1}{7})(4x - 2)$$



$$\lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{(n - \frac{1}{r})(n^r + \frac{1}{r}n + \frac{1}{r})}{(n - \frac{1}{r})(7n - r)} = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{n(n^r + \frac{1}{r}n + \frac{1}{r})}{r(7n - 1)}$$

$$= r \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}}{\frac{r}{r} - 1} = \frac{r}{\frac{1}{r}} = r$$

$$*) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4} = \frac{0}{0} \quad \text{فصل اول (x+4)}$$

$$x^2 + 4x - 4 = (x+4)(x-1)$$

ریشه ها	-4	1	1	4
	1	$-4x+4=0$	$-4x+1=1$	$-4x+4=0$

$$x^2 + 4x + 1 = x^2 + 1$$

اینجا!

$$x^2 + 4x^2 + x + 4 = (x+2)(x^2+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{-4-1}{16+1} = \frac{-5}{17}$$



$$\lim_{x \rightarrow -r} \frac{|x^r - r|}{x + r} = \frac{0}{0}$$

x	$-r$	r
$x^r - r$	$+$	$-$

$$\lim_{x \rightarrow -r^+} \frac{-(x^r - r)}{x + r} = \lim_{x \rightarrow -r^+} \frac{-(x - r)(x + r)}{x + r} = -(-r - r) = r$$

$$\lim_{x \rightarrow -r^-} \frac{x^r - r}{x + r} = \lim_{x \rightarrow -r^-} \frac{(x - r)(x + r)}{x + r} = -r - r = -r$$

∴ $\lim_{x \rightarrow -r} \frac{x^r - r}{x + r} \neq -r$

با رفع ابهام به وقتی صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات رادیکالی هستند:

در این حالت از مخرج و توان کردن و اتحادهای مزدوج یا حلق دلاغر استفاده می‌کنیم. به این صورت که

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارات رادیکالی (برای فرضیه‌های ۱) یا عبارات حلق عبارات رادیکالی

(برای فرضیه‌های ۲)، عامل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

مثال: حدود زیر را بیابید

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$$

(n-2) عامل ابهام

$$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n - \sqrt{3n-2}}{n^2 - 4} \times \frac{n + \sqrt{3n-2}}{n + \sqrt{3n-2}} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - (3n-2)}{(n-2)(n+2)(n+\sqrt{3n-2})}$$

$$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 3n + 2}{(n-2)(n+2)(n+\sqrt{3n-2})} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{(n-2)(n-1)}{(n-2)(n+2)(n+\sqrt{3n-2})}$$

$$= \frac{2-1}{(2+2)(2+\sqrt{4-2})} = \frac{1}{4(4)} = \frac{1}{16}$$



$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 10x + 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \quad \text{شکل اولی: } (x-4)$$

$$x \rightarrow 4$$

روش فاکتور
برای صورت

x^2	-10	-8
4	$4 \times 4 - 10 = 6$	$8 - 8 = 0$

خارج قسمت: $4x + 2$

باقی مانده: 0

$$x^2 - 10x + 8 = (x-4)(4x+2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(4x+2) \times \sqrt{3} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1 \times \sqrt{3} - \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(4x+2)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{3 - x - 1}$$

مخرج

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(4x+2)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{3 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\cancel{\sqrt{x}} - 2)(\sqrt{x} + 2)(4x+2)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{-(\cancel{\sqrt{x}} - 2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+2)(12+2)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}{-1} = -112$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2} = \frac{0}{0}$$

ن: $\lim_{x \rightarrow 0}$

مزدوج صفر

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{3n+4}-2} \times \frac{\sqrt{2n+1}+1}{\sqrt{2n+1}+1} \times \frac{\sqrt{3n+4}+2}{\sqrt{3n+4}+2}$$

مزدوج صفر

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(2n+1-1)(\sqrt{3n+4}+2)}{(3n+4-4)(\sqrt{2n+1}+1)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2n(\sqrt{3n+4}+2)}{3n(\sqrt{2n+1}+1)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2+2}{1+1} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

+) $\lim_{n \rightarrow r^-} \frac{|x^r - n - r|}{2n - \sqrt{x^r + 12}}$

$\lim_{n \rightarrow r^-}$

$$\frac{-1}{+0} \rightarrow \frac{r}{-0+}$$

$$= \lim_{n \rightarrow r^-} \frac{-(x^r - n - r) \times 2n + \sqrt{x^r + 12}}{2n - \sqrt{x^r + 12} \times 2n + \sqrt{x^r + 12}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow r^-} \frac{-(n+1)(n-r)(2n + \sqrt{x^r + 12})}{2n^r - (n^r + 12)}$$

$-n^r - 12$



$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3x^2-12}$$

$$x \rightarrow 2^- \quad \frac{3x^2-12}{3(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(\cancel{x-2})(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(\cancel{x-2})(x+2)} = \frac{-(2+1)(2+2)}{3(2+2)} = \frac{-3 \times 4}{3 \times 4} = -2$$

یادآوری ریاضی دقایق دلاغر :

$$\underbrace{(a-b)}_{\text{لاغر}} \underbrace{(a^2+ab+b^2)}_{\text{چاق}} = a^3 - b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

خواه ساختن عبارت چاق از روی عبارت لاغر :

۱- محب اول چاق : مبع (توان دوم) محب اول لاغر

۲- محب دوم چاق : حاصل ضرب محب اول در دوم لاغر با علامت قدرینه

۳- محب سوم چاق : مبع محب دوم لاغر

حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow -8$ ، کدام است؟

(۴) -۶

(۳) -۱۲

(۲) -۱۸

(۱) -۲۴

طرح اول $(n+8)$

$$\lim_{n \rightarrow -8} \frac{(n+8)(n+2) \times (4-2\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n^2})}{4(2+\sqrt[n]{n}) \times (4-2\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n^2})}$$

جان $\rightarrow$ δ

$$= \lim_{n \rightarrow -8} \frac{(n+8)(n+2)(4-2\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n^2})}{4(8+n)}$$

$\downarrow$
 2^3 $(\sqrt[n]{n})^2$

$$= \frac{(-8+2)(4-2\sqrt[-8]{-8} + \sqrt[-8]{(-8)^2})}{4} = \frac{-6(4-2(-2)+4)}{4}$$

$$= -1 \times 12 = -12$$

گزینه ۳

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$ ، کدام است؟

-۵/۶ (۴)

-۵/۸ (۳)

-۱/۲ (۲)

-۱/۵ (۱)

مثال ۱ (۱) $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{2n+0-\sqrt{2n}}{2n-\sqrt{2n+1}} = \frac{0}{0}$

مزدوج می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{2n+0-\sqrt{2n}}{2n-\sqrt{2n+1}} \times \frac{2n+0+\sqrt{2n}}{2n+0+\sqrt{2n}} \times \frac{2n+\sqrt{2n+1}}{2n+\sqrt{2n+1}}$$

مزدوج می‌شود

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(2n+0)^2 - 2n}{(2n^2 - (2n+1))(2n+0+\sqrt{2n})} \times \frac{2n+\sqrt{2n+1}}{2n+\sqrt{2n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(4n^2 + 0 \cdot n + 0 - 2n)(2n+\sqrt{2n+1})}{(4n^2 - 2n - 1)(2n+0+\sqrt{2n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(4n^2 - 2n)(2n+\sqrt{2n+1})}{(4n^2 - 2n - 1)(2n+0+\sqrt{2n})}$$

مثال ۱، $n=1, -\frac{1}{2}$



$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{(n-1)(t_n-20)(r_n+\sqrt{r_{n+1}})}{(n-1)(t_n+1)(r_n+0+\sqrt{r_n})}$$

$$= \frac{(t-20)(r+r)}{(t+1)(r+0+\sqrt{r})} = \frac{-21 \times 4}{0 \times 14} = \frac{-4 \times 2}{0} = \frac{-6}{0} = -1,2$$

گزینه ۱

پایانخ اهرام : وقتی صورت یا مخرج یا هر دو توابع مشتقی باشند:

با استفاده از روابط مشتقی می توان اهرام را ریاضی کنیم.

مثال: حدی زیر را بیابید.

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= \cos \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} - \sin \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2 \cos 0 = 2 \times 1 = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

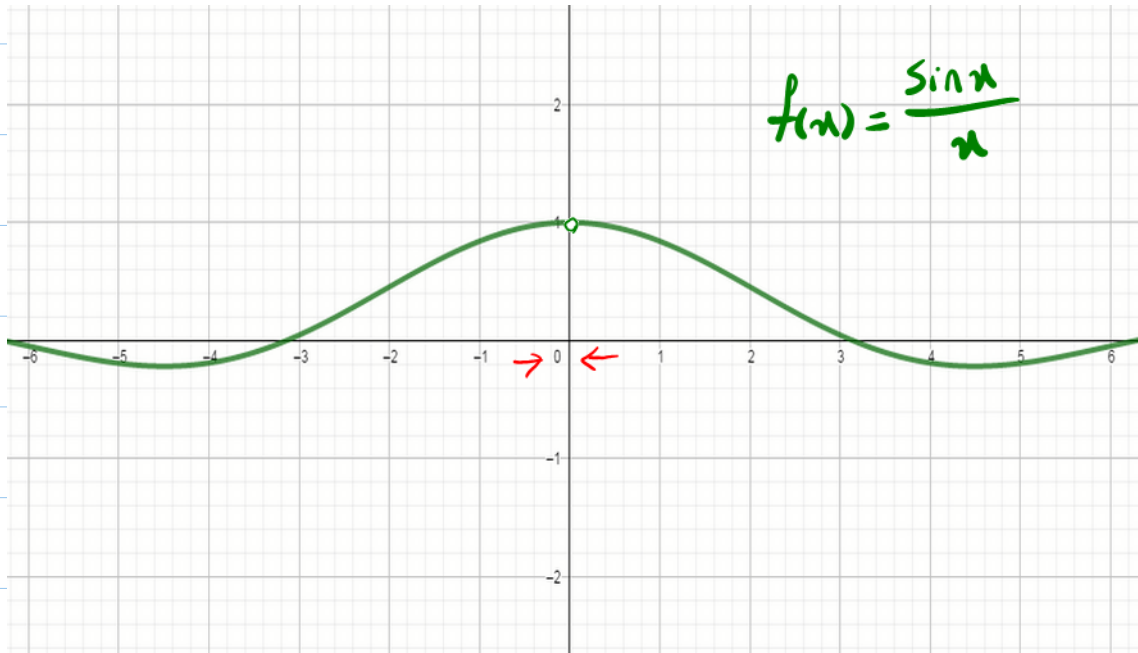
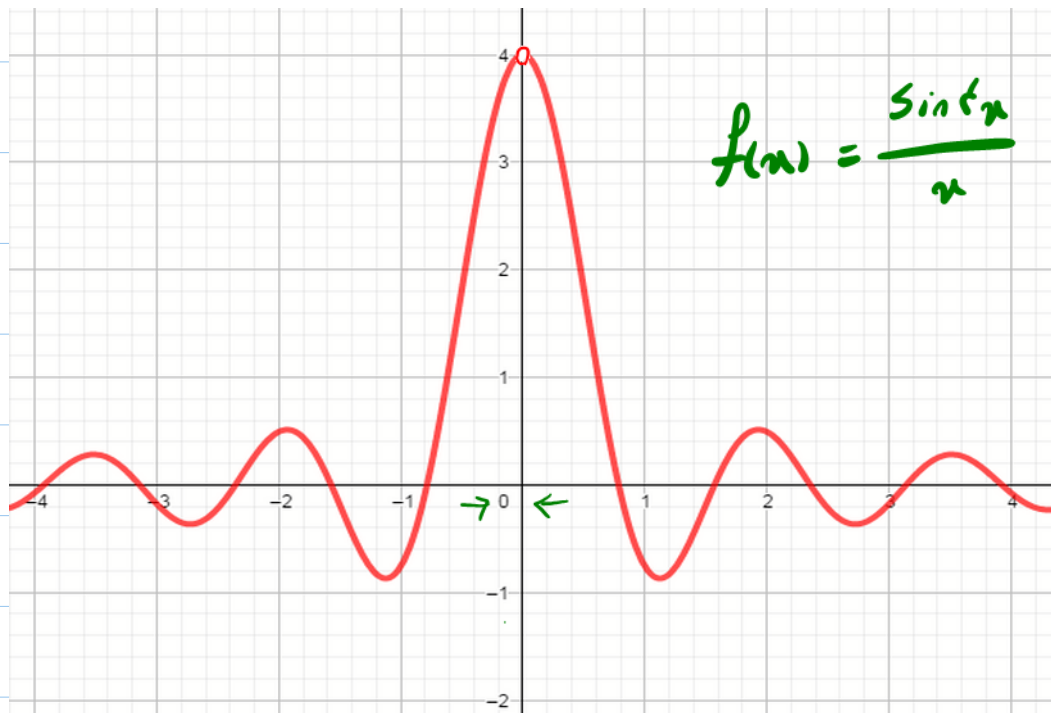
$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(2 \sin^2 x \cos^2 x)}{2 \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x}{2 \cos^2 x} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2} = 2 \times 1 = 2$$



نکته: با توجه به همزاد راجع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

در حالت کلی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = m$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = m$$



سؤال: حد زیر را بیابید.

الف) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2n}{n^2}$

$\cos 2n = 1 - 2\sin^2 n$

ضرب کنیم $2\sin^2 n = 1 - \cos 2n$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 n}{n^2} = 2 \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 = 2 \times 1^2 = 2 \times 1 = 2$$

ب) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2n)(1 + \cos n)}{n \sin n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 n (1 + \cos n)}{n \sin n}$

صورت و مخرج
بر n^2 تقسیم کنیم $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{2\sin^2 n}{n^2} (1 + \cos n)}{\frac{n \sin n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 (1 + \cos n)}{\frac{\sin n}{n}}$

$$= \frac{2 \times 1 \times (1 + 1)}{1} = 2$$

ج) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2n} - \sqrt{\cos n}}{n^2} \times \frac{\sqrt{\cos 2n} + \sqrt{\cos n}}{\sqrt{\cos 2n} + \sqrt{\cos n}}$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\cos 2n - \cos n}{n^2 (\sqrt{\cos 2n} + \sqrt{\cos n})}$$

$\sqrt{\cos 0} + \sqrt{\cos 0} = 1 + 1 = 2$



$$= \frac{1}{r} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1 - r \sin^r \frac{r_n}{r}) - (1 - r \sin^r \frac{n}{r})}{n^r}$$

$$= \frac{1}{r} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{r \sin^r \frac{n}{r} - r \sin^r \frac{r_n}{r}}{n^r}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^r \frac{n}{r}}{n^r} - \frac{\sin^r \frac{r_n}{r}}{n^r} \right) = \lim_{n \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\sin \frac{n}{r}}{n} \right)^r - \left(\frac{\sin \frac{r_n}{r}}{n} \right)^r \right)$$

$$= \left(\frac{1}{r} \right)^r - \left(\frac{r}{r} \right)^r = \frac{1}{r} - \frac{r}{r} = -\frac{1}{r} = -r$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} \left([rn] + [-rn] \right) \frac{1 - \cos^r n}{1 - \sqrt{1 + nr}}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} [rn] + [-rn] = 0 - 1 = -1$$

$$n \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} [rn] + [-rn] = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} [rn] + [-rn] = -1 + 0 = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^r n}{1 - \sqrt{1 + nr}} \times \frac{1 + \sqrt{1 + nr}}{1 + \sqrt{1 + nr}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos n)(1 + \cos n + \cos^r n)(1 + \sqrt{1 + nr})}{1 - (1 + nr)}$$

حاجه لازم



$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(r \sin^r \frac{n}{r})(1 + \cos n + \cos^r n)(1 + \sqrt{1+n^r})}{-n^r}$$

$$= -r \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^r \frac{n}{r}}{n} \right)^r \times (1+1+1)(1+1) = -r \times \left(\frac{1}{r} \right)^r \times 4 = -r^{\frac{1}{r}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} \left([r n] + [-r n] \right) \frac{1 - \cos^r n}{1 - \sqrt{1+n^r}} = -1 \times (-r) = r$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n^r - |n| \sin^r n}{r n^r - |n| \sin^r n} = \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n^r - (-n) \sin^r n}{r n^r - (-n) \sin^r n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n^r + n \sin^r n}{r n^r + n \sin^r n} \xrightarrow{\div n^r} \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{\frac{n^r}{n^r} + \frac{n \sin^r n}{n^r}}{\frac{r n^r}{n^r} + \frac{n \sin^r n}{n^r}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{1 + \frac{\sin^r n}{n}}{r + \frac{\sin^r n}{n}} = \frac{1+4}{r+1} = \frac{5}{r}$$

مثال: تکثیر ریاضی ۹۹ (خارج)

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3n} - \sqrt{2-n}}{\sqrt{2\sin^2 \frac{n}{r}}} \times \frac{\sqrt{2+3n} + \sqrt{2-n}}{\sqrt{2+3n} + \sqrt{2-n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{2+3n - (2-n)}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{n}{r} \right| (\sqrt{2+3n} + \sqrt{2-n})} = \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{4n}{\sqrt{2} (-\sin \frac{n}{r})} \times \frac{1}{\sqrt{2+3n} + \sqrt{2-n}}$$

$(n \rightarrow 0^- : \frac{n}{r} \text{ رادیان} \rightarrow \sin \frac{n}{r} < 0)$

$$= -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n}{\sin \frac{n}{r}} = -\lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{\sin \frac{n}{r}}{n}} = -\frac{1}{\frac{1}{r}} = -r$$

گزینه ۱

روش تغییر متغیر برای رفع ابهام ÷

در این روش عامل صفرکننده را برابر متغیر جدیدی مانند t می‌گیریم و با عوض کردن متغیر

حد را ساده می‌کنیم.

مثال: حدهای زیر را می‌سبب کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{2x - \pi}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = t \quad \text{عزل ابهام}$$

$$(x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \rightarrow 0)$$

$$\begin{cases} x = t + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2t + \frac{\pi}{2} \\ 2x - \pi = 2t - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t + \frac{\pi}{2}) - 1}{2t + \frac{\pi}{2} - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - 1}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{(1 - \cos 2t)}{2t}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 t}{t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \sin t$$

$$= -\frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0$$



$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{\sin rn}{\cos rn}$$

$$rn - \frac{\pi}{r} = t$$

$$(n \rightarrow \frac{\pi}{r} \Rightarrow t \rightarrow 0)$$

$$\begin{cases} n = t + \frac{\pi}{r} \\ rn = rt + \pi \\ rn = rt + r\frac{\pi}{r} \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(rt + \pi)}{\cos(rt + r\frac{\pi}{r})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin rt}{\sin rt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin rt}{t}}{\frac{\sin rt}{t}} = \frac{-r}{r}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت سوم: تعریف حد بی نهایت

جلسه سوم: صفحات ۴۶ تا ۵۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

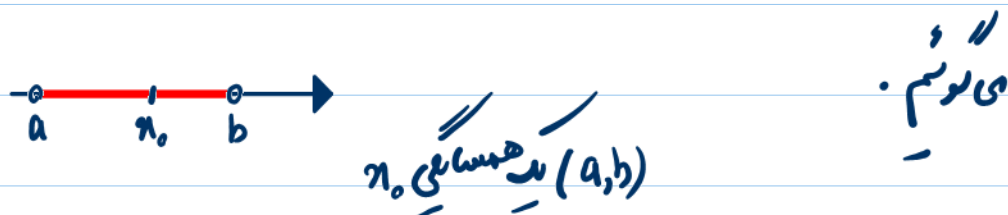
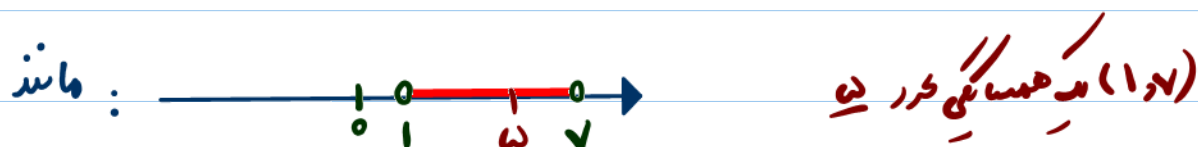
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف همسایگی: اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوئیم.

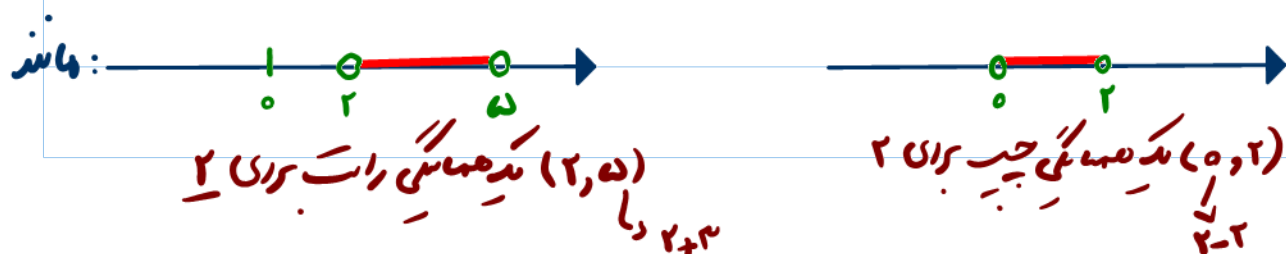


تعریف همسایگی فذوف: اگر x_0 را از همسایگی بازش خارج کنیم، همسایگی محذوف x_0 می‌آید.



تعریف همسایگی راست و چپ: اگر r عددی حقیقی مثبت باشد بازه $(x_0, x_0 + r)$ را یک همسایگی راست x_0 و بازه $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

یک همسایگی راست x_0 و بازه $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.



مثال: اگر بازه $(a-3, 2a+1)$ همسایگی عدد یک باشد، عدد a را بیابید.

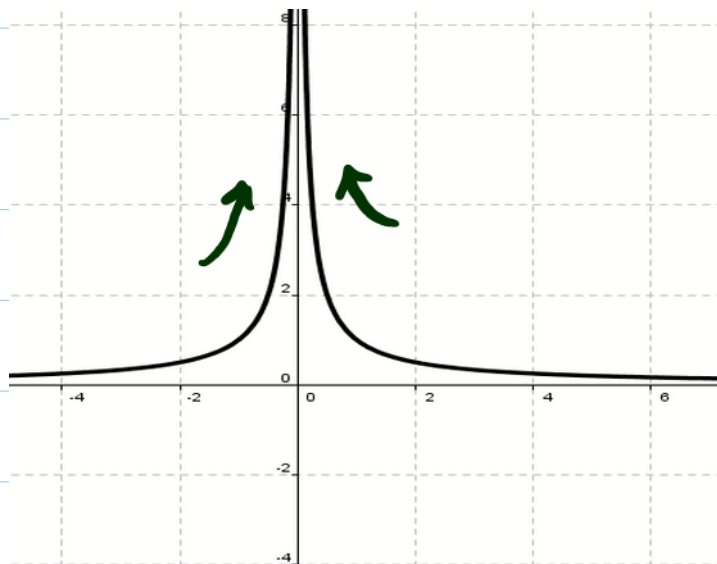
$$a-3 < 1 < 2a+1$$

$$\begin{cases} a-3 < 1 \rightarrow a < 4 \\ 2a+1 > 1 \rightarrow 2a > 0 \rightarrow a > 0 \end{cases} \quad \cap \rightarrow 0 < a < 4$$

می‌خواهیم حد تعجب $f(x) = \frac{1}{|x|}$ را در $x=0$ بررسی کنیم. تابع در $x=0$ تعریف نمی‌شود.

رنگ همسایگی حذف و وجود دارد.

x	-1/5	-1/1	-1/2	-1/3	$\rightarrow 0$	1/3	1/2	1/1	1/5
$y = f(x)$	5	1	2	3	$+\infty$	$+\infty$	3	2	5



تعریف: فرض کنید f در یک همسایگی معدوم a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f با a

و هابی که آن افزایش یا بند حتی از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر شوند، به شرطی که

مقادیر متغیر x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشند می نویسم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

در این صورت می گوئیم تابع f در a حد نامتناهی (مثبت بی نهایت) دارد

تذکر: اگر باشد طبق تعریف بالا:

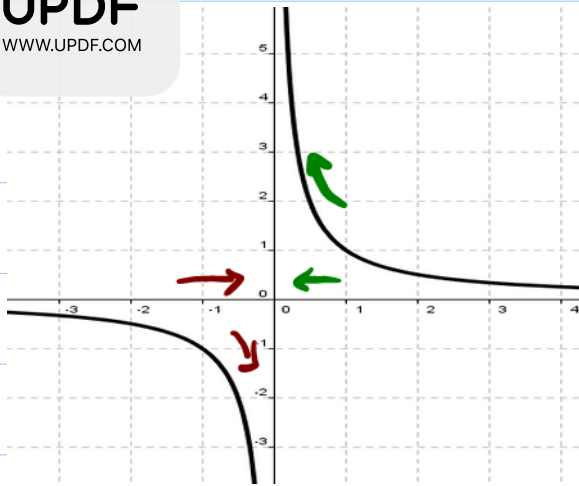
۱- مقادیر تابع f با x و y ها کاهش یابد می نویسم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

۲- f در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده باشد، و مقادیر تابع f کاهش یا افزایش یابند

به ترتیب می نویسم: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

۳- f در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد، و مقادیر تابع f کاهش یا افزایش یابند

به ترتیب می نویسم: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$



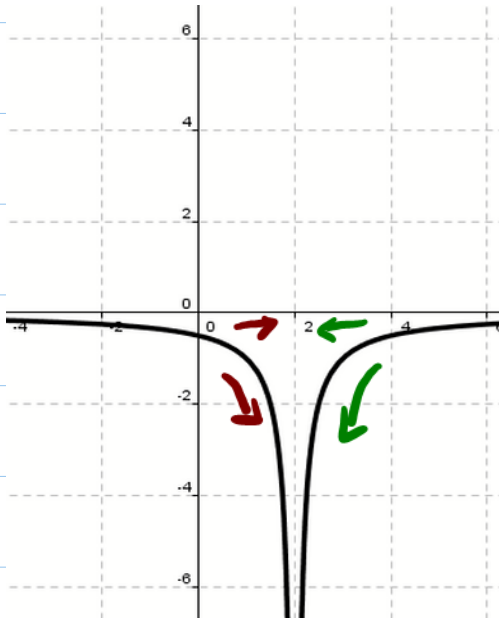
: $\dot{u}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

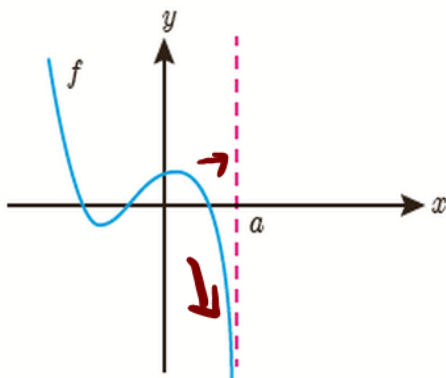


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 2^+$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow a^-$$

معاسبه حدی بنهایی :

اگر $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = L \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow a} g(n) = 0$ آنوقت $y = \frac{f(n)}{g(n)}$ در نقطه a حدی ندارد.

یا حدی بنهایی دارد و علامت بی بنهایی با توجه به علامت L و علامت منفی حدی y و

در یک همسانی معذوف a قس می شود. این نکته برای حدیپ و حدیپ هم در یک است.

پس : $\frac{\infty}{\infty}$ (در حدی بنهایی به بیست یک حدیپ می کند و جواب حدی بنهایی می شود)

نکته : برای تشخیص علامت منفی حدی با توجه به علامت y و علامت از حدی گذری مقارن

نزدیک a یا جدول قس علامت در صورت اینست y مثلاً y باشد از زاویه مثلاً y

استفاده می کنیم. همچنین در صورتی که حدیپ و علامت منفی y باشد باید هر یک

را جداگانه بررسی کرد.

کار در کلاس

۱) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{5-5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{5^+-5} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

$$\begin{array}{c|c} x & \rightarrow 5 \\ \hline x-5 & - \quad 0 \quad + \end{array}$$

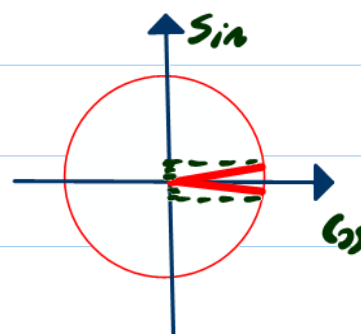


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{(0^+)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|0^\pm|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{-1}{|0^\pm|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(0^\pm)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



مثال: حد های زیر را بیابید.

