

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

نویسنده: سید تقی خالصی

به نام خدا

با شروع پاندمی کرونا که منجر به تعطیلی آموزش حضوری در مراکز آموزشی گردید و آموزش مجازی به اشکال مختلف به عنوان یک شیوه آموزش به طور جدی معرفی شد، بر آن شدم برای آن دسته از دانش آموزانی که به صورت صحیح آموزش مجازی دسترسی ندارند و همکارانی که بستر مناسبی برای تدریس مجازی در اختیار نداشتند، مجموعه‌ای شامل فیلم و جزوه برای درس ریاضی ۱ (فصل‌های اول تا پنجم) آماده کنم تا شاید در آن ایام سخت کمکی هر چند ناچیز به آموزش مفهومی ریاضیات و گسترش عدالت آموزشی شده باشد. آن دوران تمام شد ولی دیگر آموزش‌های تلفیقی و ترکیبی جای آموزش‌های سنتی را گرفت و فصلی جدید در امر آموزش گشوده شد.

با توجه به حجم بالای کار و تهیه همزمان فیلم و جزوه برای این درس و درس‌های دیگر قطعاً اشتباهاتی در جزوه وجود دارد که از علاقه‌مندان پوزش می‌طلبم و خوشحال می‌شوم با شناسه شاد بنده به آدرس @seyedfazelian در میان بگذارند تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح شود.

همانطور که خواهید دید جزوه به صورت جلسه‌ای و با قلم نوری تنظیم شده که فیلم هر جلسه در کانال آپارات <https://www.aparat.com/s.a.fazelian> در دسترس می‌باشد.

در پایان یادآوری می‌شوم استفاده از این جزوه به هر صورت مجاز و هزینه آن فقط دعا برای عاقبت بخیری نگارنده است.

سیدابوالفضل فاضلیان

۱۴۰۲/۱/۱۱

به نام خدا

بعد از بارگذاری جزوه فصل‌های اول تا پنجم ریاضی ۱ در کانال شاد گروه ریاضی استان همدان، پیام‌های محبت-

آمیز بسیاری از دانش‌آموزان و همکاران رسید که جزوه‌ها مورد استفاده قرار گرفته است و تقاضای تکمیل

مطالب (فصل‌های ششم و هفتم) را داشتند.

در ویرایش دوم جزوه، برخی اشتباه‌های نوشتاری که توسط عزیزان تذکر داده شده بود اصلاح گردید و فصل

ششم (شمارش) و فصل هفتم (آمار و احتمال) اضافه شد.

ان شاء الله در اولین فرصت فیلم‌های آموزشی این دو فصل هم تهیه و در کانال آپارات بارگذاری خواهد شد.

همچنان از همکاران و دانش‌آموزان عزیز تقاضا می‌کنم، ایرادات جزوه را به بنده گوشزد نمایند.

سیدابوالفضل فاضلیان

۱۴۰۲/۱۲/۱۰

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

(قسمت اول: یادآوری مجموعه، معرفی بازه)

جلسه اول: صفحات ۱ تا ۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری:

معرفی مجموعه: دسته‌ای از اشیاء مشخص و متمایز را مجموعه می‌گوئیم.

در مجموعه‌ها اشیاء را داخل $\{ \}$ قرار می‌دهیم و به این اشیاء

دفعه‌ای مجموعه می‌گوئیم. برای نشان دادن اینکه a عضو مجموعه‌ای

مانند A است می‌نویسیم: $a \in A$.

نمایش مجموعه با نمودار ون:

اگر دفعه‌ای یک مجموعه را داخل یک شکل هندسی بسته (مربع دایره، بیضی یا مستطیل)

قرار دهیم می‌گوئیم از نمودار ون برای نمایش آن استفاده کرده‌ایم.

نمایش مجموعه‌های دارای بنادرهای ریاضی:

برخی از مجموعه‌هایی که دفعه‌ای آن‌ها هستند و خاصیت مشترکی دارند را می‌توان با بنادرها

ریاضی نشان داد: $A = \{ \text{شرط‌ها و محدودیت‌ها} \mid \text{خاصیت مشترک} \}$
به طوری که

مجموعه های اعداد معروف :

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی

$E = \{2, 4, 6, \dots\}$: مجموعه اعداد زوج طبیعی

$\mathbb{O} = \{1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد فرد طبیعی

$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد حسابی

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: مجموعه اعداد صحیح

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$: مجموعه اعداد گویا

اعدادی که نمایش کسری ندارند و اعداد آنها مابین حیات $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$: مجموعه اعداد ننگ (اصم)

بدون تکرار است مانند: $\sqrt{2}$ و π

همه اعداد گویا و ننگ در کنار هم $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$: مجموعه اعداد حقیقی

مثال : کدامیک از عبارات زیر مشخص کننده یک مجموعه است.

الف) مجموعه فر طبیعی کوچکتر از ۱۰
مجموعه نیست

ب) عددهای اول و زوج
 $A = \{2\}$

ج) عدد در طبیعی معذب ۴
 $B = \{4, 8, 12, 16, \dots\} = \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$

د) عدد در صغیر بزرگتر از ۳ - و کوچکتر یا مساوی ۵

$$C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 5\}$$

مجموعه های برابر: هرگاه فضای دو مجموعه A و B یکسان باشند می گوئیم A و B برابرند

و می نویسیم $A = B$.

مثال: $A = \{2, 4, 8, 16, 18\}$

$$B = \{2, 4, 8, 16, 18\} = \{2, 4, 8, 16, 18\}$$

$$C = \{2, 2, 4, 8, 16, 16, 18\} = \{2, 4, 8, 16, 18\}$$

$$A = B = C$$

زیرمجموعه :

می‌گوئیم B زیرمجموعه A است هرگاه همه اعضای B در A باشند و می‌نویسیم $B \subseteq A$.

تذکره: هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است: $A \subseteq A$

مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه است: $\emptyset \subseteq A$
هر مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد ($\emptyset$ یا $\{\}$)

مثال: $B \subseteq A \Rightarrow A = \{1, 2, \dots, 10\}$ و $B = \{1, 4, 7\}$

مثال: اگر $A = \{\emptyset, 1\}$ باشد درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

نادرست $1 \subseteq A$ (الف) $\emptyset \in A$ (ب)

نادرست

درست $\emptyset \in A$ (ب)

دقت کنید

درست $\{\emptyset\} \subseteq A$ (ب)

درست $\emptyset \subseteq A$ (ب)

تذکره

مثال: تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

$$A_1 = \{\}$$

$$A_2 = \{a\}$$

$$A_3 = \{b\}$$

$$A_4 = \{c\}$$

$$A_5 = \{a, b\}$$

$$A_6 = \{a, c\}$$

$$A_7 = \{b, c\}$$

$$A_8 = A$$

قادر دارد: اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد می‌نویسیم: $n(A) = k$.
 ← قادر اختصاصی A

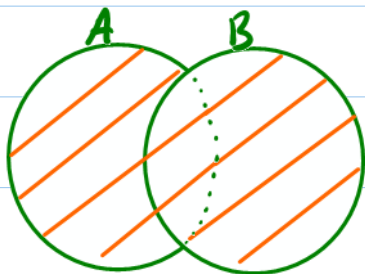
نکته: مجموعه A ، $2^{n(A)}$ زیرمجموعه دارد.

احتمال روی مجموعه‌ها:

۱) اجتماع: مجموعه‌ای است شامل همه عضوهای که حداقل در یکی از دو مجموعه A ، B

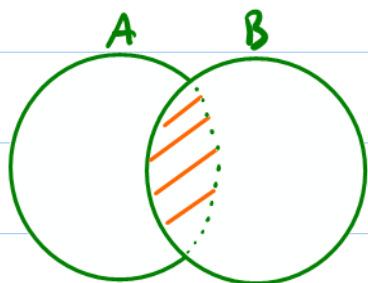
باشد:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$



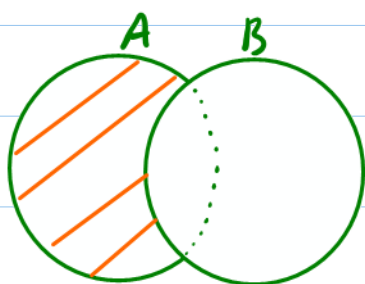
۲) اشتراک: مجموعه‌ای شامل همه عضوهای است که هم عضو A و هم عضو B باشند:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$



۱۳. تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A - B$ مجموعه‌ای است شامل عنصرهای A که

در B نیستند: $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$



مثال: مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$,

$C = \{1, 7, 10, 11\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ها زیر را مشخص کنید.

الف) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ب) $A \cap C = \emptyset$

پ) $C - B = \{\cancel{7}, 10, 11\} = \{10, 11\}$

ت) $(A - C) \cup (B - C) = \{2, 4, 6, 8, 9\} \cup \{5, 3, 9\}$
 $= \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

بازه یا فاصله :

برای خلاصه نویسی زیر مجموعه های اعداد حقیقی بنابر بازه را معرفی می کنیم. به عبارت دیگر از بازه ها برای نمایش تمام اعداد حقیقی بین دو عدد یا تمام اعداد حقیقی بزرگتر یا کوچکتر از یک عدد استفاده می کنیم.

مثلاً مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\}$ را که با بنابر ریاضی نشان داده ایم در نظر بگیرید. شکل بازه ای آن به صورت $[-1, 4)$ خواهد بود که بنمائی داده تر است.

قواعد نوشتن بازه ها :

- ۱- عدد کوچکتر (استرای بازه) سمت چپ و عدد بزرگتر (انتهای بازه) سمت راست نوشته می شود.
- ۲- اگر عدد ابتدا یا انتها در مجموعه باشد از بنابر کروشه $[$ و اگر عدد ابتدا یا انتها در مجموعه نباشد از بنابر براکت $)$ استفاده می کنیم.
- ۳- برای مجموعه هایی که از یک عدد بزرگتر هستند از بنادر ∞ + و برای مجموعه هایی که از

یک عدد کوچکتر از هزار ∞ - استفاده می کنیم. وقت کنید $\infty + \infty$ - در حقیقت نیستند

و فقط برای نمایش اندر در حقیقت بزرگ یا حقیقت کوچک استفاده می شوند. توجه کنید برای $\infty + \infty$ یا

∞ - از پرانتز استفاده کنید. در جدول زیر تمام حالت های نمایش یک بازه را می بینیم.

بازه	نمایش روی محور اعداد	نمار ریاضی بجزیره
(a, b)		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, b)$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$(a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$[a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$(a, +\infty)$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$[a, +\infty)$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
$(-\infty, b)$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
$(-\infty, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

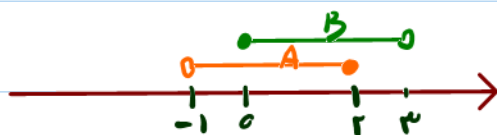
مثال: معبره‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$ $A = (-1, 2]$

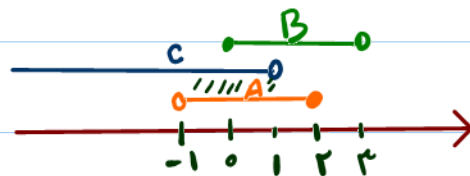
ب) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\}$ $B = [0, 3)$

پ) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ $C = (-\infty, 1)$

د) $A \cup B = (-1, 3)$



ه) $(A \cap C) - B = (-1, 1) - [0, 3) = (-1, 0)$



ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

(قسمت دوم: ادامه بازه، تعریف مجموعه‌های

متناهی و نامتناهی)

جلسه دوم: صفحات ۴ تا ۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

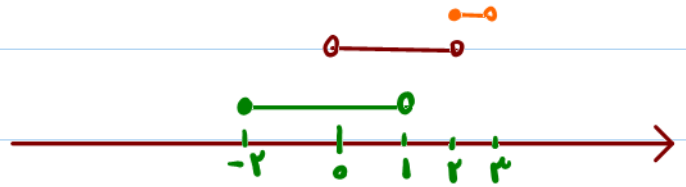
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

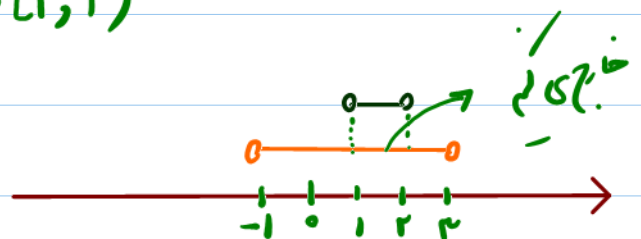
گروه ریاضی
استان همدان

مثال: حاصل هر قسمت را به صورت بازه بنویسید.

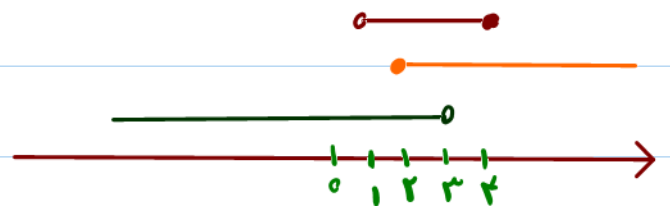
الف) $[-2, 1) \cup (0, 2) \cup [2, 3) = [-2, 3)$



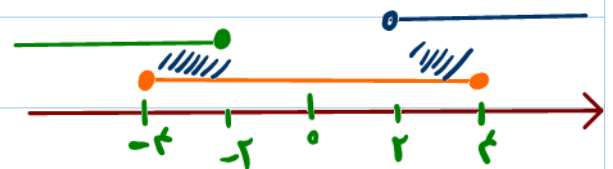
ب) $(-1, 4) - (1, 2) = (-1, 1] \cup [2, 4)$



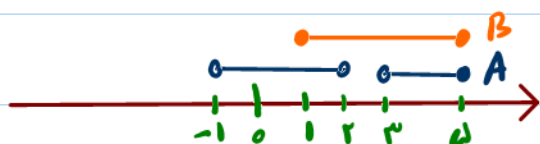
ج) $((-\infty, 3) \cup [2, +\infty)) - (1, 4] = (-\infty, +\infty) - (1, 4] = (-\infty, 1] \cup (4, +\infty)$



د) $[-4, 4] \cap ((-\infty, -2] \cup (2, +\infty)) = [-4, -2] \cup (2, 4]$



مثال: اگر $A = (-1, 2) \cup (3, 5]$ و $B = [1, 4]$ ، چند عدد صحیح در مجموعه $A - B$ قرار دارد؟



شماره عدد صحیح این بازه $A - B = (-1, 1)$ →
مغز است.

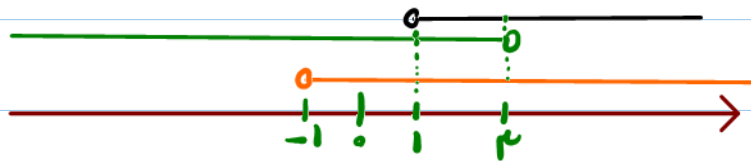
مثال: اگر $\omega \in (x+2, 2x+3)$ ، معبره مقادیر ممکن برای x را بدست آورید.

$$1) \quad x+2 < 2x+3 \rightarrow x-2x < 3-2 \rightarrow -x < 1 \xrightarrow{(-1)} x > -1$$

$$2) \quad x+2 < \omega \rightarrow x < \omega-2 \rightarrow x < 3$$

$$3) \quad 2x+3 > \omega \rightarrow 2x > \omega-3 \rightarrow 2x > 2 \rightarrow x > 1$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) = (1, 3) \Rightarrow 1 < x < 3$$



مثال: اگر a عدد منفرد $3a+2$ عضو بازه $(a, +\infty)$ باشند، معبره مقادیر ممکن برای a

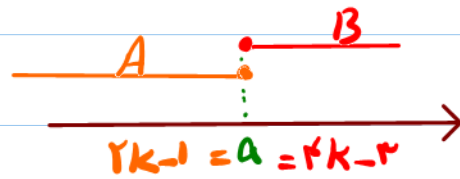
را بیابید.

$$1) \quad a < 0$$

$$2) \quad 3a+2 > a \rightarrow 3a-a > -2 \rightarrow 2a > -2 \rightarrow a > -1$$

$$(1) \cap (2) = (-1, 0) \rightarrow -1 < a < 0$$

مثال: اگر $\{a\} = (-\infty, 2k-1] \cap [2k-3, +\infty)$ باشد، a و k را بیابید.

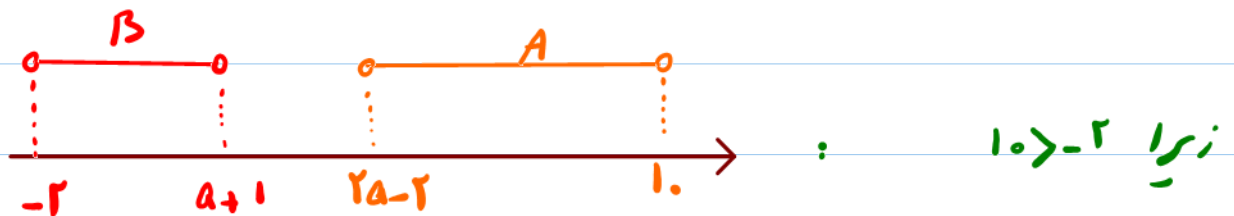


$$a = 2k-1 = 2k-3 \rightarrow 2k-4k = -3+1 \rightarrow -2k = -2 \rightarrow k=1$$

$$a = 2k-1 = 2(1)-1 = 1$$

مثال: اگر دو بازه $A = (2a-2, 1)$ و $B = (-2, a+1)$ عضو مشترکی نداشته باشند

و بدانیم عدد γ عضو مجموعه A است، اعداد a را بدست آورید.



$$1) \quad a+1 \leq 2a-2 \Rightarrow a-2a \leq -2-1 \Rightarrow -a \leq -3 \rightarrow a \geq 3$$

$$2) \quad \gamma \in A \Rightarrow 2a-2 < \gamma \rightarrow 2a < 4 \rightarrow a < \frac{4}{2}$$

$$(1) \cap (2) : \quad 3 \leq a < \frac{4}{2}$$

مثال: اگر $\{1, 2, \dots, 7\}$ و $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$ ، مجموعه زیر را بدست آورید.

$$(A_2 \cap A_0) - (A_1 \cap A_7)$$

$$A_2 = [-2, \frac{9-2}{2}] = [-2, \frac{7}{2}] \quad , \quad A_0 = [-0, \frac{9-0}{2}] = [-0, 2]$$

$$A_1 = [-1, \frac{9-1}{2}] = [-1, 4] \quad , \quad A_7 = [-7, \frac{9-7}{2}] = [-7, 1]$$



$$A_2 \cap A_0 = [-2, 2]$$

$$A_1 \cap A_7 = [-1, 1]$$

$$(A_2 \cap A_0) - (A_1 \cap A_7) = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

نکته: در بازه‌های (a, b) ، $[a, b)$ ، $(a, b]$ ، و $[a, b]$ عدد حقیقی $a-b$ ، طول بازه می‌دهیم.

مثال: طول بازه $[-a^2, 2a^2+1]$ برابر ۲۸ است. نقطه وسط بازه مشروط با چه عددی است؟

$$28 = 2a^2+1 - (-a^2) = 2a^2+1+a^2 = 3a^2+1 \Rightarrow 3a^2+1 = 28$$

$$\rightarrow 3a^2 = 28-1 \rightarrow 3a^2 = 27 \Rightarrow a^2 = 9$$

نقطه وسط بازه میانگین ابتدا و انتهای بازه است.

$$\text{نقطه وسط} = \frac{-a^2 + 2a^2 + 1}{2} = \frac{a^2 + 1}{2} = \frac{9 + 1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

معبره های مناسی و نامناسی :

اگر مقدار افعای یک معبره معذور باشد و بتوانیم با صرف وقت کافی تمام افعای آن

را بشماریم، این معبره را **مناسی** می گوئیم و اگر نتوانیم هیچگاه متوقف نشود و به آخر معبره نرسیم

معبره **نامناسی** است. حال تعریف دقیق تری ارائه می دهیم.

تعریف: معبره های که مقدار افعای آن ها یک عدد حسابی است را **معبره مناسی** می نامیم.

اگر نتوان مقدار افعای معبره را با یک عدد بیان کرد، معبره را **نامناسی** می گوئیم.

به عبارت دیگر مقدار افعای معبره نامناسی از عددی که در نظر بگیریم بزرگتر است.

مثال: مشخص کنید حرکت از معبره‌های زیر مشای (اند یا نامشای)؟

۱) $A = \{1, 2, 3, 7\}$ مشای

۲) $B = \{1, 2, 3, \dots, 999\}$ مشای

۳) $C = \{10, 11, 12, \dots\}$ نامشای

۴) ایدر طبیعی زوج نامشای

۵) $[-1, 4]$ نامشای

۶) $[0, 7)$ نامشای

۷) نام ایدر گویای بین ۴ و ۵ نامشای

۸) نام ایدر گشت در $[1, 7]$ نامشای

۹) معبره دارای سه هاب برتر مبدأ مقصد نامشای

۱۰) معبره درختان کره زمین مشای

مثال: کدامیک از عبارات های زیر درست و کدام نادرست است ؟

(الف) اگر A و B نامشاهی باشند $A \cap B$ و $A \cup B$ هم نامشاهی هستند.

(ب) اگر A و B نامشاهی باشند $A \cup B$ حتماً نامشاهی است.

(پ) اگر A زیرمجموعه ای از مجموعه نامشاهی B باشد، A نامشاهی است.

(ت) اشتراک یک مجموعه نامشاهی و یک مجموعه نامشاهی، مجموعه نامشاهی است.

نامشاهی یا نامشاهی : $A \cap B$ نامشاهی : $A \cup B$ (الف) نادرست

(ب) درست

A ی ترانه نامشاهی یا نامشاهی باشد : $A \subseteq B$ ^{نامشاهی} (پ) نادرست

(ت) درست

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس دوم: متمم یک مجموعه

جلسه سوم: صفحات ۸ تا ۱۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مجموعه مرجع :

مجموعه ای است که تمام مجموعه های مورد بحث ، زیر مجموعه آن هستند .

مجموعه مرجع را با $\mathcal{U}$ نمایش می دهیم و در سطر اول و دوم ، معمولاً مستطیلی است که کل

فضا را نشان می دهد .

مثلاً مجموعه $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ برای مجموعه های $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

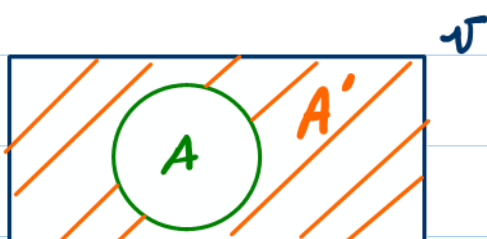
مجموعه مرجع است .

متمم یک مجموعه :

اگر A زیر مجموعه ای دلخواه از مجموعه مرجع $\mathcal{U}$ باشد ، مجموعه $\mathcal{U} - A$ ، متمم A در

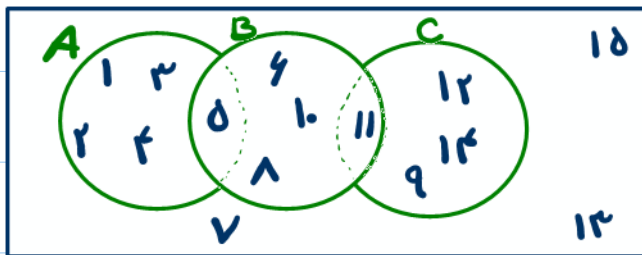
$\mathcal{U}$ می نامیم و با A' نمایش می دهیم . پس A' از همه اعضای $\mathcal{U}$ تشکیل شده است

که عضو A نباشند .