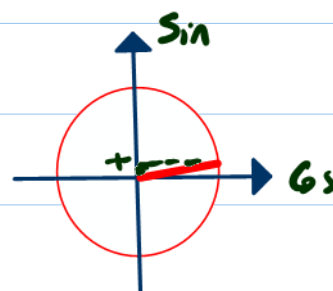
$$1) \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{n-1}{n-n^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$x(1-x^2)$ ✓ $\begin{array}{c|c|c|c|c|c} - & - & 0 & + & - & - \\ \hline + & 0 & - & 0 & + & - \end{array}$

$$2) \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{2n-1}{(n-2)^2} = \frac{2 \times 1 - 1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

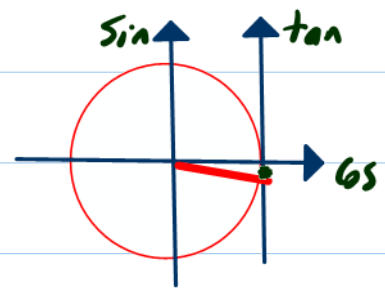
$\swarrow$
 $1, 9$

$$3) \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1+\cos n}{\sin n} = \frac{1+1}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

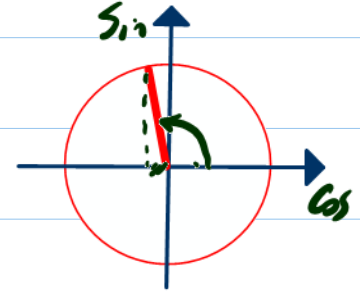




$$f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 1}{\tan x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

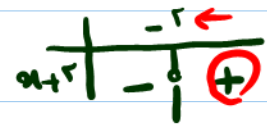


$$d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^+} \frac{\cos x - 1}{\cos x} = \frac{\cos \frac{\pi}{r} - 1}{0} = \frac{\cos \pi - 1}{0} = \frac{-1 - 1}{0} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

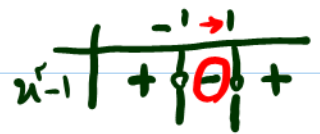


$$7) \lim_{x \rightarrow -r^+} \frac{x+1}{x+r} = \frac{-r+1}{-r+r} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

-1,9



$$v) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]-1}{x^r-1} = \frac{0-1}{(1^-)^r-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$



$$1) \lim_{x \rightarrow r} \frac{-(x)-1}{x^r-r} \begin{cases} x \rightarrow r^+ : \frac{-r-1}{0^+} = -\frac{r}{0^+} = -\infty \\ x \rightarrow r^- : \frac{-1-1}{0^-} = -\frac{r}{0^-} = +\infty \end{cases}$$



$$9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} \frac{\tan x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{(0^+)^r} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$1.) \lim_{x \rightarrow r} \frac{-x}{x^r-0x+7} = \frac{-r}{0} \begin{cases} x \rightarrow r^+ : \frac{-r}{0^-} = +\infty \\ x \rightarrow r^- : \frac{-r}{0^+} = -\infty \end{cases}$$





$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{0}{0}$$

کامل‌ترین (x-1)

$$x \rightarrow 1^-$$

روش هورنر: برای تقسیم درجه درجه درجه

$$x^3 - x^2 - x + 1 \overline{) x^3 - 3x + 2}$$

شماره مقسوم علیه

1	-1	-1	1
$1 \times 1 - 1 = 0$	$1 \times 0 - 1 = -1$	$1 \times (-1) + 1 = 0$	
↓	↓	↓	
$x^2 + 0x - 1$			

باقی مانده

درم‌اش یک واحد

شماره از مقسوم

خارج قسمت: $x^2 + 0x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{1-2}{0} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، a و b را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2+ax+b} = -\infty$$

۲ رشته مفاعف معزج است پس:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= x^2 + ax + b \\ x^2 - 4x + 4 &= x^2 + ax + b \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

درس دوم: حد در بی نهایت

جلسه چهارم: صفحات ۵۹ تا ۶۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

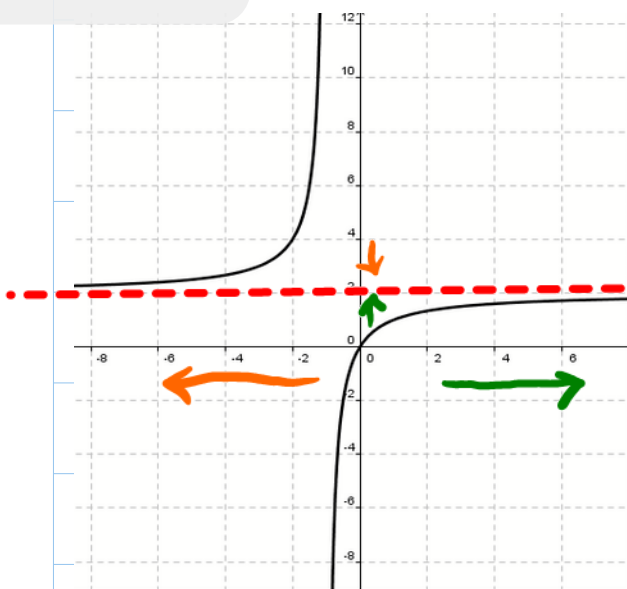
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

حد در بی نهایت :



می‌خواهیم رفتار تابع $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ را برای

برخی مقادیر مثبت، منفی و در جدول زیر بررسی کنیم.

x	$+\infty \rightarrow$	1000	100	10	1	0	-10	-100	-1000	$-\infty \leftarrow$
$f(x)$	$2 \rightarrow$	1.999	1.99	1.98	1.81	2	2.2	2.2	2.002	$2 \leftarrow$

تعریف: فرض کنید تابع f در بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، مقدار تابع f به هر اندازه

که بخواهیم به عدد حقیقی L نزدیک شوند به شرطی که مقدار متغیر x به اندازه کافی بزرگ

انتخاب شده باشد در این صورت می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

تذکره: اگر در تعریف بالا، بازه $(-\infty, a)$ و مقدار متغیر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شوند

می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

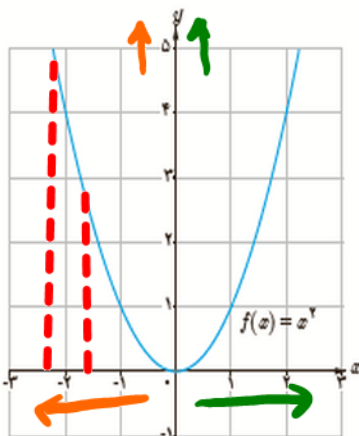
نکته: در حد در بی نهایت x به سمت مثبت یا منفی بی نهایت میل می‌کند و جواب حد عددی است.

نکته: در برخی توابع، وقتی به سمت بی نهایت میل می کند، مقدار تابع برخی مقادیر به هر اندازه

دلخواه بزرگ یا کوچک می شود، یعنی: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$. به این حالت حد نامشخصی در بی نهایت می گویند.

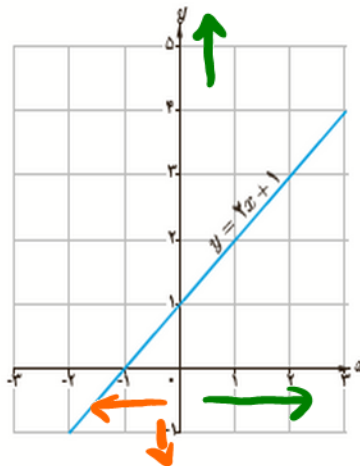
کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی ها را بنویسید.



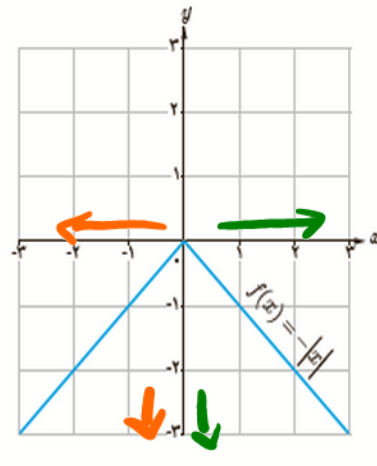
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$



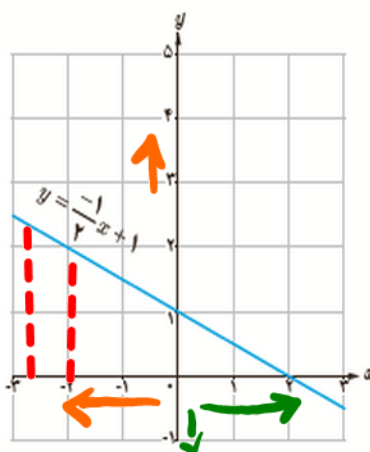
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$



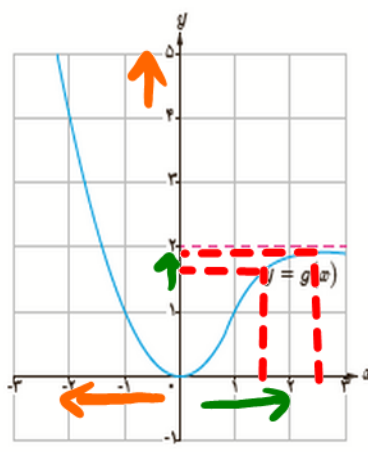
پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



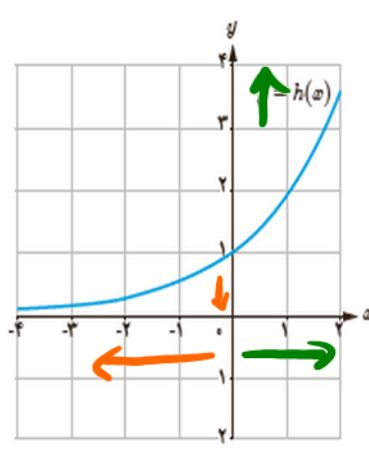
ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x} + 1\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} + 1\right) = -\infty$



ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$



ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

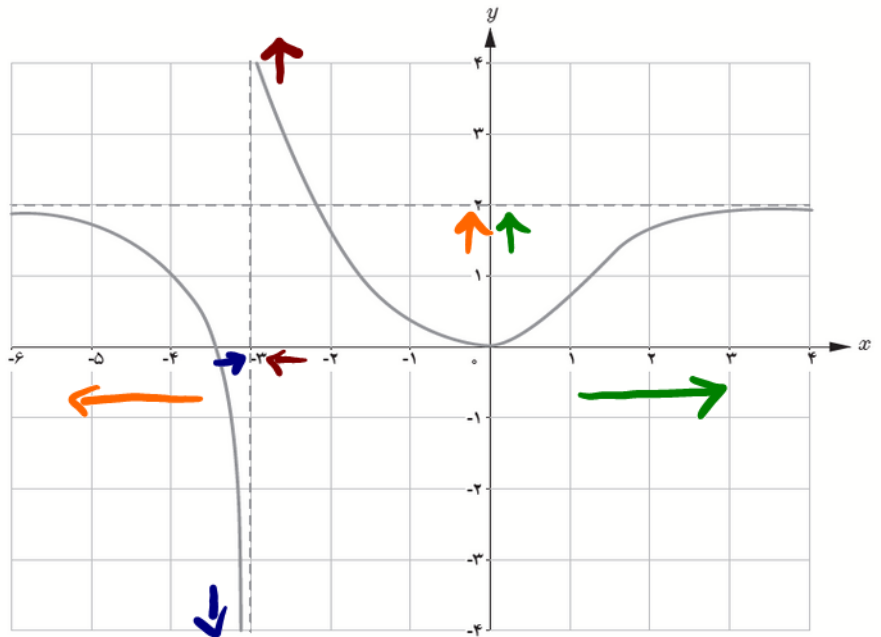
مثال: با توجه به نمودار توابع داده شده حدود خواسته شده را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = -\infty$$

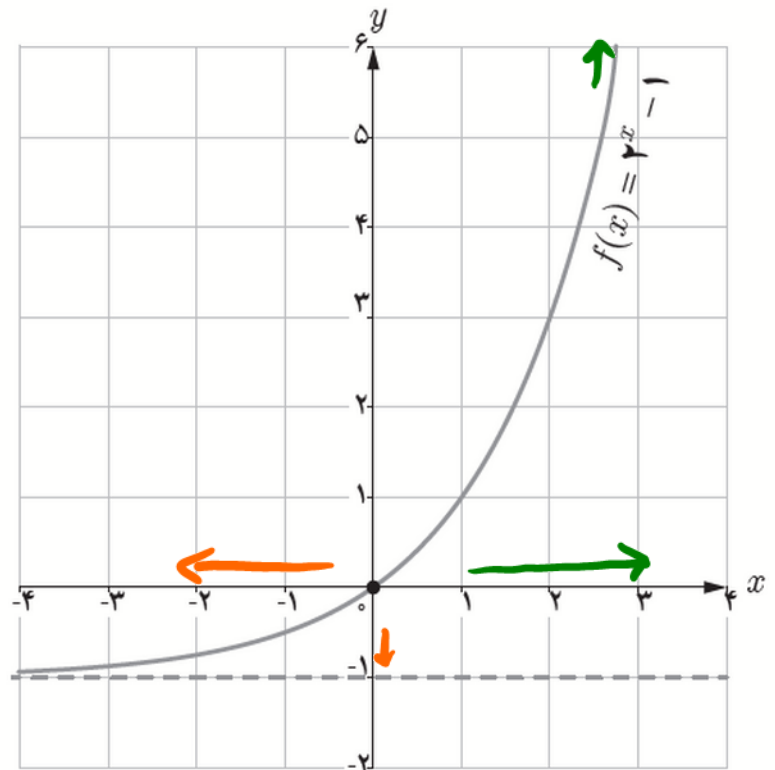
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$



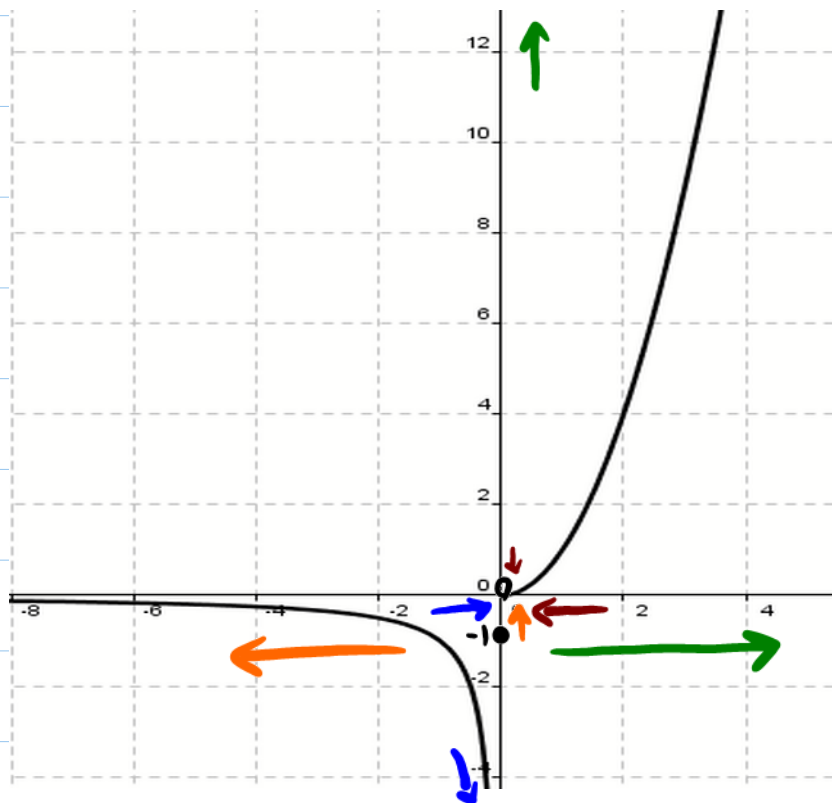
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بیابید.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases} : \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

محاسبه حد در بی نهایت از روی ضابطه :

۱۱) از قاعده های زیر، حد از جایگزینی $+\infty$ ، $-\infty$ به جای x ، در محاسبه حد در بی نهایت حاصل استفاده می کنیم. $(a \in \mathbb{R} - \{0\})$

$$۱) \quad a \times \infty = \infty$$

$$۲) \quad a + \infty = \infty$$

$$* ۳) \quad \frac{a}{\infty} = 0$$

$$۴) \quad \frac{\infty}{a} = \infty$$

$$۵) \quad (\infty)^a = \infty \quad (a \in \mathbb{N})$$

$$۶) \quad +\infty + \infty = +\infty$$

$$۷) \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$۸) \quad \infty - \infty : \text{حالت مبهم}$$

$$۹) \quad \infty \times \infty = \infty$$

$$۱۰) \quad \frac{\infty}{\infty} : \text{حالت مبهم}$$

$$۱۱) \quad \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$$۱۳) \quad a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\rightarrow 2^{+\infty} = +\infty$$

$$۱۴) \quad a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$$

$$\rightarrow 2^{-\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

۱۲) در محاسبه حد درجی نهایت چند جمله‌ای های درجه n ، از محاسبه‌ای که توان متغیر را کمتر از n داشته باشد، استناد از نکته ۲

۱۳) برای محاسبه حد درجی نهایت توابع گسری که صورت و مخرج چند جمله‌ای هستند، استناد از نکته ۲

(شماره می‌کنیم و از درجات کمتر صرف نظر می‌کنیم. سه حالت رخ می‌دهد:

الف) درجه صورت از مخرج بیشتر است. در این حالت حد نامتناهی می‌شود یعنی $+\infty$ یا $-\infty$.

ب) درجه صورت و مخرج برابر هستند. در این حالت با تقسیم ضرایب متغیر، مقدار حد محاسبه می‌شود.

ج) درجه مخرج از صورت بیشتر است. در این حالت مقدار حد صفر می‌شود.

۱۴) هدف از صورت یا مخرج عبارت رادیکالی داشتیم، از درجات کوچکتر از درجه عبارت

زیر رادیکال صرف نظر می‌کنیم و در صورت امکان عبارت را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم.

کار در کلاس

۱) مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x-1}$

ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t}$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-3x}$

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$ ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-5t^2}{t^2} = -5$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-3x} = 0$ $\frac{1}{-\infty} = 0$



$$\text{الف) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{-n+2} = -1$$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد
ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر 100 باشد.

$$\text{ب) } \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{100n}{n+2} = 100$$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{\sqrt{x^3 - 1} \sqrt{x^2 - 6x}}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$$

$$\text{الف) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{\sqrt{n^3}} = \frac{2}{\sqrt{1}}$$

$$\text{ب) } \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{5n}{n^3} = 0 \quad \frac{5}{\infty} = 0$$

$$\text{پ) } \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-4n^7}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow -\infty} -2n^4 = -2 \times (+\infty) = -\infty$$

مثال: حدهای زیر را بیابید

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + x + 1}{x^3 - x + 3} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{5n^3}{n^3} = 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow -\infty} n = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-n^3}{2n^3} = -\frac{1}{2}$$



$$r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(r x^r - 1)(x+1)}{x^r - r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r n^r}{n^r} = r$$

$$u) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{r x^r + 1}}{r x - r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{r n^r}}{r n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{r} |n|}{r n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^r + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{|n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

$$v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r x^r - \sqrt{x - r}}{\omega x^r - \sqrt{x + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r n^r}{\omega n^r} = \frac{r}{\omega}$$

$$\wedge) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r + \sqrt{x^r + r x + 1}}{\omega x^r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r + \sqrt{n^r}}{\omega n^r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r + n^{\frac{r}{2}}}{\omega n^r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r n^r}{\omega n^r} = \frac{r}{\omega}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی -

حد در بی نهایت

جلسه پنجم: مجانب‌ها

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف جانب یک منتهی :

خطی است که فاصله منتهی از آن در بی نهایت به هم نزدیک می شود.

۱) جانب قائم :

خط $x=a$ را جانب قائم بنزد f می نامیم هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر

برقرار باشد :

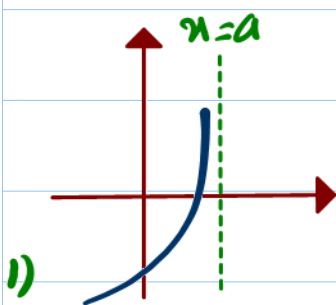
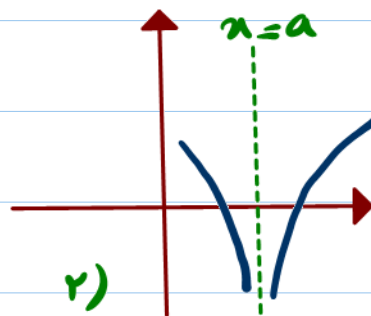
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

مانند :



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



مثال: بجانب قائم مندر را تابع $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ را بدست آورید.

حد تابع را در $x = -1$ یعنی ریشه منفرجه حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

مند را در این تابع اطراف بجانب قائم مانند (۲) است.

نکته: در توابع گسسته ریشه منفرجه مسقط بجانب قائم بودن هستند. اگر حد تابع در این نقاط

بی نهایت شود رنگه خط (ریشه منفرجه $x =$) بجانب قائم است.

تذکره (۱): در توابع گسسته که صورت و منفرجه ضلع جدا هستند، اگر ضابطه تابع را ساده کنیم به طوری

که حاصل مشترک در صورت و منفرجه نباشد، به طریقی قطع ریشه منفرجه بجانب قائم

هستند.

مثال: مندر را تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 - x - 6)(x - 4)}$ چند بجانب قائم دارد؟

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-4)(x+2)(x-6)} = \frac{x-1}{(x+2)(x-6)}$$

پس $x = -2$ و $x = 4$ جواب‌های قائم‌اند.

تذکره ۱۲ در توابع گری که صورت $y = f(x)$ پذیرفته، اگر در نقطه‌ای حد موجود

حد صورت حدی غیر منتهی شود، نمودار در آن نقطه جواب قائم دارد. دقت کنید

برای این که حد صورت $y = f(x)$ تعریف شود باید تابع حداقل درست یک بار از آن نقطه

تویند باشد.

مثال: نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)}$ چند جواب قائم دارد؟

فقط یک جواب قائم $x = 0$ دارد. دقت کنید چون $D = (0, +\infty)$ پس تابع

در اطراف $x = -2$ تویند نشده است.

مثال: به ازای چه مقدار a تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2+ax+9}$ فقط یک جواب قائم دارد؟

دو حالت داریم:

۱) معجزه رخ می‌دهد و جواب داشته باشد: $a^2 - 4 \times 9 = 0 \Rightarrow a = \pm 6$

۱۳ فقط یکی از ریشه‌های معادله با هم‌رست برابر باشد تا بعد از ساده کردن صورت معادله

ریشه برای معادله باقی بماند.

پس $n=1$ باید ریشه معادله هم باشد،
 $n=1 : 1^2 + a(1) + 9 = 0 \Rightarrow a = -10$

$n=9$ معادله هم $\Rightarrow f(n) = \frac{n-1}{n^2-10n+9} = \frac{n-1}{(n-1)(n-9)}$

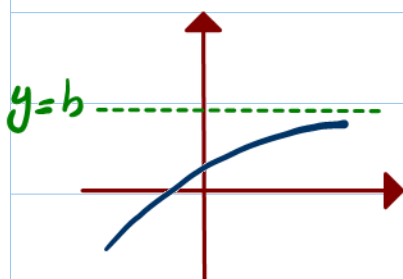
پس برای $a = \pm 6, a = -10$ این تابع فقط یک ریشه دارد.

۱۲ معادله انتی:

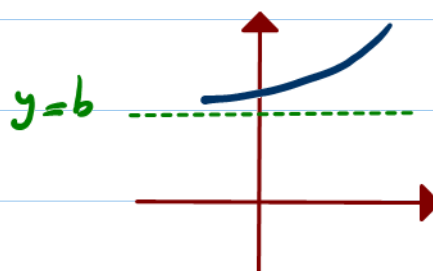
خط $y=b$ را معادله انتی می‌نامیم هرگاه صدق یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = b$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = b$

مانند:



$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = b$



$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = b$

پس برای یافتن معادله انتی تابع f کافی است معادله f را وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ بنویسیم.

مثال: معادله انتی $f(x) = \frac{x}{2x - |x - 1|}$ را بنویسیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x - (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x + (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3x - 1} = \frac{1}{3}$$

پس معادله تابع دو معادله انتی $y = 1$ و $y = \frac{1}{3}$ دارد.

مثال: معادله تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ در مجرای معادله انتی $y = 1$ چگونه است؟

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$$

معادله انتی $f(x) < 1 \rightarrow \frac{3}{x+2} \rightarrow 0^+ : x \rightarrow +\infty$

معادله انتی $f(x) > 1 \rightarrow \frac{3}{x+2} \rightarrow 0^- : x \rightarrow -\infty$

پس افکار $y=1$ و $y=0$ را به صورت : 

مثال: مقدار تابع $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 2}$ را برای $x \rightarrow \pm\infty$ محاسبه کنید. حد m

را بیابید.

محدوده $y=0$ $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

پس باید $f(x) = 0$ جواب نداشته باشد. مقدار f خط $y=0$ را قطع نکند.

$$\frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 2} = 0 \rightarrow x^2 + mx + 1 = 0 : \Delta = m^2 - 4 < 0$$

$$\Rightarrow -2 < m < 2$$

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

مضامین: مسکن

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

قسمت اول

جلسه اول: صفحات ۷۲ تا ۷۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

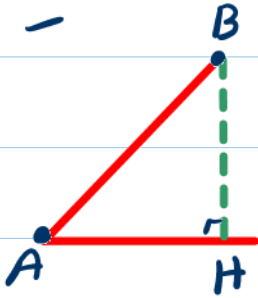
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

آپنه تابه حال در باره شیب داشته ایم :

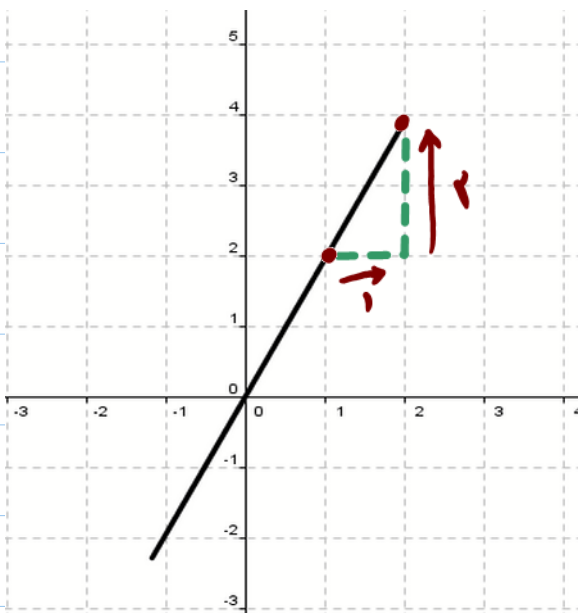
مفهوم فیزیکی شیب: نسبت افزایش ارتفاع به مسافت افقی طی شده را شیب سطح شیب‌دار می‌گوئیم.



$$\text{شیب} = \frac{BH}{AH}$$

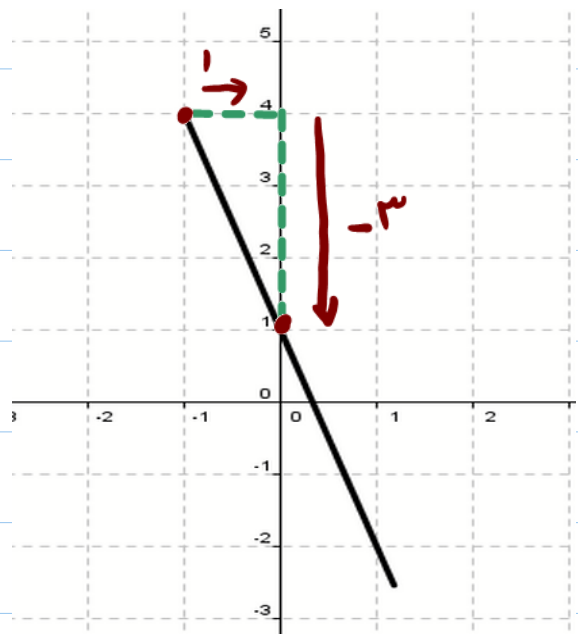
شیب خط: وقتی می‌گوئیم شیب خطی m است یعنی به ازای افزایش یک واحد متغیر x

متغیر y به اندازه m واحد افزایش یا کاهش می‌یابد.



الف)

$$m=2$$



ب)

$$m=-3$$

نکته: الف) هرگاه دوی محور x ها از چپ به راست حرکت کنیم و دوی خط y باشد

برویم، شیب خط مثبت خواهد بود.

ب) هرگاه دوی محور x ها از چپ به راست حرکت کنیم و دوی خط y به پائین سرخیزیم

شیب خط منفی خواهد بود.

ج) اگر خط موازی محور x ها باشد شیب خط صفر است (خطهای افقی)

د) اگر خط موازی محور y ها باشد شیب خط تعریف نشده است (خطهای قائم)

یافتن شیب خط با داشتن دو نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از خط l باشند، شیب این خط برابر

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{است! :}$$

نوشتن معادله خط با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ نقطه ای از خط l باشد و شیب m باشد معادله این خط

از رابطه زیر جهت می‌گیرید :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه به مختصات $(1, -6)$ و $(-4, -2)$ بگذرد

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 + 6}{-4 - 1} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5} \rightarrow y + 6 = -\frac{4}{5}(x - 1)$$

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{4}{5} - 6 \rightarrow y = -\frac{4}{5}x - \frac{26}{5}$$

رابطه شیب خط و تانژانت: تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ‌ها می‌سازد برابر شیب خط است.

تذکره: (الف) به معادله‌های به شکل $y = mx + h$ معادله رتاناژار خطی می‌گویند که m شیب خط و h عرض از مبدأ (عل بر خیز خط با محور y ‌ها) است.

(ب) به معادله‌های به شکل $ax + by + c = 0$ صورت کلی خطی می‌گویند که شیب از $-\frac{a}{b}$ به دست می‌آید.

مثال: شیب خط‌های زیر را بیابید.

۱) $x = 1 \rightarrow m$: تعریف نشده

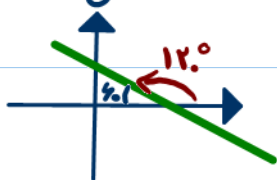
۲) $y = \sqrt{3}x - 4 \rightarrow m = \sqrt{3}$

۳) $y = -2 \rightarrow m = 0$

۴) $4x + 12y - 10 = 0 \rightarrow m = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

۵) $5x = 3y + 1 \rightarrow 3y = 5x - 1 \xrightarrow{:3} y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \rightarrow m = \frac{5}{3}$

۶)



$m = \tan 12^\circ = \tan(180^\circ - 12^\circ) = -\tan 12^\circ = -\sqrt{3}$

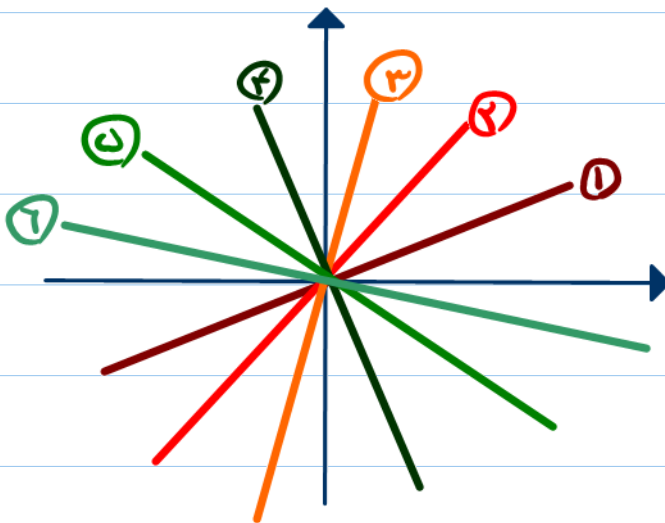
نکته: در خط‌های با شیب مثبت، هر چه خط به محور y ها نزدیک‌تر شود، شیب آن

بیشتری شود و در خط‌های با شیب منفی، هر چه خط به محور x ها نزدیک‌تر شود

شیب آن افزایش می‌یابد.

مثال: شیب خط‌های داده شده، معبره $\{2, 1, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 2\}$ است.

هر شیب مربوط به کدام خط است؟



$$m_1 = \frac{1}{2}$$

$$m_4 = -2$$

$$m_2 = 1$$

$$m_5 = -1$$

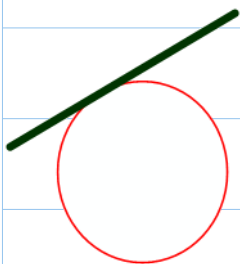
$$m_3 = 2$$

$$m_6 = -\frac{1}{2}$$

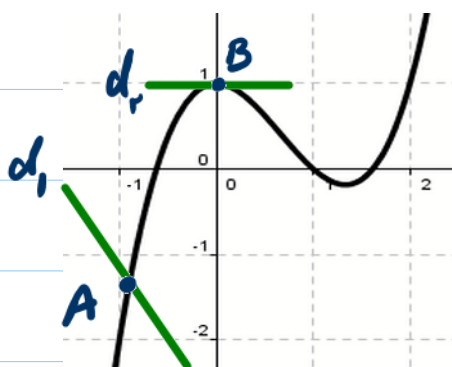
خط مماس بر منحنی :

در هندسه ، خط مماس بر دایره ، خطی تعریف می شود که دایره را فقط در یک نقطه قطع می کند .

ولی این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی ها صادق نیست .



همواره تابع زیر را در نظر بگیرید .



وزن خط احساسی خط d_2 در B

بر تابع مماس است ولی خط d_1 در A

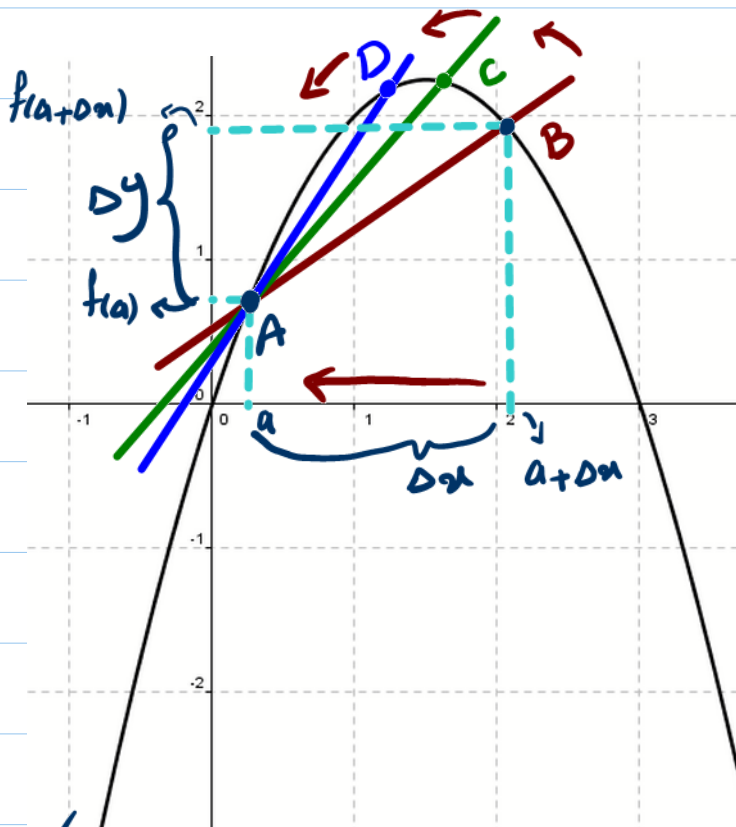
بر منحنی تابع مماس نیست .

تعریف فیردین از خط مماس :

خط راستی است که منحنی تابع را در آن نقطه فقط لمس می کند . به صورت فیردین

خطی ترف می شود که از دو نقطه واقع بر منحنی که بی نهایت به یکدیگر نزدیک می شوند

مثال: تابع $y = -x^2 + 3x$ را از نظر بگیرید.



هر خطی که از دو نقطه منحنی می گذرد

را خط قاطع می گوئیم مانند:

AB, AC, AD .

فرض کنید نقطه A ثابت باشد و نقطه B را به نقطه A نزدیک و نزدیک تر می کنیم.

این عمل به تدریج این است که $\Delta x \rightarrow 0$. ضمن انجام این عمل، خط قاطع حول

نقطه ثابت A می گردد. این خط قاطع را رایی بد و ضمیمه می گویند.

همین ضمیمه می گویند که مایه ضمیمه خط مماس بر منحنی در نقطه A باشد.

حال اگر شیب خط قاطع AB را $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ در نظر بگیریم. بار دیگر این عمل را تکرار می‌کنیم.

خط قاطعی که به نقطه A بسیار نزدیک است به صورت: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ خواهد بود.

تعریف دقیق خط مماس:

فرض کنید تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه

$A(a, f(a))$ عبارت است از خطی که از نقطه A می‌گذرد و دارای شیب است

که از می به حد زیر بدست می‌آید:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرحی که این حد موجود باشد.

تذکره مهم: اگر حد بالا نامتناهی شود یعنی: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$ آنگاه خط مماس، خط

$x=a$ تعریف می‌شود.

نکته: اگر هیچکدام از حالت‌های بالا برقرار نباشد آنگاه خط مماس در A وجود ندارد.



سؤال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

$$a = x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7 \rightarrow A(-2, 7)$$

نقطه مماس

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-2 + \Delta x) - f(-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((-2 + \Delta x)^2 + 3) - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 3 - 7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x - 4)}{\cancel{\Delta x}} = 0 - 4 = -4$$

$$y - 7 = -4(x + 2)$$

$$y = -4x - 8 + 7 \rightarrow y = -4x - 1 :$$

معادله خط مماس در نقطه $A(-2, 7)$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

قسمت دوم

جلسه دوم: صفحات ۷۷ تا ۸۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در حله قبل با تعریف خط مماس آشنا شدیم. حال به بحث اصلی یعنی مشتق می پردازیم.

تعریف مشتق :

اگر $a \in D_f$ باشد مشتق تابع f در نقطه $x = a$ را با $f'(a)$ نشان می دهیم
و این گونه تعریف می کنیم :

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

همانطور که می بینید شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(a, f(a))$

دقیقاً برابر مشتق تابع f در $x = a$ است. به حد بالا شیب منحنی در a گفته می شود.

نکته: اکثر اوقات از h به جای Δx (استفاده می شود) و تعریف مشتق به این صورت

نوشته می شود :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



مثال: اگر $f(x) = 3x^2 + 7$ باشد، مشتق تابع f را وقتی $x = a$ بیابیم.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(a+h)}^{f(a+h)} - \overbrace{(3a^2 + 7)}^{f(a)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a^2 + 2ah + h^2) + 7 - 3a^2 - 7}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 - 3a^2}{h}$$

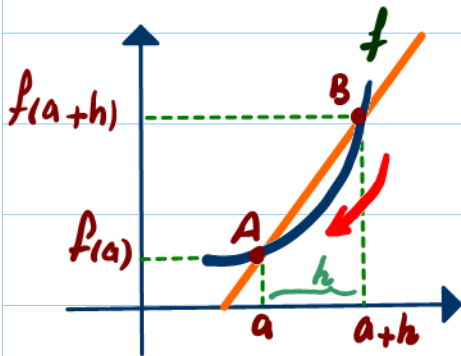
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 6ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3h + 6a)}{h}$$

$$= 3 \times 0 + 6a = 6a$$

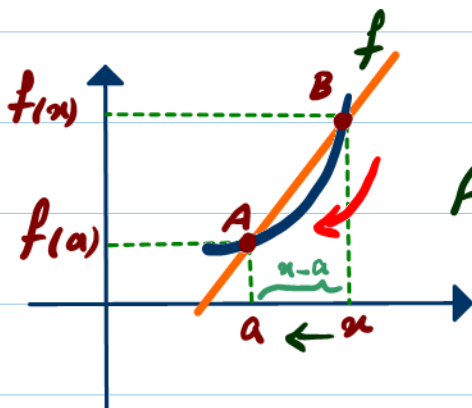
$$f'(a) = 6a$$

حالا می‌خواهیم با تعریفی در نهایتاً داری تعریفی دیگر از مشتق ارائه دهیم. به زیر دقت کنید.

زیر دقت کنید



$$A \text{ در } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$$A \text{ در } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریفی دیگر برای مشتق:

اگر $a \in D_f$ باشد، مشتق تابع f در $x=a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.



مثال: عرّف $f(x) = -x^2 + 10x$ ، $f'(1)$, $f'(0)$: نحل

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= -0^2 + 10 \times 0 \\ &= -0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 10x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x^2 - 10x + 0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x-0)^2}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} -(x-0) = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= -1^2 + 10 \times 1 \\ &= -1 + 10 = 9 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 10x - 9}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 - 10x + 9)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x-9)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} -(x-9)$$

$$= -(1-9) = 8$$



مثال: مقدار مشتق تابع $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-5)$ را در نقطه $x=5$ بیابید.

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1)\dots(x-5) - 0}{x-5}$$

$$f(5) = (5-1)(5-2)\dots(5-5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال: اگر $f(2) = 0$ و $f'(2) = -3$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2}$ را بیابید.

از اتحاد فرابج استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - f(2))(f(x) + f(2))}{(x-2)(x+2)}$$

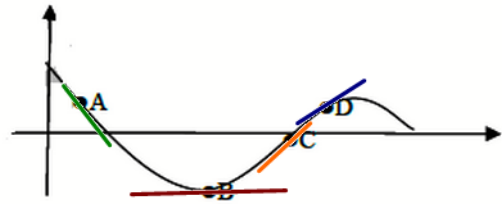
$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + f(2)}{x+2}$$

$$= f'(2) \times \frac{f(2) + f(2)}{2+2} = -3 \times \frac{2 \times 0}{4} = -3 \times \frac{0}{4}$$

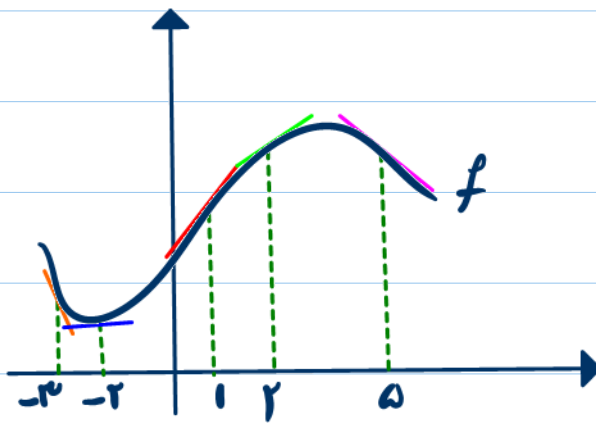
$$= -\frac{15}{2}$$

مثال: نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های داده شده در جدول نظر کنید.

شیب	1	0	$\frac{1}{2}$	-2
نقطه	C	B	D	A



مثال: با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.



درست زیرا خط مماس در $x=1$ شیب بیشتری دارد $f'(1) > f'(2)$ (درست)

درست زیرا خط مماس در $x=5$ شیب بیشتری دارد $f'(5) > f'(-3)$ (ب)

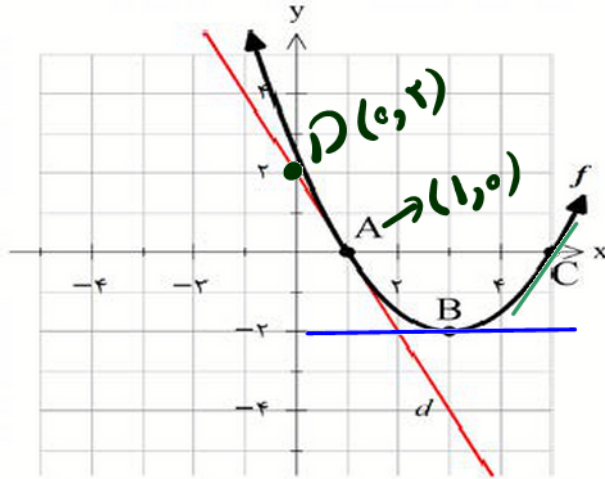
نادرست زیرا عدد منفی $f'(-2) < f'(5)$ (پ)

درست. $f'(-3) < f'(-2) < f'(2) < f'(1)$ (د)



در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = 1$ بر نمودار مماس شده است:
الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.
ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.

مثال:



شیب خط مماس بر f در نقطه $A = f'(1)$ (الف)

$$m_d = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = -2 \rightarrow f'(1)$$

ب) یک محاسبه
 $m_C > m_B$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

جلسه سوم: حل تمرین

صفحات ۸۱ و ۸۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2}$$

$3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 12 - 4 + 1 = 9$

$3x^2 - 2x - 8 \div x - 2$

درج هدر

۳	-۲	-۸
۳	$2 \times 3 - 2 = 4$	$2 \times 2 - 8 = -4$

باقی‌مانده: $3x + 4$

باقی‌مانده

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = 3 \times 2 + 4 = 10$$

$m = f'(2) = 10$ $A(2, f(2)) \Rightarrow A(2, 9)$

مماس

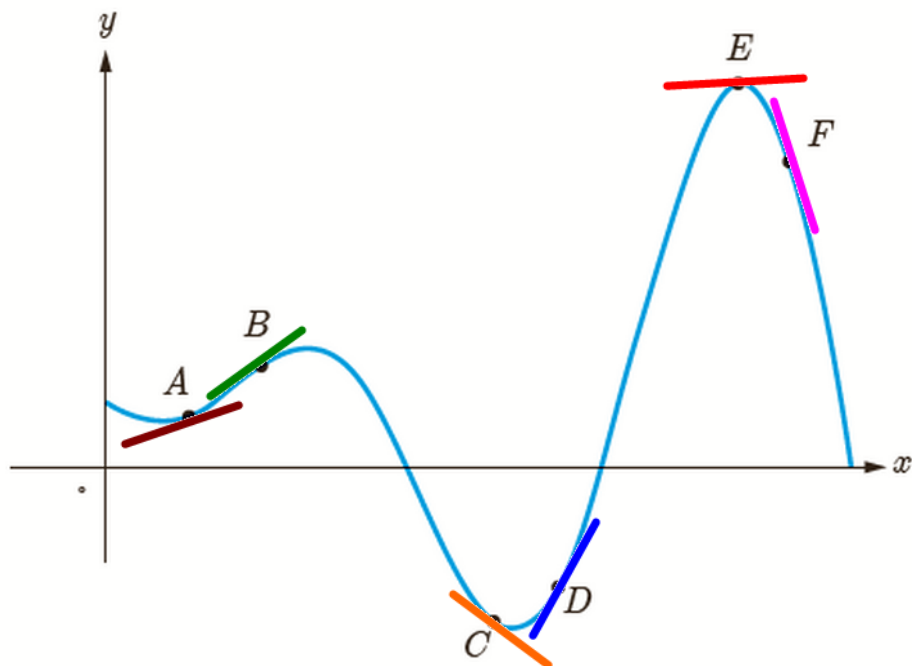
$$y - 9 = 10 \cdot (x - 2)$$

$$y = 10x - 20 + 9 \Rightarrow y = 10x - 11$$

معادله خط مماس

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A : m_1

ب) شیب نمودار در نقطه B : m_2

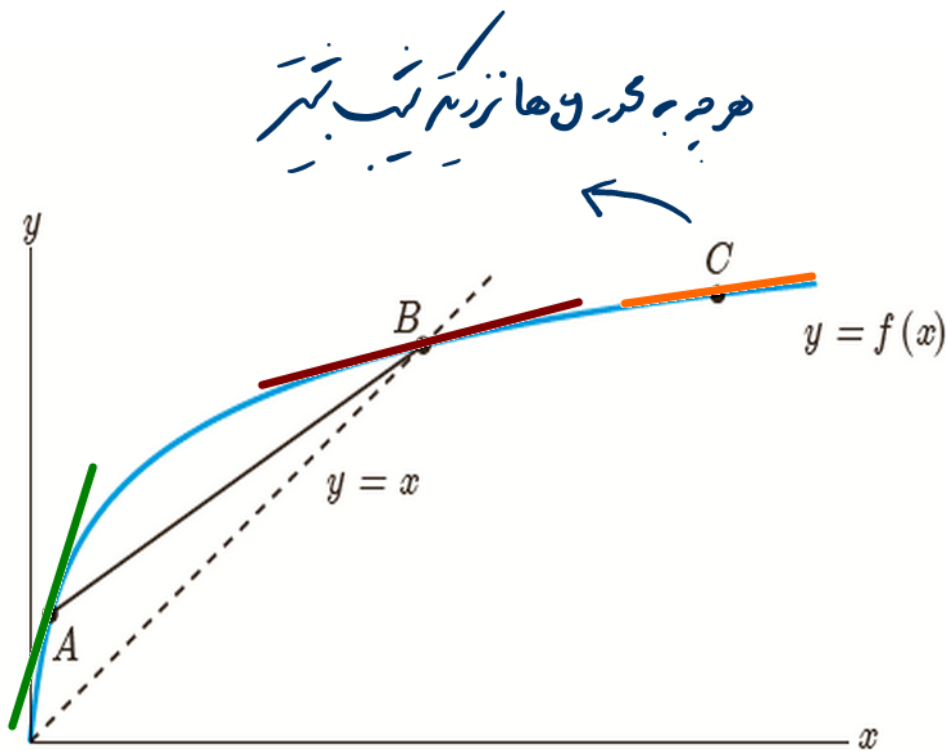
پ) شیب نمودار در نقطه C : m_3

ت) شیب خط AB : m_4

ث) شیب خط $y=2$: $m_5 = 0$

ج) شیب خط $y=x$: $m_6 = 1$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_1, m_2, \dots, m_6$ در نظر بگیرید.

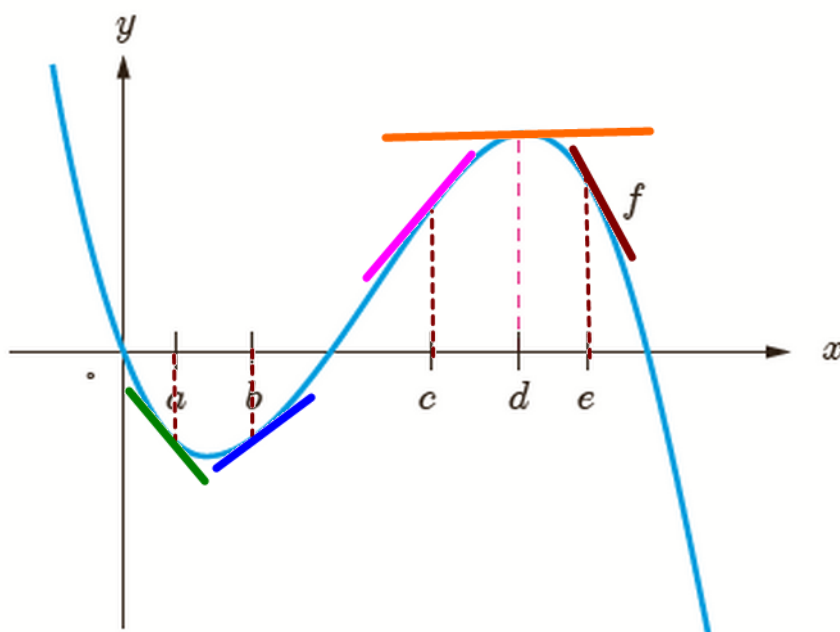


$$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_1 < m_6$$



۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	0
b	$0/5$
c	2
a	$-0/5$
e	-2



۵ نقاطی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

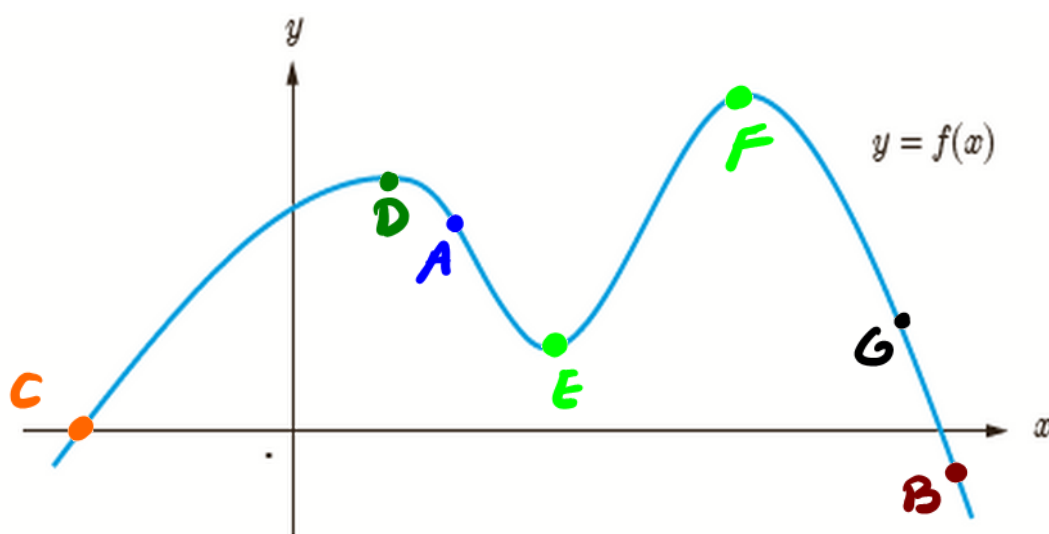
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x) = x^3 - 2$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید.

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 - (-3)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1}$$

$$= (-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

۷ نقاط F, E, D, C, B, A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. **نادرست**
 ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را m_A نمایش داده‌ایم)

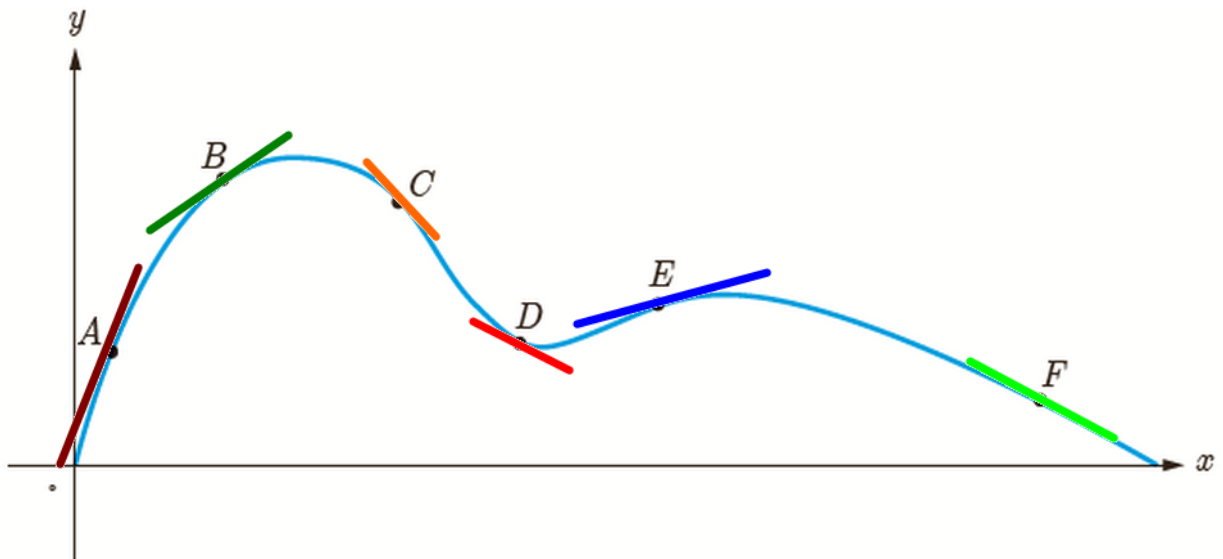
پ) $m_E < m_B < m_A$ **درست**

ت) شیب منحنی در نقاط C و D منفی است. **درست**

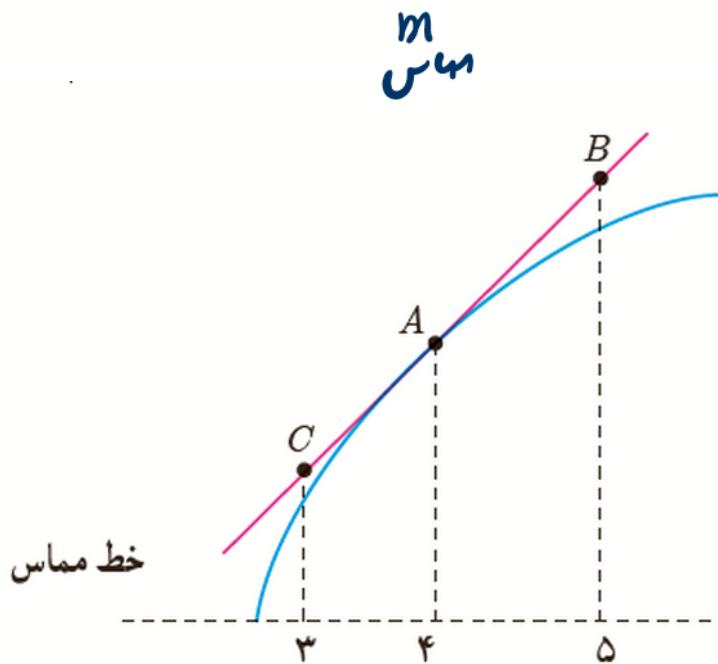
ث) $m_F < m_D < m_C$ **نادرست** ←

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$ **درست**

درست این می‌باشد: $m_C < m_D < m_F$



۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



$$A(4, f(4)) \rightarrow A(4, 25)$$

معادله خط مماس بر f در A :

$$y - 25 = 1,5(x - 4)$$

$$y = 1,5x - 6 + 25 \rightarrow y = 1,5x + 19$$

$$x_B = 5 \xrightarrow[\text{نقطه B}]{\text{در خط مماس}} y_B = 1,5 \times 5 + 19 = 7,5 + 19 = 26,5$$

$$x_C = 3 \xrightarrow[\text{نقطه C}]{\text{در خط مماس}} y_C = 1,5 \times 3 + 19 = 4,5 + 19 = 23,5$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت اول

جلسه چهارم: صفحات ۸۴ تا ۸۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

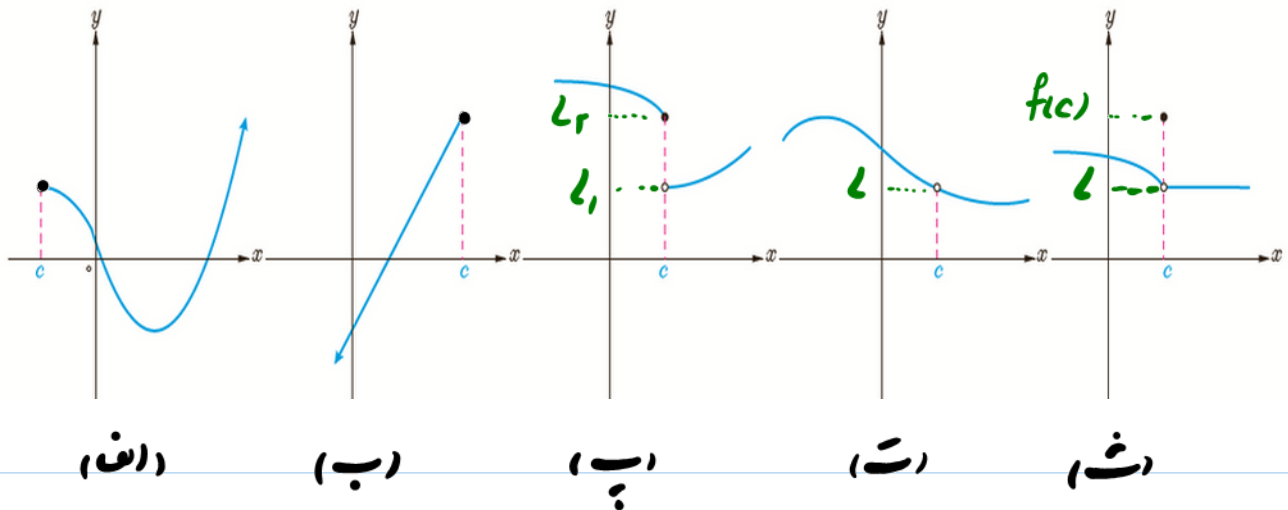
گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری :

تعریف پیوستگی : تابع f را در $x=c$ پیوسته گوئیم هرگاه : $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

یعنی مقادیر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود و با هم برابر باشند .