سطر اول و دوم متمم :

مثال: در سزدار ون مقابل حاصل $B' \cap (A' \cap C')$ را حساب کنید.



$$A' = \{4, 7, \dots, 15\}$$

$$B' = \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 14, 15\}$$

$$C' = \{1, 2, \dots, 8, 10, 13, 15\}$$

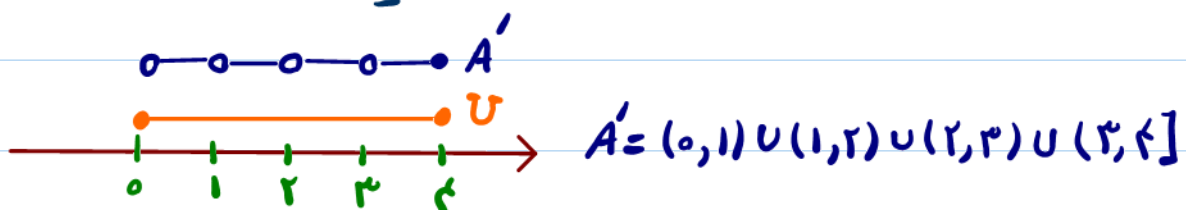
$$A' \cap C' = \{4, 7, 8, 10, 13, 15\}$$

$$B' \cap (A' \cap C') = \{7, 13, 15\}$$

مثال: اگر $N = \mathbb{N}$ و $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ باشد A' را بیابید.

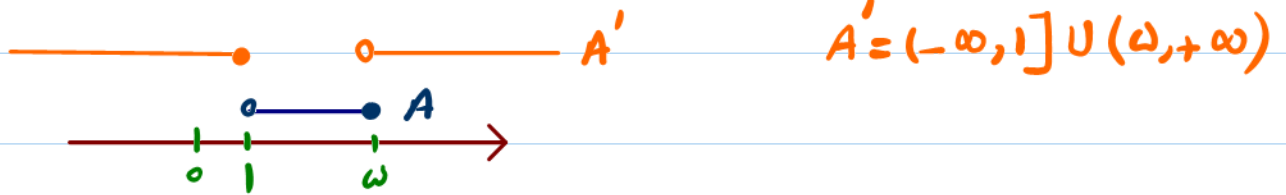
$$A' = \mathbb{N} - \{1, \dots, 10\} = \{11, 12, \dots, 9\} \cup \{31, 32, 33, \dots\}$$

مثال: اگر $U = [0, 4]$ و $A = \{1, 2, 3\}$ باشد A' را بیابید.



مثال: اگر مجموعه مرجع R باشد متشابه یک از مجموعه‌ها زیر را بدست آورید.

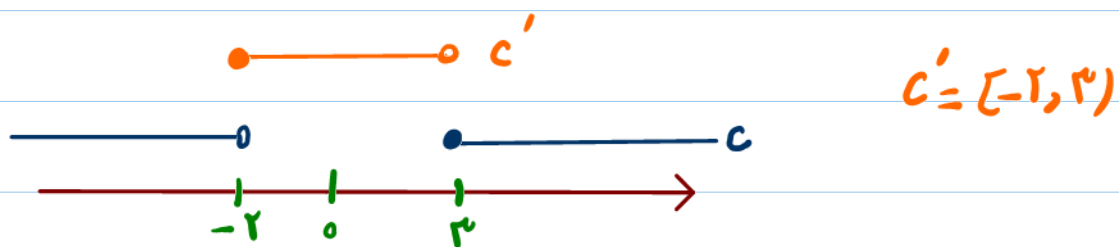
الف) $A = (1, 5]$



ب) $B = (-\infty, 4)$

$B' = [4, +\infty)$

پ) $C = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$



ویژگی‌های اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم :

۱) $A \cup A = A$

۶) $A \cap U = A$

۱۱) $A \cup \emptyset = A$

۲) $A \cap A = A$

۷) $A \cup U = U$

۱۲) $A \cap \emptyset = \emptyset$

۳) $A - A = \emptyset$

۸) $U - A = A'$

۱۳) $A - \emptyset = A$

۴) $(A')' = A$

۹) $A - U = \emptyset$

۱۰) $\emptyset' = U$

۱۴) قوانین دیرک : $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$$۱۵) A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B, A \cap B = A, B' \subseteq A'$$

$$۱۶) A - B = \begin{cases} A \cap B' \\ A - (A \cap B) \\ B' - A' \end{cases}$$

تعداد اعضای معبره :

همانطور که قبلاً اشاره کردم تعداد اعضای معبره A را با $|A|$ یا $n(A)$ نشان می‌دهیم.

رابطه‌های مهم :

$$۱) \text{تعداد عضوهای } A \text{ نیستند} : n(A') = n(U) - n(A)$$

$$\text{رابطه‌ای} : n(A') + n(A) = n(U)$$

$$۲) \text{تعداد عضوهای } A \text{ هستند و } B \text{ نیستند (فقط در } A \text{ هستند)} :$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$۳) \text{تعداد عضوهای } A \text{ و } B \text{ هستند و در یکی از مجموعه‌های } A \text{ یا } B \text{ هستند} :$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

۴) تعداد عضوهای مجموعه A هستند و نه در B :

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$$

تذکر: اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، این دو مجموعه را جدا از هم (مجزا) می‌گوئیم.

در این حالت رابطه ۳ به صورت زیر در می‌آید :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

مثال: اگر $n(U) = 30$ ، $n(A) = 8$ ، $n(B) = 14$ و $n(A \cap B) = 3$ باشند، مطلوب است :

الف) $n(A') = n(U) - n(A) = 30 - 8 = 22$

ب) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 8 - 3 = 5$

پ) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 + 14 - 3 = 19$

ت) $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 19 = 11$

ث) $n(A' \cap B) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 14 - 3 = 11$

مثال: اگر $n(A) = n(B)$ ، $n(A \cap B) = 4$ و $n(A \cup B) = 12$ باشند، $n(A)$ را بیابید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$12 = n(A) + n(A) - 4$$

$$12 + 4 = 2n(A) \Rightarrow 2n(A) = 16 \Rightarrow n(A) = 8$$

مثال: اگر $n(A) = n(B) + 10$ و $n(A \cup B) = 2n(B) + 4$ باشند، $n(A \cap B)$ را بدست آورید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$2n(B) + 4 = (\underline{n(B)} + 10) + \underline{n(B)} - n(A \cap B)$$

$$\cancel{2n(B)} + 4 = \cancel{2n(B)} + 10 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10 - 4 = 6$$

مثال: اگر $n(U) = 12$ ، $n(A) = 4$ ، $n(B') = 7$ و A ، B و U مجموعه‌ها باشند، مقدار $n((A \cup B)')$ را بیابید.

$$n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$n(B) + n(B') = n(\bar{A}) \Rightarrow n(B) + 7 = 12 \rightarrow n(B) = 5$$

$$n(A \cup B) = 6 + 5 - 0 = 11 \Rightarrow n(A \cup B)' = 12 - 11 = 1$$

مثال: اگر $n(A \cap B) = 9$ و $n(A \cup B) = 30$ و $n(A) - n(B) = \frac{n(A-B)}{4}$ باشند، مقدار

$n(A)$ را حساب کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$30 = n(A) + n(B) - 9 \Rightarrow n(A) + n(B) = 39 \quad (1)$$

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A) - 9$$

$$\frac{n(A) - n(B)}{4} = \frac{n(A) - 9}{1} \Rightarrow 4n(A) - 4n(B) = n(A) - 9$$

$$\Rightarrow 4n(A) - 4n(B) - n(A) = -9 \Rightarrow 3n(A) - 4n(B) = -9 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} n(A) + n(B) = 39 \\ 3n(A) - 4n(B) = -9 \end{cases}$$

$$7n(A) = 157 \rightarrow n(A) = \frac{157}{7} = 22$$

تذکر: در حل مسائل می توان از سزدار و ن هم استفاده کرد.

مثال: در کلاسی ۱۸ نفر علامه مند به فوتبال ، ۲۰ نفر علامه مند به والیبال و ۷ نفر به هر دو

ورزش علامه مند هستند . اگر ۳ دانش آموز به این دو ورزش علامه مند نباشند :

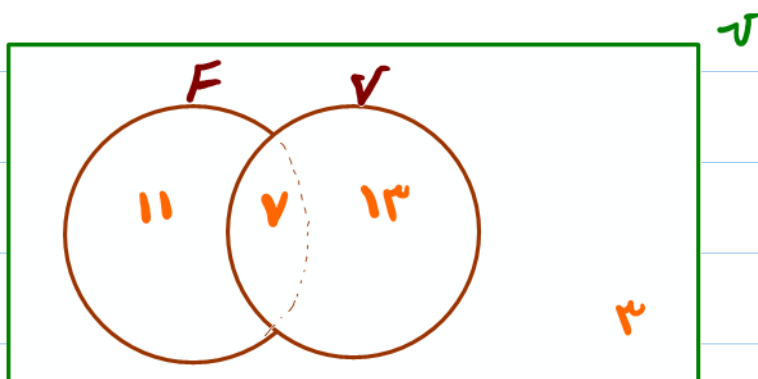
الف) چند دانش آموز فقط به فوتبال علامه مند هستند ؟ **۱۱ نفر**

ب) چند دانش آموز فقط علامه مند به یک رشته هستند ؟ **نفر ۲۴ = ۱۱ + ۱۳**

پ) چند دانش آموز علامه مند فوتبال نیستند ؟ **نفر ۱۶ = ۱۴ + ۲**

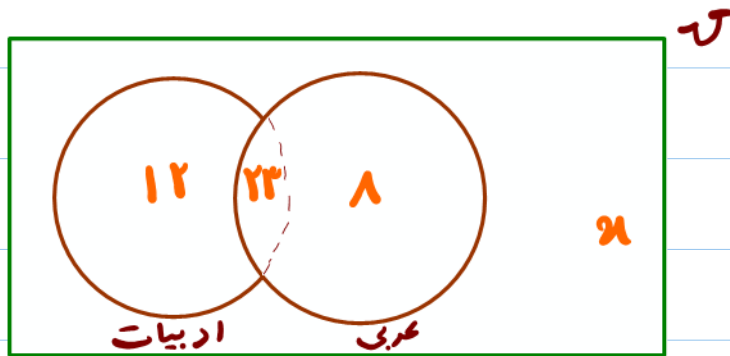
ت) چند دانش آموز حداقل علامه مند به یکی از این دو ورزش هستند ؟ **نفر ۴۱ = ۱۱ + ۷ + ۱۳**

ث) چند دانش آموز حداکثر علامه مند به یکی از این دو ورزش هستند ؟ **نفر ۲۷ = ۱۱ + ۱۳ + ۲**



مثال: از ۵۱ دانش آموز یک دبیرستان، ۳۵ نفر در کلاس ادبیات، ۳۱ نفر در کلاس عربی

و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده اند. چند نفر صد امتحان در یکی از دو کلاس شرکت نکرده اند؟



تعداد دانش آموزان که در هیچ یک از دو کلاس شرکت نمی کنند.

$$u = 51 - (12 + 23 + 8) = 51 - 43 = 8$$

$$۸ + ۱۲ + ۸ = ۲۸ = \text{تعداد دانش آموزانی که در یکی از دو کلاس شرکت کرده اند}$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس سوم: الگو و دنباله

جلسه چهارم: صفحات ۱۴ تا ۲۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

الگو:

یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها یا اعداد است که ممکن است تکرار شوند، رشدکننده یا ترکیبی از آن‌ها باشد.

در این جا دو نوع از الگوها یعنی الگوهای تصویری و عددی را بررسی می‌کنیم.

الگوهای تصویری یا هندسی

در الگوهای هندسی، شکل‌های مربوط به مرحله اول، دوم، سوم و... ادامه می‌شود و

از ما خواسته می‌شود شکل هر مرحله n ام را حدس بزنیم و یا رابطه‌ای برای شکل n ام بنویسیم.

با توجه به شکل الگوی توان به هر مرحله الگو یک عدد نسبت دارد. عدد مربوط به شکل‌ها را **جدولت**

الگوی نهم را با $1, 4, 9, \dots$ نشان می‌دهیم. به رابطه بین شماره جدولت و خزر جدولت

جدولت یا **جدولت** n ام الگوی n ام را با $1, 4, 9, \dots$ نشان می‌دهیم. با داشتن جدولت الگو

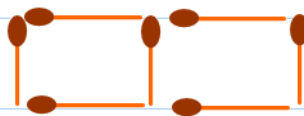
ی توانیم هر جدولت n ام را بدست آوریم. کار اصلی ما در این بحث یافتن جدولت الگو است.

مثال: در شش‌های زیر، t_n برابر تعداد چوب‌کبریت‌های مرحله n ام است.

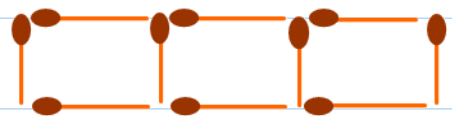
مجموعه شش‌های درجه بیستم دین‌الگو را بدست آورید.



مرحله اول



مرحله دوم



مرحله سوم

رابطه خطی:

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$$

$$6, 11, 16, \dots, 3n+1$$

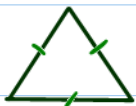
$$\Rightarrow t_n = 3n + 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $3 \times 1 + 1$ $3 \times 2 + 1$ $3 \times 3 + 1$

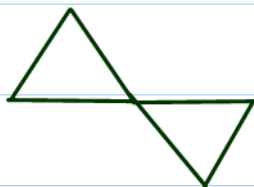
$$t_{20} = 3 \times 20 + 1 = 61$$

مثال: در شش‌های زیر، تعداد یاره‌ها در مرحله n ام برابر a_n است. مجموعه شش‌های دین‌الگو

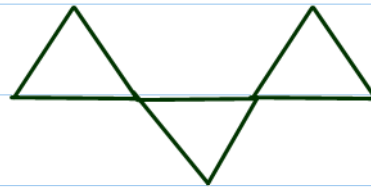
را بدست آورید.



(۱)



(۲)



(۳)

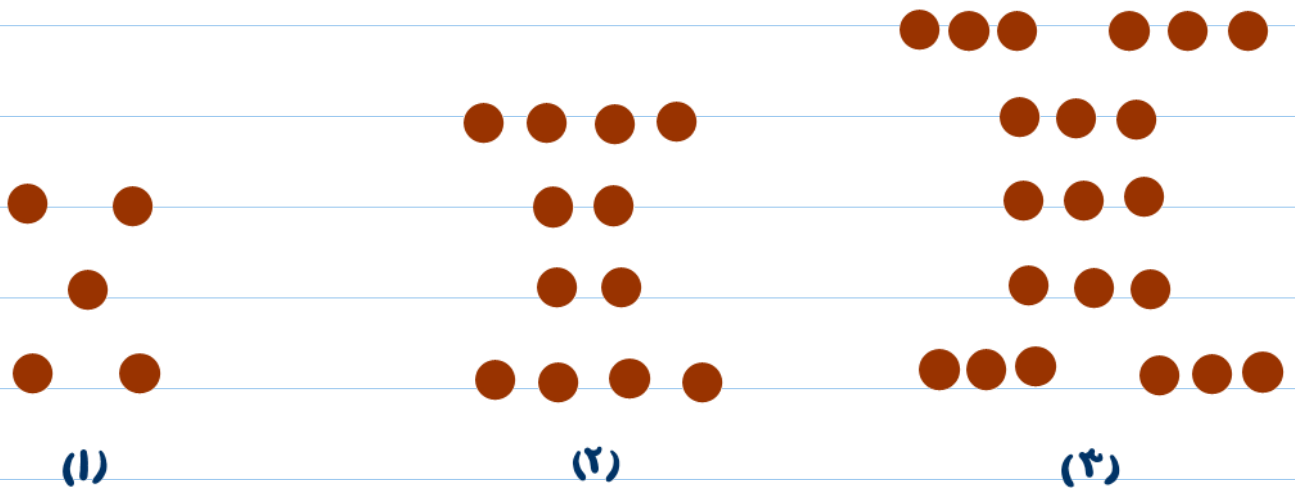
رابطه خطی:

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$$

$$3, 5, 9, \dots, 3n$$

$$\Rightarrow t_n = 3n$$

مثال: تعداد سوره‌ها در شکل نام را بنویسید.



$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_n$
 (انگلی خدای) 5, 12, 21, ..., $n^2 + 4n \Rightarrow t_n = n^2 + 4n$
 $1^2 + 4 \times 1 \quad 2^2 + 4 \times 2 \quad 3^2 + 4 \times 3$

انگلی‌های خدای و دنباله

در بالا دیدید برای هر تصویر با توجه به نوع تصویر یک عدد ثبت داریم (تعداد نقاط،

تعداد پاره‌خط‌ها، تعداد چوب‌کبریت‌ها، ...)

به این‌ها عدد ترتیب دهمده انگلی خدای می‌گوئیم.

تعریف دنباله : به هر مقدار عددی که پشت سر هم قرار می گیرند، **دنباله** می گوئیم.

هر عدد را یک جمله دنباله نامیده می شود.

دقت کنید هر الگوی عددی یک دنباله است ولی هر دنباله لزوماً الگوی عددی نیست زیرا

ممکن است یک دنباله ساختاری منظم نداشته باشد و فقط چند عدد بدون هیچ گونه

نظمی پشت سر هم قرار گیرند. البته دنباله هایی برای ما ارزشمند هستند که الگوی عددی

هم باشند. پس در این درس هرجای نامی از دنباله در رسم منطوقمان الگوی عددی است

که دارای ساختار منظم و جمله عمومی یا جمله nام است.

مثال : جمله عمومی دنباله های زیر را حدس بزنید.

$$\text{الف) } \overset{(1)}{1}, \overset{(2)}{\frac{1}{2}}, \overset{(3)}{\frac{1}{3}}, \overset{(4)}{\frac{1}{4}}, \dots, \overset{(n)}{?} \quad a_n = \frac{1}{n}$$

$$\text{ب) } \overset{(1)}{2}, \overset{(2)}{4}, \overset{(3)}{6}, \overset{(4)}{8}, \dots, \overset{(n)}{?} \quad b_n = 2n$$

$$\text{پ) } \overset{(1)}{1}, \overset{(2)}{3}, \overset{(3)}{5}, \overset{(4)}{7}, \dots, \overset{(n)}{?} \quad c_n = 2n - 1$$

$$=) \overset{(1)}{\frac{1}{2}}, \overset{(2)}{\frac{1}{4}}, \overset{(3)}{\frac{1}{8}}, \overset{(4)}{\frac{1}{16}}, \dots, \overset{(n)}{?}$$

$$d_n = \frac{1}{2^n}$$

$$ث) \overset{(1)}{-1}, \overset{(2)}{2}, \overset{(3)}{-3}, \overset{(4)}{4}, \overset{(5)}{-5}, \dots$$

$$t_n = (-1)^n \times n$$

$$ج) \overset{(1)}{0}, \overset{(2)}{3}, \overset{(3)}{8}, \overset{(4)}{15}, \overset{(5)}{24}, \dots$$

$$q_n = n^2 - 1$$

$$چ) \overset{(1)}{2}, \overset{(2)}{4}, \overset{(3)}{12}, \overset{(4)}{20}, \dots$$

$$p_n = n^2 + n$$

مثال: سه جمله اول دنباله های زیر را بنویسید.

$$الف) a_n = 5n + 4$$

$$a_1 = 5 \times 1 + 4 = 9$$

$$9, 14, 19, \dots$$

$$a_2 = 5 \times 2 + 4 = 14$$

$$a_3 = 5 \times 3 + 4 = 19$$

$$ب) b_n = \frac{n+1}{2n+3}$$

$$b_1 = \frac{1+1}{2 \times 1 + 3} = \frac{2}{5} \quad , \quad b_2 = \frac{2+1}{2 \times 2 + 3} = \frac{3}{7} \quad , \quad b_3 = \frac{3+1}{2 \times 3 + 3} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots$$

$$b) C_n = \frac{1}{2}n^2 - 11n$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(1)^2 - 11(1) = \frac{1}{2} - 11 = \frac{1-22}{2} = -\frac{21}{2}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \times 2^2 - 11(2) = 2 - 22 = -20$$

$$-\frac{21}{2}, -20, -\frac{57}{2}, \dots$$

$$C_n = \frac{1}{2} \times 4^2 - 11(4) = \frac{9}{2} - 44 = \frac{9-88}{2} = -\frac{57}{2}$$

مثال: جمله عمومی یک دنباله $t_n = 5n - 8$ است. چندمین جمله این دنباله ۵۷ است؟

$$t_n = 57 = 5n - 8 \Rightarrow 5n - 8 = 57 \Rightarrow 5n = 57 + 8$$

$$\Rightarrow n = \frac{65}{5} = 13$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{13} \\ -2, 2, \dots, 57$$

دنباله‌های معروف:

۱) دنباله‌های خطی (الگوی خطی):

دنباله‌هایی که در آن‌ها میزان افزایش یا کاهش اعداد در هر جمله به حجم بعد، مقدار ثابتی

است. مانند:

۱، ۴، ۷، ۱۱، ...

مقدار افزایش ۳

۳، ۱، ۴، ۱، ۳، ...

مقدار افزایش ۲

۵، ۱۴، ۷، ۱، ۵، ...

مقدار کاهش ۶

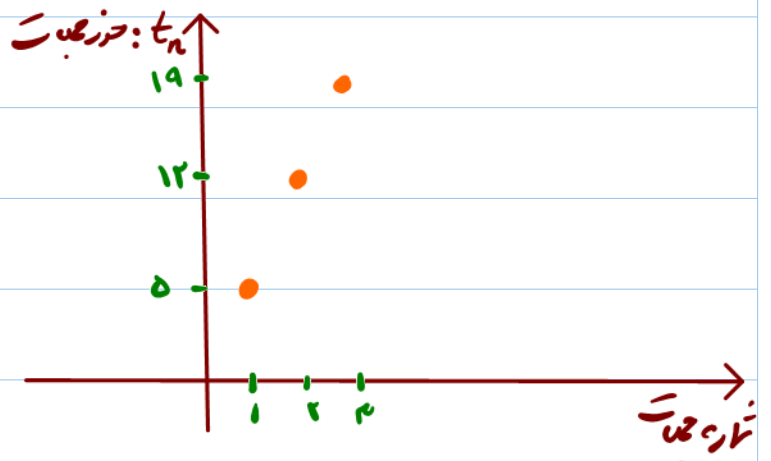
مثال: حجم عمومی دنبانه ... ۵, ۱۲, ۱۹, ... را بدست آورید. این دنبانه را رسم کنید.

$$t_n = 7n - 2$$

(تک‌محوری) صورت اول



(دسته‌بندی) صورت دوم



حجم عمومی دنبانه‌های خطی:

در مثال قبل دیدیم سزمار دنبانه خطی در دسته‌بندی به صورت نتایج است به همگی روی یک

خط قرار دارند. برای همین نکته است که نام این دنبانه‌ها را دنبانه خطی گذاشته‌ایم.

در سال گذشته با معادله خط به صورت $y = ax + b$ آشنا شدیم. در دنبانه‌های خطی

همیشه به معادله خط، حجم عمومی به صورت $t_n = an + b$ است.

نکته مهم: در دنبانه خطی a مقدار ثابت افزایش یا کاهش است.

مسئله: مجموعه‌ی دنباله‌ی $16, 12, 8, 4, 0, \dots$ را بدست آورید.

$$a = -2$$

$$t_n = -2n + b \Rightarrow t_1 = 16 = -2(1) + b \Rightarrow 16 = -2 + b \Rightarrow b = 18$$

$$t_n = -2n + 18$$

مسئله: در یک دنباله‌ی حسابی ششم و دوم به ترتیب 6 و 2 هستند. جمله n ام را بیابید.

$$t_9 = 20, \quad t_7 = 6, \quad t_n = an + b$$

$$t_9 = 9a + b, \quad t_7 = 7a + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20 = 9a + b \\ 6 = 7a + b \end{cases} \quad (-)$$

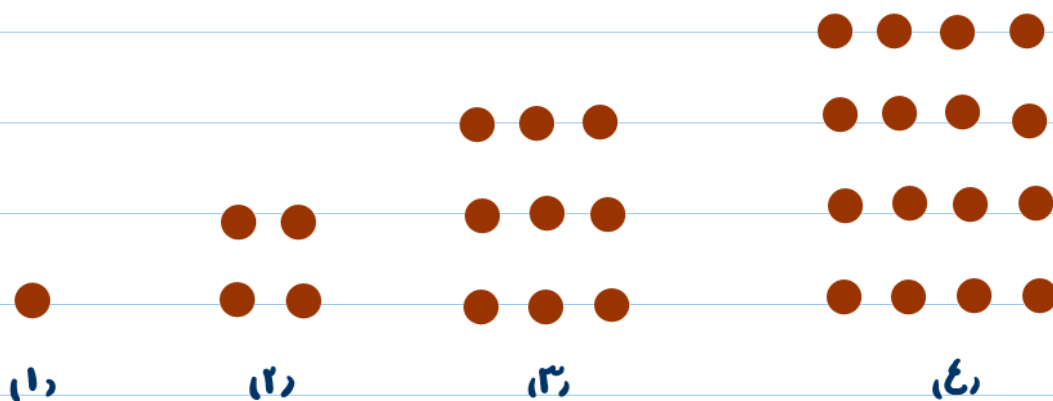
$$14 = 2a \rightarrow a = \frac{14}{2} = 7 \rightarrow 6 = 7 \times 7 + b \rightarrow b = -1$$

$$t_n = 7n - 1$$

(۲) دنباله‌ی مربعی:

دنباله $1, 4, 9, 16, \dots$ با جمله‌ی n ام $t_n = n^2$ را دنباله‌ی مربعی می‌نامیم.