مثال :



(الف) $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

(ب) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

(پ) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ پس $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

(ت) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود دارد ولی $f(c)$ موجود نیست پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست .

(ث) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجودند ولی با هم برابر نیستند پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

مشتق یک طرفه:

$$x=a, \text{ مشتق راست } f, \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق، دبا $f'_+(a)$ نیست و هم.

$$x=a, \text{ مشتق چپ } f, \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق، دبا $f'_-(a)$ نیست و هم.

مثال: مشتق چپ و راست تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ x^2 + 5 & x < 2 \end{cases}$ را در $x=2$ بیابید.

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 5 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 2 = 4$$

دقت کنید مقدار $f(2)$ برای مشتق چپ و راست از ضابطه اول بدست می آید.

حال من خود هم دارد بحث مشتق پذیری توکم، یعنی بدانیم که تابع در چه نقطه ای مشتق دارد و

در چه نقطه ای مشتق ندارد.

تعریف: تابع f را در a مشتق پذیر می گوئیم اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد.

تذکر: وجود $f'(a)$ این معناست که مشتق های چپ و راست موجود، مشخص و برابر باشند.

تفسیر: اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است.

اثبات: بنا به فرض f در a مشتق پذیر است پس $f'(a)$ وجود دارد یعنی:

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n - a} \quad \text{وجود دارد}$$

شرط مورد بودن $f(a)$ برقرار است زیرا در زیر این صورت حد باقی معنات.

حد متناهی را در نظر بگیرید:

$$\lim_{n \rightarrow a} (f(n) - f(a)) = \lim_{n \rightarrow a} \left((n-a) \times \frac{f(n) - f(a)}{(n-a)} \right) = \lim_{n \rightarrow a} (n-a) \times \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n-a}$$

$$= 0 \times f'(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow a} (f(n) - f(a)) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow a} f(n) - \lim_{n \rightarrow a} \overbrace{f(a)}^{f(a)} = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow a} f(n) = f(a)$$

نتیجہ: اگر تابع f در $x=a$ پیوستہ نہ ہو، در a مشتق پذیر نہیں ہے۔

تذکرہ: عکس قضیہ بھی درست نہیں ہے۔ یعنی اگر f در $x=a$ پیوستہ ہو، لزوماً

در a مشتق پذیر نہیں ہے۔

مثال: مشتق پذیری جانچیں۔
 $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 2 \\ 1-x & x \geq 2 \end{cases}$ ، f در $x=2$ پیوستہ ہے۔

$$f(2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$$

یعنی تابع f در $x=2$ پیوستہ ہے۔

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x+2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$f'_+(2) \neq f'_-(2)$$

یعنی تابع f در $x=2$ مشتق پذیر نہیں ہے۔

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

در حد $x=1$ داریم $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ ، $f(1) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ وجود ندارد.

چون تابع در $x=1$ پیوسته نیست لذا مشتق پذیر هم نخواهد بود.

مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x \geq 2 \\ x^2+b & x < 2 \end{cases}$ در $x=2$ مشتق پذیر باشد، a و b را بیابید.

شرط پیوستگی: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^+} (ax+1) = 2a+1$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2+b) = 4+b$ ، $f(2) = 2a+1$

$$\Rightarrow 2a+1 = 4+b \rightarrow 2a+1-4=b \rightarrow b=2a-3$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax+1 - (2a+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax+1-2a-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(x-2)}{x-2} = a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+b - (2a+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+2a-3-2a-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 2+2=4$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow a=4 \rightarrow b=2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$a = r, b = 0$$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x^r & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f_+(0)$ و $f_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

بجز در $x=0$ پیوسته است $\rightarrow \underline{f(0)=0}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^r = 0^r = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^r-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0)$ موجود نیست.

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت دوم

جلسه پنجم: صفحات ۸۶ تا ۸۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

رشته اول: همانطور که در جلسه قبل دیدیم تابع در نقاطی که در آن ها پیوسته نیست

مشق پذیر نیست.

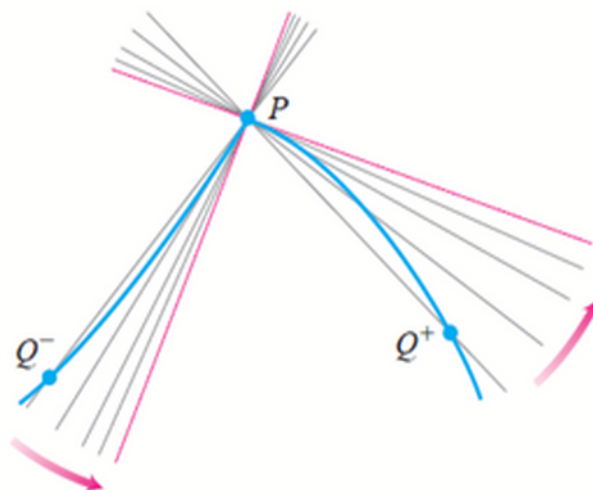
رشته دوم: اگر f در a پیوسته باشد، چنانچه مشتق های چپ و راست

موجود، مشابه و نابرابر باشند و یا حد آن برای از مشتق های چپ و راست

نامساوی باشد، f در a مشق پذیر نیست. به این نقطه، نقطه گوشه ای

یا زاویه دار می گوئیم.

تذکر: در نقاط گوشه ای دو نیم مماس بر تابع قابل رسم است.



مثال: به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

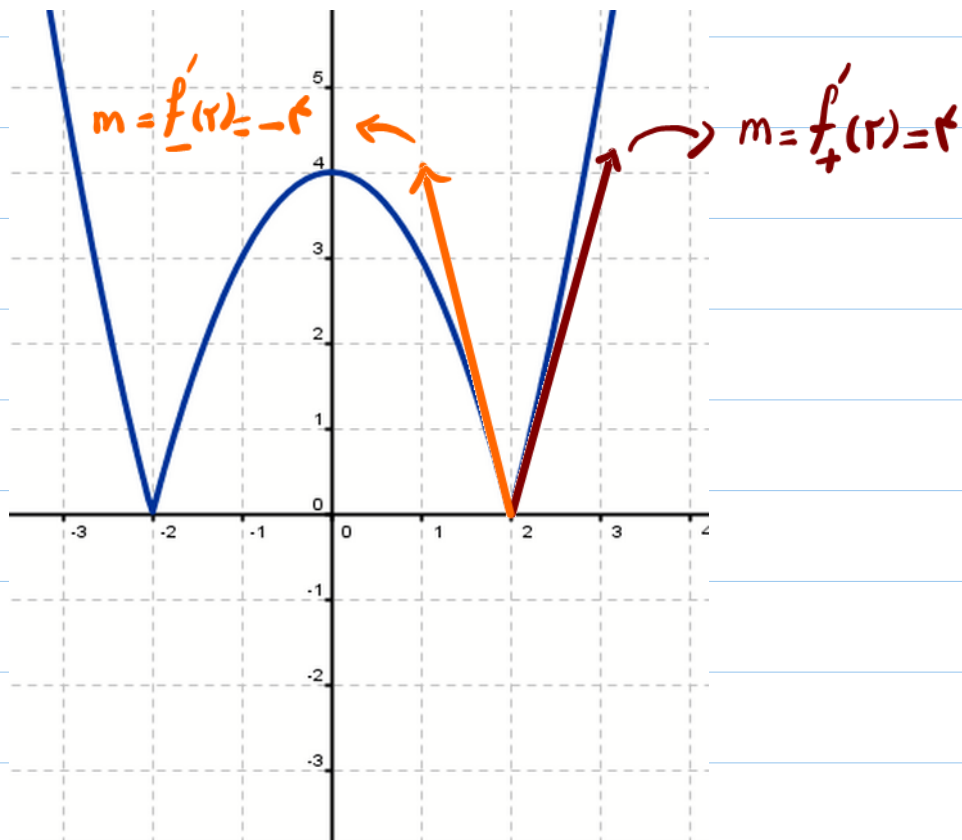
$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

	$x \rightarrow 2^-$	$x \rightarrow 2^+$
$x^2 - 4$	+	-
	+	-

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ ، مشتق پذیری تابع در این نقطه برقرار نیست.





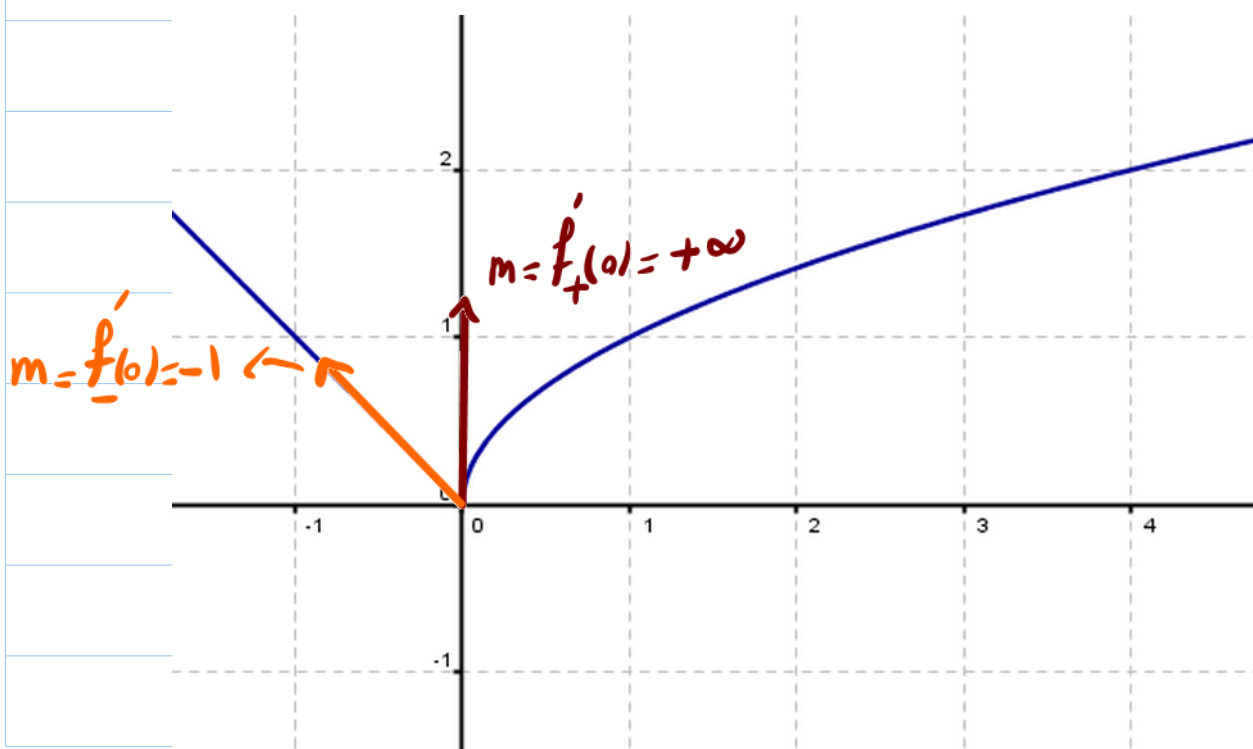
مثال: نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ در نقطه گوشه در $x=0$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \overset{x \times \sqrt{x}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

چون $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ پس f در $x=0$ مشتق نپذیرد و این نقطه نقطه گوشه است.



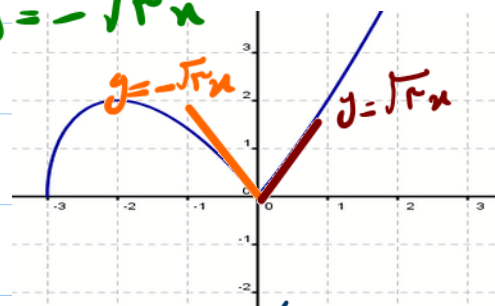
مثال: معادله نیم‌مماس‌های تابع $f(x) = |x|\sqrt{x+4}$ را در $x=0$

بدست آورید.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt{x+4} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x+4}}{x} = \sqrt{4}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|\sqrt{x+4} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{x+4}}{x} = -\sqrt{4}$$

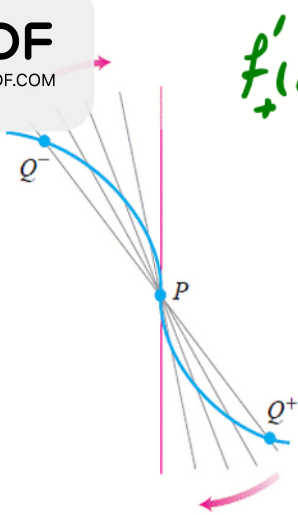
نیم‌مماس راست: $y - 0 = \sqrt{4}(x - 0) \rightarrow y = \sqrt{4}x$ $A(0,0)$
نیم‌مماس چپ: $y - 0 = -\sqrt{4}(x - 0) \rightarrow y = -\sqrt{4}x$



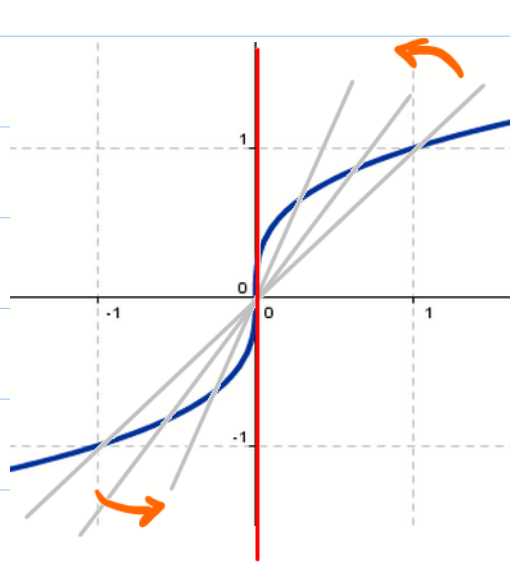
دسته سوم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های چپ و راست در a نامساوی

رسم‌یافت باشند، f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست.

نکته: در این حالت تابع در این نقطه دارای **مماس قائم** با معادله $x=a$ است.



$$f'_+(a) = f'_-(a) = -\infty$$



$$f'_+(a) = f'_-(a) = +\infty$$

مثال: مشتق پذیری تابع $y = \frac{\sqrt[n]{x-1}}{x}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

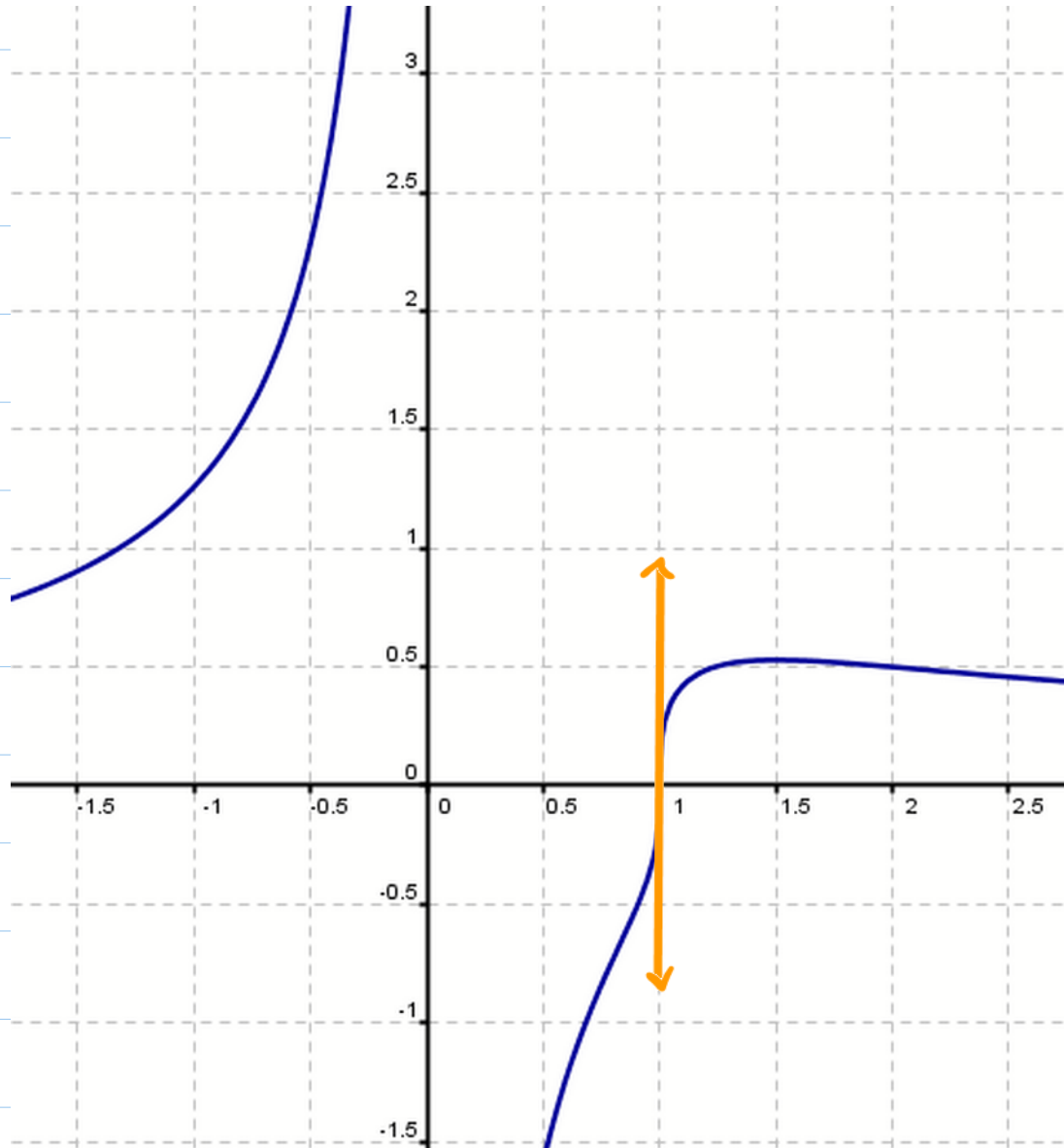
$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\sqrt[n]{x-1}}{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[n]{x-1}}{x(x-1)} \times \frac{\sqrt[n]{(x-1)^n}}{\sqrt[n]{(x-1)^n}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{\sqrt[n]{(x-1)^n}}}{x \cancel{(x-1)} \sqrt[n]{(x-1)^n}} = \frac{1}{1 \times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)}{x(x-1) \sqrt[n]{(x-1)^n}} = \frac{1}{1 \times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

به طریقی که :

چون تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست و تابع در این نقطه مماس قائم دارد.

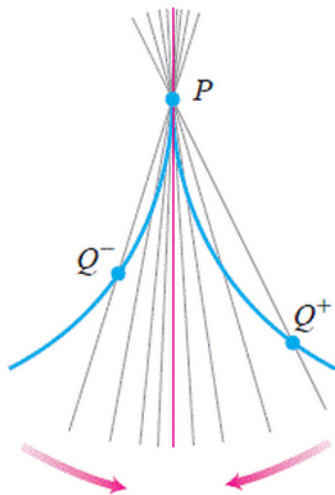


دسته چهارم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق چپ در a و مشتق راست در a داشته باشد.

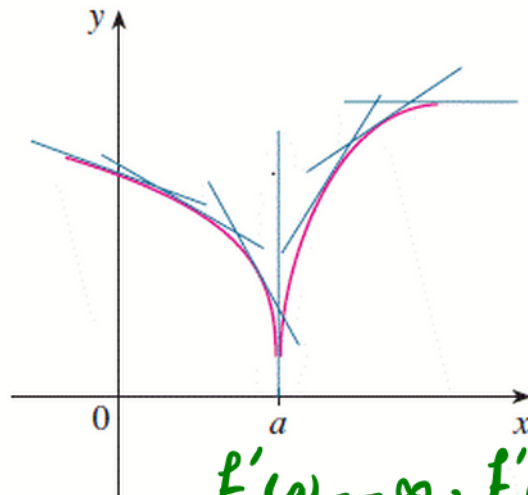
نیز هم مشتق باشد، f در a مشتق پذیر نیست. به این نقطه، نقطه بازگشت گفته می شود.

بازگشت گفته می شود.

نکته: در نقطه بازگشت می توانیم ریباج قابل رسم است.



$$f'_-(a) = +\infty, f'_+(a) = -\infty$$



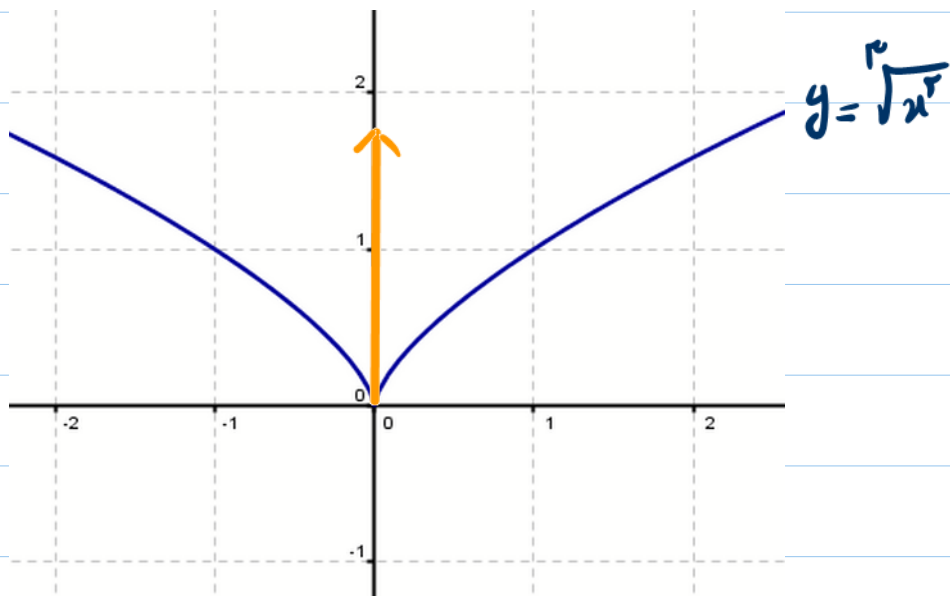
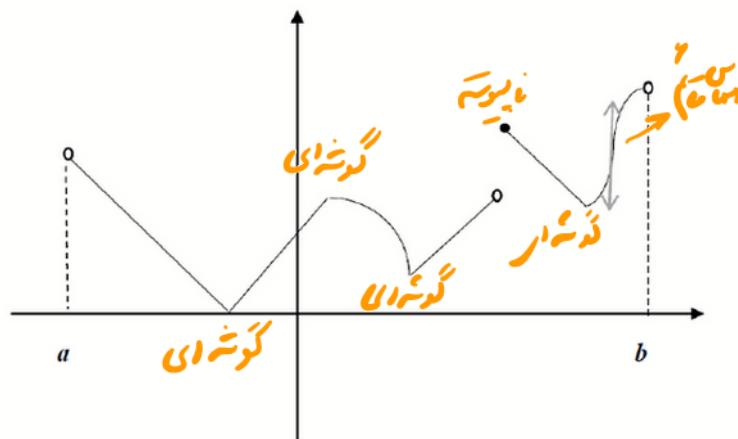
$$f'_-(a) = -\infty, f'_+(a) = +\infty$$

مثال: نشان دهید که $y = \sqrt{x}$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

به طریقی



مثال: نمودار تابع f با دامنه (a, b) به شکل مقابل است.

این تابع در چند نقطه از دامنه اش مشتق پذیر نیست؟

- | | |
|---------------|--------------|
| (۱) چهار نقطه | (۲) پنج نقطه |
| (۳) شش نقطه | (۴) هفت نقطه |

مثال: توابع زیر در چه نقطه مشتق پذیر نیستند.

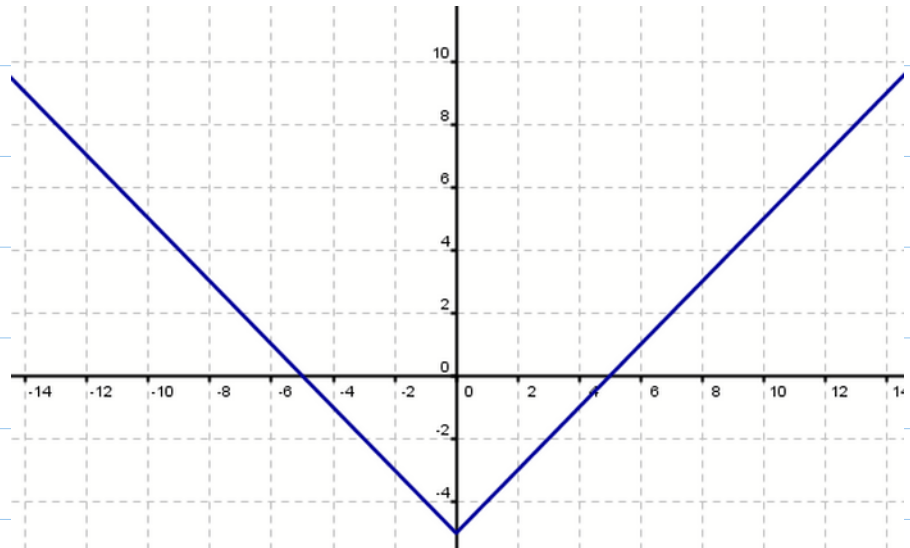
الف) $f(x) = ||x| - 5|$

ب) $g(x) = |2x - |x - 3||$

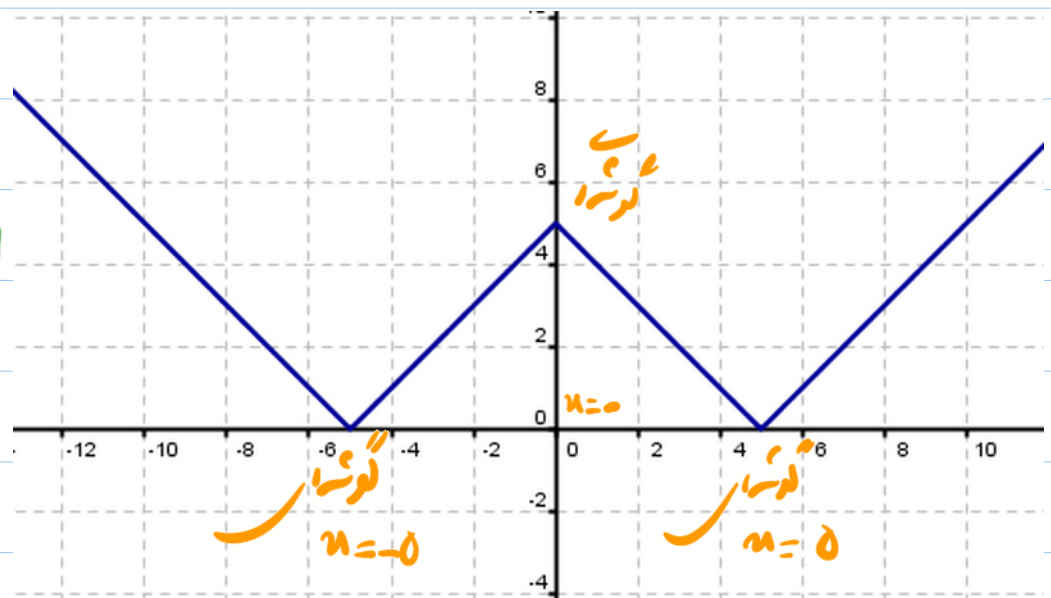


رابط

$$f_1(x) = |x| - 5$$



$$f_1(x) = ||x| - 5|$$



در سه نقطه



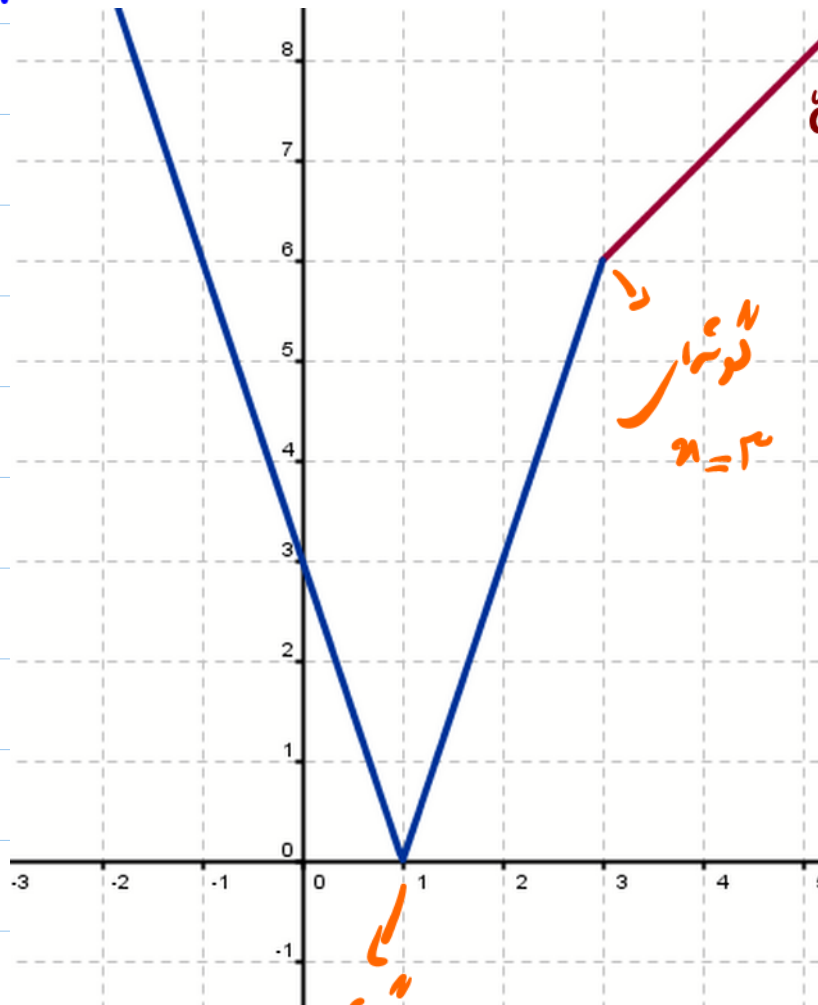
$$g(x) = |2x - |x - 3||$$

$$x > 3 \rightarrow g(x) = |2x - x + 3| = |x + 3| = x + 3$$

$$x < 3 \rightarrow g(x) = |2x - (-(x - 3))| = |2x + x - 3| = |3x - 3|$$

$$g(x) = \begin{cases} |3x - 3| & x \leq 3 \\ x + 3 & x > 3 \end{cases}$$

$$y = |3x - 3|$$



نقطه گره $x = 1$

در دو نقطه

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت سوم

جلسه ششم: صفحات ۹۰ تا ۹۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف: تابع مشتق f' که با f نه تنها در هر جایی که دامنه مشتق معبره

همه تقاطع است که تابع در آنجا مشتق پذیر است و مقدار آن در نقطه a از

دامنه مشتق برابر است با :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: تابع مشتق، $f(x) = \sqrt{x}$ را بدست آورید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

همانطور که تا بحال دیدیم یافتن مشتق یک تابع با استفاده از تعریف، عملی زمان بر است.