حالت این نامگذاری دیگری تصوری این دنباله است:



وقت کنید گاهی اوقات ممکن است دنباله مربعی چند جمله اول را ندانسته باشد :

① ۴, ② ۹, ③ ۱۶, ④ ۲۵, ...

مجموعه: $a_n = (n+1)^2$

① ۹, ② ۱۶, ③ ۲۵, ④ ۳۶, ...

مجموعه: $b_n = (n+2)^2$

۱۳ دنباله مثلثی :

دنباله ... و ۱۵، ۱۰، ۵، ۰، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ۶۴، ۸۱، ۱۰۰، ۱۲۱، ۱۴۴، ۱۶۹، ۱۹۶، ۲۲۵، ۲۵۶، ۲۸۹، ۳۲۴، ۳۶۱، ۴۰۰، ۴۴۱، ۴۸۴، ۵۲۹، ۵۷۶، ۶۲۵، ۶۷۶، ۷۲۹، ۷۸۴، ۸۴۱، ۹۰۰، ۹۶۱، ۱۰۲۴، ۱۰۸۹، ۱۱۵۶، ۱۲۲۵، ۱۲۹۶، ۱۳۶۹، ۱۴۴۴، ۱۵۲۱، ۱۶۰۰، ۱۶۸۱، ۱۷۶۴، ۱۸۴۹، ۱۹۳۶، ۲۰۲۵، ۲۱۱۶، ۲۲۰۹، ۲۳۰۴، ۲۴۰۱، ۲۵۰۰، ۲۶۰۱، ۲۷۰۴، ۲۸۰۹، ۲۹۱۶، ۳۰۲۵، ۳۱۳۶، ۳۲۴۹، ۳۳۶۴، ۳۴۸۱، ۳۶۰۰، ۳۷۲۱، ۳۸۴۴، ۳۹۶۹، ۴۰۹۶، ۴۲۲۵، ۴۳۵۶، ۴۴۸۹، ۴۶۲۴، ۴۷۶۱، ۴۹۰۰، ۵۰۴۱، ۵۱۸۴، ۵۳۲۹، ۵۴۷۶، ۵۶۲۵، ۵۷۷۶، ۵۹۲۹، ۶۰۸۴، ۶۲۴۱، ۶۴۰۰، ۶۵۶۱، ۶۷۲۴، ۶۸۸۹، ۷۰۵۶، ۷۲۲۵، ۷۳۹۶، ۷۵۶۹، ۷۷۴۴، ۷۹۲۱، ۸۱۰۰، ۸۲۸۱، ۸۴۶۴، ۸۶۴۹، ۸۸۳۶، ۹۰۲۵، ۹۲۱۶، ۹۴۰۹، ۹۶۰۴، ۹۸۰۱، ۱۰۰۰۰، ۱۰۲۰۱، ۱۰۴۰۴، ۱۰۶۰۹، ۱۰۸۱۶، ۱۱۰۲۵، ۱۱۲۳۶، ۱۱۴۴۹، ۱۱۶۶۴، ۱۱۸۸۱، ۱۲۱۰۰، ۱۲۳۲۱، ۱۲۵۴۴، ۱۲۷۶۹، ۱۲۹۹۶، ۱۳۲۲۵، ۱۳۴۵۶، ۱۳۶۸۹، ۱۳۹۲۴، ۱۴۱۵۹، ۱۴۳۹۶، ۱۴۶۳۵، ۱۴۸۷۶، ۱۵۱۱۹، ۱۵۳۶۴، ۱۵۶۱۱، ۱۵۸۶۰، ۱۶۱۱۱، ۱۶۳۶۴، ۱۶۶۱۹، ۱۶۸۷۶، ۱۷۱۳۵، ۱۷۳۹۶، ۱۷۶۵۹، ۱۷۹۲۴، ۱۸۱۹۱، ۱۸۴۶۰، ۱۸۷۳۱، ۱۹۰۰۴، ۱۹۲۷۹، ۱۹۵۵۶، ۱۹۸۳۵، ۲۰۱۱۶، ۲۰۳۹۹، ۲۰۶۸۴، ۲۰۹۶۱، ۲۱۲۴۰، ۲۱۵۲۱، ۲۱۸۰۴، ۲۲۰۸۹، ۲۲۳۷۶، ۲۲۶۵۹، ۲۲۹۴۴، ۲۳۲۲۵، ۲۳۵۰۰، ۲۳۷۷۹، ۲۴۰۶۰، ۲۴۳۴۱، ۲۴۶۲۴، ۲۴۹۰۹، ۲۵۱۸۴، ۲۵۴۶۱، ۲۵۷۴۰، ۲۶۰۲۱، ۲۶۳۰۴، ۲۶۵۸۹، ۲۶۸۷۶، ۲۷۱۵۹، ۲۷۴۴۴، ۲۷۷۲۹، ۲۸۰۰۰، ۲۸۲۷۶، ۲۸۵۵۹، ۲۸۸۴۴، ۲۹۱۲۹، ۲۹۴۰۰، ۲۹۶۷۶، ۲۹۹۵۹، ۳۰۲۴۰، ۳۰۵۲۱، ۳۰۸۰۴، ۳۱۰۸۹، ۳۱۳۷۶، ۳۱۶۵۹، ۳۱۹۴۴، ۳۲۲۲۵، ۳۲۵۰۰، ۳۲۷۷۹، ۳۳۰۶۰، ۳۳۳۴۱، ۳۳۶۲۴، ۳۳۹۰۹، ۳۴۱۸۴، ۳۴۴۶۱، ۳۴۷۴۰، ۳۵۰۲۱، ۳۵۳۰۴، ۳۵۵۸۹، ۳۵۸۷۶، ۳۶۱۵۹، ۳۶۴۴۴، ۳۶۷۲۹، ۳۷۰۰۰، ۳۷۲۷۶، ۳۷۵۵۹، ۳۷۸۴۴، ۳۸۱۲۹، ۳۸۴۰۰، ۳۸۶۷۶، ۳۸۹۵۹، ۳۹۲۴۰، ۳۹۵۲۱، ۳۹۸۰۴، ۴۰۰۸۹، ۴۰۳۷۶، ۴۰۶۵۹، ۴۰۹۴۴، ۴۱۲۲۵، ۴۱۵۰۰، ۴۱۷۷۹، ۴۲۰۶۰، ۴۲۳۴۱، ۴۲۶۲۴، ۴۲۹۰۹، ۴۳۱۸۴، ۴۳۴۶۱، ۴۳۷۴۰، ۴۴۰۲۱، ۴۴۳۰۴، ۴۴۵۸۹، ۴۴۸۷۶، ۴۵۱۵۹، ۴۵۴۴۴، ۴۵۷۲۹، ۴۶۰۰۰، ۴۶۲۷۶، ۴۶۵۵۹، ۴۶۸۴۴، ۴۷۱۲۹، ۴۷۴۰۰، ۴۷۶۷۶، ۴۷۹۵۹، ۴۸۲۴۰، ۴۸۵۲۱، ۴۸۸۰۴، ۴۹۰۸۹، ۴۹۳۷۶، ۴۹۶۵۹، ۴۹۹۴۴، ۵۰۲۲۵، ۵۰۵۰۰، ۵۰۷۷۹، ۵۱۰۶۰، ۵۱۳۴۱، ۵۱۶۲۴، ۵۱۹۰۹، ۵۲۱۸۴، ۵۲۴۶۱، ۵۲۷۴۰، ۵۳۰۲۱، ۵۳۳۰۴، ۵۳۵۸۹، ۵۳۸۷۶، ۵۴۱۵۹، ۵۴۴۴۴، ۵۴۷۲۹، ۵۵۰۰۰، ۵۵۲۷۶، ۵۵۵۵۹، ۵۵۸۴۴، ۵۶۱۲۹، ۵۶۴۰۰، ۵۶۶۷۶، ۵۶۹۵۹، ۵۷۲۴۰، ۵۷۵۲۱، ۵۷۸۰۴، ۵۸۰۸۹، ۵۸۳۷۶، ۵۸۶۵۹، ۵۸۹۴۴، ۵۹۲۲۵، ۵۹۵۰۰، ۵۹۷۷۹، ۶۰۰۶۰، ۶۰۳۴۱، ۶۰۶۲۴، ۶۰۹۰۹، ۶۱۱۸۴، ۶۱۴۶۱، ۶۱۷۴۰، ۶۲۰۲۱، ۶۲۳۰۴، ۶۲۵۸۹، ۶۲۸۷۶، ۶۳۱۵۹، ۶۳۴۴۴، ۶۳۷۲۹، ۶۴۰۰۰، ۶۴۲۷۶، ۶۴۵۵۹، ۶۴۸۴۴، ۶۵۱۲۹، ۶۵۴۰۰، ۶۵۶۷۶، ۶۵۹۵۹، ۶۶۲۴۰، ۶۶۵۲۱، ۶۶۸۰۴، ۶۷۰۸۹، ۶۷۳۷۶، ۶۷۶۵۹، ۶۷۹۴۴، ۶۸۲۲۵، ۶۸۵۰۰، ۶۸۷۷۹، ۶۹۰۶۰، ۶۹۳۴۱، ۶۹۶۲۴، ۶۹۹۰۹، ۷۰۱۸۴، ۷۰۴۶۱، ۷۰۷۴۰، ۷۱۰۲۱، ۷۱۳۰۴، ۷۱۵۸۹، ۷۱۸۷۶، ۷۲۱۵۹، ۷۲۴۴۴، ۷۲۷۲۹، ۷۳۰۰۰، ۷۳۲۷۶، ۷۳۵۵۹، ۷۳۸۴۴، ۷۴۱۲۹، ۷۴۴۰۰، ۷۴۶۷۶، ۷۴۹۵۹، ۷۵۲۴۰، ۷۵۵۲۱، ۷۵۸۰۴، ۷۶۰۸۹، ۷۶۳۷۶، ۷۶۶۵۹، ۷۶۹۴۴، ۷۷۲۲۵، ۷۷۵۰۰، ۷۷۷۷۹، ۷۸۰۶۰، ۷۸۳۴۱، ۷۸۶۲۴، ۷۸۹۰۹، ۷۹۱۸۴، ۷۹۴۶۱، ۷۹۷۴۰، ۸۰۰۲۱، ۸۰۳۰۴، ۸۰۵۸۹، ۸۰۸۷۶، ۸۱۱۵۹، ۸۱۴۴۴، ۸۱۷۲۹، ۸۲۰۰۰، ۸۲۲۷۶، ۸۲۵۵۹، ۸۲۸۴۴، ۸۳۱۲۹، ۸۳۴۰۰، ۸۳۶۷۶، ۸۳۹۵۹، ۸۴۲۴۰، ۸۴۵۲۱، ۸۴۸۰۴، ۸۵۰۸۹، ۸۵۳۷۶، ۸۵۶۵۹، ۸۵۹۴۴، ۸۶۲۲۵، ۸۶۵۰۰، ۸۶۷۷۹، ۸۷۰۶۰، ۸۷۳۴۱، ۸۷۶۲۴، ۸۷۹۰۹، ۸۸۱۸۴، ۸۸۴۶۱، ۸۸۷۴۰، ۸۹۰۲۱، ۸۹۳۰۴، ۸۹۵۸۹، ۸۹۸۷۶، ۹۰۱۵۹، ۹۰۴۴۴، ۹۰۷۲۹، ۹۱۰۰۰، ۹۱۲۷۶، ۹۱۵۵۹، ۹۱۸۴۴، ۹۲۱۲۹، ۹۲۴۰۰، ۹۲۶۷۶، ۹۲۹۵۹، ۹۳۲۴۰، ۹۳۵۲۱، ۹۳۸۰۴، ۹۴۰۸۹، ۹۴۳۷۶، ۹۴۶۵۹، ۹۴۹۴۴، ۹۵۲۲۵، ۹۵۵۰۰، ۹۵۷۷۹، ۹۶۰۶۰، ۹۶۳۴۱، ۹۶۶۲۴، ۹۶۹۰۹، ۹۷۱۸۴، ۹۷۴۶۱، ۹۷۷۴۰، ۹۸۰۲۱، ۹۸۳۰۴، ۹۸۵۸۹، ۹۸۸۷۶، ۹۹۱۵۹، ۹۹۴۴۴، ۹۹۷۲۹، ۱۰۰۰۰۰، ۱۰۰۲۷۶، ۱۰۰۵۵۹، ۱۰۰۸۴۴، ۱۰۱۱۲۹، ۱۰۱۴۰۰، ۱۰۱۶۷۶، ۱۰۱۹۵۹، ۱۰۲۲۴۰، ۱۰۲۵۲۱، ۱۰۲۸۰۴، ۱۰۳۰۸۹، ۱۰۳۳۷۶، ۱۰۳۶۵۹، ۱۰۳۹۴۴، ۱۰۴۲۲۵، ۱۰۴۵۰۰، ۱۰۴۷۷۹، ۱۰۵۰۶۰، ۱۰۵۳۴۱، ۱۰۵۶۲۴، ۱۰۵۹۰۹، ۱۰۶۱۸۴، ۱۰۶۴۶۱، ۱۰۶۷۴۰، ۱۰۷۰۲۱، ۱۰۷۳۰۴، ۱۰۷۵۸۹، ۱۰۷۸۷۶، ۱۰۸۱۵۹، ۱۰۸۴۴۴، ۱۰۸۷۲۹، ۱۰۹۰۰۰، ۱۰۹۲۷۶، ۱۰۹۵۵۹، ۱۰۹۸۴۴، ۱۱۰۱۲۹، ۱۱۰۴۰۰، ۱۱۰۶۷۶، ۱۱۰۹۵۹، ۱۱۱۲۴۰، ۱۱۱۵۲۱، ۱۱۱۸۰۴، ۱۱۲۰۸۹، ۱۱۲۳۷۶، ۱۱۲۶۵۹، ۱۱۲۹۴۴، ۱۱۳۲۲۵، ۱۱۳۵۰۰، ۱۱۳۷۷۹، ۱۱۴۰۶۰، ۱۱۴۳۴۱، ۱۱۴۶۲۴، ۱۱۴۹۰۹، ۱۱۵۱۸۴، ۱۱۵۴۶۱، ۱۱۵۷۴۰، ۱۱۶۰۲۱، ۱۱۶۳۰۴، ۱۱۶۵۸۹، ۱۱۶۸۷۶، ۱۱۷۱۵۹، ۱۱۷۴۴۴، ۱۱۷۷۲۹، ۱۱۸۰۰۰، ۱۱۸۲۷۶، ۱۱۸۵۵۹، ۱۱۸۸۴۴، ۱۱۹۱۲۹، ۱۱۹۴۰۰، ۱۱۹۶۷۶، ۱۱۹۹۵۹، ۱۲۰۲۴۰، ۱۲۰۵۲۱، ۱۲۰۸۰۴، ۱۲۱۰۸۹، ۱۲۱۳۷۶، ۱۲۱۶۵۹، ۱۲۱۹۴۴، ۱۲۲۲۲۵، ۱۲۲۵۰۰، ۱۲۲۷۷۹، ۱۲۳۰۶۰، ۱۲۳۳۴۱، ۱۲۳۶۲۴، ۱۲۳۹۰۹، ۱۲۴۱۸۴، ۱۲۴۴۶۱، ۱۲۴۷۴۰، ۱۲۵۰۲۱، ۱۲۵۳۰۴، ۱۲۵۵۸۹، ۱۲۵۸۷۶، ۱۲۶۱۵۹، ۱۲۶۴۴۴، ۱۲۶۷۲۹، ۱۲۷۰۰۰، ۱۲۷۲۷۶، ۱۲۷۵۵۹، ۱۲۷۸۴۴، ۱۲۸۱۲۹، ۱۲۸۴۰۰، ۱۲۸۶۷۶، ۱۲۸۹۵۹، ۱۲۹۲۴۰، ۱۲۹۵۲۱، ۱۲۹۸۰۴، ۱۳۰۰۸۹، ۱۳۰۳۷۶، ۱۳۰۶۵۹، ۱۳۰۹۴۴، ۱۳۱۲۲۵، ۱۳۱۵۰۰، ۱۳۱۷۷۹، ۱۳۲۰۶۰، ۱۳۲۳۴۱، ۱۳۲۶۲۴، ۱۳۲۹۰۹، ۱۳۳۱۸۴، ۱۳۳۴۶۱، ۱۳۳۷۴۰، ۱۳۴۰۲۱، ۱۳۴۳۰۴، ۱۳۴۵۸۹، ۱۳۴۸۷۶، ۱۳۵۱۵۹، ۱۳۵۴۴۴، ۱۳۵۷۲۹، ۱۳۶۰۰۰، ۱۳۶۲۷۶، ۱۳۶۵۵۹، ۱۳۶۸۴۴، ۱۳۷۱۲۹، ۱۳۷۴۰۰، ۱۳۷۶۷۶، ۱۳۷۹۵۹، ۱۳۸۲۴۰، ۱۳۸۵۲۱، ۱۳۸۸۰۴، ۱۳۹۰۸۹، ۱۳۹۳۷۶، ۱۳۹۶۵۹، ۱۳۹۹۴۴، ۱۴۰۲۲۵، ۱۴۰۵۰۰، ۱۴۰۷۷۹، ۱۴۱۰۶۰، ۱۴۱۳۴۱، ۱۴۱۶۲۴، ۱۴۱۹۰۹، ۱۴۲۱۸۴، ۱۴۲۴۶۱، ۱۴۲۷۴۰، ۱۴۳۰۲۱، ۱۴۳۳۰۴، ۱۴۳۵۸۹، ۱۴۳۸۷۶، ۱۴۴۱۵۹، ۱۴۴۴۴۴، ۱۴۴۷۲۹، ۱۴۵۰۰۰، ۱۴۵۲۷۶، ۱۴۵۵۵۹، ۱۴۵۸۴۴، ۱۴۶۱۲۹، ۱۴۶۴۰۰، ۱۴۶۶۷۶، ۱۴۶۹۵۹، ۱۴۷۲۴۰، ۱۴۷۵۲۱، ۱۴۷۸۰۴، ۱۴۸۰۸۹، ۱۴۸۳۷۶، ۱۴۸۶۵۹، ۱۴۸۹۴۴، ۱۴۹۲۲۵، ۱۴۹۵۰۰، ۱۴۹۷۷۹، ۱۵۰۰۶۰، ۱۵۰۳۴۱، ۱۵۰۶۲۴، ۱۵۰۹۰۹، ۱۵۱۱۸۴، ۱۵۱۴۶۱، ۱۵۱۷۴۰، ۱۵۲۰۲۱، ۱۵۲۳۰۴، ۱۵۲۵۸۹، ۱۵۲۸۷۶، ۱۵۳۱۵۹، ۱۵۳۴۴۴، ۱۵۳۷۲۹، ۱۵۴۰۰۰، ۱۵۴۲۷۶، ۱۵۴۵۵۹، ۱۵۴۸۴۴، ۱۵۵۱۲۹، ۱۵۵۴۰۰، ۱۵۵۶۷۶، ۱۵۵۹۵۹، ۱۵۶۲۴۰، ۱۵۶۵۲۱، ۱۵۶۸۰۴، ۱۵۷۰۸۹، ۱۵۷۳۷۶، ۱۵۷۶۵۹، ۱۵۷۹۴۴، ۱۵۸۲۲۵، ۱۵۸۵۰۰، ۱۵۸۷۷۹، ۱۵۹۰۶۰، ۱۵۹۳۴۱، ۱۵۹۶۲۴، ۱۵۹۹۰۹، ۱۶۰۱۸۴، ۱۶۰۴۶۱، ۱۶۰۷۴۰، ۱۶۱۰۲۱، ۱۶۱۳۰۴، ۱۶۱۵۸۹، ۱۶۱۸۷۶، ۱۶۲۱۵۹، ۱۶۲۴۴۴، ۱۶۲۷۲۹، ۱۶۳۰۰۰، ۱۶۳۲۷۶، ۱۶۳۵۵۹، ۱۶۳۸۴۴، ۱۶۴۱۲۹، ۱۶۴۴۰۰، ۱۶۴۶۷۶، ۱۶۴۹۵۹، ۱۶۵۲۴۰، ۱۶۵۵۲۱، ۱۶۵۸۰۴، ۱۶۶۰۸۹، ۱۶۶۳۷۶، ۱۶۶۶۵۹، ۱۶۶۹۴۴، ۱۶۷۲۲۵، ۱۶۷۵۰۰، ۱۶۷۷۷۹، ۱۶۸۰۶۰، ۱۶۸۳۴۱، ۱۶۸۶۲۴، ۱۶۸۹۰۹، ۱۶۹۱۸۴، ۱۶۹۴۶۱، ۱۶۹۷۴۰، ۱۷۰۰۲۱، ۱۷۰۳۰۴، ۱۷۰۵۸۹، ۱۷۰۸۷۶، ۱۷۱۱۵۹، ۱۷۱۴۴۴، ۱۷۱۷۲۹، ۱۷۲۰۰۰، ۱۷۲۲۷۶، ۱۷۲۵۵۹، ۱۷۲۸۴۴، ۱۷۳۱۲۹، ۱۷۳۴۰۰، ۱۷۳۶۷۶، ۱۷۳۹۵۹، ۱۷۴۲۴۰، ۱۷۴۵۲۱، ۱۷۴۸۰۴، ۱۷۵۰۸۹، ۱۷۵۳۷۶، ۱۷۵۶۵۹، ۱۷۵۹۴۴، ۱۷۶۲۲۵، ۱۷۶۵۰۰، ۱۷۶۷۷۹، ۱۷۷۰۶۰، ۱۷۷۳۴۱، ۱۷۷۶۲۴، ۱۷۷۹۰۹، ۱۷۸۱۸۴، ۱۷۸۴۶۱، ۱۷۸۷۴۰، ۱۷۹۰۲۱، ۱۷۹۳۰۴، ۱۷۹۵۸۹، ۱۷۹۸۷۶، ۱۸۰۱۵۹، ۱۸۰۴۴۴، ۱۸۰۷۲۹، ۱۸۱۰۰۰، ۱۸۱۲۷۶، ۱۸۱۵۵۹، ۱۸۱۸۴۴، ۱۸۲۱۲۹، ۱۸۲۴۰۰، ۱۸۲۶۷۶، ۱۸۲۹۵۹، ۱۸۳۲۴۰، ۱۸۳۵۲۱، ۱۸۳۸۰۴، ۱۸۴۰۸۹، ۱۸۴۳۷۶، ۱۸۴۶۵۹، ۱۸۴۹۴۴، ۱۸۵۲۲۵، ۱۸۵۵۰۰، ۱۸۵۷۷۹، ۱۸۶۰۶۰، ۱۸۶۳۴۱، ۱۸۶۶۲۴، ۱۸۶۹۰۹، ۱۸۷۱۸۴، ۱۸۷۴۶۱، ۱۸۷۷۴۰، ۱۸۸۰۲۱، ۱۸۸۳۰۴، ۱۸۸۵۸۹، ۱۸۸۸۷۶، ۱۸۹۱۵۹، ۱۸۹۴۴۴، ۱۸۹۷۲۹، ۱۹۰۰۰۰، ۱۹۰۲۷۶، ۱۹۰۵۵۹، ۱۹۰۸۴۴، ۱۹۱۱۲۹، ۱۹۱۴۰۰، ۱۹۱۶۷۶، ۱۹۱۹۵۹، ۱۹۲۲۴۰، ۱۹۲۵۲۱، ۱۹۲۸۰۴، ۱۹۳۰۸۹، ۱۹۳۳۷۶، ۱۹۳۶۵۹، ۱۹۳۹۴۴، ۱۹۴۲۲۵، ۱۹۴۵۰۰، ۱۹۴۷۷۹، ۱۹۵۰۶۰، ۱۹۵۳۴۱، ۱۹۵۶۲۴، ۱۹۵۹۰۹، ۱۹۶۱۸۴، ۱۹۶۴۶۱، ۱۹۶۷۴۰، ۱۹۷۰۲۱، ۱۹۷۳۰۴، ۱۹۷۵۸۹، ۱۹۷۸۷۶، ۱۹۸۱۵۹، ۱۹۸۴۴۴، ۱۹۸۷۲۹، ۱۹۹۰۰۰، ۱۹۹۲۷۶، ۱۹۹۵۵۹، ۱۹۹۸۴۴، ۲۰۰۱۲۹، ۲۰۰۴۰۰، ۲۰۰۶۷۶، ۲۰۰۹۵۹، ۲۰۱۲۴۰، ۲۰۱۵۲۱، ۲۰۱۸۰۴، ۲۰۲۰۸۹، ۲۰۲۳۷۶، ۲۰۲۶۵۹، ۲۰۲۹۴۴، ۲۰۳۲۲۵، ۲۰۳۵۰۰، ۲۰۳۷۷۹، ۲۰۴۰۶۰، ۲۰۴۳۴۱، ۲۰۴۶۲۴، ۲۰۴۹۰۹، ۲۰۵۱۸۴، ۲۰۵۴۶۱، ۲۰۵۷۴۰، ۲۰۶۰۲۱، ۲۰۶۳۰۴، ۲۰۶۵۸۹، ۲۰۶۸۷۶، ۲۰۷۱۵۹، ۲۰۷۴۴۴، ۲۰۷۷۲۹، ۲۰۸۰۰۰، ۲۰۸۲۷۶، ۲۰۸۵۵۹، ۲۰۸۸۴۴، ۲۰۹۱۲۹، ۲۰۹۴۰۰، ۲۰۹۶۷۶، ۲۰۹۹۵۹، ۲۱۰۲۴۰، ۲۱۰۵۲۱، ۲۱۰۸۰۴، ۲۱۱۰۸۹، ۲۱۱۳۷۶، ۲۱۱۶۵۹، ۲۱۱۹۴۴، ۲۱۲۲۲۵، ۲۱۲۵۰۰، ۲۱۲۷۷۹، ۲۱۳۰۶۰، ۲۱۳۳۴۱، ۲۱۳۶۲۴، ۲۱۳۹۰۹، ۲۱۴۱۸۴، ۲۱۴۴۶۱، ۲۱۴۷۴۰، ۲۱۵۰۲۱، ۲۱۵۳۰۴، ۲۱۵۵۸۹، ۲۱۵۸۷۶، ۲۱۶۱۵۹، ۲۱۶۴۴۴، ۲۱۶۷۲۹، ۲۱۷۰۰۰، ۲۱۷۲۷۶، ۲۱۷۵۵۹، ۲۱۷۸۴۴، ۲۱۸۱۲۹، ۲۱۸۴۰۰، ۲۱۸۶۷۶، ۲۱۸۹۵۹، ۲۱۹۲۴۰، ۲۱۹۵۲۱، ۲۱۹۸۰۴، ۲۲۰۰۸۹، ۲۲۰۳۷۶، ۲۲۰۶۵۹، ۲۲۰۹۴۴، ۲۲۱۲۲۵، ۲۲۱۵۰۰، ۲۲۱۷۷۹، ۲۲۲۰۶۰، ۲۲۲۳۴۱، ۲۲۲۶۲۴، ۲۲۲۹۰۹، ۲۲۳۱۸۴، ۲۲۳۴۶۱، ۲۲۳۷۴۰، ۲۲۴۰۲۱، ۲۲۴۳۰۴، ۲۲۴۵۸۹، ۲۲۴۸۷۶، ۲۲۵۱۵۹، ۲۲۵۴۴۴، ۲۲۵۷۲۹، ۲۲۶۰۰۰، ۲۲۶۲۷۶، ۲۲۶۵۵۹، ۲۲۶۸۴۴، ۲۲۷۱۲۹، ۲۲۷۴۰۰، ۲۲۷۶۷۶، ۲۲۷۹۵۹، ۲۲۸۲۴۰، ۲۲۸۵۲۱، ۲۲۸۸۰۴، ۲۲۹۰۸۹، ۲۲۹۳۷۶، ۲۲۹۶۵۹، ۲۲۹۹۴۴، ۲۳۰۲۲۵، ۲۳۰۵۰۰، ۲۳۰۷۷۹، ۲۳۱۰۶۰، ۲۳۱۳۴۱، ۲۳۱۶۲۴، ۲۳۱۹۰۹، ۲۳۲۱۸۴، ۲۳۲۴۶۱، ۲۳۲۷۴۰، ۲۳۳۰۲۱، ۲۳۳۳۰۴، ۲۳۳۵۸۹، ۲۳۳۸۷۶، ۲۳۴۱۵۹، ۲۳۴۴۴۴، ۲۳۴۷۲۹، ۲۳۵۰۰۰، ۲۳۵۲۷۶، ۲۳۵۵۵۹، ۲۳۵۸۴۴، ۲۳۶۱۲۹، ۲۳۶۴۰۰، ۲۳۶۶۷۶، ۲۳۶۹۵۹، ۲۳۷۲۴۰، ۲۳۷۵۲۱، ۲۳۷۸۰۴، ۲۳۸۰۸۹، ۲۳۸۳۷۶، ۲۳۸۶۵۹، ۲۳۸۹۴۴، ۲۳۹۲۲۵، ۲۳۹۵۰۰، ۲۳۹۷۷۹، ۲۴۰۰۶۰، ۲۴۰۳۴۱، ۲۴۰۶۲۴، ۲۴۰۹۰۹، ۲۴۱۱