است. مانند آنچه در مثال قبل برای تابع $f(x) = \sqrt{x}$ بدست آوردیم، می توانیم

قواعدی را بیان کنیم که با استفاده از آنها مشتق توابع را بیابیم.

قواعد مشتق گیری

۱. مشتق تابع ثابت صفر است.

مثال:

$$f(x) = 0 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = \sqrt{v} \rightarrow f'(x) = 0$$

۲. مشتق تابع $f(x) = ax^n$ برابر است با حاصل ضرب، ضریب عددی در توان متغیر در

متغیر به توان یک واحد کمتر یعنی: $f'(x) = anx^{n-1}$

مثال:

$$y = x \rightarrow y' = 1 \times x^{1-1} = 1 \times x^0 = 1 \times 1 = 1$$

$$y = 4x \rightarrow y' = 4x^0 = 4$$

$$y = 5x^3 \rightarrow y' = 3 \times 5x^{3-1} = 15x^2$$

$$y = 2x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2} \times 2x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

حالت خاص:

$$(x)' = 1$$

$$(ax)' = a$$

۳. مشتق جمع یا تفریق چند تابع برابر است با جمع یا تفریق مشتق تک تک آنها.

مثال: $f(x) = 9x^4 - 2x^2 + \frac{1}{x} + 7x - \sqrt{2}$

$$f'(x) = 04x^3 - 2x + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} x^{\frac{1}{x}-1} + 7 + 0$$

$$f'(x) = 04x^3 - 2x + \frac{1}{x^2} + 7$$

۴. مشتق ضرب دو تابع برابر است با مشتق اولی در خود دومی بعلاوه مشتق دومی در خود

اولی یعنی: $(f \times g)'(x) = f'g + g'f$

مثال: $f(x) = (\sqrt{x} + 2)(x^3 + 4x^2 + x)$

$$f'(x) = (\sqrt{x})(x^3 + 4x^2 + x) + (2x^2 + 12x + 1)(\sqrt{x} + 2)$$

۵. مشتق تقسیم دو تابع برابر است با مشتق صورت در خود مخرج منهای مشتق مخرج در خود صورت تقسیم بر خود مخرج به توان دو یعنی:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

مثال: $f(x) = \frac{7x^3 - 9}{x^2 + 2x}$

$$f'(x) = \frac{(21x^2)(x^2 + 2x) - (2x^2 + 2)(7x^3 - 9)}{(x^2 + 2x)^2}$$



$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

صورت خاص: $r) \left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

$$r) \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$$

مثال:

$$y = \frac{2x+6}{3x-4} \rightarrow y' = \frac{\overset{-1}{2}(-4) - \overset{-1}{6}(3)}{(3x-4)^2} = \frac{-26}{(3x-4)^2}$$

۶. مشتق توابع رادیکالی با فرجه دو برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر دو برابر خود

رادیکال یعنی اگر $f(x) = \sqrt{u}$ که u تابع بر حسب x باشد آنگاه $f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - x + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{3x^2 - x + 1}}$$

مثال:

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

$$h(x) = \sqrt{(x^2+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}$$

$$h'(x) = \frac{(2x+2)(1-9x+\frac{1}{x}) - (-9-\frac{1}{x^2})(x^2+2x)}{2\sqrt{(x^2+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}}$$

صورت خاص: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



۷. مشتق توابع رادیکالی با فرجه سه برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر سه برابر خود

رادیکال به توان دو یعنی اگر $f(x) = \sqrt[3]{u}$ که u تابع بر حسب x باشد آنگاه

$$f'(x) = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-8}{x+1}} \rightarrow g'(x) = \frac{\frac{2-(-8)}{(x+1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2x-8}{x+1}\right)^2}}$$

حالت خاص: $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

۸. مشتق هر تابع تواندار برابر است با حاصلضرب ضریب عددی (در صورت وجود) در

توان تابع در خود تابع با توان یک واحد کمتر در مشتق تابع بدون توان یعنی:

$$(au^n)' = anu^{n-1}u'$$

مثال: $y = 4(3x^4 - 7x + 1)^5$

$$y' = 20(3x^4 - 7x + 1)^4(12x^3 - 7)$$



$$y = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}x' \right)^3$$

$$y' = 3 \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}x' \right)^2 \times \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{2} \right)$$

۹. مشتق توابع مثلثاتی:

مشتق سینوس یک کمان برابر است با مشتق کمان در کسینوس همان کمان.

مشتق کسینوس یک کمان برابر است با منهای مشتق کمان در سینوس همان کمان.

مشتق تانژانت یک کمان برابر است با مشتق کمان در یک بعلاوه مربع تانژانت همان کمان.

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$$

مثال:

$$y = \sin(4x + 5\sqrt{x})$$

$$y' = \left(4 + 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cos(4x + 5\sqrt{x})$$

$$y = \cos\left(\frac{x+1}{x^2-2x}\right)$$

$$y' = - \frac{2(x^2-2x) - (x+1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} \sin\left(\frac{x+1}{x^2-2x}\right)$$



$$y = \tan\left(2x + \frac{1}{x}\right)$$

$$y' = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \tan^2\left(2x + \frac{1}{x}\right)\right)$$

مثال: مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱) $f(x) = (x^2 + 1)^3 (5x - 1)$

$$f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 (2x) (5x - 1) + (5)(x^2 + 1)^3$$

۲) $g(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

$$g'(x) = \frac{(9)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

۳) $f(x) = \left(\frac{x^2}{3x - 1}\right)^5$

$$f'(x) = 5\left(\frac{x^2}{3x - 1}\right)^4 \times \frac{2x(3x - 1) - (3)x^2}{(3x - 1)^2}$$



$$f) \quad g(x) = (\sqrt{rx+r})(x^r + 1)$$

$$g'(x) = \left(\frac{r}{2\sqrt{rx+r}} \right) (x^r + 1) + (rx^r)(\sqrt{rx+r})$$

$$d) \quad f(x) = \frac{r \sin\left(\frac{x}{r}\right)}{x^r + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(r \times \frac{1}{r} \cos \frac{x}{r}\right)(x^r + \sqrt{x}) - \left(rx + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(r \sin \frac{x}{r}\right)}{(x^r + \sqrt{x})^2}$$

$$y) \quad g(x) = \sin^r(\Delta x)$$

$$g'(x) = r \sin^{r-1}(\Delta x) \times \Delta \cos \Delta x$$

$$v) \quad g(x) = r \tan^r x + \cos x^r$$

$$g'(x) = r \tan^{r-1} x (1 + \tan^2 x) + (-rx) \sin x^{r-1}$$

$$A) \quad g(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$g'(x) = \frac{(-\cos x)(\cos x) - (-\sin x)(1 - \sin x)}{\cos^2 x}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت چهارم

جلسه هفتم: صفحات ۹۶ تا ۹۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مثال: اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(3f + 2g)'(1)$ برابر است.

نکته: $(kf)' = kf'$

$$(3f + 2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1)$$

$$= 3 \times 3 + 2 \times 5 = 9 + 10 = 19$$

مثال: اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ باشد، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

یادآوری: نوشتن معادله خط مماس بر f در نقطه A :

۱- تعیین مختصات نقطه A : $(A, f(A))$

۲- $m = f'(A)$

۳- معادله خط مماس: $y - f(A) = m(x - A)$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \rightarrow f'(x) = 6x - 2 \rightarrow m = f'(2) = 6(2) - 2 = 10 \rightarrow m = f'(2) = 10$$

$$x = 2 \rightarrow y = f(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 12 - 4 + 1 = 9 \rightarrow (2, 9)$$

$$y - 9 = 10(x - 2) \rightarrow y = 10x - 20 + 9 \rightarrow y = 10x - 11$$

مثال: اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 1$ ، $g(2) = -3$ و $g'(2) = 2$ ، مقادیر $(fg)'(2)$ و $(f+g)'(2)$ را به دست آورید.

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = 1 \times (-3) + 2 \times 3 = -3 + 6 = 3$$

$$(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 1 + 2 = 3$$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

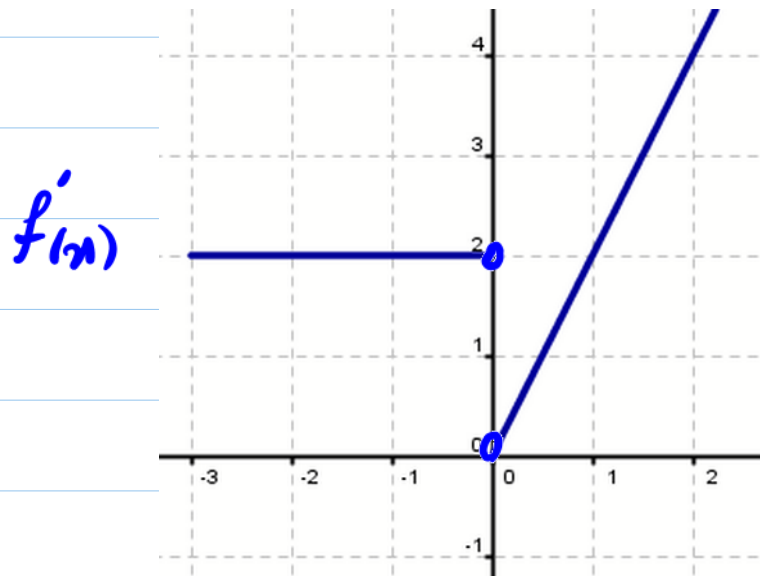
الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

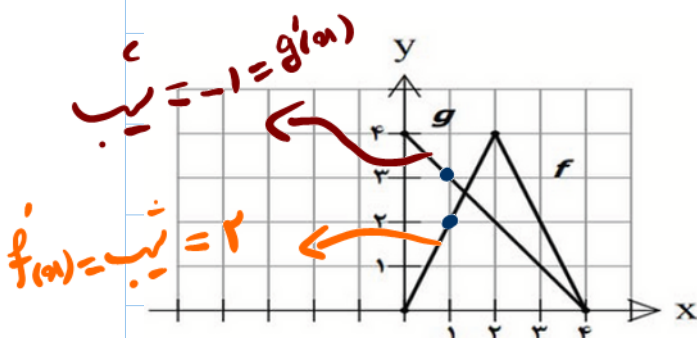
$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ \text{وجود ندارد} & x = 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

تابع در هر دو مشتق‌پذیر نیست $f'_-(0) = 2 \neq 0$, $f'_+(0) = 2 \times 0 = 0$



مثال: نمودار تابع f, g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.

اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(1)$ را بیابید.



$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \rightarrow h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)}$$

چون تابع f به یک خط در نظر گرفته می‌شود، شیب خط‌ها همان تابع مشتق می‌شود.



تعیین خط و : $g(x) = ax + b \rightarrow g'(x) = a$

$$h'(1) = \frac{2 \times 1 - (-1) \times 2}{1^2} = \frac{1+2}{1} = \frac{1}{1}$$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ کدام است؟

$$\frac{5}{6} \quad (4)$$

$$\frac{7}{12} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$\frac{5}{12} \quad (2)$$

$$\frac{4}{9} \quad (1)$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5-2x) - (-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}$$

$$f'(4) = \frac{\frac{1}{2}(5-1) + 2 \times 1}{(5-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2} + 2}{4} = \frac{-\frac{1}{2} + 2}{4} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8}$$

$$= \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

مثال: مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

$$-\frac{15}{4} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$-\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-x)^3 - 3(x^2-x)^2(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$



$$f'(n) = \frac{(n^r - n)^r ((r+1)(n^r - n) - r(r+1)(n^r + r))}{(n^r - n)^{r+1}}$$

$$f'(n) = \frac{(r+1)(n^r - n) - r(r+1)(n^r + r)}{(n^r - n)^{r+1}}$$

$$f'(2) = \frac{(4)(2) - 2(4)(1)}{2^4} = \frac{12 - 8}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{3}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق پذیر است. مقدار c کدام است؟

(1) $-\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

شرط پیوستگی: $\lim_{x \rightarrow -2^+} -\frac{1}{3}x^2 + bx + c = -2 - 2b + c$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{5-2x} = \sqrt{5-2(-2)} = \sqrt{9} = 3 = f(-2)$$

$$\Rightarrow -2 - 2b + c = 3 \rightarrow -2b + c = 5 \quad (1)$$

برابری مشتق در $x = -2$: $f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} & x < -2 \\ -x + b & x > -2 \end{cases}$

$$f'_+(-2) = -(-2) + b = 2 + b$$



$$f'_{-}(-2) = \frac{-2}{2\sqrt{8+4}} = \frac{-1}{2}$$

$$f'_{+}(-2) = f'_{-}(-2) \Rightarrow 2+b = -\frac{1}{2} \rightarrow b = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$$

شرط پیوستگی

$$(1) \rightarrow -2b + c = 0 \rightarrow -2(-\frac{5}{2}) + c = 0$$

$$c = 0 - \frac{14}{2} \rightarrow c = -7$$

مثال: مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[m]{\left(\frac{2x-x^2}{2x+5}\right)^2}$ در نقطه $x = -2$ ، کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (4) ✓ $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{3}$ (1)

$$(\sqrt[m]{u^n})' = \frac{n u^{n-1} u'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

نکته:

$$f'(x) = \frac{2 \frac{(2-x)(x+5) - (2x-x^2)}{(2x+5)^2}}{2 \sqrt[2]{\left(\frac{2x-x^2}{2x+5}\right)^{2-2}}}$$

$$f'(-2) = \frac{2 \frac{4(-1) - 2(-1)}{1}}{2 \sqrt[2]{\frac{-1}{-1}}} = \frac{2(-4+2)}{2\sqrt{1}} = \frac{2 \times 1 \times 1}{4} = \frac{1}{2}$$

مشتق تابع مرکب: (قاعده زنجیری)

اگر f, g دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه: $(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$

نماد دیگر: $y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$

مثال: اگر $f(x) = x^2 - x + 1$ و $g(x) = 2 - x^2$ ، مقدار $(g \circ f)'(1)$ را بیابید.

$$(g \circ f)'(1) = f'(1) g'(f(1))$$

$$f'(x) = 2x - 1 \rightarrow f'(1) = 2 - 1 = 1, \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$g'(x) = -2x \rightarrow g'(f(1)) = g'(1) = -2 \times 1 = -2$$

$$(g \circ f)'(1) = 1 \times (-2) = -2$$

مثال: اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(f \circ g)'(2) = 4$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۳ (۴) ۲ (۳) -۱ (۲) -۲ (۱) ✓

$$(f \circ g)'(2) = 4 \rightarrow g'(2) f'(g(2)) = 4 \quad (1)$$

$$g'(x) = \frac{-2-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \rightarrow g'(2) = \frac{-3}{1} = -3$$



$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} (-1) f'(0) = 4 \rightarrow f'(0) = \frac{4}{-1} = -4$$

مشتق مرتبه دوم :

اگر تابع مشتق $y = f(x)$ مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم را با $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم. در برای محاسبه آن از مشتق اول یعنی $f'(x)$ یک بار دیگر مشتق می‌گیریم.

مثال: مشتق مرتبه دوم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 12x$

$$f'(x) = 15x^2 - 14x + 12$$

$$f''(x) = 30x - 14$$

ب) $f(x) = \sqrt{3x+1} \rightarrow f(x) = (3x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (3x+1)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} (3x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) (3x+1)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4} (3x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-9}{\sqrt[3]{(3x+1)^4}} \rightarrow f''(x) = \frac{-9}{\sqrt[3]{(3x+1)^4}}$$

مشتق پذیری روی بازه :

الف) تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

ب) تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد

و در $x=a$ مشتق راست در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

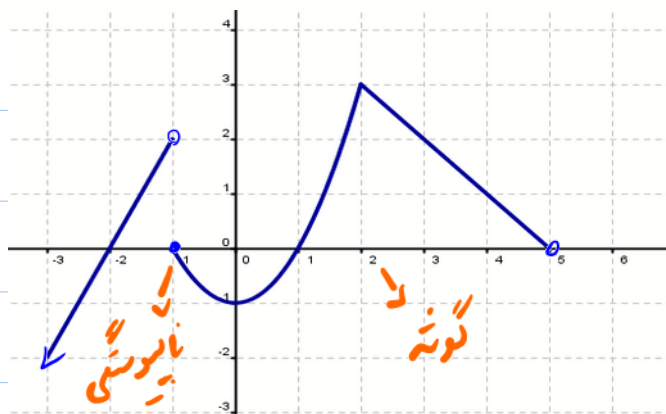
پ) مشتق پذیری روی بازه های (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b)$

$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ به طر مشابیه قریب شود.

کار در کلاس

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

اگر $f(x)$ نمودار را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه های $[-1, 1]$, $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.



مشتق چپ : $[-1, 1]$
مشتق چپ : $(2, 5)$

مشتق چپ زیر $x=1$: $[-2, 0]$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و
آهنگ لحظه‌ای تغییر

جلسه هشتم: صفحات ۱۰۲ تا ۱۰۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

اگر ماشینی مسافت ۱۸ کیلومتر را در ۱۵ دقیقه طی کند سرعت متوسط آن $90 = \frac{18}{\frac{1}{2}}$ کیلومتر بر ساعت است. یعنی در این بازه زمان به طور متوسط در هر ساعت ۹۰ کیلومتر را طی می کند. اگر بازه زمان را خیلی کوچک کنیم سرعت متوسط به سرعت کلمه ای نزدیک می شود. یا وقتی می گوئیم آهنگ متوسط رشد یک کودک در بازه [۴، ۶] ماه، دو سانی متر بر ماه است یعنی در طی این ۴ ماه، رشد متوسط قد کودک ۲ سانتی متر در هر ماه است. به جز مثال های بالا، در مطالعه پدیده های گوناگونی، کمیت های دگر در زمان به تغییر می و وابسته به تغییرات دیگری است مانند تغییرات دما در زمان های مختلف، تغییرات یک دایره وقتی شعاع آن تغییر می کند یا تغییر جدیت در زمان های مختلف. اگر رابطه بین دو متغیر x و y به صورت $y = f(x)$ باشد، نسبت تغییرات y (تغیروا) به تغییرات x (متغیر مستقل)، در آهنگ متوسط تغییر y نسبت به x می گوئیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_r - y_1}{x_r - x_1}$$

تعریف: آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

شیب خط مقطع

تذکره: اگر بازه را به صورت $[x_1, x_1 + \Delta x]$ بنویسیم، تعریف آهنگ متوسط تغییر بعضی‌ها را می‌تواند

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

تعریف: آهنگ لحظی تغییر تابع f در $x = x_1$ برابر است با مشتق تابع f در x_1 .

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

شیب خط مماس

مثال: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند به دست آورید.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{7+2} - \sqrt{2+2}}{5} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

مثال: جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب شده است، که معادله ارتفاع آن از سطح زمین به صورت $f(t) = -2t^2 + 10t$ می‌باشد. سرعت لحظه‌ای این جسم را در $t = 2$ به دست آورید.

$$f'(t) = -4t + 10 \rightarrow f'(2) = -4(2) + 10 = -8 + 10 = 2$$

سؤال: یک توده ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است.

الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه ی زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه ی $t = 3$ چقدر است؟

$$\text{الف) } \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = \frac{\sqrt{4} + 2(4)^2 - (\sqrt{3} + 2(3)^2)}{1} = 2 + 128 - \sqrt{3} - 54 = 74 - \sqrt{3}$$

$$\text{ب) } x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t \rightarrow x'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 4(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 12$$

سؤال: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(5^2 - 5 + 10) - (0^2 - 0 + 10)}{5} = \frac{20 - 10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$f'(t) = \text{سرعت متوسط} = 2 \rightarrow 2t - 1 = 2 \rightarrow 2t = 3 \rightarrow t = 1.5$$

سؤال: آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه $[5, 6]$ برابر آهنگ تغییر لحظه ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

$$2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad (3)$$

$$3 + 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$4 + \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21 - 36 + 24} - \sqrt{21 - 25 + 20}}{1} = 3 - 2 = 1$$

$$f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = 1 \rightarrow \sqrt{21 - x^2} + 4x = x - 2$$

$$21 - u' + 4u = u' - 4u + 2$$

$$\rightarrow 2u' - 8u - 17 = 0 \rightarrow \Delta = 64 - 4(2)(-17) = 64 + 136 = 200$$

$$u = \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = \frac{8 \pm 10\sqrt{2}}{4} < \begin{cases} \frac{8+10\sqrt{2}}{4} = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \checkmark \\ \frac{8-10\sqrt{2}}{4} = 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2} \times \end{cases}$$

سؤال: در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن

در $x = \frac{3}{4}$ ، چقدر کمتر است؟

۰/۰۶ (۴)

۰/۰۵ (۳)

۰/۰۴ (۲) ☒

۰/۰۳ (۱)

$$\text{رشد متوسط} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\sqrt{2(4)+1} + \frac{1}{4+1} - (\sqrt{2(0)+1} + \frac{1}{0+1})}{4}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{4} - 1 - 1}{4} = \frac{1 + \frac{1}{4}}{4} = \frac{\frac{5}{4}}{4} = \frac{5}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\text{رشد لحظه‌ای: } f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{3}{4} + 1}} - \frac{1}{\left(\frac{3}{4} + 1\right)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{25 - 8}{50} = \frac{17}{50} \times \frac{2}{2} = \frac{34}{100}$$

$$.34 - 16 = 18$$

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل پنجم: کاربرد مشتق

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکستریم‌های یک تابع و

توابع صعودی و نزولی

قسمت اول: آزمون یکنوایی

جلسه اول: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

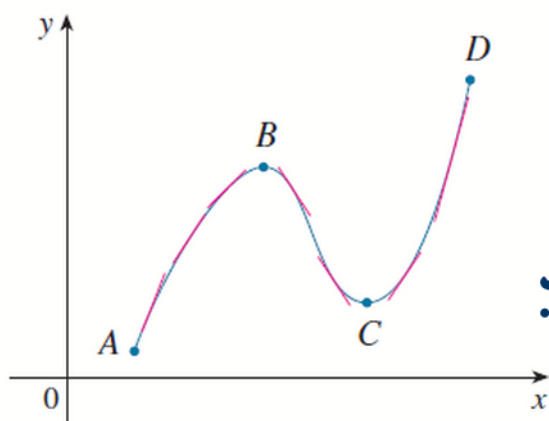
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در فصل اول با توابع مثلثاتی آشنا شدید و کنیزای تابع را با توجه به نمودارشان بررسی می کردیم.

به نمودار مقابل و خط های مماس رسم شده دقت کنید:



در بازه های که تابع صعودی است تیب خط های مماس مثبت
و در بازه های که تابع نزولی است تیب خط های مماس منفی است.

۱) آزمون کنیزای تابع :

الف) در یک بازه از دامنه f اگر f صعودی و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر f صعودی و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر f برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

به عبارات دیگر برای بررسی کنیزای تابع مشتق داریم f' ، از آن مشتق می گیریم و مشتق

را با رسم جدول، تعیین علامت می کنیم. به این جدول چنین علامت، جدول تغییرات

تابع می گوئیم. اگر علامت مشتق در بازه ای مثبت باشد، تابع در آن بازه اکیدا صعودی

و اگر علامت مشتق در بازه ای منفی باشد تابع در آن بازه اکیدا نزولی است و عکس.

مثال: کنونی تابع $y = x^3 - 3x^2 + 2$ را بررسی کنید.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

در بازه‌ها $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$ تابع ابتدا صعودی و در بازه $(2, +\infty)$ نزولی است.

مثال: تابع $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ در بازه $[a, b]$ صعودی است. حد اکثر مقدار $b-a$ را

بدست آورید.

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$-x^2+1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

✓
 $\Rightarrow a = -1, b = 1 \Rightarrow b-a = 1+1 = 2$

نکته: در توابع پویسته اگر مشتق تابع در نقطه‌ای جدا از هم در یک بازه منفی شود باز هم تابع

روی آن بازه می‌تواند اکیداً صعودی یا نزولی باشد.

مسئله: کمترین تابع $f(x) = x^2$ را بررسی کنید.

$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
f			

تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

مسئله: به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x) = -x^3 + mx^2 - 12x + 1$ روی $\mathbb{R}$ الگانه‌نزد است؟

$$f' < 0 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2mx - 12 < 0$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(-12)(-12) \leq 0$$

$$4m^2 - 576 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 144 \Rightarrow -12 \leq m \leq 12$$

$$m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$$

نکته: آزمون کنونی برای تابع پیوسته برقرار است. پس در تابع گسری، در بازه ها باید

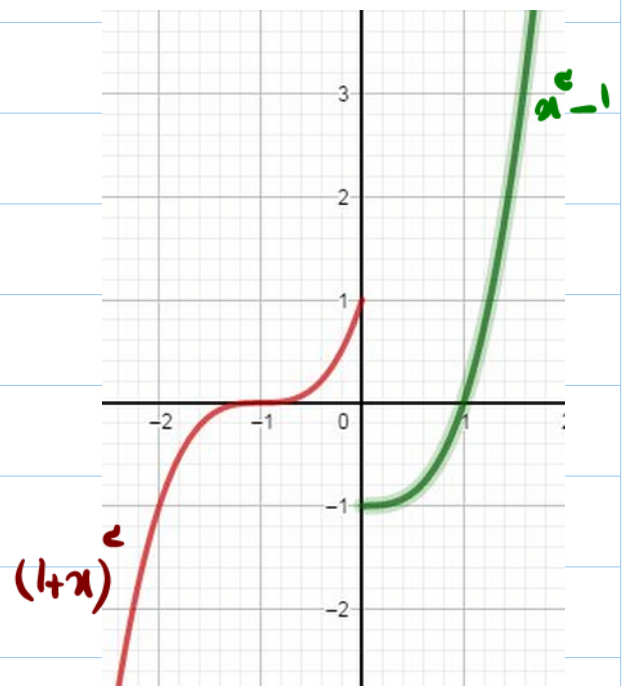
از این آزمون استفاده کنیم که شامل رسم میوه نباشد. در تابع صند صنداری هم در نقاط

مرزی همین نکته را داریم.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ (1+x)^2 & x < 0 \end{cases}$ در کدام بازه صعودی است؟

(۱) (۱، ۱) (۲) (۱، ۲) (۳) (۱، -۲) (۴) (۰، ۲)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ \text{موجبات} & x = 0 \\ 2(1+x) & x < 0 \end{cases}$$



تابع در $(-\infty, 0)$ اکبر صعودی است ولی برای رسیدن به عافه نیز باید تردد کند. تابع در

$(0, +\infty)$ هم اکبر صعودی است. پس تابع فقط در بازه $(0, 2)$ که شامل موجبات، صعودی است



مثال: تابع $f(x) = \frac{5}{x^2 - 2x}$ روی کدام بازه منفرد است؟

۱) $(1, 2)$ ۲) $(-1, 1)$ ۳) $(0, 2)$ ۴) $(2, 2)$

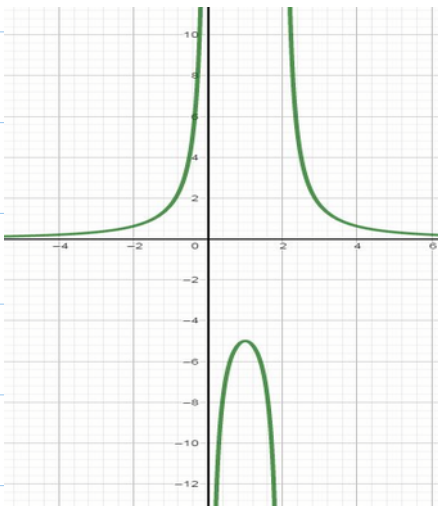
$$f'(x) = \frac{0 - 5(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-10x + 10}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$-10x + 10 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'		+	+	-	-
f			0		

باید بازه ای را انتخاب کنیم که مشتق در آن یک علامت داشته باشد و مثال ریم

منفی نباشد که فقط گزینه ی بازه $(2, 2)$ مورد درگی را دارد.



به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکستریم‌های یک تابع و

توابع صعودی و نزولی

قسمت دوم: نقطه بحرانی، اکستریم‌های نسبی

جلسه دوم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۲) دسته‌های نسبی تابع :

الف) تابع f در نقطه‌ای به طول c **ماکزیمم نسبی** دارد، هرگاه یک همای از آن مانند $f(c) \in I$ باشد

که برای هر $n \in I$ داشته باشیم: $f(c) \geq f(n)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی f می‌نامیم.