مثال: ثابت کنید: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ رابطه گاوسی

$$A = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

$$A = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

+

$$2A = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n}$$

$$2A = n(n+1) \Rightarrow A = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تمرین (اثبات به صورت نقیضی انجام شود)

۴) دنباله درجه دوم:

دنباله‌هایی که جمله عمومی آنها درجه دوم است یعنی به صورت $t_n = an^2 + bn + c$

که $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$.

دقت کنید در الگوهای درجه دوم افزایش هر جمله نسبت به جمله قبلی ثابت نیست ولی

میزان افزایش عبارت یک دنباله خطی است.

تذکر: دنباله‌های حسی و مثلثی، درجه دوم هستند.

مثال: در دنباله درجه دوم ... ۱۹، ۱۰، ۱ و ۱ صده هفتم را بیابید.
 $+9 + 2 + 4$ الگوی خطی با اندازش سه واحد

$$t_0 = 19 + 12 = 31, \quad t_4 = 31 + 15 = 46, \quad t_5 = 46 + 18 = 64$$

نکته: برای بدست آوردن جمله عمومی یک دنباله درجه دوم به صورت $t_n = an^2 + bn + c$
 a, b, c را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

(۱) a : نصف مقدار ثابتی است که در دنباله خطی و ربط به دنباله درجه دوم به محضیات اضافی شود.

(۲) c : جمله ای است که به صورت فرضی قبل از جمله اول قابل نوشتن است. (جمله صفرم)

(۳) b : با یافتن a و c و جایگذاری در یکی از محضیات دنباله بدست می‌آید.

مثال: چهارم جمله اول در یک دنباله درجه دوم ... ۱۱، ۱۰، ۱ و ۱ است. جمله عمومی را بیابید.
 $+5 + 2 + 4$

این دنباله را بیابید.

$a =$ مقدار اندازش الگوی خطی

$$a = \frac{1}{2}$$

$$C = \text{مجموع صفرم} = -3 = \text{مجموع صفرم از } -1 \text{ زیرا } (-3+2=-1)$$

$$t_n = \frac{1}{r} n^r + b n - 3 \rightarrow t_1 = \frac{1}{r} (1)^r + 1(b) - 3 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} + b - 3 = -1 \rightarrow b = -1 + 3 - \frac{1}{r} \Rightarrow b = \frac{r}{r}$$

$$t_n = \frac{1}{r} n^r + \frac{r}{r} n - 3$$

$$t_{r_0} = \frac{1}{r} (r_0)^r + \frac{r}{r} (r_0) - 3 = r_{0..} + r_0 - 3 = 22 \checkmark$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و
هندسی

قسمت اول: دنباله حسابی

جلسه پنجم: صفحات ۲۱ تا ۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف دنباله حسابی :

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

مانند : $t_1 = 2$ $d = 3$ $2, 5, 8, 11, \dots$

حجم عمومی دنباله حسابی :

$\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ $\textcircled{4}$ $\dots$ $\textcircled{n}$
 $t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, \dots, t_1 + (n-1)d$

حجم n ام دنباله حسابی $t_n = t_1 + (n-1)d$

مثال: در دنباله زیر حجم بیستم را حساب کنید.

$3, 1, -1, \dots$

$t_1 = 3$, $d = -2$

دنباله حسابی

$$t_{20} = 3 + (\underbrace{20-1}_{19})(-2) = 3 + (-38) = -35$$

۱ در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

الف) $5, 10, 15, 20, \square, \square, \square, \dots, d = \quad, a_n = \quad$

ب) $1, 3, 5, 7, \square, \square, \square, \dots, d = \quad, b_n = \quad$

پ) $5, 9, 13, 17, \square, \square, \square, \dots, d = \quad, c_n = \quad$

ت) $13, 7, 1, -5, \square, \square, \square, \dots, d = \quad, d_n = \quad$

الف) $5, 10, 15, 20, \underline{25}, \underline{30}, \underline{35} \quad d = 5$

$$a_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 5 + (n-1)5 = 5 + 5n - 5$$

$$\Rightarrow a_n = 5n$$

ت) $13, 7, 1, -5, \underline{-11}, \underline{-17}, \underline{-23} \quad d = -6$

$$a_n = 13 + (n-1)(-6) = 13 - 6n + 6$$

$$\Rightarrow a_n = -6n + 19$$

مثال: در یک دنباله حسابی با محمول اول ۳ و قدر نسبت ۷، محمد صندم ۱۷ است؟

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ d = 7 \\ t_n = 17 \\ n = ? \end{cases} \quad \textcircled{n} \quad 3, 9, 15, \dots, 17$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$17 = 3 + (n-1) \times 7$$

$$17 = 3 + 7n - 7$$

$$9 = 7n \rightarrow n = \frac{9}{7} = 15$$

فرمول شماره ۱: اگر t_m و t_n دو محمول از یک دنباله حسابی باشند و $n < m$

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n} \quad m > n$$

در این بخش محمول اول از یکی از t_n و t_m استفاده می‌کنیم.

مثال: در یک دنباله حسابی $t_4 = 19$ و $t_9 = 74$ باشد، قدر نسبت و محمول را بیابید.

$$d = \frac{t_9 - t_4}{9 - 4} = \frac{74 - 19}{9 - 4} = \frac{55}{5} = 11$$

$$t_4 = 19 = t_1 + (4-1) \times 11 \Rightarrow 19 = t_1 + 33 \Rightarrow t_1 = 19 - 33 = -14$$

فرمول شماره ۲: درج واسطه حسابی

اگر a و b دو عدد باشند و x فرد هم بین این دو عدد، n عدد صوری قرار دهیم

که a و b همراه با این n عدد دنباله حسابی تشکیل دهند، قدر نسبت از

$$\text{رابطه } d = \frac{b-a}{n+1} \text{ بدست می آید.}$$

$a \quad \overbrace{\quad \quad \quad}^{n \text{ عدد}} \quad b$

۲ الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. در این حالت می گوئیم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی درج کرده ایم.

$$18, \boxed{29}, \boxed{40}, \boxed{51}, 62$$

$$d = \frac{62-18}{3+1} = \frac{44}{4} = 11$$

فرمول شماره ۳: اگر a و c دو عدد باشند $b = \frac{a+c}{2}$ را میانین (واسطه) حسابی دو عدد می گوئیم.

مثال: میانین حسابی دو عدد ۵ و ۱۱ را بیابید.

$$b = \frac{5+11}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

نکته: شرط آنست که a ، b ، c سه جمله از دنباله حسابی باشند آن است که:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

مثال: اگر ... $2n, n+3, 3n+4, \dots$ دنباله‌ای حسابی باشد، n را بیابید.

$$\begin{aligned} \frac{n+3}{1} &= \frac{n+3n+4}{2} \rightarrow 2n+6=4n+4 \\ &\rightarrow 2n-4n=4-6 \\ &\rightarrow -2n=-2 \\ &\rightarrow n=1 \end{aligned}$$

1, 4, 7, ...

فرمول شماره 4:

تعداد جمله = دنباله‌ای که محاسبه اول t_1 و جمله آخر t_n و قدر نسبت d باشد

برابر:

$$\frac{t_n - t_1}{d} + 1$$

مثال: چند مدرسه در مسابقات نوجوانان بر ۷ ویدئو دارند؟

994, ..., 119, 112, 105

$$\frac{994 - 105}{7} + 1 = \frac{889}{7} + 1 = 127 + 1 = 128$$

نکته: در برخی سوالات فقط کافی است از مفهوم دنباله حسابی استفاده کنیم

۳ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = 3 \\ (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3t_1 + 3d = 3 & \div 3 \rightarrow t_1 + d = 1 \\ 3t_1 + 12d = 39 & \div 3 \rightarrow t_1 + 4d = 13 \end{cases}$$

$3d = 12 \rightarrow d = 4$

$$t_1 + 4 = 1 \rightarrow t_1 = -3$$

$-3, 1, 5, 9, 13, 17, \dots$

۶ مسئله زیر در پاپیروس رابیند آمده است. آن را حل کنید.
«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد».

سهم‌ها: $t_1 - 2d, t_1 - d, t_1, t_1 + d, t_1 + 2d$

$$t_1 - 2d + t_1 - d + t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d = 100 \rightarrow 5t_1 = 100 \rightarrow t_1 = 20$$

$$\frac{1}{r}(\widehat{t_1 + t_1 + d} + \widehat{t_1 + rd}) = \widehat{t_1 - rd} + \widehat{t_1 - d}$$

$$\frac{1}{r}(rt_1 + rd) = rt_1 - rd$$

$$t_1 + d = rt_1 - rd \rightarrow d + rd = rt_1 - t_1$$

$$\rightarrow rd = t_1$$

$$\xrightarrow{t_1 = r.} rd = r. \rightarrow d = 0$$

$$t_1 - rd$$

↑

10, 10, 20, 20, 30

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و
هندسی

قسمت دوم: دنباله هندسی

جلسه ششم: صفحات ۲۵ تا ۲۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف دنباله هندسی:

دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

جمله عمومی دنباله هندسی:

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{n}$$

$$t_1, t_1 \times r, t_1 \times r^2, t_1 \times r^3, \dots, t_1 \times r^{n-1}$$

$$t_n = t_1 \times r^{n-1}$$

۲ در دنباله‌های هندسی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) $2, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$

$\times 3 \quad \times 3 = r$

ب) $5, 10, 20, 40, \boxed{80}, \boxed{160}, \dots, b_n = 5 \times 2^{n-1}$

$\times 2 \quad \times 2$

پ) $6, -6, 6, -6, \dots, \boxed{6}, \boxed{-6}, \dots, c_n = 6 \times (-1)^{n-1}$

$\times (-1) \quad \times (-1)$

ت) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{4}}, \boxed{\frac{1}{8}}, \dots, d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2}$

مثال: در یک دنباله هندسی جمله اول ۷ و قدرنسبت ۲ می‌باشد. جمله چندم ۲۲۴ است؟

$\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{?}$

$7, 14, 28, \dots, 224$

$$t_n = t_1 r^{n-1} \rightarrow 224 = 7 \times 2^{n-1} \xrightarrow{\div 7} 32 = 2^{n-1}$$

$$\rightarrow 2^5 = 2^{n-1} \rightarrow n-1=5 \rightarrow n=6$$

تذکر: در دنبانه هندسی، تقسیم دو حجم متوالی برابر قدر نسبت است یعنی:

$$r = \frac{t_{n+1}}{t_n}$$

فرمول شماره ۱: اگر t_m و t_n دو حجم دنبانه هندسی باشند، قدر نسبت از رابطه

$$r^{n-m} = \frac{t_n}{t_m} \quad ; n > m$$

به دست می آید. حجم اول را با استفاده از یکی از حجم t_m یا t_n به دست می آوریم.

مثال: جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

یافتن جمله اول و قدر نسبت

$$\begin{cases} t_6 = 12 \\ t_9 = 96 \\ t_1, r = ? \end{cases}$$

$$r^{9-6} = \frac{t_9}{t_6} = \frac{96}{12} = 8$$

$$r^3 = 8 \rightarrow r = 2$$

$$t_6 = 12 = t_1 \times 2^{6-1} \rightarrow 12 = t_1 \times 2^5 \rightarrow 12 = 32 t_1 \rightarrow t_1 = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

فرمول شماره ۲: اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنبانه هندسی باشند، آنگاه

b را واسطه یا میانگین هندسی دو عدد a, c می‌گویند

$$b^2 = ac$$

مثال: میانگین هندسی دو عدد ۴, ۹ را بیابید.

$$b^2 = ac = 4 \times 9 = 36 \rightarrow b^2 = 36 \rightarrow b = \pm 6$$

مثال: دنبانه هندسی $\dots, \frac{1}{4}, x, 2$ یک کوشی (تزدی) است. x را بیابید.

$$x^2 = 2 \times \frac{1}{4} = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

کوشی: جمله = دنبانه کوشی یابند

$$\begin{matrix} \swarrow x=1 \\ \dots, \frac{1}{4}, 1, 2 \\ \searrow x=-1 \\ \dots, \frac{1}{4}, -1, 2 \end{matrix} \quad \checkmark$$

فرمول شماره ۳: هرگاه خواهم n عدد پس a, b طوری قرار دهم که این n عدد

a, b با یکدیگر تشکیل دنبانه هندسی دهند، قدرت $r^{n+1} = \frac{b}{a}$

می‌شود. به این عمل ربح واسطه هندسی می‌گویند.

مثال: بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟



$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

$$\begin{cases} n=3 \\ a=3 \\ b=48 \end{cases}$$

$$\rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a} = 16 \rightarrow r^4 = 16 \rightarrow r = \pm 2$$

$$r=2 \rightarrow 3, 6, 12, 24, 48$$

$$r=-2 \rightarrow 3, -6, 12, -24, 48$$

مثال: جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

①

۱۰	۲۰۰	۴۰۰۰
	-۲۰۰	

②

۱۰	۲۰۰	۴۰۰۰	۸۰۰۰۰
----	-----	------	-------

③

۴	۱۲	۳۶	۱۰۸	۳۲۴	۹۷۲
---	----	----	-----	-----	-----

حل ① $b^2 = ac \rightarrow b^2 = 10 \times 4000 = 40000 \rightarrow b = \pm 200$

حل ② $r^{n+1} = \frac{80000}{10} = 8000 \rightarrow r^4 = 8000 \rightarrow r = 10$

حل ③ $r^{n+1} = \frac{972}{4} = 243 \rightarrow r^5 = 243 \rightarrow r = 3$

تذکره: در برخی از سوالات فقط کافی است از مفهوم دنبانه هندسی استفاده کنیم.

جمله عمومی

مثال: در یک دنبانه هندسی مجموع جمله اول و دوم $\frac{9}{4}$ و مجموع جمله اول و دوم و سوم $\frac{13}{4}$ است.

و پنجم ۱۳۶ است. جمله سوم را بیابید.

$$t_1 + (t_1 r) = \frac{9}{4} \quad (1)$$

$$t_1 + t_1 r^2 = \frac{13}{4} \rightarrow t_1 r^2 + t_1 r^4 = \frac{13}{4} \quad (2)$$

$$(2) \div (1) \rightarrow \frac{t_1 r^2 + t_1 r^4}{t_1 + t_1 r} = \frac{\frac{13}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{13 \times 4}{9} = \frac{13}{9}$$

$$\rightarrow \frac{t_1 r^2 (1 + r^2)}{t_1 (1 + r)} = \frac{13}{9} \rightarrow r^2 = \frac{13}{9} \rightarrow r = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$(1) \rightarrow t_1 + 2t_1 = \frac{9}{4} \rightarrow 3t_1 = \frac{9}{4} \rightarrow t_1 = \frac{\frac{9}{4}}{3} = \frac{3}{4}$$

$$t_3 = t_1 r^2 = \frac{3}{4} \times \frac{13}{9} = \frac{13}{12}$$

۲، ۴، ۸، ...

مثال: حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.

$$2 \times 2^2 \times 2^4 \times \dots \times 2^{20} = 2^{1+2+\dots+20}$$

$$= 2^{\frac{20(20+1)}{2}} = 2^{210}$$

از رابطه $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ استفاده می‌کنیم.

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

قسمت اول: معرفی نسبت‌های مثلثاتی

جلسه اول: صفحات ۲۹ تا ۳۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

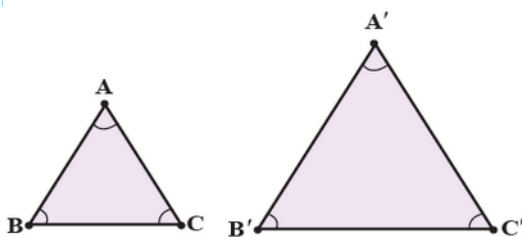
گروه ریاضی
استان همدان

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد.

یادآوری:

دو مثلث متشابه اگر هرگاه زوایای نظیر در آن‌ها برابر و نسبت اضلاع مشابیه

هم با یکدیگر برابر باشند.



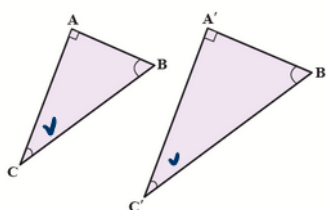
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' : \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \end{cases}$$

معنی: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

اگر $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C}'$ ، آنگاه

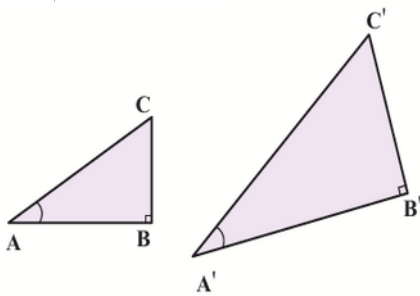
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

نتیجه:



نتیجه: اگر زاویه A از مثلث قائم الزاویه ABC با زاویه A' از مثلث قائم الزاویه A'B'C'

(مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم:



$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$ و $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ و $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ ✓
 (۱) (۲) (۳)

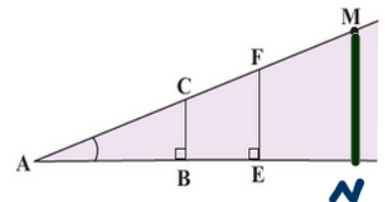
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' : \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ \end{cases} \rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$

$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \rightarrow AC \times A'B' = AB \times A'C' \xrightarrow{\div (AC \times A'C')} \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$ (۳) = نتیجه

$\frac{AC \times A'B'}{AC \times A'C'} = \frac{AB \times A'C'}{AC \times A'C'} \Rightarrow \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$

فعالیت

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.



۲ نقطه دیگری مثل M را در امتداد AC در نظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگر زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:

$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$ (۲ ص)

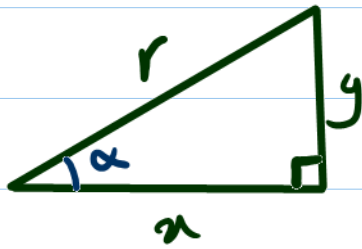
$\triangle ABC \sim \triangle AEF : \begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{B} = \hat{E} = 90^\circ \end{cases}$ (حل ۱)

$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE} = \frac{\text{ضلع مقابل A}}{\text{ضلع مجاور A}}$

نتیجه مهم:

نسبت‌های بالابری زاویه مشخص A در هر مثلث قائم الزاویه ای، یکسان است.

نسبت های مثلثاتی :



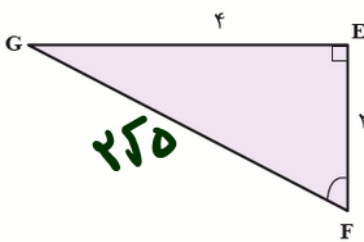
$$1) \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}}$$

$$2) \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$$

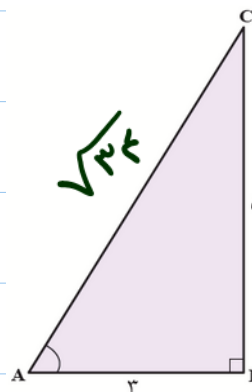
$$3) \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha}$$

$$4) \cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha}$$

مثال: نسبت های مثلثاتی زوای $\hat{A}$ ، $\hat{F}$ ، $\hat{G}$ را بیابید.



(ب)



(الف)

حل الف) $\triangle ABC$: $\text{قضیه فیثاغورس} \rightarrow AC^2 = 5^2 + 3^2 \rightarrow AC^2 = 25 + 9$

$$AC^2 = 34 \rightarrow AC = \sqrt{34}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{5}{\sqrt{34}}, \cos \hat{A} = \frac{3}{\sqrt{34}}, \tan \hat{A} = \frac{5}{3}, \cot \hat{A} = \frac{3}{5}$$

حل ب) $\vec{FG} : FG^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20 \rightarrow FG = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $\vec{e_{x0}}$

$$\sin \hat{F} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \cos \hat{F} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \hat{F} = \frac{4}{2} = 2 \quad \cot \hat{F} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

بدست آوردن نسبتهای مثلثاتی برای زوایای $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$:

(الف) $30^\circ, 60^\circ$

یک مثلث متساوی الساقین به ضلع ۲ واحد را رسم و از وسط آن عمود می‌کشیم.



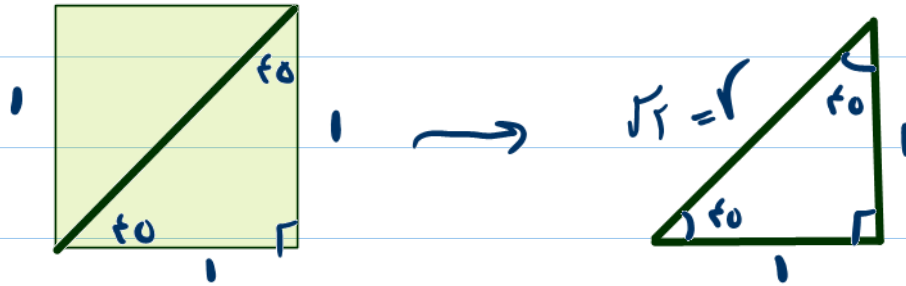
$$\text{قضیه فیثاغورس} \rightarrow 2^2 = 1^2 + y^2 \rightarrow 4 - 1 = y^2 \rightarrow y = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1}, \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

بہ ۴۵

مربعی بہ ضلع ۱ واحد رسم کی گئی دس بار رسم نظر، ان کا نصف کی گئی



$$r^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2} \quad \text{قید مشغول}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گویا کی گئی:

$$\cos 45^\circ = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

جدول زوایہ ۳۰، ۴۵، ۶۰

زاوۃ بنت	۳۰	۴۵	۶۰
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
Cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

نکته: سه مقدار: $\sqrt{3}$, 1 , $\frac{\sqrt{3}}{2}$ یک رابطه هندسی با قدر نسبت $\sqrt{3}$ هسته:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\times \sqrt{3}} 1 \xrightarrow{\times \sqrt{3}} \sqrt{3}$$

مثال: حاصل مقارن زیر را بسازید.

$$\text{الف) } A = \frac{\sin 4^\circ + \cos 4^\circ}{1 + \tan 4^\circ}$$

$$\text{الف) } A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } B = 2 \sin 4^\circ - 4 \cos 4^\circ + 3 \cos 2^\circ$$

$$\text{جواب) } B = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \times 1 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3} - 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{3} - 4$$

$$\text{پ) } C = \frac{\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ}{\tan^2 4^\circ - 4} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} - 4} = \frac{1}{\frac{3}{4} - 4} = \frac{1}{\frac{3-16}{4}}$$

$$= \frac{1}{\frac{-13}{4}} = -\frac{4}{13}$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

قسمت دوم: کاربرد نسبت‌های مثلثاتی

جلسه دوم: صفحات ۳۳ تا ۳۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

حل مسائل با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی :

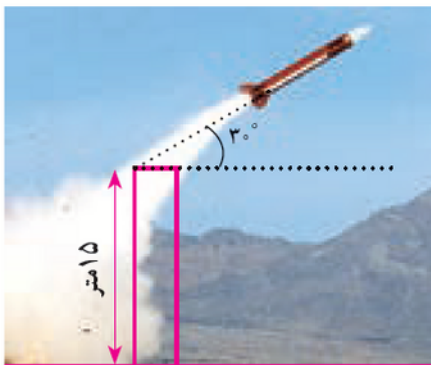
با استفاده از داده‌های مسئله، شعاعی برای آن رسم می‌کنیم. از نسبتی برای یافتن مقدار

مجهول استفاده می‌کنیم که مجهول یکی از اضلاع آن باشد (غیر ضلع مقابل یا مجاور یا وتر)

و جزء دیگر در مسئله داده شده باشد و یا به بزرگی قابل محاسبه باشد.

مثال

یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه 3° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

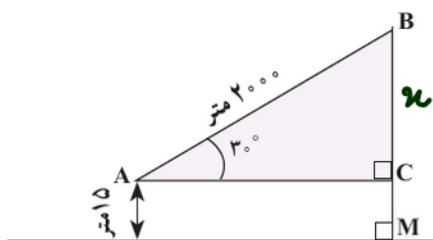


وتر را داریم و مجهول ضلع مقابل است پس
از سینوس 3° کمک می‌گیریم :

$$\sin 3^\circ = \frac{x}{2000}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{2000} \rightarrow 2x = 2000$$

$$\rightarrow x = 1000$$



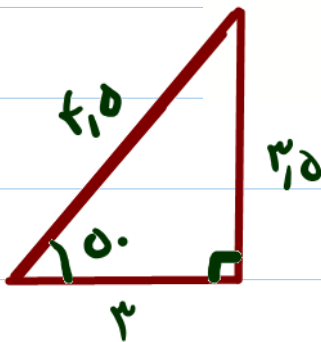
$$BM = 1000 + 15 = 1015 \text{ m}$$

نکته: برای معایبه نسبت های مثلثاتی زوایای غیرمدرج، ابتدا زاویه مورد نظر را رسم

می کنیم. سپس با تشکیل یک مثلث قائم الزامه گیری طول اضلاع، نسبت ها را می یابیم.

فعالیت

۱ یک زاویه 5° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم الزاویه و اندازه گیری طول های مورد نظر با یک خط کش مدرج، نسبت های مثلثاتی زاویه 5° را به صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.



$$\sin 5^\circ = \frac{2.5}{4.5} \approx 0.55$$

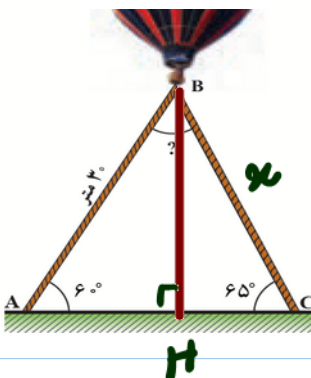
$$\cos 5^\circ = \frac{3}{4.5} \approx 0.66$$

$$\tan 5^\circ = \frac{2.5}{3} \approx 0.83$$

$$\cot 5^\circ = \frac{3}{2.5} \approx 1.2$$

کار کلاس

۱ در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب ها 30 متر است. می خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.



$$(\sin 65^\circ \approx 0.9)$$

$$\hat{B} = 180 - (60 + 45) = 180 - 105 = 75^\circ$$

$$\triangle ABH: \hat{A} = 60^\circ, \overline{AC} = 30, BH = ? \rightarrow \sin 60^\circ = \frac{BH}{30}$$

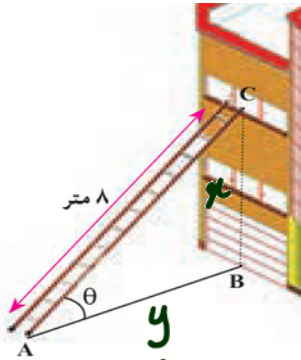
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{30} \rightarrow 2 \frac{BH}{30} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow BH = 15\sqrt{3}$$

$$\triangle BCH: \hat{C} = 45^\circ, \overline{BH} = ? \rightarrow BH = 15\sqrt{3} = ?$$

$$\sin 45^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{x} \rightarrow 0.707 = \frac{15\sqrt{3}}{x} \rightarrow 0.707x = 15\sqrt{3}$$

$$x = \frac{15\sqrt{3}}{0.707}$$

۲ مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین $\theta = 3^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



$$\sin 3^\circ = \frac{x}{8} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$$

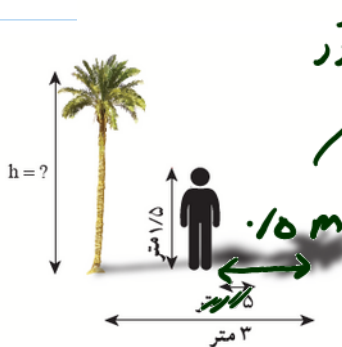
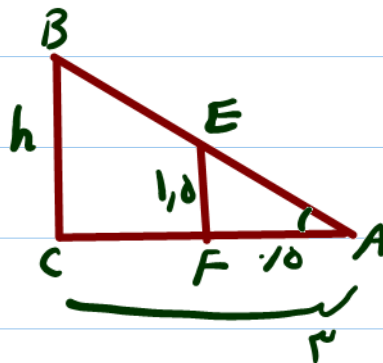
$$\cos 3^\circ = \frac{y}{8} \rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{y}{8}$$

$$2y = 8\sqrt{2} \rightarrow y = 4\sqrt{2}$$

ارتفاع نردبان

تمرین

۱ علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟



$$\tan \hat{A} = \frac{1,5}{0,5} : \triangle AEF$$

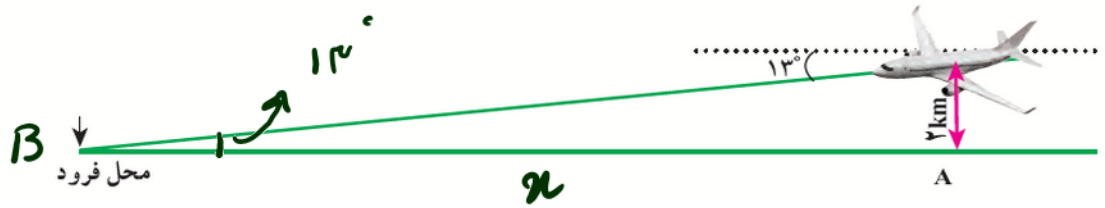
$$\rightarrow \frac{1,5}{0,5} = \frac{h}{3}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{h}{3} : \triangle ABC$$

$$\rightarrow 0,5h = 3 \times 1,5 \rightarrow h = \frac{4,5}{0,5}$$

$$h = 9 \text{ m}$$

۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.
 $\tan 13^\circ \approx 0.23$



$$\hat{B} = 13^\circ$$

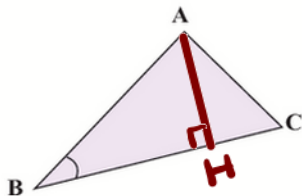
بنابراین نقشه خطوط هوایی و در ب

ضلع مقابل ۲ : ضلع مجاور x :

$$\tan 13^\circ = \frac{2}{x} \rightarrow 0.23 = \frac{2}{x} \rightarrow 0.23x = 2$$

$$x = \frac{2}{0.23} \approx 8.7 \text{ km}$$

فرمولی برای محاسبه مساحت مثلث با ارتفاع Sin



در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آنها نشان دهید :

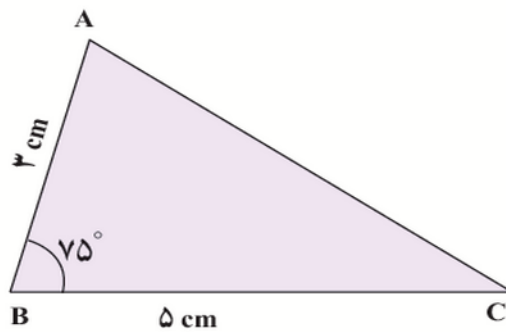
$$\Delta_{ABC} \text{ مساحت} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B.$$

$$\Delta_{ABH} : \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \rightarrow AH = AB \times \sin \hat{B}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times BC \times AB \sin \hat{B}$$

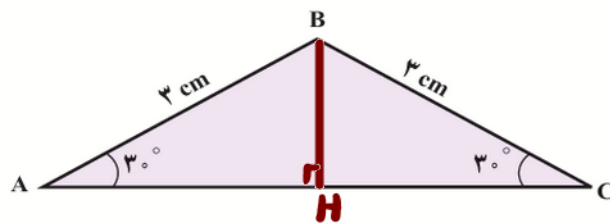
نتیجه : مساحت هر مثلث دلتا برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین این دو ضلع.

۴ فرض کنید $\sin 75^\circ \approx 0.96$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin 75^\circ = 7.5 \times 0.96 = 7.2$$

۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



روش اول: $\hat{B} = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ \leadsto \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3.897$$

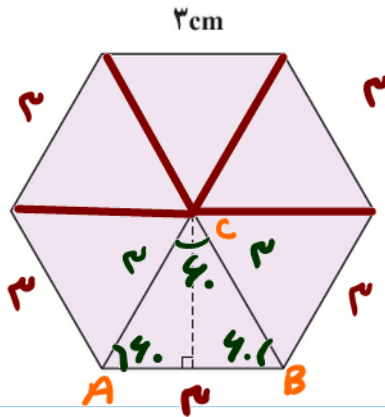
روش دوم:

$$\triangle ABH: \cos 30^\circ = \frac{AH}{3} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{3} \leadsto AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABH} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sin 30^\circ = \frac{9}{4} \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{ABC} = 2 S_{ABH} = 2 \times \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \approx 3.897$$

۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



۶ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۳ داریم و در آن هر سه زاویه داخلی مثلث متساوی الاضلاع

برابر ۶۰° است.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin \hat{A}_{60^\circ} = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{شش ضلعی}} = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

نتیجه: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a (الف) $= \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

ج ب مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع a $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس دوم: دایره مثلثاتی

قسمت اول: آشنایی با دایره مثلثاتی

جلسه سوم: صفحات ۳۶ تا ۳۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

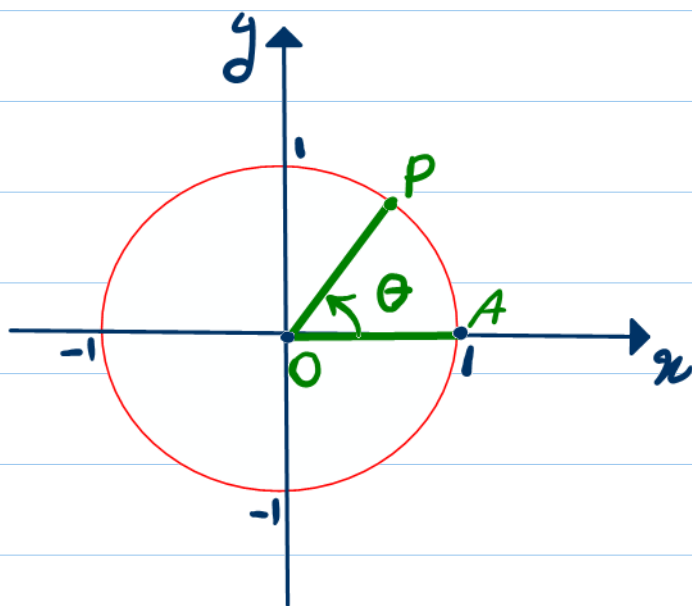
تعریف دایره مثلثاتی: دایره‌ای به شعاع یک واحد که مرکز آن مبدأ مختصات است.

زاویه در دایره مثلثاتی: ضلع ابتدایی هر زاویه روی قسمت مثبت محور x ها واقع است و ضلع

دوم حرکت می‌کند (این ضلع نیمه دایره را قطع می‌کند) اگر ضلع دوم در خلاف

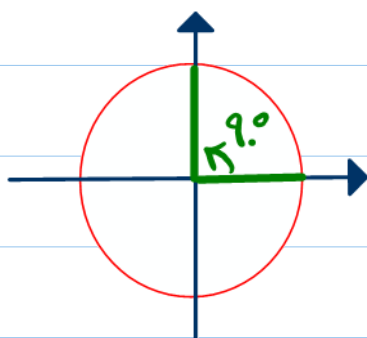
جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند زاویه مثبت می‌شود و اگر در جهت

عقربه‌های ساعت حرکت کند زاویه منفی می‌شود.

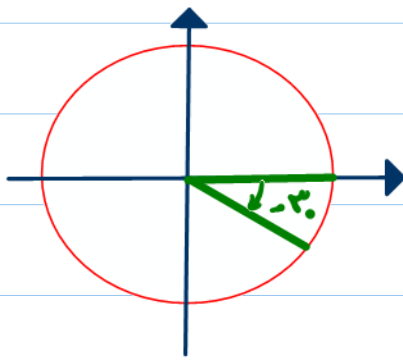


مثال: زاویه‌ای زیر را در دایره مثلثاتی مشخص کنید.

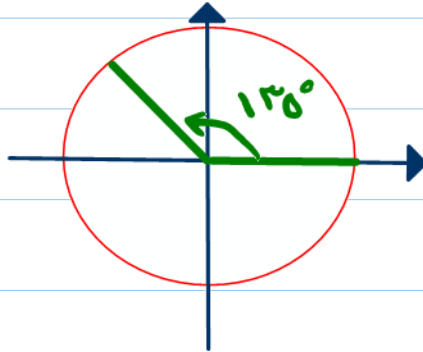
90° (مثبت)



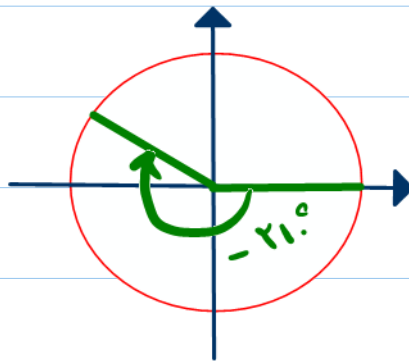
ب) -3°



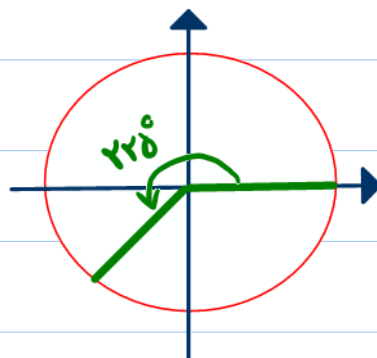
ج) 135°



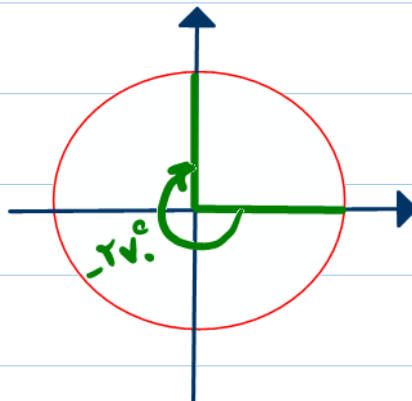
د) -21°



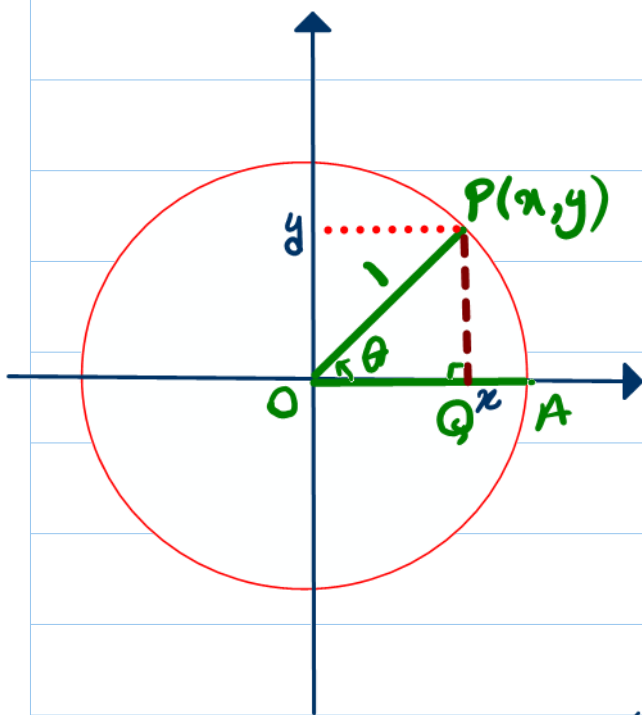
هـ) 220°



و) -27°



نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی :



زاویه θ را دایره مثلثاتی در نظر بگیرید.

اگر ضلع دوم این زاویه محاط دایره را

در نقطه $P(x, y)$ قطع کند و از این نقطه

بر محور x ها عمود کنیم تا این محور را در Q قطع کند، مثلث قائم الزامی $\triangle OPQ$ بدست

می‌آید. حال داریم :

$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin \theta$$

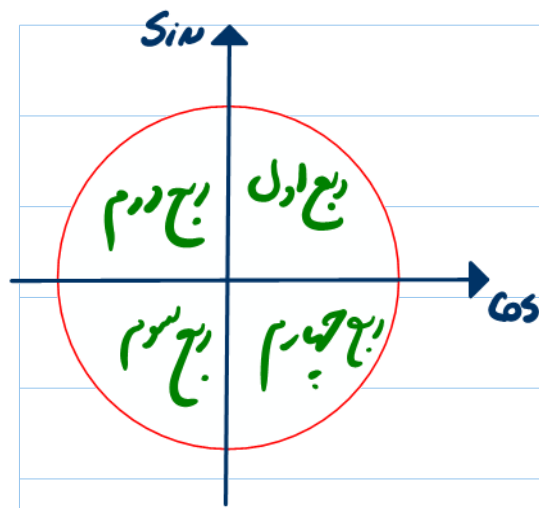
$$\cos \theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \theta$$

$$\cot \theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \cot \theta$$

تواردار : در دایره مثلثاتی محور x ها را $\cos$ ها، محور y ها را $\sin$ ها می‌نامیم.

این دو محور عمود بر هم، دایره مثلثاتی را به چهار ناحیه یا ربع مثلثاتی تقسیم می‌کنند.