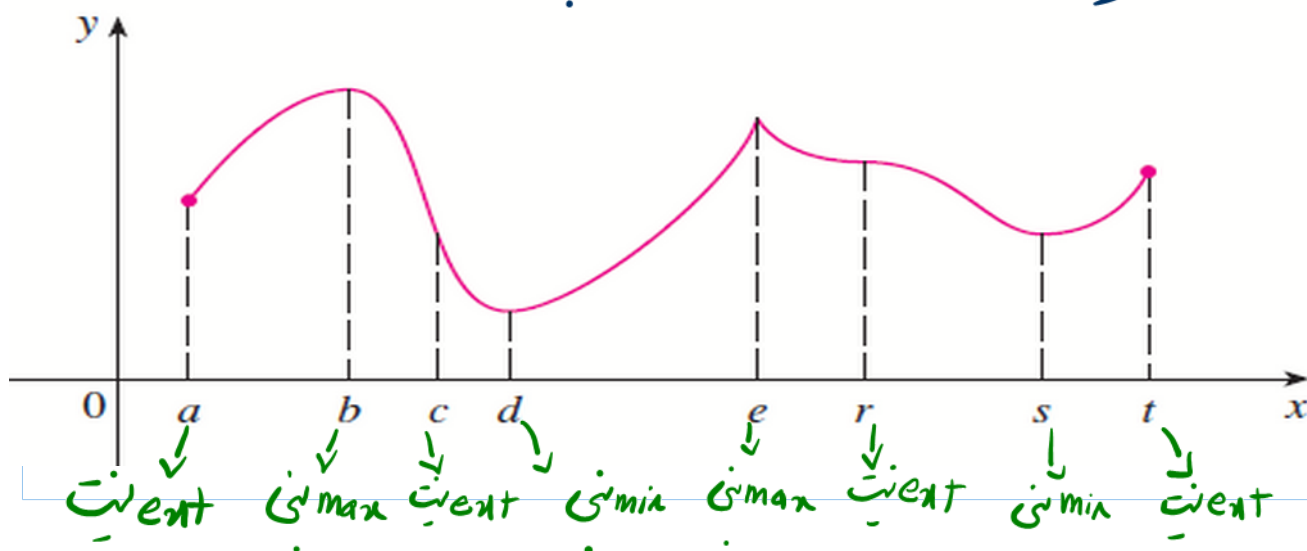
ب) تابع f در نقطه‌ای به طول c **مینیمم نسبی** دارد، هرگاه یک همای از آن مانند $f(c) \in I$ باشد

که برای هر $n \in I$ داشته باشیم: $f(c) \leq f(n)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی f می‌نامیم.

به عبارت دیگر اگر عرض نقطه‌ای نسبت به نقاط اطرافش کوچکتر یا مساوی باشد به آن

مین نسبی و اگر بزرگتر یا مساوی باشد به آن max نسبی می‌گوئیم.

مثال: در نمودار زیر کدام از نقاط مشخص شده اکتریم نسبی هستند؟



چند نکته درباره اکسترم های نسبی :

فرض کنید $x=c$ طول نقطه اکسترم نسبی تابع f باشد در این صورت :

(۱) نقطه ابتدای دامنه نمی تواند نقطه اکسترم نسبی باشد.

(۲) f می تواند در این نقطه پیوسته نباشد.

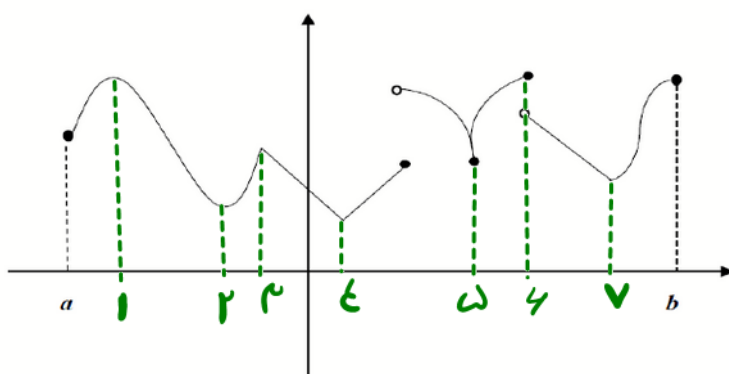
(۳) f می تواند در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

(۴) اگر f در این نقطه مشتق پذیر باشد گفته : $f'(c)=0$.

(۵) نقطه $(c, f(c))$ روی منحنی تابع f قرار دارد یعنی مختصات این نقطه در معادله

تابع صدق می کند.

(۶) در تابع ثابت تمام نقاط هم $\max$ نسبی هستند هم $\min$ نسبی.



مثال : تابع قبلی در بازه $[a, b]$

چند نقطه اکسترم نسبی دارد ؟ ۷ نقطه

مشکل تکرار ۹۸ تعویذ :

در تابع با ضابطه $f(x) = x|x-4|$ ، فاصله دو نقطه ماکسیمم نسبی و می نیمم نسبی آن، کدام است؟

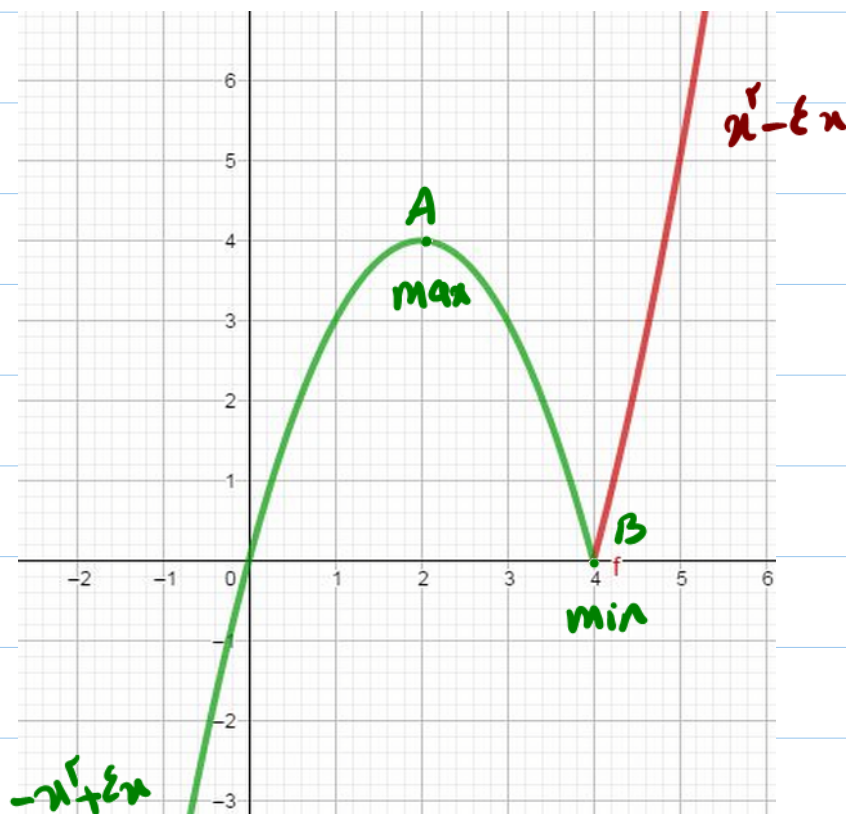
$2\sqrt{5}$ (۴)

$3\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & x \geq 4 \\ -x(x-4) & x < 4 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases}$$



$A(2, 4)$: می max

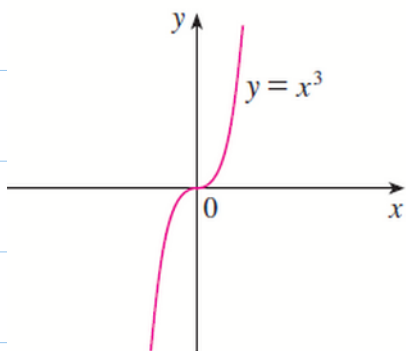
$B(4, 0)$ می min

گزین ۴ $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

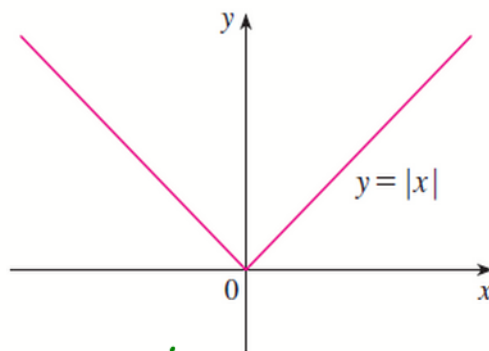
نقطه گردنی :

نقطه‌ای به طوری که از دامنه f درست که در آن $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مانند :

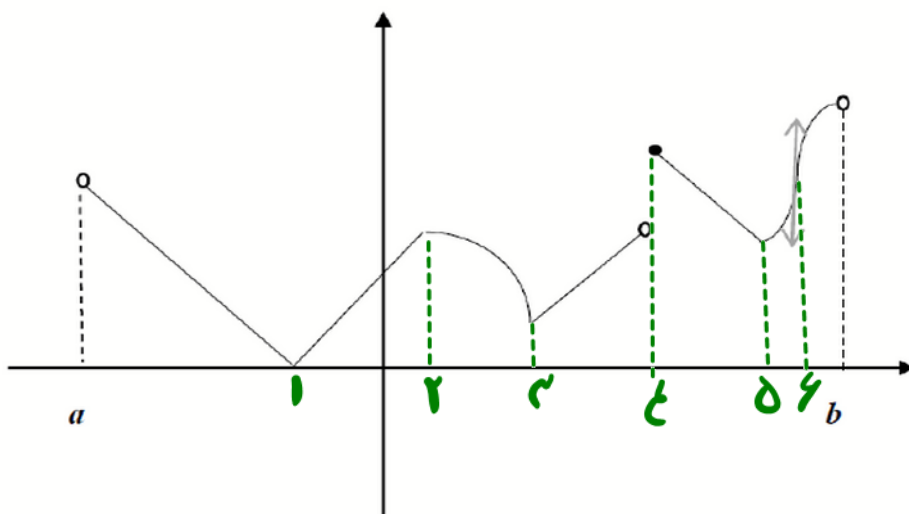


$f'(0) = 0$ ، $x=0$ جوابی



$f'(0)$ موجود نیست ، $x=0$ جوابی

مثال : تابع f با نمودار زیر در بازه (a, b) چند نقطه گردنی دارد ؟



در ۵ نقطه

نکته: هر نقطه اکسترمس منبج تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

وی عکس آن درست نیست یعنی هر نقطه بحرانی، اکسترمس منبج نیست.

توجه: نقاط استدار انتهایی دامنه، نقطه بحرانی هستند.

مثال: تابع $f(x) = 4x^2 - 12x$ در بازه $[0, 4]$ ضد نقطه بحرانی دارد؟

$$f'(x) = 8x - 12 = 0 \Rightarrow 8(x - 1.5) = 0 \Rightarrow x = 1.5$$

چون $x = 1.5$ در دامنه تابع نیست پس بحرانی نیست.

نقاط بحرانی $x = 0$ ، $x = 4$ است.

مثال: نقاط بحرانی تابع زیر را بیابید.

$$1) f(x) = x^2(x+2)^3$$

$$f'(x) = 2x(x+2)^3 + 3(x+2)^2 x^2 = x(x+2)^2(2(x+2) + 3x) = 0$$

$$\Rightarrow x(x+2)^2(5x+4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2, x = -\frac{4}{5}$$



$$r) g(x) = \frac{x^r}{(1-x)^r}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g'(x) = \frac{rx^r(1-x)^r - r(1-x)(-1)x^r}{(1-x)^{2r}}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x^r(1-x)(r(1-x) + rx) = 0 \Rightarrow x^r(1-x)(-x+r) = 0$$

$$x=0, x=1, x=r \Rightarrow \text{برای } x=r, x=0 \text{ } \rightarrow \notin D_f$$

$$g'(x) = \text{موجب} \Rightarrow (1-x)^{2r} = 0 \Rightarrow x=1 \notin D_f$$

$$r) f(x) = \begin{cases} x^r - rx & -r < x \leq r \\ x^r - 1x & r < x < \varepsilon \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} rx^r - r & -r < x < r \\ \text{موجب} & x=r \\ rx^r - 1x & r < x < \varepsilon \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow rx^r - r = 0 \Rightarrow x^r - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \in (-r, r)$$

$$\Rightarrow rx^r - 1x = 0 \Rightarrow x^r - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[r]{r} \begin{cases} \sqrt[r]{r} \in (r, \varepsilon) \\ -\sqrt[r]{r} \notin (r, \varepsilon) \end{cases}$$



f' اور $n=2$ معریت سے $\{ \sqrt{e}, 1, -1, -\sqrt{e} \}$ نقطہ معریت سے

4) $h(x) = x|x^2 - 1|$

$$\begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 1 & +\infty \\ \hline x^2-1 & + & 0 & 0 & + \end{array}$$

$$h(x) = \begin{cases} x(x^2-1) & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x(x^2-1) & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x^3 + x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ \text{معریت} & x = 1 \\ \text{معریت} & x = -1 \\ -3x^2 + 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

نہیں
معریت سے $x = -\frac{1}{\sqrt{e}} > -1$ اور $x = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$ میں درجہ حالت نقطہ معریت سے

$$\Rightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

در این ضابطه هر دو قدر در بازه $(-1, 1)$ قرار دارند پس جوابی اند.

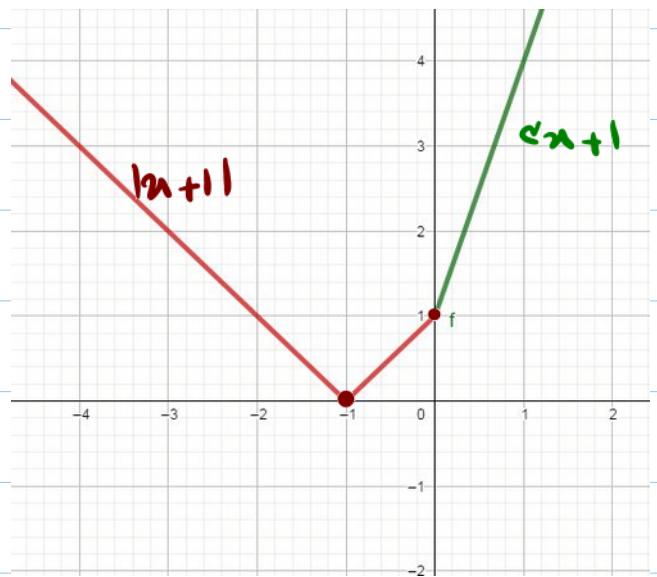
بنابراین $\left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{m}}, \pm 1 \right\}$ نقاط جوابی اند.

۵) $f(x) = |2x + |x| + 1|$

$$f(x) = \begin{cases} |2x + |x| + 1| & x \geq 0 \\ |2x - |x| + 1| & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ |x + 1| & x < 0 \end{cases}$$

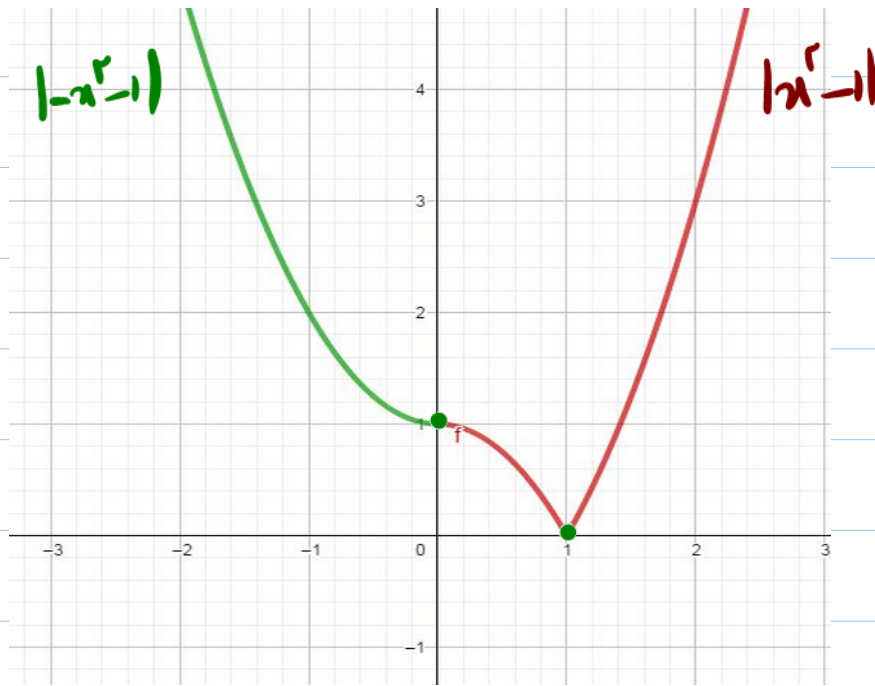
در $x = -1$ و $x = 0$

مشق مورد نیاز است پس این نقاط جوابی اند.



۶) $g(x) = |x|x| - 1|$

$$g(x) = \begin{cases} |x(x) - 1| & x \geq 0 \\ |x(-x) - 1| & x < 0 \end{cases} = g(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & x \geq 0 \\ |1 - x^2| & x < 0 \end{cases}$$



در $x=1$ مشتق موجود نیست. در $x=0$ مشتق موجود است. پس $\{0, 1\}$
نقاط بحرانی هستند.

$$v) f(x) = (x-2)x^{\frac{5}{3}}$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5x^{\frac{2}{3}}}{3} - \frac{10}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x - 10}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x - 10}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 5x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

پس $\{2, 0\}$ نقاط بحرانی اند. $f'(x)$ موجود نیست $\rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

$$1) f(x) = \sqrt{3-x^2}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{0 - 2x}{2\sqrt{3-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) : \text{موجبات} \Rightarrow \sqrt{3-x^2} = 0 \Rightarrow 3-x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x(3-x) = 0 \xrightarrow{x=0} 3-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

و $\{\pm 1, 0, \pm\sqrt{3}\}$ نقاط حرجی اند.

$$9) f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$D_f : 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

۲- نقاط انتہائی راہزنہ درشت معین ہم حثہ ہیں

معینہ نقاط بحرانی باطل ہاں: $\{0, \pm 2\}$

$$1.) f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$D_f: -1 \leq x \leq 1 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow x \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

سین آج در $x=1$ ، $x=-1$ نقطہ بحرانی دارند.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

سین $\{0, \pm 2\}$ معینہ طول ہاں نقاط بحرانی ہاں.

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکستریم‌های یک تابع و

توابع صعودی و نزولی

قسمت سوم: آزمون مشتق اول

جلسه سوم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

آزمون مشتق اول برای تشخیص اکسترم‌های نسبی :

فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و f در c

همگی معدوم c مشتق پذیر است :

الف) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در c ، $\max$ نسبی دارد.

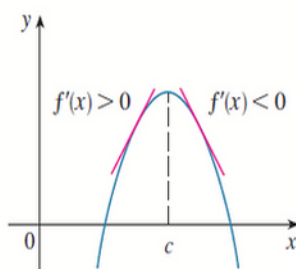
x	c
f'	$+$ $-$
f	

ب) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در c ، $\min$ نسبی دارد.

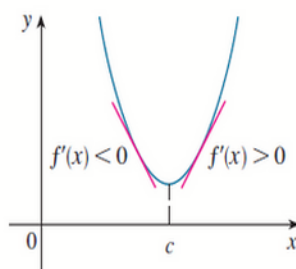
x	c
f'	$-$ $+$
f	

پ) اگر f در c غیرصاف باشد و f در c ، $\max$ یا $\min$ نسبی ندارد.

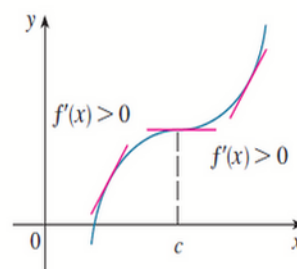
به شکل زیر دقت کنید :



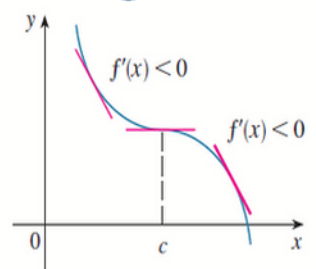
(a) Local maximum



(b) Local minimum



(c) No maximum or minimum



(d) No maximum or minimum



مثال: نقطه اترسیمی تابع $f(x) = x^3 - 5x^2$ را بیابید.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 3x^2(1 - \frac{10}{3}) = 0 \quad \begin{cases} 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - \frac{10}{3} = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{10}{3}} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{10}{3}}$	0	0	$\sqrt{\frac{10}{3}}$	$+\infty$
f'		+	0	-	0	+
f						

↗
↘
↘
↗

max
min

مثال: فاصله نقطه min می تابع $y = x^3 - 12x + 12$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

$$y' = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	$-\infty$	$-r$	r	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y					$-\varepsilon$	

↗↘↗

maxmin

$A(2, -4)$ $(0, 0)$ $(-2, 16)$

$$OA = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

مثال: تابع $y = \frac{x+1}{x^2-2x}$ چندالرسم منی دارد؟

$$y' = \frac{1(x^r - rx) - (rx - r)(x+1)}{(x^r - rx)^r} = \frac{x^r - rx - r(x-1)(x+1)}{(x^r - rx)^r}$$

$$= \frac{x^r - rx - rx^r + r}{(x^r - rx)^r} = \frac{-x^r - rx + r}{(x^r - rx)^r}$$

$$y' = 0 \rightarrow -x' - 2x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \times (-1)(7) = 4 + 28 = 32$$

$$u = \frac{r \pm \sqrt{r}}{-r} = \frac{r \pm r\sqrt{r}}{-r} = \begin{cases} -1 + \sqrt{r} \\ -1 - \sqrt{r} \end{cases}$$

موریت : $(u^r - ru)^r = 0 \rightarrow u = 0, r$

x	$-\omega$	$-1/\sqrt{r}$	0	$1/\sqrt{r}$	r	$+\omega$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y		$\swarrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

$\min$
 $\max$

نفرہ ۳

مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ ، کدام است؟

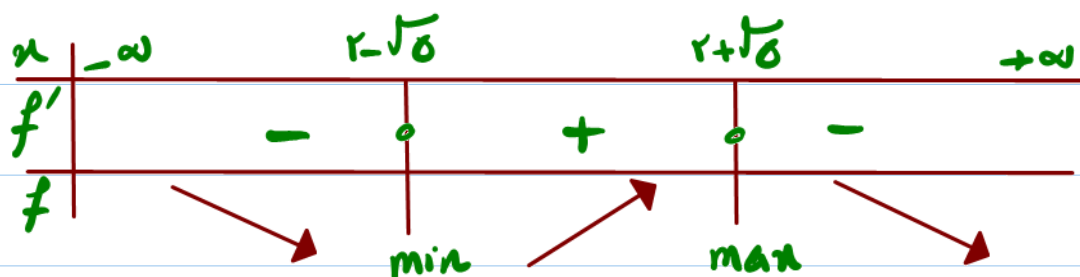
- (۱) $-1 + \sqrt{5}$ (۲) $1 + \sqrt{5}$ (۳) $-1 + \sqrt{3}$ (۴) $1 + \sqrt{3}$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^3+x+1-x^3-2x^2+3x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(-x^2+4x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 : -x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(-1)(1) = 20$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{-2} = 2 \pm \sqrt{5}$$



$$f(2+\sqrt{5}) = \frac{(2+\sqrt{5})^2 + 2(2+\sqrt{5}) - 3}{(2+\sqrt{5})^2 + 1} = \frac{4+8+4\sqrt{5} + 4+2\sqrt{5} - 3}{4+8+4\sqrt{5} + 1}$$

$$= \frac{10+4\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}} = \frac{5+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} = 1$$

$$= \frac{-5 + 5\sqrt{5}}{5} = -1 + \sqrt{5}$$

گزینہ ۱

مثال: نقطہ انتزاعی تابع $y = n - \sqrt{2n-1}$ را بدست آورید.

$$y' = 1 - \frac{2}{2\sqrt{2n-1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = \frac{\sqrt{2n-1} - 1}{\sqrt{2n-1}} \quad D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$y' = 0 : \sqrt{2n-1} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{2n-1} = 1 \rightarrow 2n-1 = 1 \Rightarrow n = 1$$

$$y' = 0 : \sqrt{2n-1} = 0 \Rightarrow 2n-1 = 0 \rightarrow n = \frac{1}{2}$$

x	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'	$ $	$-$	$+$
y	$ $	0	0

min

min : $(1, 0)$

مثال: طول نقطه max تابع $f(x) = (x-1)^2 \sqrt{x}$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} (x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (x-1)^2 + 2(x-1) x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{r}{r} \frac{(x-1)^r}{\sqrt[r]{x}} + \frac{r(x-1)^r}{1} \frac{1}{\sqrt[r]{x}} = \frac{r(x-1)^r + r(x-1)^r x}{r \sqrt[r]{x}}$$

$$= \frac{r(x-1)(x-1+x)}{r \sqrt[r]{x}} = \frac{r(x-1)(2x-1)}{r \sqrt[r]{x}}$$

$$f' = 0 \rightarrow r(x-1)(2x-1) = 0 \rightarrow x = 1, \frac{1}{2}$$

$$f' = 0 \rightarrow r \sqrt[r]{x} = 0 \rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$r(x-1)(2x-1)$	+	+	0	-	+
$\sqrt[r]{x}$	-	0	+	+	+
f'	-	0	+	-	+
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		min	max	min	

گزینه ۱

مثال: اگر $(1, 1)$ نقطه اکстрیم بی‌بج $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + 1$ باشد، a, b را بیابید.

$$(1, 1) \xrightarrow{\text{نقطه بی‌بج، محلی}} f(1) = 1 + a + b + 1 = 1 \rightarrow a + b = -1$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 4 + 2a + b = 0$$

$$\rightarrow 2a + b = -4$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ a = -3 \end{cases} \rightarrow b = 2$$



مثال: تابع $f(x) = x^4 + ax^2 + x - 1$ فاعده اقلترسم بنی است. حدود a را بیابید.

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + 1$$

f' باید همواره مثبت یا همواره منفی باشد.

ولی چون ضرب x^3 ، مثبت است پس f' همواره مثبت است:

$$f' \geq 0 : 5 \leq 0 : 4a' - 12 \leq 0 \rightarrow a' \leq 3$$

$$\Rightarrow -\sqrt{4} \leq a \leq \sqrt{4}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکستریم‌های یک تابع و

توابع صعودی و نزولی

قسمت چهارم: اکستریم‌های مطلق

جلسه چهارم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱۴) دسترس‌های مطلق تابع :

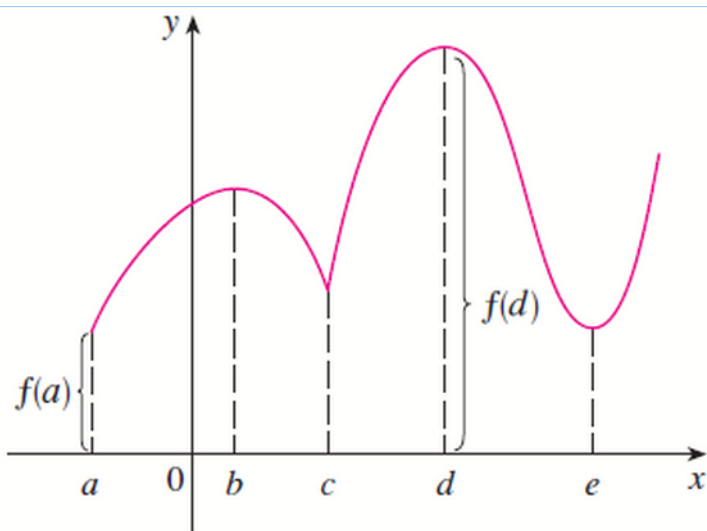
الف) تابع f در D_f ، $x=c \in D_f$ ، **ماکزیمم مطلق** دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f

داشته باشیم : $f(x) \leq f(c)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f می‌گوئیم.

ب) تابع f در D_f ، $x=c \in D_f$ ، **مینیمم مطلق** دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f

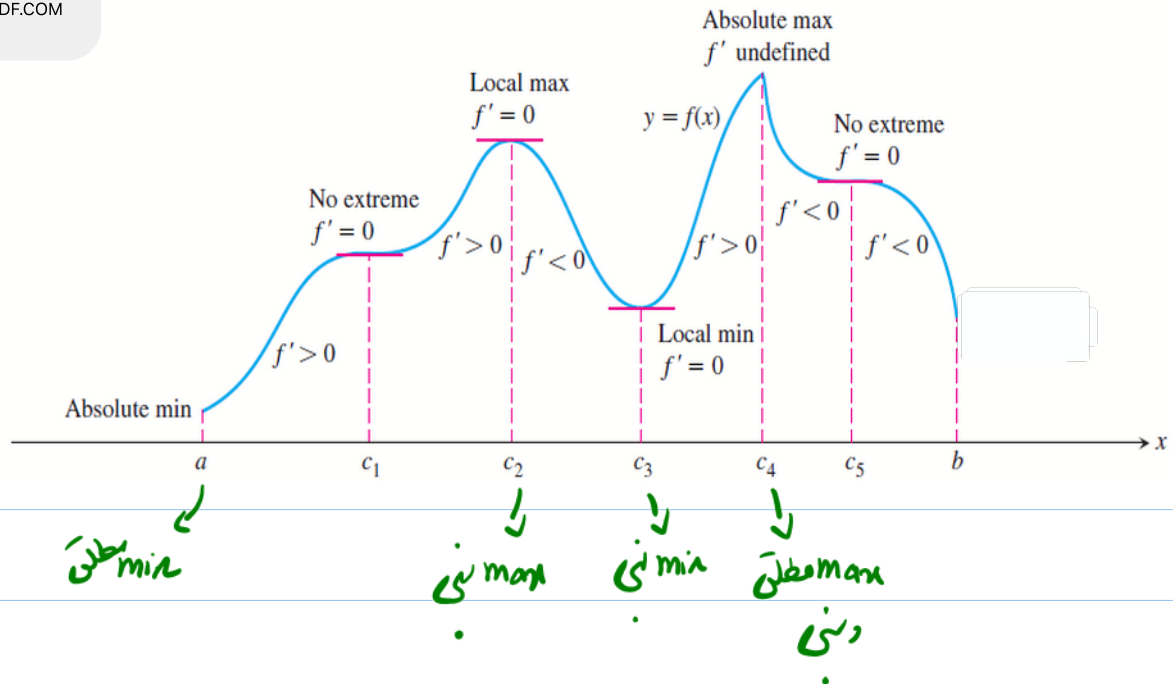
داشته باشیم : $f(x) \geq f(c)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f می‌گوئیم.