$0^\circ < \theta < 9^\circ$: θ در ربع اول
 $9^\circ < \theta < 18^\circ$: θ در ربع دوم
 $18^\circ < \theta < 27^\circ$: θ در ربع سوم
 $27^\circ < \theta < 36^\circ$: θ در ربع چهارم

کار در کلاس

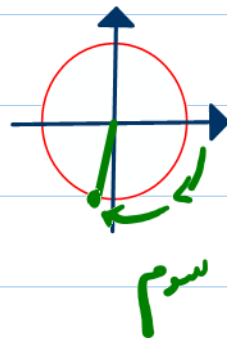
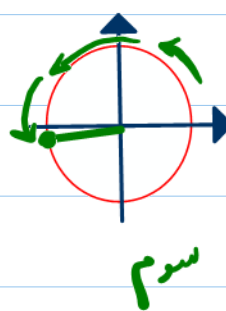
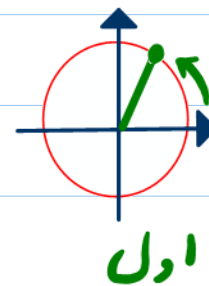
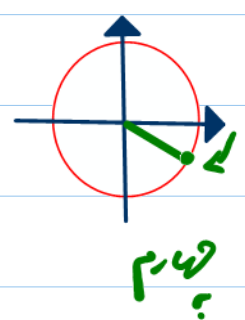
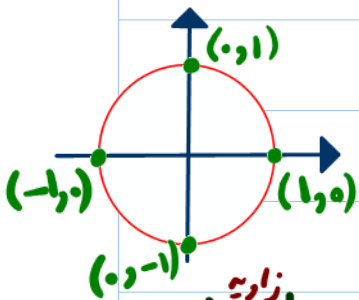
۱ مشخص کنید انتهای کمان مربوط به هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

ت -95°

پ 182°

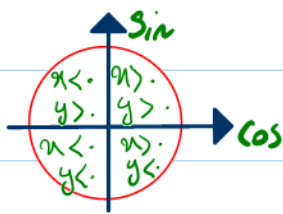
ب 65°

الف -3°



جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایای مرزی 0° ، 9° ، 18° ، 27° ، 36°

نسبت	0°	9°	18°	27°	36°
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot \theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده



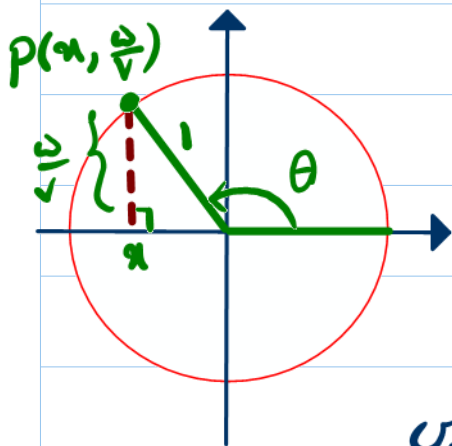
جدول علامت‌های نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارخانه

نسبت \ ربع	اول	دوم	سوم	چهارم
Sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

نکته: Sin و Cos برای هر زاویه دایره همداره عددی بین ۱- تا ۱+ هستند یعنی:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$



مثال

اگر زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin \theta = \frac{5}{\sqrt{49}}$ ، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{49}}\right)^2 &= 1^2 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{25}{49} \\ x^2 &= \frac{24}{49} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{49}} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{24}}{7} \end{aligned}$$

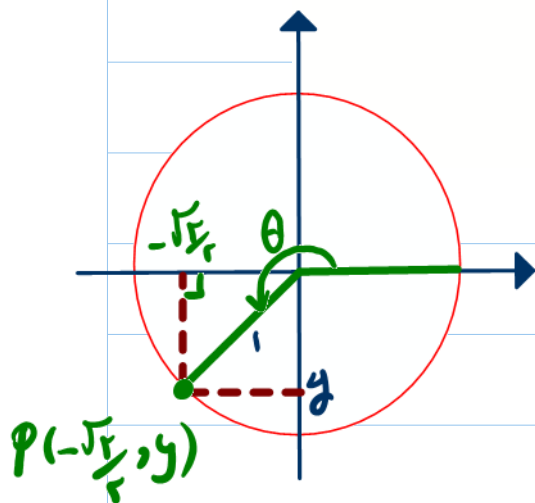
نیمه دوم

$$\cos \theta = x = -\frac{\sqrt{24}}{7}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{5}{\sqrt{49}}}{-\frac{\sqrt{24}}{7}} = \frac{-5 \times 7}{7 \times \sqrt{24}} = \frac{-5}{\sqrt{24}}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{24}}{5}$$

فعالیت

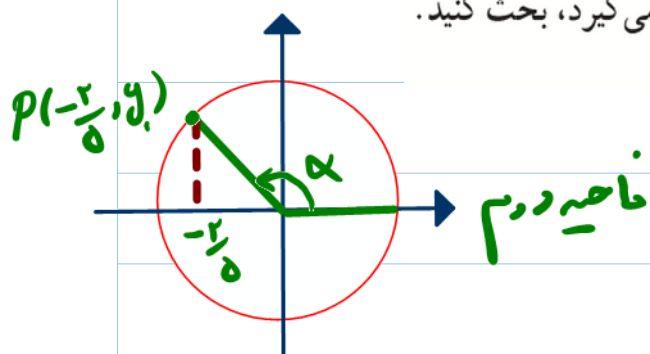
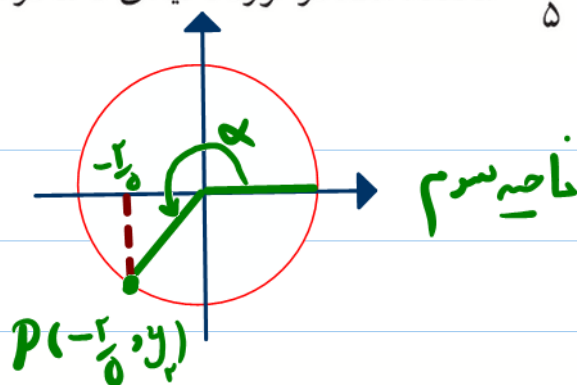
- ۱ فرض کنید نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد به طوری که $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. می دانیم θ در ربع سوم قرار دارد، بنابراین $y = \sin \theta = \dots\dots\dots$.
 الف) مختصات نقطه P را به دست آورید.
 ب) سایر نسبت های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.



$$\begin{aligned} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 &= 1^2 \rightarrow \frac{1}{2} + y^2 = 1 \\ \rightarrow y^2 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow y = \pm \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ناحیه سوم } y &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = \sin \theta &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = 1 \end{aligned}$$

- ۲ اگر $\cos \alpha = \frac{-2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه ای که α در آن قرار می گیرد، بحث کنید.



- ۳ زاویه ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

هزاره در ناحیه چهارم مانند 31° -

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس دوم: دایره مثلثاتی

قسمت دوم: رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

جلسه چهارم: صفحه ۴۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

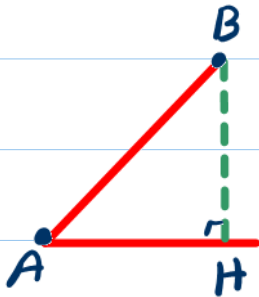
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری :

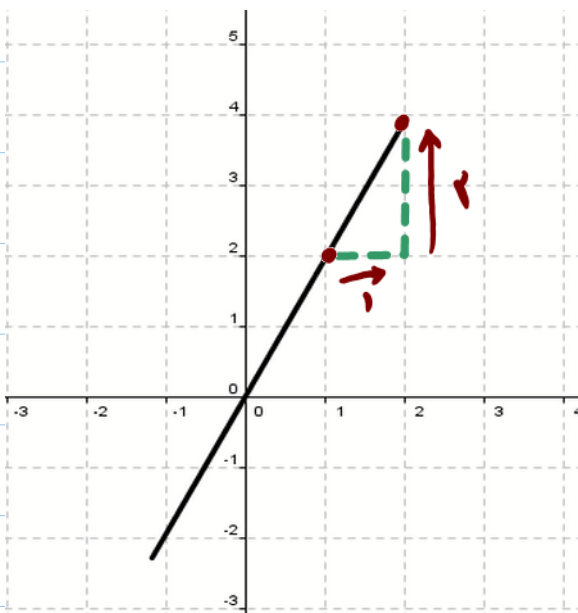
مفهوم شیب : نسبت افزایش ارتفاع به مسافت افقی طی شده است .



$$\text{شیب} = \frac{BH}{AH}$$

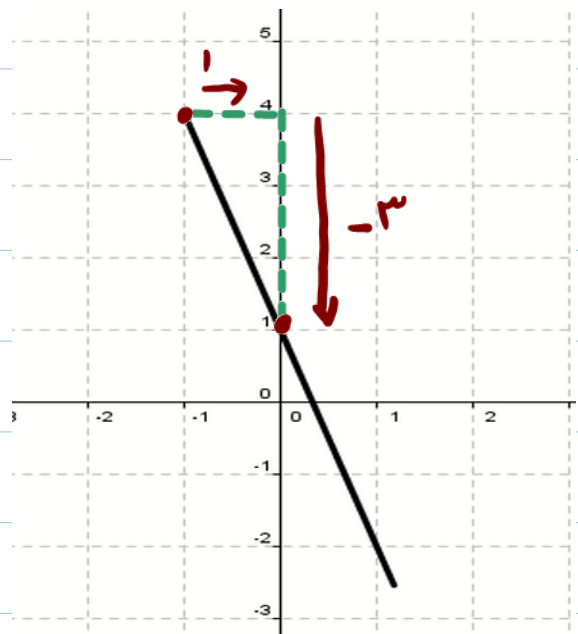
شیب خط : وقتی ما گوییم شیب خطی m است یعنی به ازای افزایش یک واحد متغیر x

متغیر y به اندازه m واحد افزایش یا کاهش می یابد.



الف)

$$m=2$$



ب)

$$m=-3$$

نکته: الف) هرگاه دوی محور x ها از چپ به راست حرکت کنیم و دوی خط به سمت بالا

برویم، شیب خط مثبت خواهد بود.

ب) هرگاه دوی محور x ها از چپ به راست حرکت کنیم و دوی خط به پائین سرخیزیم

شیب خط منفی خواهد بود.

ج) اگر خط موازی محور x ها باشد شیب خط صفر است (خطهای افقی)

د) اگر خط موازی محور y ها باشد شیب خط تعریف نشده است (خطهای قائم)

یافتن شیب خط با داشتن دو نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از خط l باشند، شیب این خط برابر

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{است! :}$$

نوشتن معادله خط با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ نقطه ای از خط l باشد و شیب m باشد معادله این خط

از رابطه زیر به دست می آید :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(2, -3)$ و $B(4, 5)$ بگذرد.

$$m = \frac{5 - (-3)}{4 - 2} = \frac{5 + 3}{2} = 4 \Rightarrow y - (-3) = 4(x - 2)$$

$$y + 3 = 4x - 8 \Rightarrow y = 4x - 8 - 3 \Rightarrow y = 4x - 11$$

تذکره: الف) به معادله های به شکل $y = mx + b$ معادله رستایار خطی می گویند که m شیب خط و b عرض از مبدأ (عل برضر خط با محور y ها) است.

ب) به معادله های به شکل $ax + by + c = 0$ صورت کلی خطی می گویند که شیب از $-\frac{a}{b}$ به دست می آید.

مثال: شیب خط های زیر را بیابید.

۱) $y = 3$ 

$$m = 0$$

۲) $y = -\frac{2}{5}x + 1$ 

$$m = -\frac{2}{5}$$

۳) $x = -2$

$m =$ تعریف نشده

۴) $3x - 12y - 5 = 0$

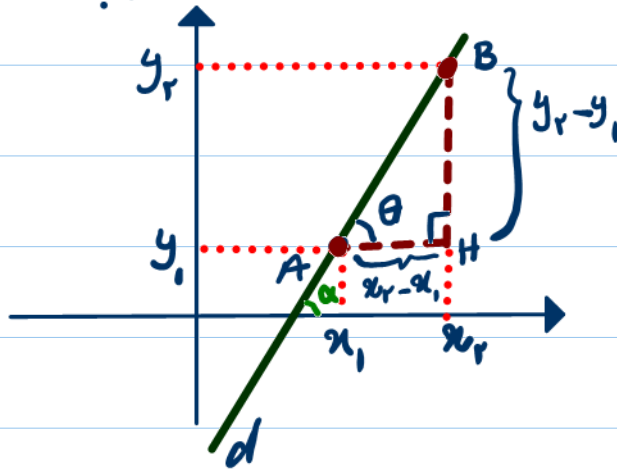
$$m = -\frac{3}{-12} = \frac{1}{4}$$

۵) $7x = 2y - 4$

$$2y = 7x + 4 \xrightarrow{\div 2} y = \frac{7}{2}x + 2 \rightarrow m = \frac{7}{2}$$

رابطه شیب خط و تانژانت :

تانژانت زاویه ای که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد، مساوی شیب آن خط است زیرا :



اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$

دو نقطه از خط d باشند، شیب این خط

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ است.}$$

از طرفی در مثل قائم الزامه ABH داریم : $\tan \theta = \frac{BH}{AH} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

و چون AH با محور x ها موازی است و خط d مدبر آن است، طبق قضیه

خط موازی مدبر زاویه θ با زاویه ای که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد (α)

$$m = \tan \alpha \quad \text{برابری پس :}$$

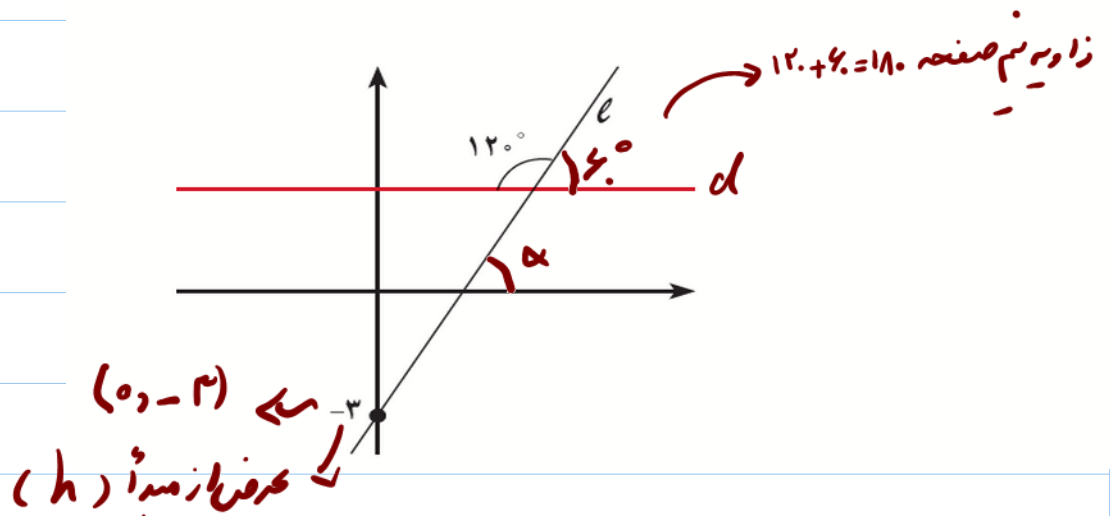
x_1, y_1

۸ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها 45° است و نقطه $(0, 2)$ روی آن قرار دارد.

$$m = \tan 45^\circ = 1$$

$$y - 2 = 1(x - 0) \rightarrow y = x + 2$$

۹ با توجه به شکل زیر، معادله خط ℓ را به دست آورید.



d موازی کره ها مربع L پس از قفیه خطوط موازی مربع داریم :

$$\alpha = 4^\circ \Rightarrow m = \tan 4^\circ = \sqrt{3}$$

$$y = mx + h \rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل دوم : مثلثات

درس سوم : روابط بین نسبتهای
مثلثاتی

جلسه پنجم: صفحات ۴۲ تا ۴۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

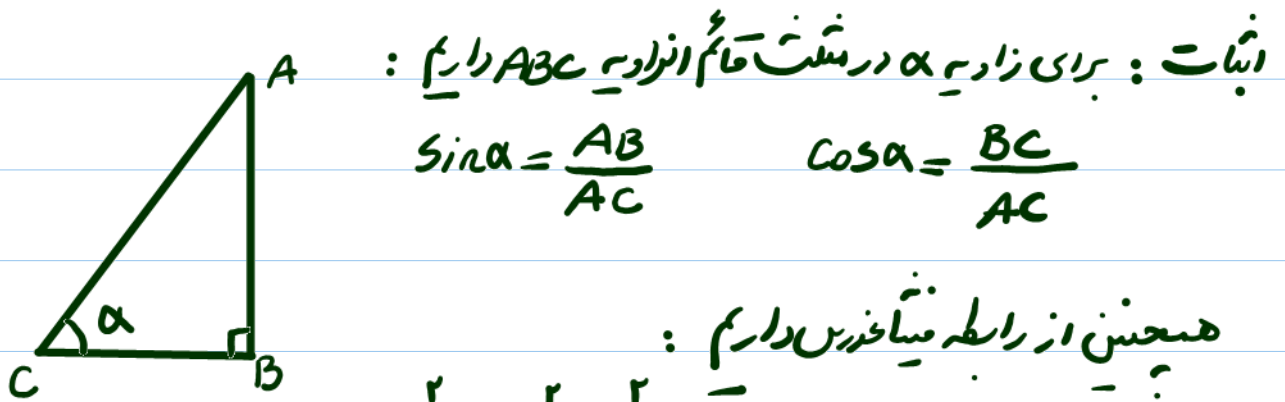
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

رابطه شماره ۱ :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

حال بدین $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را باینده جمع می کنیم :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

نتیجه : از رابطه شماره ۱ می توان به شکل های زیر استفاده کرد :

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

مثبت یا منفی بودن سینوس و کسینوس با توجه به ناحیه ای که وترهای کمان α در آن

قرار می گیرند ، مشخص می شود .

تذکره: وقتی می‌نویسیم $\sin \alpha$ یعنی $(\sin \alpha)$. به طور کلی در نسبت‌های مثلثاتی

زمانی که خود هم یک نسبت را بتوان برانیم، توان را در انتهای نام نسبت

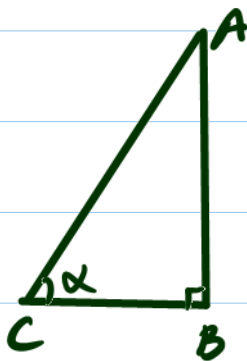
و قبل از α می‌نویسیم.

روابط شماره ۲:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

(ثبات):



$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC}, \quad \cos \alpha = \frac{BC}{AC}$$

حال $\sin \alpha$ را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AB \times AC}{BC \times AC} = \frac{AB}{BC}$$

از طرفی $\tan \alpha = \frac{AB}{BC}$ پس می‌توان گفت: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

به همین ترتیب با تقسیم $\cos \alpha$ بر $\sin \alpha$ و نوشتن $\cot \alpha$ به رابطه $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ می‌رسیم.

مثال: اگر α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ ، یارینبهای مثلثاتی

رایج دست آورید.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5 \times 13}{12 \times 13} = \frac{5}{12}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{12}{5}$$

مثال: اگر $\cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، یارینبهای مثلثاتی زاویه 15° را بیابید.
لکه ناحیه دوم

$$\sin^2 15^\circ = 1 - \cos^2 15^\circ = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\sin 15^\circ > 0} \sin 15^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

نتیجه: از روابط شماره ۲ می توان نتیجه گرفت تاثرات دیکثرات یک زاویه حاد بر یکدیگر

هستند یعنی:

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \Rightarrow \tan \alpha \times \cot \alpha = 1$$

روابط شماره ۳:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \cos \alpha \neq 0$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \sin \alpha \neq 0$$

دلیل:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow[\cos \alpha \neq 0]{\div \cos^2 \alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow[\sin \alpha \neq 0]{\div \sin^2 \alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

نقشه: با عکس کردن روابط بالا داریم:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$$

نشان: اگر $\tan \theta = -\frac{2}{3}$ و θ زاویه ای در ناحیه چهارم دربره ششگونی باشد.

نسبت های ششگونی را بیابید.

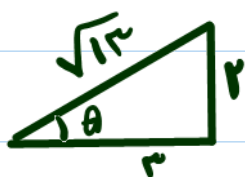
$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 1 + \frac{4}{9} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{13}{9} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{9}{13} = \cos^2 \theta \xrightarrow{\sqrt{}} \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{13} = \frac{13-9}{13} = \frac{4}{13}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{}} \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{3}{2}$$

روش دوم: بدون در نظر گرفتن علامت



$$r^2 = 4 + 9 = 13$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}} \xrightarrow{\text{علامت}} \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

اتحاد مثلثی: هر تساوی بین دو عبارت مثلثی که به ازای تمام مقادیر از متغیرها

که هر دو عبارت به ازای آنها با معنی اند، برقرار باشد، یک اتحاد مثلثی است

است. تمام روابط گفته شده تا به اینجا یک اتحاد مثلثی هستند.

هرگاه اثبات یک اتحاد مثلثی خوانده شود، یک طرف تساوی (اعضای سمتی

که تلویحاً ثابت است) را نوشته با استفاده از رابطه های مثلثی آن را ساده

می کنیم تا به سمت دیگر برسیم.

مثال: درستی اتحادهای مثلثی زیر را ثابت کنید.

$$1) \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

$$\text{سمت چپ} = \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) (1 - \sin \theta) = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \frac{(1 - \sin \theta)}{1}$$

$$\frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{\cos \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta = \text{سمت راست}$$

که خود را جمع می کنیم

$$۲) \sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

از اتحاد مزدوج
تجزیه می کنیم

$$\frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\text{طرف چپ}} = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times 1 = \text{طرف راست}$$

$$۳) \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

طرف راست

$$= \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\sin \alpha} + \cot \alpha$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha$$

= طرف چپ

$$۴) \frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

طرف چپ

$$= \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} = \text{طرف راست}$$

$$d) \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$$

$$\text{طرف چپ} = \frac{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha (\cancel{\cos \alpha + \sin \alpha})}{\cos \alpha (\cancel{\sin \alpha + \cos \alpha})}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \text{طرف راست}$$

$$7) 1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$$

$$\text{طرف چپ} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x}$$

$$= 1 - (1 - \sin x) = 1 - 1 + \sin x = \sin x = \text{طرف راست}$$

$$v) \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$\text{طرف چپ} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

صورت و مخرج را در $1 + \sin x$ ضرب می کنیم

$$\frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} \overset{\text{توزیع}}{=} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \text{طرف راست}$$

9)

صورت مضروب را در $1 + \sin \theta$ ضرب می‌کنیم.

$$1) \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{طرف راست} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1 + \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \text{طرف چپ}$$

مثال:

کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ب) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

دفعه دوم را در نظر بگیرید زیرا اگر $\alpha = 30^\circ$ بگیریم، طرف چپ و راست برابر می‌شوند:

$$\text{طرف چپ} = \sin^4 30^\circ + \cos^4 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{10}{16}$$

$$\text{طرف راست} = 1 - 2 \sin 30^\circ \times \cos 30^\circ = 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

شکل جمع کامل در مخرج

ب) اتحاد را در نظر بگیرید:

$$\text{طرف چپ} = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \text{طرف راست}$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل سوم : توان های گویا و
عبارت های جبری

درس اول و دوم : ریشه n ام

جلسه اول: صفحات ۴۸ تا ۵۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری:

می دانیم $3^2 = 9$ و $9 = (-3)^2$. $3, 3$ - را **ریشه های دوم** عدد 9 می گویند .

وقتی می نویسیم $\sqrt{9}$ منظورمان فقط ریشه دوم مثبت آن می ۳ است . اگر بخوایم

ریشه دوم منفی را نشان دهیم می نویسیم : $-\sqrt{9} = -3$.

با توجه به اینکه هر عددی وقتی به توان ۲ می رسد مثبت می شود ، پس اعداد منفی

ریشه دوم ندارند مثلاً ۹ - ریشه دوم ندارد زیرا : $-9 = (-?)^2$

حتی هیچ عددی وجود ندارد که وقتی به توان ۲ در برسد ۹ - شود .

می دانیم $4^3 = 64$. 4 را **ریشه سوم** عدد 64 می نامیم و می نویسیم $\sqrt[3]{64} = 4$.

برخلاف ریشه دوم ، اعداد منفی هم ریشه سوم دارند مثلاً :

$$\sqrt[3]{-125} = -5 \quad , \quad \sqrt[3]{-27} = -3$$

حال قاریب با اعدادی ریشه های مدام (به عدد طبیعی بزرگتر یا ۲) تقسیم می دهیم .

تعریف: اگر a یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد حقیقی a می نامیم هرگاه:

$$b^n = a$$

$3^2 = 9$

نکته خیلی مهم:

- اگر n فرد باشد برای نمایش ریاضی ریشه n ام عدد حقیقی a از

نماد رادیکال استفاده می کنیم و می نویسیم: $\sqrt[n]{a}$

و می خوانیم رادیکال a با عرض n .

- اگر n زوج باشد و a هم عدد حقیقی مثبت در نظر گرفته شود زمانی

که می نویسیم $\sqrt[n]{a}$ (رادیکال a با عرض n) منظورمان

فقط ریشه n ام مثبت عدد a است. اگر خود هم ریشه n ام منفی

عدد a را نمایش دهیم می نویسیم $-\sqrt[n]{a}$.

تاکید: هر عدد حقیقی دارای یک ریشه فرد است که اگر عدد مثبت باشد، ریشه نام

آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه نام آن منفی است.

هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه زوج است که قدرینه یکدیگرند.

عدد های منفی ریشه زوج ندارند.

مثال: جدول زیر را برای ریشه های مختلف عدد ۶۴ کامل کنید.