در نمودارهای زیر داریم :



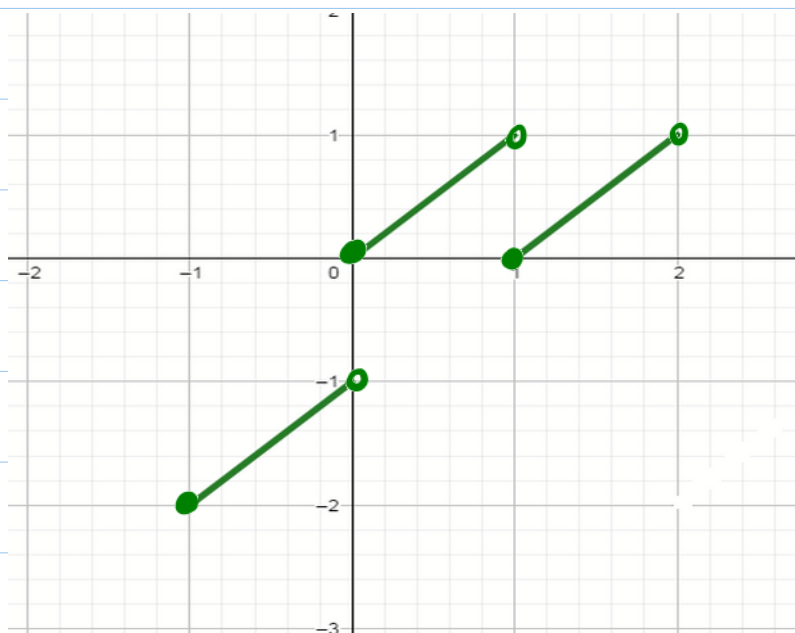
در $x=a$ ، $\min$ مطلق داریم.

در $x=d$ ، $\max$ مطلق داریم.



مثال: مقادیر $\min$ و $\max$ مطلق تابع $f(x) = x - [x]$ را روی بازه $(-2, 2)$ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & -1 < x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



$\max$ مطلق ندارد.

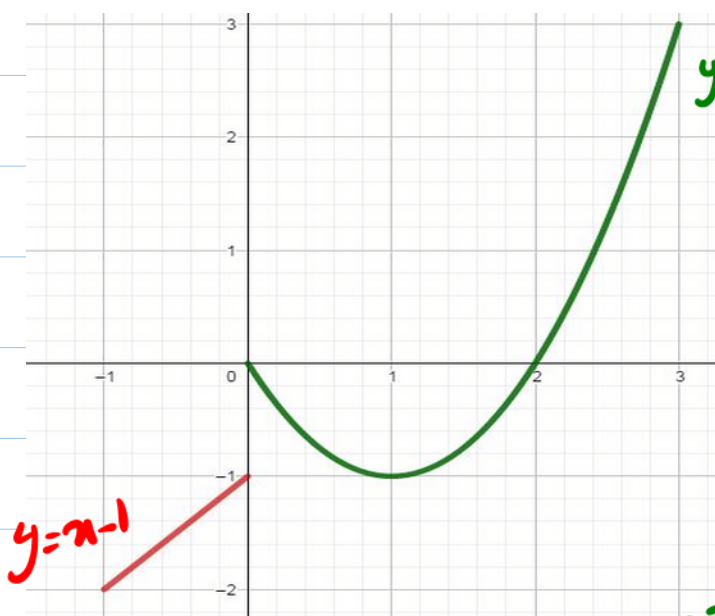
$\min$ مطلق در $x = -1$

که مقدار آن $-2 = f(-1)$ است.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & 0 \leq x \leq 3 \\ x - 1 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

مثال: مقدار $\min, \max$ مطلق تابع



$\max$ مطلق در $x = 3$ ؛

مقدار $f(3) = 3$.

$\min$ مطلق در $x = 1$ ؛ مقدار $f(1) = -1$.

نقشه: اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه $\min, \max$ مطلق دارد.

روش یافتن اکثر کم‌های مطلق توابع پیوسته در بازه $[a, b]$:

ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازه $[a, b]$ می‌یابیم. سپس مقدار تابع را در نقاط بحرانی حساب

می‌کنیم. بهترین مقدار $\max$ مطلق و کمترین مقدار $\min$ مطلق تابع f در بازه هستند.

مثال کنکور تجربی ۹۸

مقدار $\min, \max$ مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 10x$ را روی بازه $[-4, 4]$ بدست

(۴) $-27, 36$

(۳) $-36, 27$

(۲) $-20, 27$

(۱) $-11, 24$

$$f(x) = x^2 - 2x - 10 = 0 \rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \quad \begin{cases} x=5 \notin D_f \\ x=-2 \checkmark \end{cases}$$

بین پنج نقطه چهار $x=-2, x=3$ را در نظر بگیرید.

x	-2	-1	3
y	$\frac{78}{3}$	$\textcircled{27}$	$\textcircled{-45}$
		max	min

$x=3$ را در نظر بگیرید.

$$f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 - 10(-2) = -\frac{8}{3} - 4 + 20 = \frac{-8 - 12 + 60}{3} = \frac{40}{3}$$

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 10 = \frac{-1 - 3 + 30}{3} = \frac{26}{3}$$

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 10(3) = 9 - 9 - 30 = -30$$

گزینه ۲

مثال: حداکثر مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ در بازه $(\frac{1}{4}, 1)$ چقدر است؟

آن در این بازه بیشتر است؟

$$\frac{19}{21} \quad 12$$

$$\frac{5}{7} \quad 13$$

$$\frac{6}{7} \quad 14$$

$$\frac{16}{21} \quad 11$$

$$f'(x) = \frac{-(2x-1) \cdot 1}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x+1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$



	$-\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r}$	1
y	$\frac{\epsilon}{\sqrt{r}}$	$\frac{\epsilon}{\sqrt{r}}$	1
	$\searrow$	$\searrow$	
	min		max

$$f(-\frac{1}{r}) = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{r} + 1} = \frac{1}{\frac{1+r+\epsilon}{\epsilon}} = \frac{\epsilon}{r}$$

$$f(\frac{1}{r}) = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{r} + 1} = \frac{1}{\frac{1-r+\epsilon}{\epsilon}} = \frac{\epsilon}{r}, \quad f(1) = \frac{1}{1-1+1} = 1$$

$$\text{max} - \text{min} = \frac{\epsilon}{r} - \frac{\epsilon}{r} = \frac{r-1}{r} = \frac{1}{r}$$

نتیجه

مثال: مقادیر min, max تابع $f(x) = x\sqrt{\epsilon - x^2}$ را بیابید.

$$f'(x) = 1 \times \frac{\sqrt{\epsilon - x^2}}{1} + \frac{-2x}{2\sqrt{\epsilon - x^2}} \times x = \frac{\epsilon - x^2 - x^2}{\sqrt{\epsilon - x^2}} = \frac{-2x^2 + \epsilon}{\sqrt{\epsilon - x^2}}$$

$$D_f: \epsilon - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq \epsilon \rightarrow -r \leq x \leq r \rightarrow D_f = [-r, r]$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + \epsilon = 0 \rightarrow x^2 = r \Rightarrow x = \pm \sqrt{r}$$

x	-r	$-\sqrt{r}$	$\sqrt{r}$	r
y	0	-r	r	0
		$\searrow$	$\searrow$	
		min	max	

$$f(x) = f(-x) = 0$$

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \sqrt{4-2} = -2$$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \sqrt{4-2} = 2$$

مقدار $\max$ مطلق = 2 ، مقدار $\min$ مطلق = -2

مثال: حاصل ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ کدام است؟

$$1) \sqrt{5} \quad 2) 2 \quad 3) 1 \quad 4) \sqrt{5}$$

$$D_f : 1) x > 0$$

$$2) 5-x > 0 \rightarrow x \leq 5$$

$$D_f = 1) \cap 2) = [0, 5]$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} - \sqrt{x} = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x}$$



$$f'(0-x) = x \rightarrow 2. - \epsilon x = x \rightarrow -2x = -2. \rightarrow x = 1$$

x	0	1	0
y	$\sqrt{0}$	0	$2\sqrt{0}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	
	min	max	

$$f(0) = 0 + \sqrt{0} = 0$$

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$\max x \times \min = 0 \sqrt{0}$$

نیز

$$f(0) = 2\sqrt{0} + 0 = 0$$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = (2x-1)\sqrt{x}$ را در فاصله $(0,1)$ بیابیم؟

$$\frac{-1}{x} \quad 1$$

$$\frac{-2}{x} \quad 1$$

$$\frac{-2}{x} \quad 1$$

$$\frac{-2}{x} \quad 1$$

$$f(x) = (2x-1)x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(2x-1) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 0 : \text{بصورت} \quad 2\sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0$$



	0	$\frac{1}{2}$	1
x	0	$-\frac{3}{2}$	1
	$\nearrow$ max	$\searrow$ min	

$$f(-1) = -2 \times (-1) = 2$$

$$f(0) = (-1) \times 0 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$f(1) = 1 \times 1 = 1$$

گزینه ۲

نکته: برای یافتن اتریم‌های مطلق تابع f روی بازه (a, b) ، در روش بالا به جای

$f(a)$ ، $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ و به جای $f(b)$ ، $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر بیشترین

یا کمترین مقدار، در این مقادیر حدی اتفاق افتد آن‌گاه تابع در این بازه max

یا min مطلق خواهد داشت. در مورد بازه‌های $(-\infty, a)$ ، $(a, b]$ ، $[a, b)$

و $(-\infty, a]$ ، $(a, +\infty)$ ، $[a, +\infty)$ و $(-\infty, +\infty)$ هم به این شکل عمل می‌کنیم.

مثال: تابع $f(x) = x^2 - 2x$ در بازه $(-1, 4)$ مفروض است. اتریم‌های مطلق آن را

در صورت وجود محاسبه کنید.



$$f(x) = x^3 - 4x = 0 \xrightarrow{\div x} x^2 - 4 = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$$

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 8 - 8 = 0, \quad f(-1) = -1 - 4 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - 4x^2 = 0 - 0 = 0$$

x	-1	0	2	4
y	-5	0	0	16

چون مقدار max در حد جمع دهم $x \rightarrow 4$

اشتراکات بین max و min محلی نداریم ولی $f(-1) = f(2) = -5$ را در نظر بگیریم

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ روی بازه $(0, +\infty)$ چقدر است؟

9 11

10 12

12 14

14 16

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{16}{0^+} = 0 + \infty = +\infty \quad \text{خانه max محلی است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

در $x=2$ min محلی داریم :
 گزین 2 : $f(2) = 4 + 8 = 12$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکستریم‌های یک تابع و

توابع صعودی و نزولی

قسمت پنجم: بهینه سازی

جلسه پنجم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

بهنه سازی :

هدف از بهینه سازی پیدا کردن بهترین یا کمترین مقدار یک تابع است.

در اکثر سوالات بهینه سازی، ضابطه تابع به ما داده نمی شود و باید با توجه به داده های ارائه شده

تابع هدف را بنویسیم. مراحل زیر را برای حل اینگونه سوالات دنبال می کنیم :

۱- در صورت لزوم شکل مناسبی رسم می کنیم.

۲- اگر تابع هدف بیش از یک متغیر داشته باشد با استفاده از شرط سوال (رابطه کسبی)

آن را بر حسب یک متغیر بنویسیم.

۳- از تابع هدف مشتق می گیریم و مساوی صفر قرار می دهیم. مقدار اکثر هم تابع هدف را محاسبه می کنیم.

مثال: اگر x و y دو عدد مثبت باشند که $xy = 4$ ، مقدار مینیمم عبارت $p = 2x + 4y$

را محاسبه کنید. // رابطه کسبی : $xy = 4 \rightarrow y = \frac{4}{x}$



تجربہ
 $p = 2u + 2 \times \frac{4}{u} \Rightarrow p(u) = 2u + \frac{18}{u}$

$$p'(u) = 2 - \frac{18}{u^2} = 0 \Rightarrow \frac{18}{u^2} = 2 \rightarrow 2u^2 = 18 \rightarrow u^2 = 9 \Rightarrow u = 3$$

$$y = \frac{4}{u} = 2$$

$$p_{\min} = 2 \times 3 + 2 \times 2 = 4 + 4 = 12$$

مثال: اگر $u + y = 4$ باشد، کمترین u و y کیا ہے۔

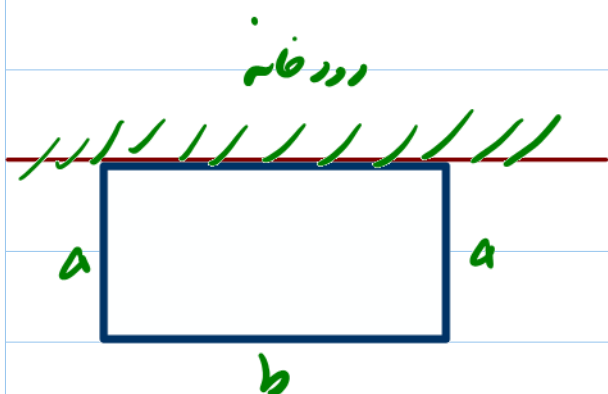
$$y = 4 - u : p = u^2 y \Rightarrow p(u) = u^2 (4 - u) = 4u^2 - u^3$$

$$p'(u) = 12u^2 - 4u^3 = 4u^2(3 - u) = 0 \begin{cases} 4u^2 = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow \min \\ 3 - u = 0 \rightarrow u = 3 \rightarrow \max \end{cases}$$

$$y = 4 - 3 = 1 : p_{\max} = 3^2 \times 1 = 27$$

مثال: بیشترین مساحت مستطیلی که بوسیله یک جانب به طول ۴۸ متر درخاسته یک درختخانه

می توان محصور کرد، چند متر مربع است؟



$$48 = 2a + b$$

رابطه ای

$$\rightarrow b = 48 - 2a$$

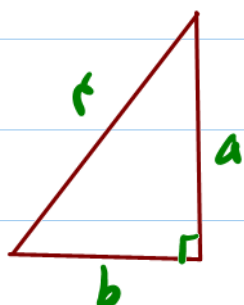
$$S = a \times b = a(48 - 2a) = 48a - 2a^2$$

تابع هدف :

$$S'(a) = 48 - 4a = 0 \rightarrow 4a = 48 \rightarrow a = 12 : b = 48 - 24 = 24$$

$$S_{\max} = 12 \times 24 = 288$$

مثال: طول درشت قائم الزاویه برابر است. بیشترین مساحت آن را بیابید.



$$a^2 + b^2 = 14^2 : \text{رابطه فیثاغورس}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{14^2 - a^2}$$

$$S = \frac{1}{2}ab \Rightarrow S = \frac{1}{2}a\sqrt{14^2 - a^2}$$

$$S'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 - a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{14^2 - a^2}} \times \frac{1}{2}a$$

$$S'(a) = \frac{14^2 - a^2 - a^2}{2\sqrt{14^2 - a^2}} = \frac{14^2 - 2a^2}{2\sqrt{14^2 - a^2}} = \frac{14^2 - 2a^2}{2\sqrt{14^2 - a^2}}$$

$$S'(a) = 0 \rightarrow 14^2 - 2a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7, b = \sqrt{14^2 - 49} = 7\sqrt{3}$$

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \times 7 \times 7\sqrt{3} = \frac{49\sqrt{3}}{2}$$

از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

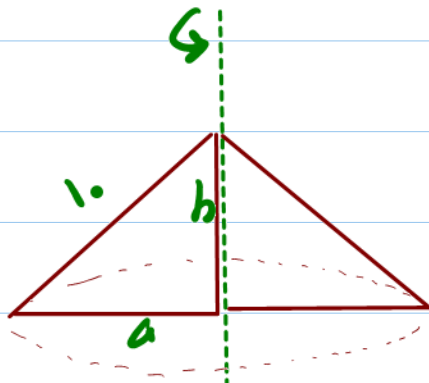
$$\frac{\sqrt{2}}{1} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{1} \quad (۱)$$

اگر یک مثلث قائم‌الزاویه را حول یک ضلع قائم دوران دهیم، یک مخروط ایجاد می‌شود که شعاع قاعده و ارتفاعش برابر اضلاع قائم مثلث اند.



$$V = \frac{1}{3} \pi a^2 b$$

رابطه کس: $a^2 + b^2 = 100 \rightarrow a^2 = 100 - b^2$: رابطه نهایی

$$V = \frac{1}{3} \pi (100 - b^2) b = \frac{1}{3} \pi (100b - b^3)$$

$$V'(b) = \frac{1}{3} \pi (100 - 3b^2) = 0 \rightarrow 3b^2 = 100 \rightarrow b = \frac{10}{3}$$

$$a^2 = 100 - \frac{100}{9} = \frac{800}{9}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{\frac{800}{9}}{\frac{100}{9}}} = \sqrt{8} \quad \text{نیز ۸}$$

مثال: کوتاه‌ترین فاصله ۹۹:

کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x+7}$ ، کدام است؟

$3\sqrt{2}$ (۴)

۵ (۳)

$4/5$ (۲)

۴ (۱)

نقطه $B(x, y)$ را روی تابع در نظر بگیریم. فاصله $A(5, 0)$ تا B را تابع هدف

می‌نامیم که باید $\min$ شود:

رابطه کسری $y = \sqrt{2x+7}$

$$AB = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}$$

تابع هدف $AB = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$

$$(AB)' = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = 0 \rightarrow 2x-8=0 \rightarrow x=4$$

گزینه ۱ $(AB)_{\min} = \sqrt{4^2 - 8 \times 4 + 32} = \sqrt{16} = 4$

مثال: کوتاه‌ترین فاصله ۹۸:

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله

$y = \sqrt{12-x}$ ، در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

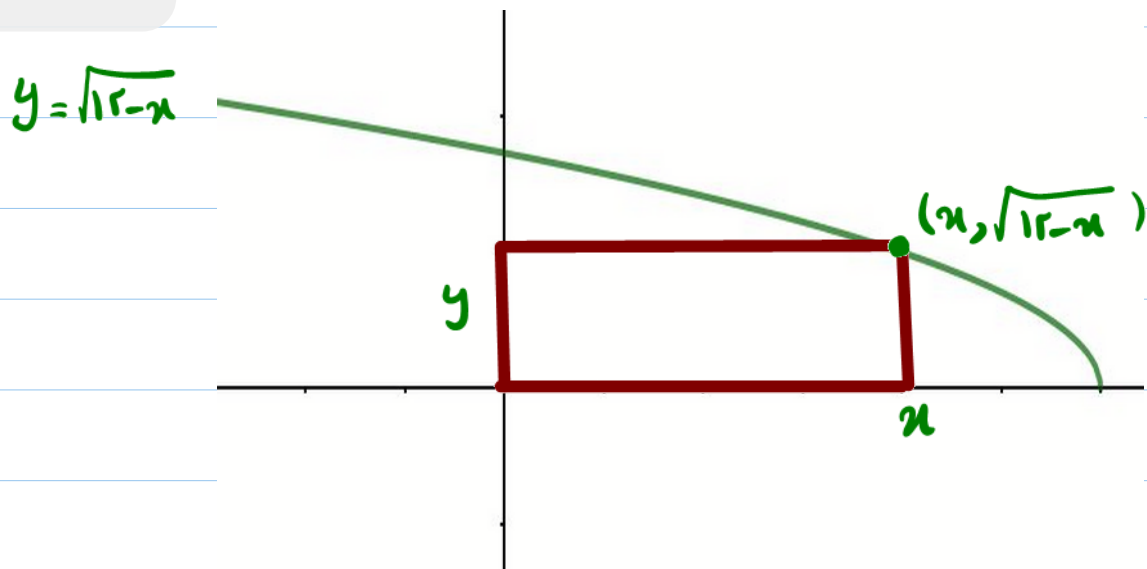
۱

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

$8\sqrt{3}$ (۲)

$8\sqrt{2}$ (۱)



$$S = xy = x\sqrt{12-x} = \sqrt{12x^2 - x^3}$$

$$S'(x) = \frac{24x - 3x^2}{2\sqrt{12x^2 - x^3}} \rightarrow S' = 0 \rightarrow 24x - 3x^2 = 0$$

$$3x(8-x) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \text{ غلط} \\ x=8 \checkmark \end{matrix} \quad y = \sqrt{12-8} = \sqrt{4} = 2$$

$$S_{\max} = 8 \times 2 = 16 \quad \text{گزینه } c$$

مثال: شعاع به ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

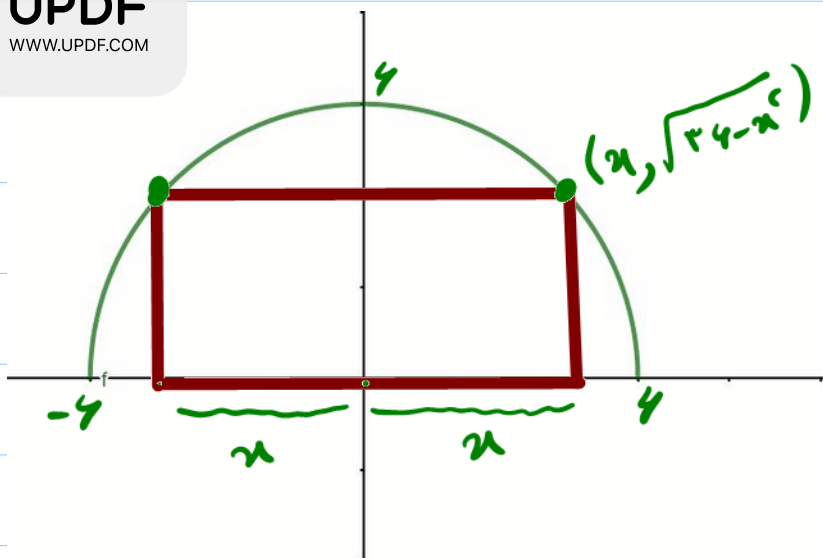
بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

۳۶ (۴)

۲۷ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)



$$x^2 + y^2 = 16 \quad \text{معادله دایره}$$

$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$S = 2x \times y = 2x \sqrt{16 - x^2} = 2\sqrt{16x^2 - x^4}$$

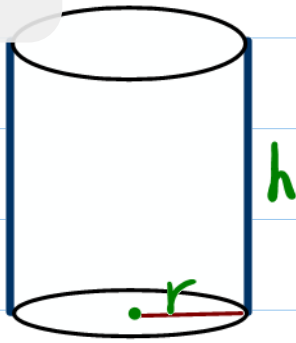
$$S'(x) = 2 \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{16x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow 16x - 4x^3 = 0$$

$$4x(16 - x^2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{16} \checkmark \\ x=-\sqrt{16} \end{cases} \quad y = \sqrt{16 - 16} = \sqrt{16}$$

$$S_{\max} = 2 \times \sqrt{16} \times \sqrt{16} = 2 \times 16 = 32 \quad \text{گزینه ۴}$$

مثال: می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌شکل بازم که گنجایش آن 2π لیتر باشد. ارضاع

استوانه چه قدر باشد تا هزینه فنر به کار رفته در تولید آن کمینه شود؟



$$V = \pi r^2 h = r\pi \Rightarrow r^2 h = r$$

القوة

$$\Rightarrow h = \frac{r}{r^2}$$

رابطه می

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{پایه}} + S_{\text{جانب}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$S_{\text{کل}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{r}{r^2} = 2\pi \left(r^2 + \frac{r}{r} \right)$$

تابع هدف

$$S'(r) = 2\pi \left(2r - \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

$$\frac{2r^3 - 1}{r^2} = 0 \rightarrow 2r^3 - 1 = 0 \rightarrow r^3 = \frac{1}{2} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$h = \frac{r}{r^2} = \frac{r}{1} = r$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع
و نقطه عطف آن

جلسه ششم: صفحات ۱۲۷ تا ۱۳۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

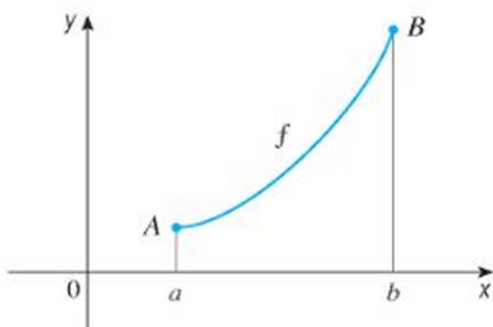
اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

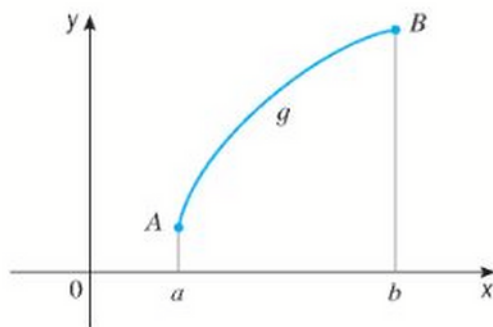
جهت تقریب:

اگر در یک بازه، همه خط‌های مماس بر منحنی، زیر منحنی قرار گیرند، می‌گوییم تقریب بالا است.

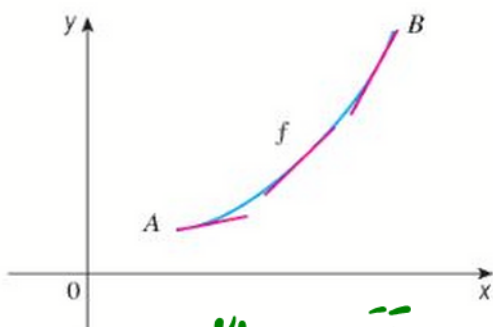
اگر در یک بازه، همه خط‌های مماس بر منحنی، بالای منحنی قرار گیرند، می‌گوییم تقریب پایین است.



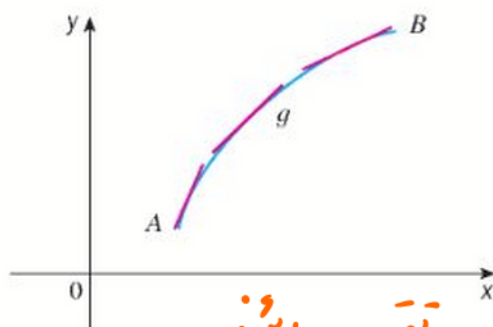
(a)



(b)

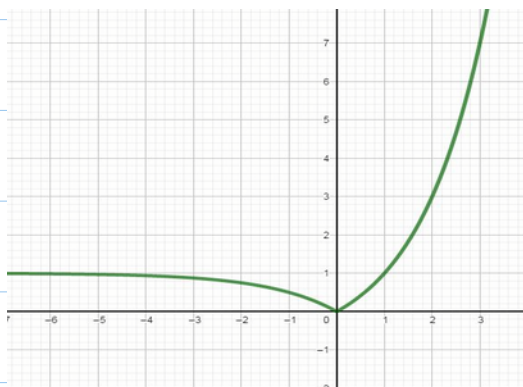


تقریب بالا



تقریب پایین

مثال: جهت تقریب تابع $f(x) = 12 - x^2$ را تعیین کنید.



در $(-\infty, +\infty)$ تقریب بالا

در $(-\infty, 0)$ تقریب پایین

یافتن جهت تقریبی بدن رسم نمودار :

به شکل های زیر با در حالت تقریبی بدن را نشان دقت کنید. شب را به سمت راست و

چپ به راست در حال کاهش است و می دانیم شب را به سمت راست و چپ

پس مشتق تابع در حال کاهش است. به عبارت دیگر مشتق آن نزول است و اگر یک تابع نزول

باشد، مشتق آن منفی است پس داریم :

$$f' < 0 \Rightarrow f' < 0 \Rightarrow \text{مشتق منفی است} \Rightarrow f \text{ نزولی}$$

برای تقریبی بدن با هم به نتیجه مشابهی می رسم.

نکته: فرض کنید f به از هر نقطه از بازه باز I منحصر باشد :

۱- اگر برای هر x از I : $f'(x) > 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقریباً به بالا دارد.

۲- اگر برای هر x از I : $f'(x) < 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقریباً به پایین دارد.

۳- اگر برای هر x از I : $f'(x) = 0$ باشد آنگاه نمودار f بی تغییر است.

نکته: برای تعیین جهت تقعر تابع f باید مشتق دوم را تعیین و مثبت کنیم.

مثال: جهت تقعر تابع $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ را مشخص کنید.

$$f'(x) = \frac{1(1+x^2) - x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)' - 2(1+x^2) \times 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{2x(1+x^2)(-(1+x^2) - 2(1-x^2))}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{2x(-1-x^2-2+2x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^4} \quad 2x(x^2-3)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f''		$-$	$+$	$-$	$+$
f					

مثال: به ازای چه مقادیری از a ، تفریبی $f(x) = x^4 + ax^3 + \frac{1}{2}x^2$ همواره در $\mathbb{R}$...

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 1 > 0 \quad \xrightarrow{+} \quad 4x^2 + 2ax + 1 > 0$$

$$\Delta < 0 : \quad \Delta = 4a^2 - 4 < 0 \rightarrow 4a^2 - 4 < 0 \rightarrow a^2 < 4$$

$$\Rightarrow -2 < a < 2$$

مثال: چه برد فاصلی که تفریبی در $\mathbb{R}$ به $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2} \cos x$ ، $0 \leq x \leq 2\pi$...

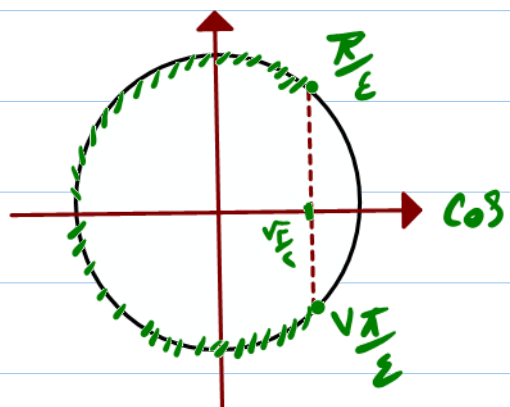
رد به بالا است، درجه بازه است؟

$$f'(x) = 2x - 2\sqrt{2} \sin x : f''(x) = 2 - 2\sqrt{2} \cos x > 0$$

$$-2\sqrt{2} \cos x > -2 \Rightarrow \cos x < \frac{-2}{-2\sqrt{2}} \rightarrow \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تفریبی به $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$...



نقطه عطف:

نقطه $(a, f(a))$ را نقطه عطف می‌نامند اگر تابع f در آن نقطه تغییر کند.

۱۱. تابع در این نقطه خط مماس داشته باشد.

۱۲. جهت تغییر مندرار در این نقطه تغییر کند.

نکته: وقتی که یک تابع f در $(a, f(a))$ خط مماس دارد، حتی در این نقطه مشتق مشخصی

دارد یا در این نقطه پیوسته است، مشتق نامشخص دارد.

مثال: نقاط عطف توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $f(x) = \sqrt[5]{x^5} - 10\sqrt[5]{x^2}$

$$f(x) = x - 10x^{\frac{2}{5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{5}x^{\frac{4}{5}} - \frac{20}{5}x^{-\frac{3}{5}}$$

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{5}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{8}{5}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{8}{5}}(x+2) = \frac{10}{9} \frac{x+2}{\sqrt[5]{x^8}}$$

$x = -2$ (با فلش قرمز)
 $x = 0$ (با فلش قرمز)

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f''		-	+	+
f		$\cap$	$\cup$	$\cup$



تابع در $x = -2$ نقطه عطف دارد زیرا در این نقطه هشت تغییر علامت

و مشتق دوم تغییر علامت می دهد.

$$۲) g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$g'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \cdot x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

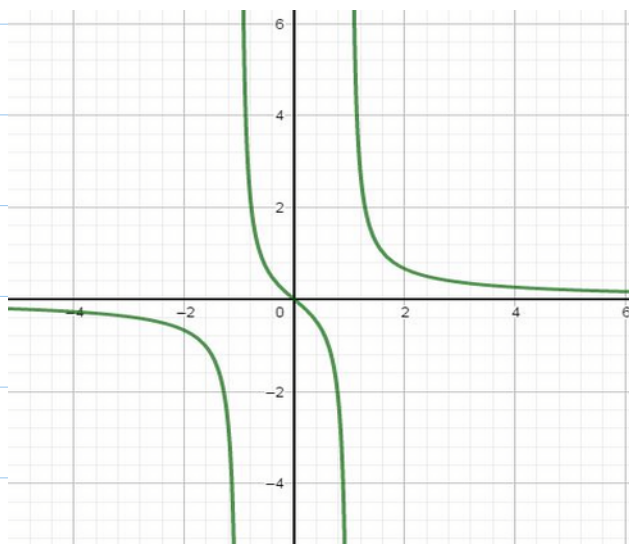
$$g''(x) = \frac{-2x(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)2x(-x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 - 1)(-x^2 - 1) - 4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{2x(x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^3} \rightarrow \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
g''	-		+	-	+
g	∩		∪	∩	∪

عطف

در $x = 0$ نقطه عطف دارد.



چند نکته درباره نقطه عطف:

۱- خط مماس بر نمودار تابع در نقطه عطف تابع از نمودار تابع عبور می کند.

۲- نزدیکی نمودار تابع در نقطه عطف مشتق دوم داشته باشد. مثلاً تابع $y = x^3$ در $x=0$.

۳- در نقطه عطف، اگر مشتق دوم وجود داشته باشد، برابر صفر است.

۴- هر نقطه که مشتق دوم تابع در آن صفر باشد لزوماً نقطه عطف نیست. مثلاً تابع $y = x^4$

در $x=0$.

$$f'(x) = 4x^3 : f''(x) = 12x^2 : f''(0) = 0$$

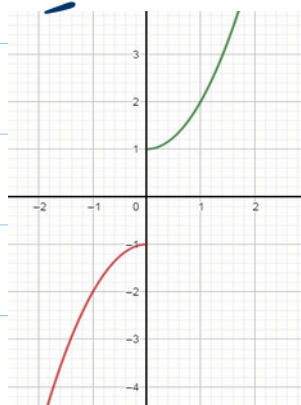
۵- $12x^2$ است پس f'' اطراف $x=0$ تغییرات غیر صاف نمی دهد پس $x=0$ عطف نیست.

۵- هر نقطه که جهت تغییر نمودار تابع در آن تغییر کند، لزوماً نقطه عطف نیست. این نقطه

ممکن است نقطه ناپایداری یا مشتق ناپذیری باشد.

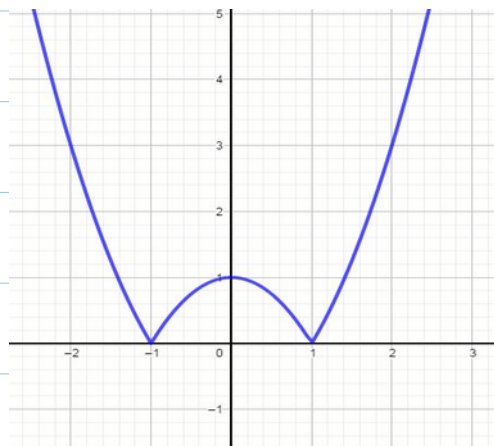
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۶- $x=0$ عطف نیست زیرا در این نقطه تابع برگشت نیست.



مثلاً:

$$g(x) = |x^2 - 1|$$



$x = -1$, $x = 1$ نقطه نینسند زیرا در این نقاط دو نیمه ی تابع رسم می شود

مثال: گنجد ریاضی ۹۷

خط راستی بر منحنی $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ مماس شده و از آن عبور می کند.

شیب این خط کدام است؟ $(1, -\frac{2}{3})$ $(2, \frac{1}{3})$ $(3, \frac{4}{3})$ $(4, \frac{5}{3})$

پس در نقطه عطف بر تابع مماس رسم شده است.

$$\text{نقطه} \quad x = \frac{2}{3} \Rightarrow y'' = 6x - 4 = 0 : y' = 3x^2 - 4x + 3$$

$$\text{شیب خط مماس در نقطه عطف} : y'(\frac{2}{3}) = 3(\frac{2}{3})^2 - 4 \times \frac{2}{3} + 3$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 3 = \frac{-4}{3} + 3 = \frac{5}{3} \quad \text{گزینه ۴}$$

سؤال: اگر $A(1, -11)$ نقطه عطف نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ باشد، $f(-1)$ را بیابید؟

۶۱۴

۵۱۳

۴۱۲

۲۱۱

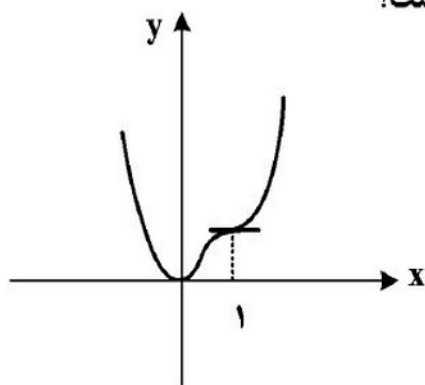
① $f(1) = -11$: نقطه عطف روی تابع $f(1) = 1 + a + b = -11 \Rightarrow a + b = -12$

$f''(1) = 0$: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$: $f''(x) = 6x + 2a$

$f''(1) = 6 + 2a = 0 \rightarrow a = -3$ ① $-3 + b = -12 \Rightarrow b = -9$

گزینه ۲ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$: $f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$

سؤال: نمودار تابع $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx^2 + cx$ کدام است؟



(۱) -۸

(۲) -۷

(۳) -۵

(۴) -۴

در $x=1$ نقطه عطف داریم پس $f''(1) = 0$.

در $x=1$ ما به انتی داریم پس $f'(1) = 0$.

$$f'(0) = 0 \text{ (local min, } x=0 \text{)}$$

$$f'(x) = 0 : f'(x) = 12x^2 + 7ax^2 + 7bx + c$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0 + 0 + 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$f'(1) = 0 : f'(1) = 12 + 7a + 7b + 0 = 0 \rightarrow 7a + 7b = -12$$

$$f''(1) = 0 : f''(x) = 24x + 14a + 7b$$

$$f''(1) = 24 + 14a + 7b = 0 \rightarrow 7a + b = -18$$

$$\begin{cases} 7a + 7b = -12 \\ 7a + b = -18 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Subtract the second equation from the first:} \\ (7a + 7b) - (7a + b) = -12 - (-18) \\ 6b = 6 \Rightarrow b = 1 \end{array}$$

$$7a + 1 = -18 \rightarrow 7a = -19 \rightarrow a = -\frac{19}{7}$$

1. $f''(1) > 0$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس سوم: رسم نمودار تابع

جلسه هفتم: صفحات ۱۳۷ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

رسم نمودار توابع :

برای رسم نمودار یک تابع مراحل زیر را دنبال می‌کنیم :

۱- دامنه تابع را می‌یابیم .

۲- معادله‌های تابع را در صورت وجود در دست می‌آوریم .

۳- مشتق اول تابع را پیدا می‌کنیم و جدول تغییرات تابع را می‌یابیم .

۴- مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم و جهت تقعر تابع را می‌یابیم .

۵- محل برخورد نمودار تابع را با محور مختصات در صورت امکان تعیین می‌کنیم .

۶- با استفاده از اطلاعات دست‌آمده، نمودار تابع را رسم می‌کنیم .

نکته : اگر مرحله حساب زوایا داشت یا بدیهی بود، از برخی مراحل صرف‌نظر می‌کنیم .

مثال : نمودار تابع $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ را رسم کنید .

$$D = \mathbb{R}$$

:

فاصله معادله



$$f'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \rightarrow 3x(x+1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f'	+	0	-	+
f		0	-1	

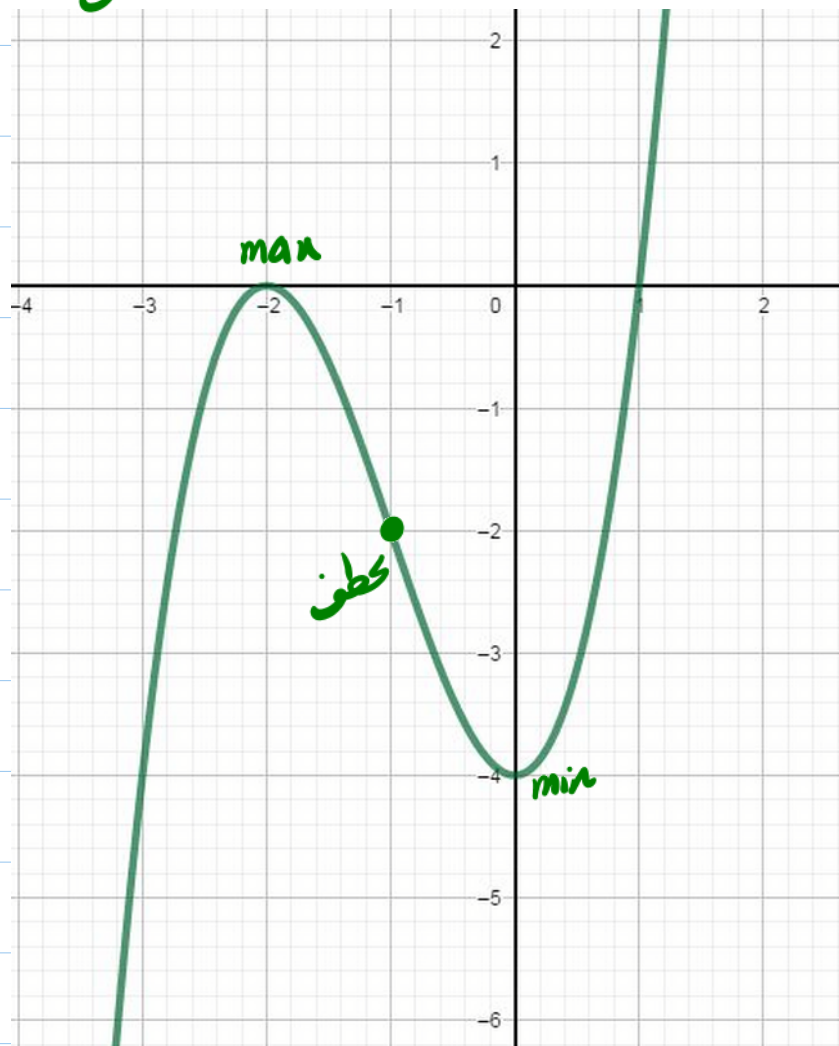
↗
↘
↗

max
min

$$f''(x) = 6x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
f''	-	0	+
f	∩	$-\frac{4}{3}$	∪

قطف



چند نکته درباره نمودار تابع درجه سوم :

اگر صورت کلی تابع درجه ۳، $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ باشد :

۱- اگر $a > 0$ باشد، نمودار از ناحیه سوم شروع و به ناحیه اول ختم می‌شود و اگر $a < 0$ باشد

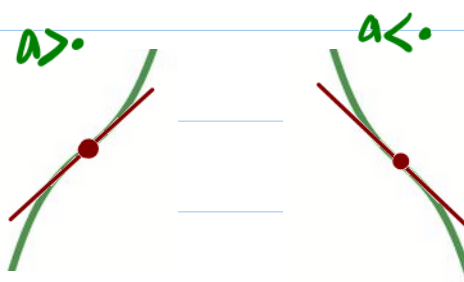
نمودار از ناحیه دوم شروع و به ناحیه چهارم ختم می‌شود.

۲- مشتق اول تابع درجه سوم به صورت $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ است که یک تابع

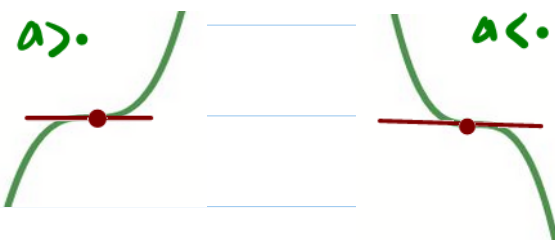
درجه دوم است. ریشه مشتق به شرطی که f در آنجا تغییرات دهد نقاط ext یعنی f مینه.

$$\Delta_{f'} = 4b'^2 - 4(3a)(c) = 4(b'^2 - 3ac)$$

الف) اگر $\Delta_{f'} < 0$ باشد، f فاته ext یعنی است. $a > 0$ $a < 0$

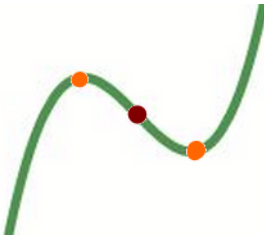


ب) اگر $\Delta_{f'} = 0$ باشد، f فاته ext یعنی است ولی در ریشه مشتق همگونی بر تابع قابل رها است.

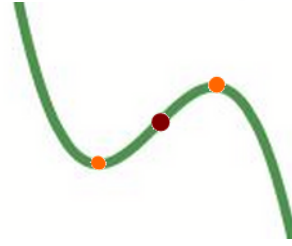


پ اگر $a > 0$ باشد، f دارای یک $\min$ و یک $\max$ است.

$a > 0$



$a < 0$



۳- مشتق دوم تابع درجه دوم به صورت $f''(x) = 2ax + 2b$ است. پس تابع همواره

یک نقطه عطف دارد: $2ax + 2b = 0 \rightarrow 2ax = -2b \rightarrow x = -\frac{2b}{2a}$

$$\Rightarrow x_{\text{عطف}} = -\frac{b}{a}$$

۴- در حالتی که f ، ext است، نقطه عطف وسط پاره خطی است که ext است.
راه هم وصل می کنه.

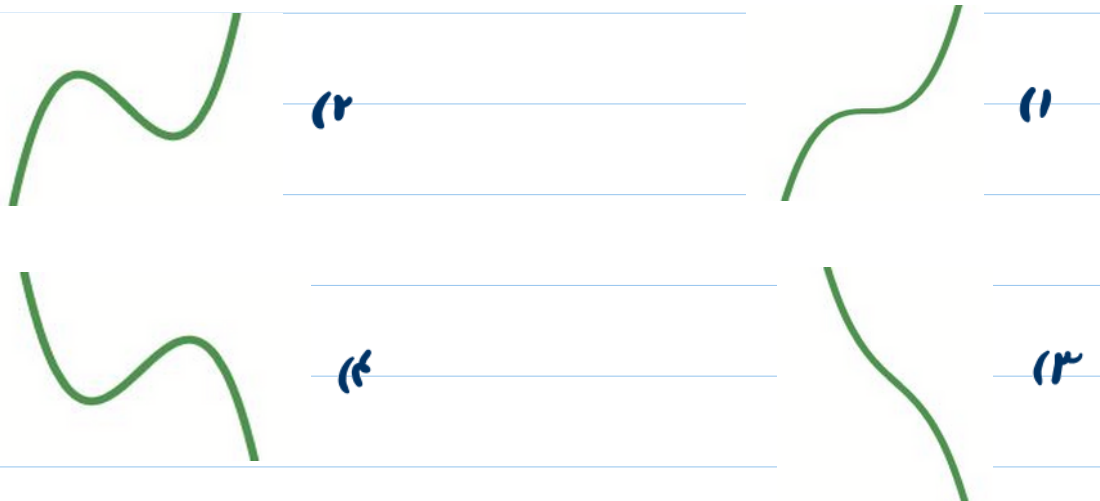
مثال: اگر مجموع مقادیر $\min$ و $\max$ تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - m$ مساوی دو باشد.

$$\frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = y_{\text{عطف}} \Rightarrow \frac{2}{2} = y_{\text{عطف}} \Rightarrow y = 1$$

$$x_{\text{عطف}} = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3 \times 1} = 1 \quad (1, 1) \text{ عطف}$$

مثال (۱) $f(1) = 1 - 4 + 1 - m = 1 \Rightarrow m = -2$

مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$ به کدام صورت است؟



نمودار از ناحیه سوم شروع و به ناحیه اول ختم می شود: $a = \frac{1}{3} > 0$

فاصله x بین است دی $\Delta_{f'} = 4 - 4 \times 1 \times 1 = 0$: $f'(x) = x^2 - 2x + 1$

در عطف مسائل انتی است. پس گزینه ۱ درست است.

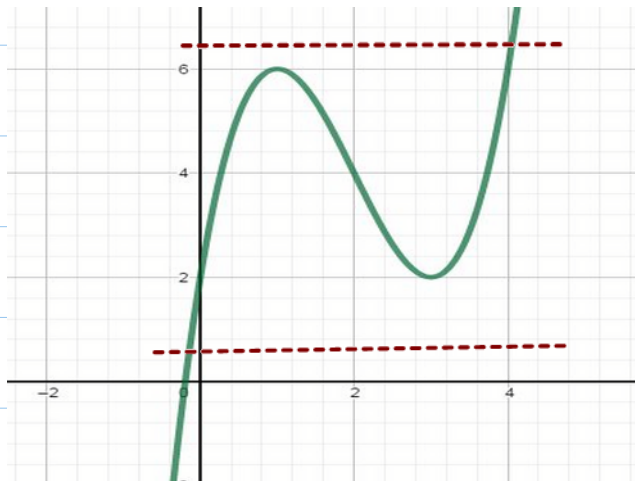
مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ بارزای چه مقادیری از m ، معادله

$f(x) = m$ فقط یک ریشه حقیقی دارد؟

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, 3$



	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f			$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
			max		min		



$$m < 2 \leq m > 4$$

مثال: سوزار ربع $f(x) = \frac{x-1}{1-x}$ را رسم کنید. $f(x) = \frac{x-1}{-x+1}$

$$D = \mathbb{R} - \{1\}$$

$x=1$ به جانب قائم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{1-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{1-x} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow y = -1 \quad \text{به جانب افقی}$$

$$f'(x) = \frac{1(1) - (1-1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+		+	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	-1

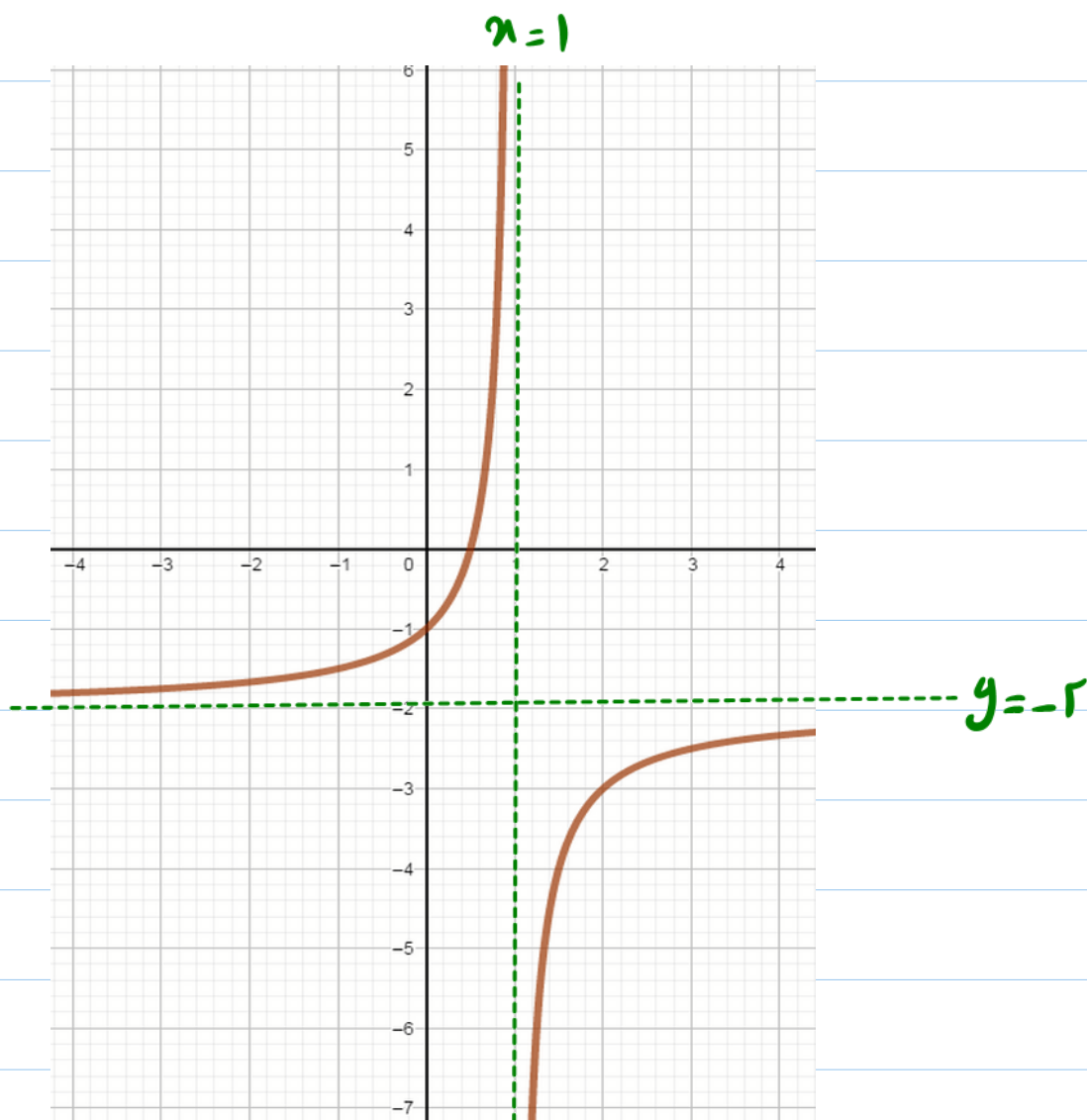


$$x=0 \rightarrow y = \frac{2x_0-1}{1-} = -1$$

معن بر خیزد با محور y ها:

$$y=0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

معن بر خیزد با محور x ها:

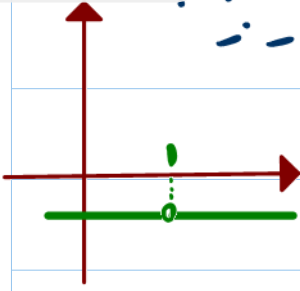


نکته: توابع به فرم کلی $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ را توابع هیپرکرافیک می گویند، به شرطی $c \neq 0$ باشد.

(اگر $c=0$ باشد تابع خطی می شود) و $ad-bc \neq 0$ باشد. (اگر $ad-bc=0$ باشد

تابع ثابت $y = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ می شود)

مثال: اگر مندرجہ تابع $y = \frac{ax+2}{2x+b}$ بصورت زیر باشد، a, b را بیابید۔



مندرجہ تابع ثابت ہے : $ab = 4 \Rightarrow ab - 2(2) = 0$

$x=1$ رشتہ منبج ہے $2x+b=0 \Rightarrow b=-2$

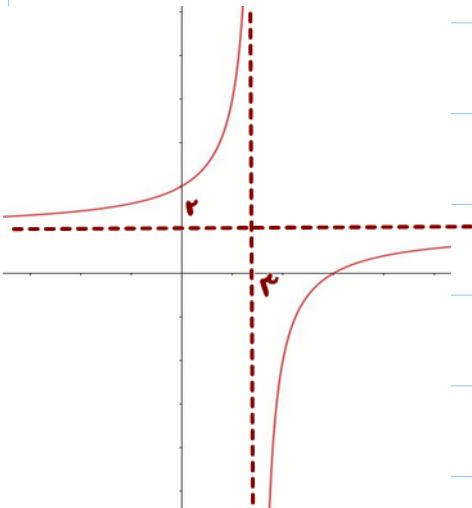
$$a(-2) = 4 \Rightarrow a = -2$$

تذکر: تابع مندرجہ فائدہ $ax+b$ یعنی نقطہ عطف است و دارا یک جانب قائم

$x = -\frac{d}{c}$ و یک جانب انی $y = \frac{a}{c}$ است، کہ نقطہ تمام جانب $\frac{a}{c}$ بنفقت

$(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ مرکز تارن تابع است.

مثال: مندرجہ تابع $f(x) = \frac{ax+4}{bx+1}$ بصورت زیر است. a, b را بیابید۔



$x=2$ جانب قائم: پس $x=2$ رشتہ منبج:

$$2b+1=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$y=2$ جانب انی:

$$\frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b = 2(-\frac{1}{2}) = -1$$

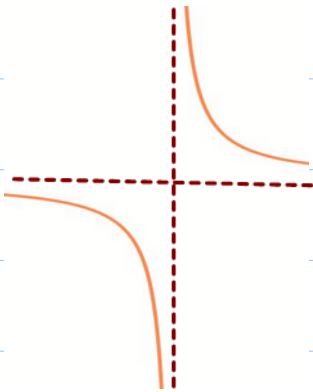


نکته: می دانیم مشتق تابع هدرامیک به صورت $f'(m) = \frac{ad-bc}{(c+d)^2}$ است. این تابع در

دامنه اش غیر منفی است و در دو طرف معادله هم به توجیه است $ad-bc$

یا که آهسته آهسته نزدیک به صفر است.

مثال: اگر هدرامیک $f(m) = \frac{mn+1}{n-2}$ به صورت زیر باشد، عدد m را بیابید.

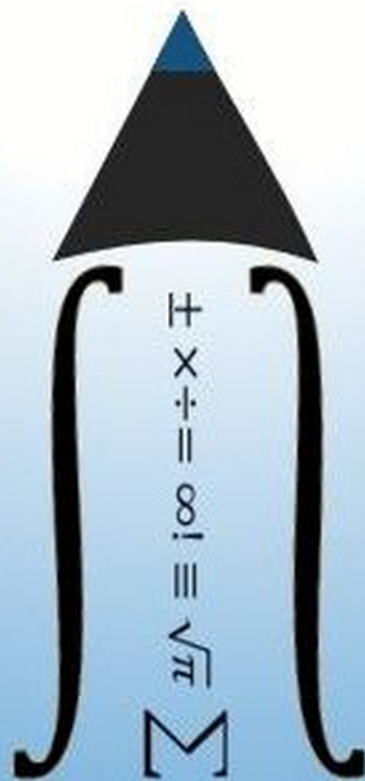


$n=2$ معادله هم است، پس در بازه $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$

تابع آهسته آهسته به صفر می رسد (یعنی است $ad-bc < 0$)

$$m(-2) - (1)(1) < 0 \Rightarrow -2m - 1 < 0$$

$$\Rightarrow -2m < 1 \rightarrow m > -\frac{1}{2}$$



گروه ریاضی دوره دوم متوسطه استان همدان

@riazihmd1

@riazihmd2

ریاضی و تجربی

انسانی و فحک