ریشه های دوم	ریشه سوم	ریشه های چهارم	ریشه پنجم	ریشه های ششم	ریشه هفتم	ریشه های هشتم
$\sqrt{64} = 8$ و $-\sqrt{64} = -8$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[6]{64} = 2$ و $-\sqrt[6]{64} = -2$	$\sqrt[7]{64}$	$\sqrt[8]{64}$ و $-\sqrt[8]{64}$

مثال: جدول زیر را برای ریشه های مختلف عدد ۶۴- کامل کنید.

ریشه دوم	ریشه سوم	ریشه چهارم	ریشه پنجم	ریشه ششم	ریشه هفتم	ریشه هشتم
وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64} = -4$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد

مثال: جدول های زیر را کامل کنید.

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰,۰۰۰	۳۱۲۵
ریشه های چهارم	$\sqrt[4]{16} = 2$ و $-\sqrt[4]{16} = -2$	$\sqrt[4]{625} = 5$ و $-\sqrt[4]{625} = -5$	$\sqrt[4]{10000} = 10$ و $-\sqrt[4]{10000} = -10$	$\sqrt[4]{3125} = 5\sqrt[4]{5}$ و $-\sqrt[4]{3125} = -5\sqrt[4]{5}$

$$\sqrt[4]{3125} = \sqrt[4]{625 \times 5} = \sqrt[4]{625} \times \sqrt[4]{5} = 5\sqrt[4]{5}$$

عدد	-۳۲ (جواب ۵)	۳۱۲۵	-۲۴۳	-۱	-۱۰۰۰۰۰
ریشه پنجم	-۲	۵	-۳	-۱	-۱۰

مثال: جدول زیر را کامل کنید.

$a > 0$	n زوج	a دارای دو ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a = 81$ $n = 4$	81 دارای دو ریشه چهارم $\sqrt[4]{81} = 3$ و $-\sqrt[4]{81} = -3$ است
	n فرد	5 دارای یک ریشه n ام $\sqrt[n]{5}$ است.	$a = 32$ $n = 5$	32 دارای یک ریشه پنجم $\sqrt[5]{32} = 2$ است
$a < 0$	n زوج	ریشه n ام وجود ندارد	$a = -81$ $n = 4$	ریشه چهارم، -81، وجود ندارد
	n فرد	8 دارای یک ریشه n ام $\sqrt[n]{8}$ است	$a = -8$ $n = 3$	-8 دارای یک ریشه سوم $\sqrt[3]{-8} = -2$ است.

مثال:

حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\sqrt[7]{128} = 2$$

$$\sqrt[8]{256} = 4$$

$$\sqrt[9]{-1} = -1$$

$$\sqrt[4]{625} = 5$$

$$-\sqrt[4]{0.0016} = -0.2$$

$$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \frac{-1}{2}$$

$$\sqrt[7]{-128} = -2$$

$$\sqrt[6]{0} = 0$$

$$\downarrow \sqrt[n]{0} = 0$$

نکته: حاصل هر درج را با فرض زوج، قطعاً مثبت است:

$$\sqrt[n]{a} = b \rightarrow \begin{matrix} \text{مثبت} \\ \text{مثبت} \end{matrix}$$

ویژگی‌های رادیکال :

$$۱) \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{زوج } n \\ |a| & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$۲) \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & a, b \in \mathbb{R}; n \text{ زوج} \\ \sqrt[n]{ab} & a, b > 0; n \text{ فرد} \end{cases} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{با شرط } b \neq 0$$

$$۳) \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{به شرطی که اگر } n \text{ زوج باشد، } a \text{ مثبت باشد؛}$$

$$۴) (\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} a & a \in \mathbb{R}; n \text{ فرد} \\ a & a > 0; n \text{ زوج} \\ a & a < 0; n \text{ زوج، تعریف نشده} \end{cases}$$

$$۵) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad \text{اگر } m \text{ یا } n \text{ زوج باشد، } a \text{ نامنفی}$$

$$۶) \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a} \quad \text{اگر } m \text{ یا } n \text{ زوج باشد، } a \text{ نامنفی}$$

سوال: آیا $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ همیشه برقرار است؟

اگر n زوج باشد باید a مثبت باشد.

$$\sqrt[4]{(-3)^4} \neq (\sqrt[4]{-3})^4 \quad \text{فرد}$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

$$۱) \sqrt[4]{(-۳)^۴} = |-۳| = ۳$$

$$۲) \sqrt[۵]{(-۲)^۵} = -۲$$

$$۳) (\sqrt[۳]{-۱})^۳ = -۱$$

$$۴) (\sqrt[۱]{-۵})^{\text{تقریب نشده}} =$$

$$۵) (\sqrt[۵]{۲})^۵ = \sqrt[۵]{۲^۵} = \sqrt[۵]{۸}$$

$$۶) \sqrt[۱]{(۱-\sqrt{۲})^۱} = \sqrt[۱]{1-\sqrt{۲}} = -(1-\sqrt{۲}) = \sqrt{۲} - ۱$$

منفی

$$۷) \sqrt[۳]{۲^۶ a^۲} = \sqrt[۳]{۳۲ a^۲} = \sqrt[۳]{۱۶ \times ۲ a^۲} = \sqrt[۳]{۱۶} \times \sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۳]{a^۲} = ۴|a| \sqrt[۳]{۲}$$

$$۸) \sqrt[۴]{a^۴ b^۵} = \sqrt[۴]{a^۴} \times \sqrt[۴]{b^۴ \times b} = |a| |b| \sqrt[۴]{b}$$

$$۹) \sqrt[۵]{\frac{۱۲۵ a^{۱۵}}{b^۹}} = \frac{\sqrt[۵]{۱۲۵ a^{۱۵}}}{\sqrt[۵]{b^۹}} = \frac{\sqrt[۵]{۱۲۵} \times a^۳}{\sqrt[۵]{b^۹ \times b^۴}} \rightarrow (a^۳)^۵ = a^{۱۵}$$

$$= \frac{\sqrt[۵]{۱۲۵} \times a^۳}{b^۵ \sqrt[۵]{b^۴}} = \frac{۵ a^۳ \sqrt[۵]{۵}}{b^۵ \sqrt[۵]{b^۴}}$$

$$1.) \sqrt[4]{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2 \times 2}} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$$

۲ را دوا در رادیکال می نیم و
توانی به اندازه حجم بزن می هم

$$11) \sqrt{-a} + \frac{\sqrt[3]{a^3+2a}}{\sqrt[3]{a^3}-2a}$$

چون عبارت $\sqrt{-a}$ طرف ششوات a عددی منفی بوده است.

$$\sqrt{-a} + \frac{a+2a}{|a|-2a} = \sqrt{-a} + \frac{3a}{-a-2a} = \sqrt{-a} + \frac{3a}{-3a} = \sqrt{-a} - 1$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل سوم : توان های گویا و
عبارت های جبری

درس اول و دوم : ریشه n ام

جلسه دوم : صفحات ۴۸ تا ۵۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

پیدا کردن مقدار تقریبی ریشه های n ام عدد a : (اگر زوج فقط ریشه مثبت)

اگر خود هم بدانیم که ریشه n ام عدد a تقریباً چه مقداری می شود، دودری که ریشه n ام کامل (مثلاً) دارند و عدد a بین آن‌ها قرار دارد را بسای کنیم. ریشه n ام عدد a هم بین ریشه n ام آن دودر قرار دارد پس قسمت صحیح جواب به دست می آید. برای وقت بیشتر با توجه به اینکه a به کدام از ریشه های n ام نزدیکتر است به آن اعداد مناسب بهت داده (مثلاً هم یک هم) و آن

را امتحان می کنیم و با آزمون خطا به نتیجه می رسم. (قرارداد: تقریب های ناقص (کوچتر) را در زنی نرم) با یک ریم امار

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt{38}$ را بیابید.

۳۸ بین ۳۶ و ۴۹ قرار دارد که هر دو ریشه دوم کامل دارند (هر دو کامل اند)

$$\sqrt{36} < \sqrt{38} < \sqrt{49}$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$6 < \sqrt{38} < 7$$

چون ۳۸ به ۳۶ نزدیکتر است پس جواب هم به ۶ نزدیکتر است چون خیلی نزدیک است ۶،۱ را امتحان می کنیم: $(6,1)^2 = 37,21$

چون $38,44 = (6,2)^2$ از ۳۸ بسترهای سوراخ ۶،۲ را در نظری بگیریم.

سوال: ریشه سوم ۱۵ تقریباً چه قدری می شود؟

۱۵ بین دو ریشه سوم کامل یعنی ۸،۲۷ است.

$$\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{15} < \sqrt[3]{8}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$3 < \sqrt[3]{15} < 2$$

چون ۱۵ به ۸ نزدیک تر است پس جواب به ۲ نزدیک تر است ولی چون فاصله خیلی هم کم نیست با ۲،۴ شروع می کنیم.

$$\text{از ۵ بستر شد } 15,625 = (2,5)^3, \quad , \quad 13,824 = (2,4)^3$$

پس همان ۲،۴ را در نظری بگیریم.

سوال: مقدار تقریبی $\sqrt{74}$ را محاسبه کنید.

$$\sqrt{64} < \sqrt{74} < \sqrt{81}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$8 < \sqrt{74} < 9$$

۷۴ به ۸۱ نزدیکتر است پس از ۸,۵ شروع می کنیم:

$$(۸,۵)^۲ = ۷۲,۲۵ \quad , \quad (۸,۶)^۲ = ۷۳,۹۶ \quad , \quad (۸,۷)^۲ = ۷۵,۶۹$$

که از ۷۴ بیشتر

پس: $\sqrt{۷۴} \approx ۸,۶$

نتیجه: اگر $\sqrt{a} < \sqrt{b} < \sqrt{c}$ نه b و c ریشه نام کامل دارند. اگر a

به b نزدیکتر باشد سمت a را از یکم تا چهارم ^{۱۱} ^{۱۴} و اگر a به c نزدیکتر

باشد سمت a را از نیم تا نهم ^{۱۵} ^{۱۹} در نظری می بینیم.

مثال: جاهای خالی زیر را پر کنید.

۱) $\sqrt{۹} < \sqrt{۱۰} < \sqrt{۱۶}$

$\sqrt{۹} < \sqrt{۱۰} < \sqrt{۱۶}$

۲) $\sqrt[۳]{-۲۷} < \sqrt[۳]{-۱۷} < \sqrt[۳]{-۲}$

$\sqrt[۳]{-۲۷} < \sqrt[۳]{-۱۷} < \sqrt[۳]{-۲}$

۳) $\sqrt[۳]{۲} < \sqrt[۳]{۲۰} < \sqrt[۳]{۲۷}$

$\sqrt[۳]{۲} < \sqrt[۳]{۲۰} < \sqrt[۳]{۲۷}$

$$۴) ۴ < \sqrt{\quad} < ۵ \rightarrow \sqrt{۱۶} < \sqrt{?} < \sqrt{۲۵}$$

بہ توان ۲

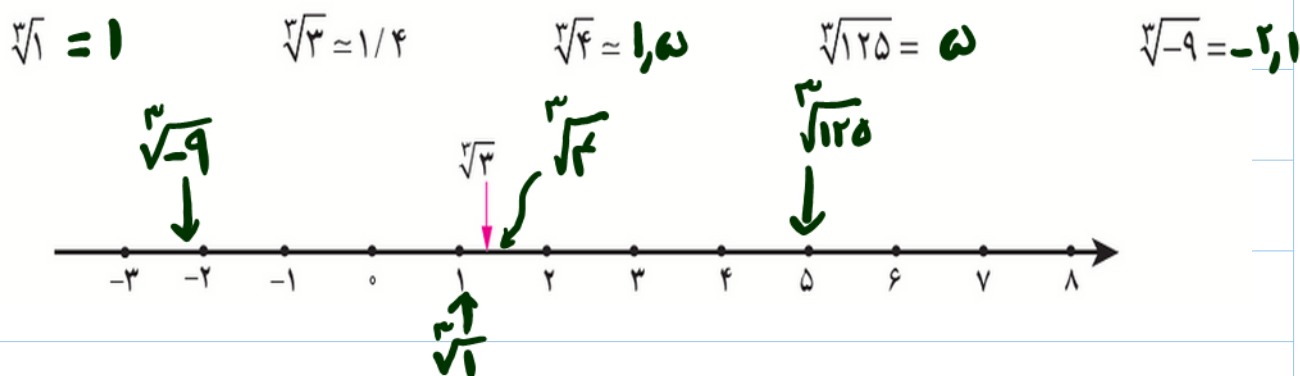
پس عدد بین ۱۶ و ۲۵ مرز قبول است.

$$۵) ۹ < \sqrt[۳]{\quad} < ۱۰ \rightarrow \sqrt[۳]{۷۲۹} < \sqrt[۳]{?} < \sqrt[۳]{۱۰۰۰}$$

بہ توان ۳

پس عدد بین ۷۲۹ و ۱۰۰۰ مرز قبول است.

مثال: مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).



$$\sqrt[۳]{۱} < \sqrt[۳]{۴} < \sqrt[۳]{۸} \rightarrow ۱ < \sqrt[۳]{۴} < ۲$$

$$(۱, ۴)^۳ = ۲,۷۴۴$$

$$(۱, ۵)^۳ = ۳,۳۷۵ \quad \checkmark$$

$$(۱, ۶)^۳ = ۴,۰۹۶$$

$$\sqrt[۳]{-۲۷} < \sqrt[۳]{-۹} < \sqrt[۳]{-۸}$$

$$-۳ < \sqrt[۳]{-۹} < -۲$$

$$(-۲, ۱)^۳ = -۹,۲۶۱$$

مثال: برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{20}$$

$$16 < 20 < 25 \rightarrow 4 < \sqrt{20} < 5$$

$$\sqrt[4]{400}$$

$$256 < 400 < 625 \rightarrow 4 < \sqrt[4]{400} < 5$$

$$\sqrt{75}$$

$$64 < 75 < 81 \rightarrow 8 < \sqrt{75} < 9$$

$$\sqrt[3]{-10}$$

$$-27 < -10 < -8 \rightarrow -3 < \sqrt[3]{-10} < -2$$

$$\sqrt[5]{400}$$

$$243 < 400 < 1024 \rightarrow 3 < \sqrt[5]{400} < 4$$

$$\sqrt[3]{-90}$$

$$-125 < -90 < -64 \rightarrow -5 < \sqrt[3]{-90} < -4$$

$$\sqrt[3]{250}$$

$$216 < 250 < 343 \rightarrow 6 < \sqrt[3]{250} < 7$$

$$\sqrt[5]{1} = 1$$

مثال: مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt{10}$$

$$\sqrt[3]{7/25}$$

$$\sqrt[5]{16}$$

$$\sqrt[5]{64}$$

$$\sqrt{10} : \quad 9 < 10 < 16 \rightarrow 3 < \sqrt{10} < 4$$

$$(3,1)^2 = 9,61$$

$$(3,2)^2 = 10,24$$

$$\sqrt{10} \approx 3,1$$

$$\sqrt[3]{7,25} : \quad 1 < 7,25 < 8 \rightarrow 1 < \sqrt[3]{7,25} < 2$$

$$(1,9)^3 = 6,859$$

$$\sqrt[3]{7,25} \approx 1,9$$

$$\sqrt[5]{16} : \quad 1 < 16 < 32 \rightarrow 1 < \sqrt[5]{16} < 2$$

$$(1,6)^5 = 10,48$$

$$(1,7)^5 = 14,19$$

$$(1,8)^5 = 18,89 \quad \times$$

$$\sqrt[5]{16} \approx 1,7$$

$$\sqrt[n]{x}$$

$$21 < 24 < 244 \rightarrow 2 < \sqrt[n]{24} < 3$$

$$(1,1)^0 = 1,14$$

$$(1,1)^0 = 0,04$$

$$(1,1)^0 = 14,14 \times$$

$$\sqrt[n]{x} \approx 1,1$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل سوم : توان های گویا و
عبارت های جبری

درس اول و دوم : ریشه n ام

جلسه سوم : صفحات ۴۸ تا ۵۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مقایسه توان‌ها در پایه‌های n نام مختلف یک عدد

الف) اگر a بین صفر و یک باشد:

هرچه به توان برسد کوچک‌تری شود: $a > a^2 > a^3 > a^4 > \dots$

هرچه ریشه بیشتر شود بزرگ‌تری شود: $a < \sqrt[2]{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots < 1$

مثال: $\left(\frac{1}{3}\right)^3 > \left(\frac{1}{3}\right)^4 \rightarrow \frac{1}{27} > \frac{1}{81}$

$$\sqrt[2]{\frac{1}{16}} < \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

ب) اگر a بزرگ‌تر از یک باشد:

هرچه به توان برسد بزرگ‌تری شود: $a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots$

هرچه ریشه بیشتر شود کوچک‌تری شود: $a > \sqrt[2]{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots > 1$

مثال: $2^3 < 2^5 \rightarrow 8 < 32$

$$\sqrt{16} > \sqrt[3]{16} \rightarrow 4 > 2$$

(ج) اگر a بین صفر و منفی یک باشد :

اگر توان زوج باشد توان خردتر مساوی شود ، چون هر قدر منفی دتر به توان زوج هر چه

هر چه مثبت هر چه کوچکتر باشد توان زوج بزرگتر از توان خردتر است .

در مورد توان های فرد هر چه توان بزرگتر شود عدد بزرگتر می شود :

$$a < a^3 < a^5 < a^7 < \dots$$

چون اعداد منفی ریشه زوج ندارند پس باز ریشه را فرد می گیریم .

در مورد ریشه های فرد هر چه ریشه بزرگتر شود حاصل کوچکتر می شود :

$$1 - \dots > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \sqrt[5]{a} > a$$

مثال :

$$(-\frac{1}{4})^4 > (-\frac{1}{4})^3 \rightarrow \frac{1}{16} > -\frac{1}{8}$$

$$(-\frac{1}{4})^3 < (-\frac{1}{4})^0 \rightarrow -\frac{1}{64} < -\frac{1}{16}$$

$$-\frac{1}{8} > \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \rightarrow -\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$$

د) اگر a کوچکتر از منفی یک باشد :

مانند قسمت ج) توان های زوج همیشه از توان های فرد بزرگتر هستند.

در مورد توان های فرد هر چه توان بیشتر می شود عدد کوچکتری شوند :

$$a > a^3 > a^5 > a^7 > \dots$$

در مورد ریشه های فرد هر چه ریشه بیشتر می شود عدد بزرگتری شوند :

$$-1 < \dots < \sqrt[5]{a} < \sqrt[3]{a} < a$$

مثال :

$$-27 < -3 \rightarrow -3 > (-3)^3$$

$$-2 < -8 \rightarrow -8 < \sqrt[3]{-8}$$

مثال :

در جاهای خالی یکی از علامت های « > » ، « < » یا « = » را قرار دهید.

$$(-\frac{1}{10})^5 \text{ } \textcircled{>} \text{ } (-\frac{1}{10})^3$$

$$(\frac{1}{10})^5 \text{ } \textcircled{<} \text{ } (\frac{1}{10})^3$$

$$\underbrace{(-2)^5}_{-} \text{ } \textcircled{<} \text{ } \underbrace{(-2)^4}_{+}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} \text{ } \textcircled{=}\text{ } \frac{1}{10}$$

مثال: الف) یکی از علامت‌های $>$ یا $<$ یا $=$ را در $\square$ قرار دهید.

$$(\frac{0}{5})^2 \square (\frac{0}{5})^3$$

$$\sqrt{0/5} \square \sqrt[3]{0/5}$$

$$4^2 \square 4^3$$

$$\sqrt{4} \square \sqrt[3]{4}$$

ب) وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$$a^2 \square a^3$$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

پ) وقتی $a > 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$$a^2 \square a^3$$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

مثال:

یکی از علامت‌های $<$ یا $=$ یا $>$ را در $\square$ قرار دهید.

$$\underbrace{(\frac{0}{5})^2}_{+} \square \underbrace{(\frac{0}{5})^3}_{-}$$

$$\underbrace{(-2)^2}_{+} \square \underbrace{(-2)^3}_{-}$$

$$(\frac{0}{5})^3 \square (\frac{0}{5})^5$$

$$(-2)^3 \square (-2)^5$$

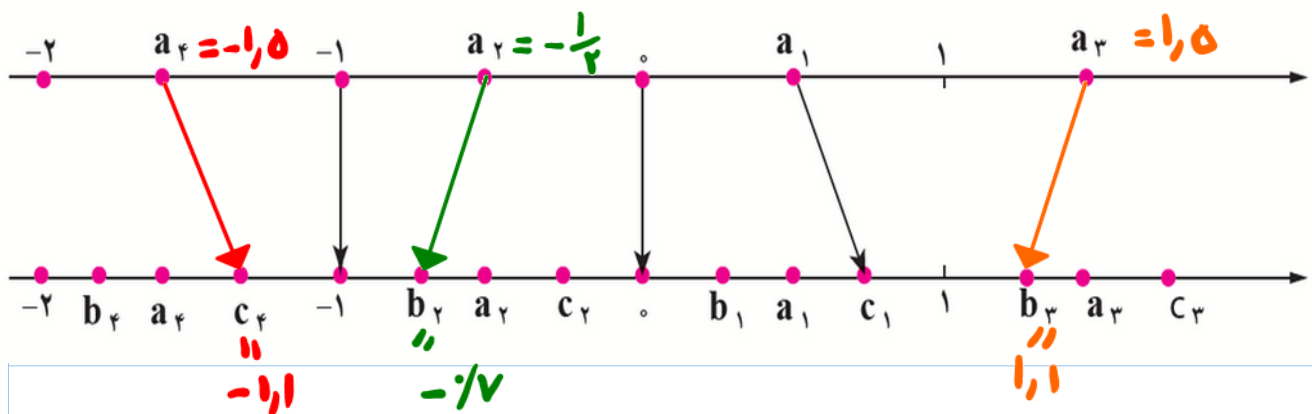
$$(\frac{0}{5})^4 \square (\frac{0}{5})^2$$

$\frac{1}{25} < \frac{16}{625}$

$$\frac{(-2)^4}{16} \square \frac{(-2)^2}{4}$$

نکته: اعداد کوچکتر از منفی یک
عرب به توان زوج برسد بزرگتر شود:
 $a^2 < a^4 < a^6 < \dots$

مثال: مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



مثال: با توجه به آنچه درباره ریشه سوم اعداد درک کرده اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

(الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. چه عددی می‌تواند باشد؟

(ب) a عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

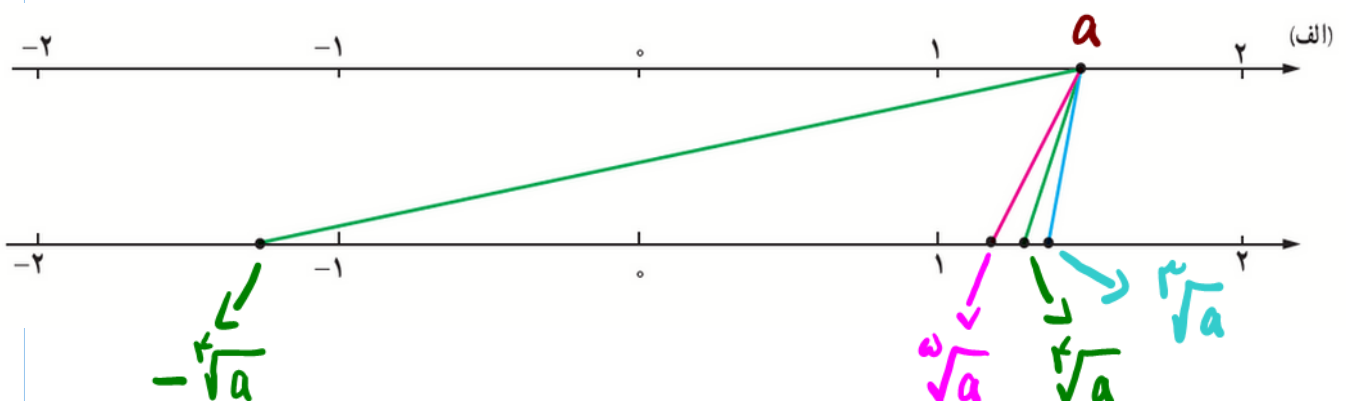
(الف) $0 < a < 1$

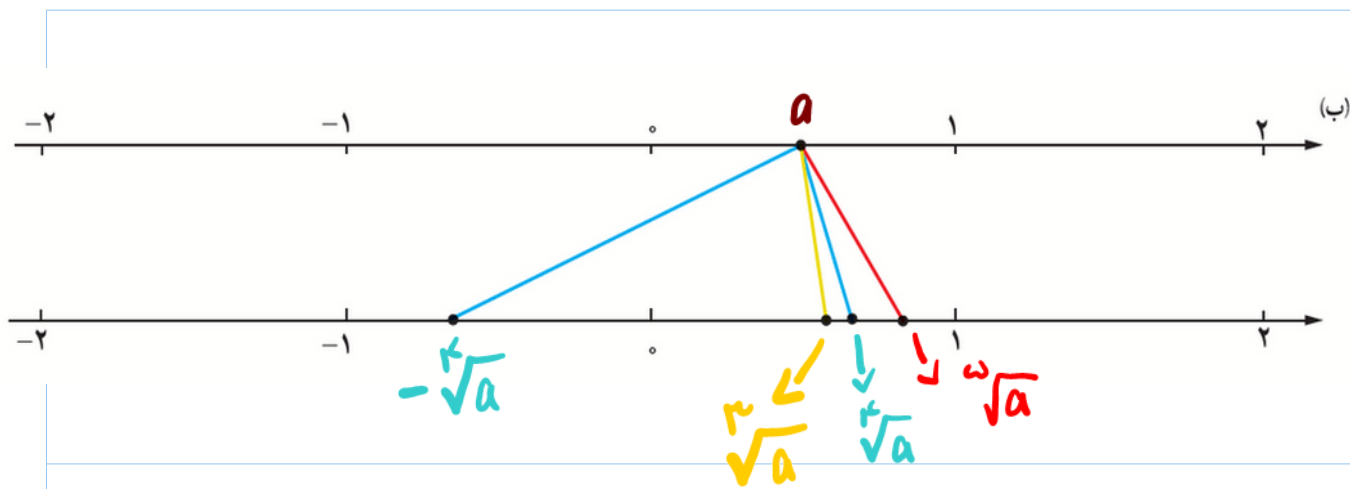
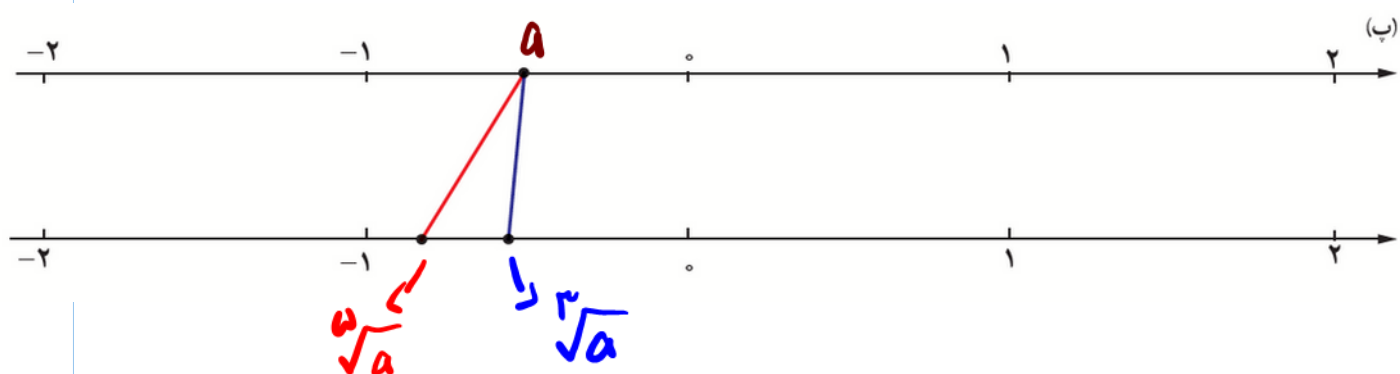
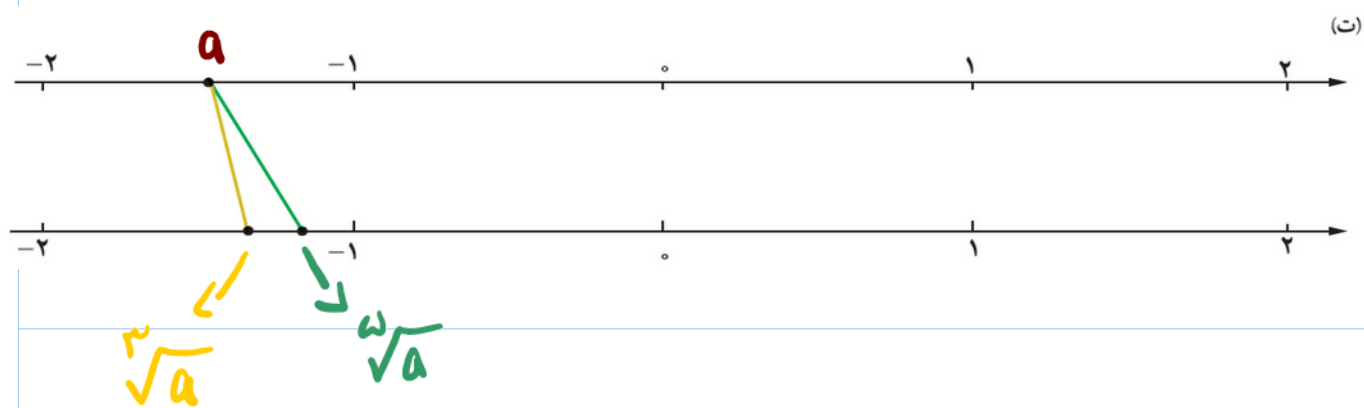
(ب) $a = 0$ $\underline{a = 1}$ $\underline{a = -1}$

(پ) $a > 1$

(ت) $a < -1$ (الف) $-1 < a < 0$ (پ)

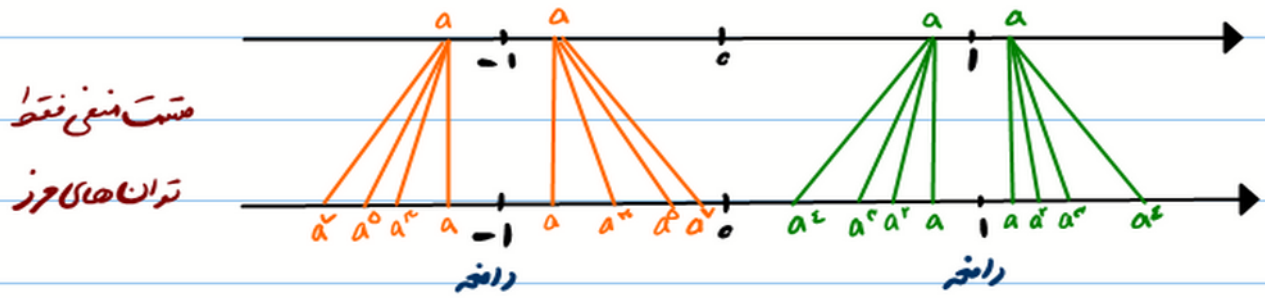
مثال: در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.



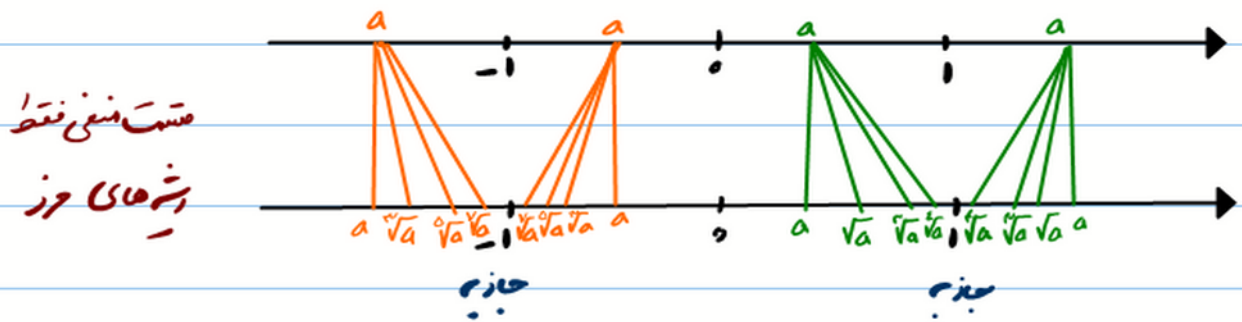


تذکره: شکل‌های زیر در مقیاس توان‌ها درجه‌های α و β در استفاده تکراری نیست.

مقیاس توان‌های مرکب:



مقیاس ریشه‌های مرکب:



ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل سوم : توان های گویا و

عبارت های جبری

درس سوم :توان های گویا

جلسه چهارم : صفحات ۵۹ تا ۶۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری و تکمیل :

در مال‌های قبل با مفهوم توان آشنا شدید. زمانی که عددی چند بار در خودش ضرب

شود برای سادگی در نوشتن و خلاصه نویسی از توان (شماره می‌نم) مانند :

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3, \quad \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^4, \quad (-2) \times (-2) = (-2)^2$$

یا به صورت کلی هرگاه $a \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ می‌نویسیم :

$$\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}} = a^n$$

این تعریف نقطه ارتباط به توان طبیعی است.

قوانین توان طبیعی :

اگر a و b اعداد حقیقی و m و n اعداد طبیعی باشند داریم :

در ضرب اعداد تواندار با پایه‌های مساوی، یکی از پایه‌ها را نوشته، توان را جمع می‌کنیم :

$$1) \quad a^r \times a^s = a^{r+s}$$

در تقسیم اعداد تواندار با پایه‌های مساوی، یکی از پایه‌ها را نوشته، توان را از صورت کم می‌کنیم :

$$2) \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

در ضرب اعداد تواندار با توان‌ها مساوی، یکی از توان‌ها را نوشته، پایه‌ها را ضرب می‌کنیم :

$$3) \quad a^r \times b^r = (ab)^r$$

در تقسیم اعداد تواندار با توان های مساوی، یکی از توان ها را نوشته، بایه ها را تقسیم می کنیم: $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$ ۴)

اگر عدد تواندار، دوباره به توان برسد، توان های قدیم و جدید ضرب می شوند: $(a^r)^s = a^{rs}$ ۵)

توان صفر:

این نکته را هم در سال های گذشته دیدید که هر عدد به توان صفر برابر یک می شود که تقریباً

مشابهت با توان طبیعی داشت روی چرا $a^0 = 1$ ؟

*** اثبات:** رابطه (۱) $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

رابطه (۲) $\frac{a^n}{a^n} = 1$

چون سمت چپ رابطه های ۱ و ۲ برابرند پس سمت راست آنها هم برابر است پس

$$a^0 = 1$$

مثال: $(\sqrt{7})^0 = 1$, $\left(\frac{1}{7}\right)^0 = 1$, $7^0 = 1$, $(-9)^0 = 1$, ...

توان های صحیح منفی :

وقتی قدری حقیقی به توان یک عدد صحیح منفی را رسد باز هم باید توانی مشابه از توان طبیعی

$$\text{در آندهم به این صورت است: } a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r$$

عنی پایه را معکوس می کنیم و توان مثبت می شود.

*** اثبات :** فرض کنیم m, n در عدد طبیعی باشند که $m > n$, $r = m - n$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-r} \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \times a \times \dots \times a \times a}^{n \text{ بار}}}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a \times a}_{m \text{ بار}}} \xrightarrow[m > n]{\text{تاریکیم}} \frac{1}{a^{m-n}} = \frac{1}{a^r} \quad \text{رابطه (۲)}$$

قرار دهی معجزه $\rightarrow$ بشرط

مشابه اثبات قبل چون است چه عبارت ها با یکدیگر برابر است پس یک راب

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad \text{هم برابر می شوند و داریم:}$$

مثال:

$$۱) ۳^{-۲} = \frac{1}{۳^۲} = \frac{1}{۹} \quad ۲) \left(\frac{1}{۲}\right)^{-۴} = ۲^۴ = ۱۶$$

$$۳) \left(-\frac{۷}{1}\right)^{-۲} = \left(-\frac{1}{۷}\right)^{۲} = \frac{1}{۴۹}$$

$$۴) \left(\frac{۴}{۵}\right)^{-۳} = \left(\frac{۵}{۴}\right)^{۳} = \frac{۱۲۵}{۶۴}$$

$$۵) \frac{1}{9^{-۲}} = 9^۲ = ۸۱$$

تذکر: تمام توان‌های توان طبیعی برای توان صحیح منفی هم برقرار است.

$$۱) \omega^{-۴} \times \omega^{-۲} = \omega^{-۴-۲} = \omega^{-۶} = \frac{1}{\omega^۶} \quad \text{مثال:}$$

$$۲) ۳^{-۷} \times ۲^{-۷} = (۳ \times ۲)^{-۷} = ۶^{-۷} = \frac{1}{۶^۷}$$

$$۳) \frac{۷^{-۸}}{۷^{-۳}} = ۷^{-۸-(-۳)} = ۷^{-۸+۳} = ۷^{-۵} = \frac{1}{۷^۵}$$

$$۴) (۴^{-۲})^{\frac{۱۰}{۲}} = ۴^{-۱۰} = \frac{1}{۴^{۱۰}}$$

$$۵) ۸^{-۲} \times ۲^۳ = (۲^۳)^{-۲} \times ۲^۳ = ۲^{-۶} \times ۲^۳ = ۲^{-۳} = \frac{1}{۲^۳} = \frac{1}{۸}$$

$$۶) \frac{۴^{-۲}}{۸^{-۲}} = \left(\frac{۴}{۸}\right)^{-۲} = \left(\frac{1}{۲}\right)^{-۲} = ۲^۲ = ۴$$

توان های گویا :

حال بابت مثال وارد بحث اصلی ختم توان های گویا می شویم .

در کوزه های نوعی باتری کشت داده می شود که وزن آنها در حرارت دوبرابر می شود .

اگر وزن آنها در شروع کوزه ها یک گرم باشد ، وزن آنها بعد از یک ساعت اگر چه بعد از یک

گرم در ... ختم : $1, 2, 4, 8, \dots$

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ →

حال می خواهیم ببینیم وزن این باتری ها بعد از نیم ساعت یا همان یک ساعت چه قدر می شود .

اگر فرض کنیم بعد از نیم ساعت وزن باتری ها برابر شود ، پس طبق انگلی با :

$$\text{رابطه (۱)} \quad \underline{b = 2^{\frac{1}{2}}}$$

از طرفی فرض کردیم وزن باتری ها بعد از نیم ساعت برابر می شود . پس بعد از یک ساعت

وزن آنها : $b \times b = b^2$ خواهد بود . ولی طبق دنباله با b بعد از یک ساعت وزن باتری ها

۲ برابر یعنی اگر x ضاع شد $x^2 = 2$ پس $\sqrt{2} = x$ (رابطه ۲): $\sqrt[2]{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ → (۱)، (۲)

توان $\frac{1}{n}$ ام: اگر n عدد طبیعی بزرگتر مساوی ۲ باشد، توان $\frac{1}{n}$ ام عدد حقیقی و مثبت a را با $a^{\frac{1}{n}}$

نشان می دهیم و این مورد تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

مثال: هدف از عبارات های زیر رابطه صورت را درک می کنید.

$$\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$$

$$2 = \sqrt[6]{64} = 64^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[4]{64} = 64^{\frac{1}{4}}$$

$$3 = \sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}}$$

تذکره: برای توان های طبیعی قاعده صندب توان ها (توان جدید در قدم) را در می بینیم.

می توانیم از این قاعده کمک بگیریم و توان های کسری را در حالت کلی تعریف کنیم:

$$v^{\frac{5}{3}} = v^{5 \times \frac{1}{3}} = (v^5)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{v^5}$$

توان $\frac{m}{n}$ ام: اگر a عددی حقیقی و مثبت، m عددی صحیح و n عدد طبیعی باشد

توان $\frac{m}{n}$ ام، a را با $a^{\frac{m}{n}}$ نشان می دهیم و این مورد تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \begin{matrix} \text{توان} \\ \text{م} \\ \text{قسم} \end{matrix}$$

پس توان گویای هر عدد به صورت یک ریشه گیری بیان می شود مثلاً: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1,4$

مثال: اعداد تواندار زیر را به صورت رادیکالی بنویسید.

$$55^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{55^2} = \sqrt[5]{255}$$

$$37^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{37^2} = \sqrt[7]{9}$$

$$81^{\frac{3}{4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{(3^3)^4} = 3^3 = 27 \\ (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^{4 \times \frac{3}{4}} = 3^3 = 27 \end{cases}$$

$$42^{\frac{3}{2}} = \sqrt{42^3} = \sqrt{64} = 8$$

تذکره: چون $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ پس می توانیم بنویسیم: **(۵)۰**

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\text{مثلاً: } 7^{\frac{4}{2}} = \sqrt{7^4} = (\sqrt{7})^4$$

قوانین توان های گویا:

تمام قوانین توان طبیعی برای توان های گویا هم برقرار هستند.

مثال: حاصل عبارت زیر را به صورت رادیکال بنویسید.

$$۱) ۳^{-\frac{۵}{۲}} = \frac{1}{۳^{\frac{۵}{۲}}} = \frac{1}{\sqrt[۲]{۳^۵}}$$

$$۲) ((۱۶)^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۲}{۴}} = (۱۶)^{\frac{1}{۲} \times \frac{۲}{۴}} = ۱۶^{\frac{1}{۴}} = \sqrt[۴]{۱۶} = ۲$$

$$۳) ۲^{\frac{1}{۲}} \times ۲^{\frac{۲}{۵}} = ۲^{\frac{1}{۲} + \frac{۲}{۵}} = ۲^{\frac{۵+۴}{۱۰}} = ۲^{\frac{۹}{۱۰}} = \sqrt[۱۰]{۲^۹}$$

$$۴) \frac{\sqrt[۵]{۲^۳}}{\sqrt[۲]{۲}} = \sqrt[۵]{۲^{\frac{۳}{۵} - \frac{1}{۲}}} = \sqrt[۲۰]{\frac{۱۲-۵}{۲}} = \sqrt[۲۰]{\frac{۷}{۲}} = \sqrt[۲۰]{۷^۷}$$

$$۵) ۴^{\frac{۲}{۳}} \times ۵^{\frac{۲}{۳}} = ۲۰^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۲۰^۲} = \sqrt[۳]{۴۰۰}$$

$$۶) \frac{7^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{1}{۲} = \sqrt[۲]{\frac{1}{۲}} = \sqrt[۲]{\frac{۲}{۲ \times ۲}} = \sqrt[۲]{\frac{۲}{۲}} \times \sqrt[۲]{\frac{1}{۲}} = \sqrt[۲]{۱} \times \sqrt[۲]{\frac{1}{۲}} = ۱ \times \sqrt[۲]{\frac{1}{۲}} = \sqrt[۲]{\frac{1}{۲}}$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را در صورت امکان به صورت توان کمری بنویسید.

$$۱) \sqrt{۵^۳} = ۵^{\frac{۳}{۲}}$$

$$۲) \sqrt[۵]{۶۴} = ۶۴^{\frac{1}{۵}}$$

$$\begin{aligned} ۳) \frac{\sqrt[۴]{۲} \times \sqrt[۲]{۲}}{\sqrt[۴]{۲^۴}} &= \frac{۲^{\frac{1}{۴}} \times ۲^{\frac{1}{۲}}}{۲^{\frac{۴}{۴}}} = \frac{۲^{\frac{1}{۴} + \frac{1}{۲}}}{۲^{\frac{۴}{۴}}} = \frac{۲^{\frac{1+۲}{۴}}}{۲^{\frac{۴}{۴}}} \\ &= \frac{۲^{\frac{۳}{۴}}}{۲^{\frac{۴}{۴}}} = \frac{۲^{\frac{۳}{۴}}}{۲^{\frac{۴}{۴} - \frac{۳}{۴}}} = ۲^{\frac{۱-۹}{۱۲}} = ۲^{-\frac{1}{۱۲}} = \frac{1}{۲^{\frac{1}{۱۲}}} \end{aligned}$$

$$۴) \sqrt[۵]{-۳} \quad \text{نمی توان به صورت توان کسری نوشت}$$

$$۵) \sqrt[۳]{\sqrt[۵]{۶}} = \sqrt[۲]{۶} = ۶^{\frac{1}{۲}}$$

$$۶) \frac{۵^{-\frac{1}{۴}}}{\sqrt[۴]{۵^۴}} = \frac{۵^{-\frac{1}{۴}}}{۵^{\frac{۴}{۴}}} = ۵^{-\frac{1}{۴} - \frac{۴}{۴}} = ۵^{-\frac{۵}{۴}} = \frac{1}{۵^{\frac{۵}{۴}}}$$

مثال: حاصل $\frac{۶۴^{\frac{1}{۴}} \times ۱۲۵^{\frac{۴}{۲}}}{۹^{\frac{۴}{۲}} - ۱^{\frac{1}{۲}}}$ را بیابید.

$$۶۴^{\frac{1}{۴}} = \sqrt[۴]{۶۴} = ۲$$

$$۹^{\frac{۴}{۲}} = (۳^۲)^{\frac{۴}{۲}} = ۳^۴ = ۸۱$$

$$۱۲۵^{\frac{۴}{۲}} = (۵^۳)^{\frac{۴}{۲}} = ۵^۶$$

$$۱^{\frac{1}{۲}} = \sqrt{۱} = ۱$$

$$\frac{۲ \times ۵^۶}{۸۱ - ۱} = \frac{۲ \times ۵^۶}{۸۰} = \frac{۲ \times ۵^۶}{۵^۴} = ۲ \times ۵^۲ = ۲ \times ۲۵ = ۵۰.$$

مثال: اگر a ، حاصل عبارت $\left(\frac{\sqrt[n]{a^k}}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^{\frac{1}{v}}$ را محاسبه کنید.

$$\left(\frac{a^{\frac{k}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}\right)^{\frac{1}{v}} = \left(a^{\frac{k}{n} - \frac{m}{n}}\right)^{\frac{1}{v}} = \left(a^{\frac{17-9}{12}}\right)^{\frac{1}{v}}$$

$$= \left(a^{\frac{8}{12}}\right)^{\frac{1}{v}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

مثال: مقدار $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}$ را بدست آورید.

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{عبارت} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2' \times 2' = 4$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل سوم: توان های گویا و

عبارت های جبری

درس چهارم: عبارت های جبری

جلسه پنجم : صفحات ۶۲ تا ۶۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

رتکار : رتکارها سادگی‌هایی هستند که برای هر مقدار عددی که به جای متغیرهای آن قرار می‌دهیم، همواره برقرار باشند. در واقع در مورد رتکارها به دست‌وی بدوی $0 = 0$ می‌رسیم. مثلاً $x(x+1) = x^2 + x$ یک رتکار است. وی $2x = x^2 + 1$ که نقطه‌برداری $x=1$ درست است، رتکار نیست بلکه یک معادله است. از رتکارها برای سرعت بخشیدن به محاسبات استفاده می‌کنیم.

رتکارهای معروف :

یادآوری:

(۱) رتکار مربع دومجهدی :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{الف}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{ب}$$

این رتکاری‌ها را می‌توانید صراحتاً بخورده‌ایم یک دومجهدی را بتوان دو برابر کنیم، به جای دینیم عبارت را دوبار نوشته و ضرب کنیم، کافی است از این رتکار به صورت بالا استفاده کنیم.

اگر به توان دو، جلاده (منها) دو برابر اادی در دومی، جلاده دومی به توان دو.

$$(5x + \sqrt{3})^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \quad \text{مثال:}$$

$$= 25x^2 + 10\sqrt{3}x + 3$$

دو عبارت ضربی: $(a+b)(a-b)$ در عبارت $a^2 - b^2$

۲) اتحاد مزدوج:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

حاصل ضرب دو عبارت ضربی برابر است با ادکی به توان دو منفای ادکی به توان دو.

مثال: $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = (2)^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$

$$(3x^2 + \frac{1}{4})(3x^2 - \frac{1}{4}) = (3x^2)^2 - (\frac{1}{4})^2 = 9x^4 - \frac{1}{16}$$

۳) اتحاد یک جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

در ضرب دو، دو جمله ای که یک جمله برابر دارند (جمله مشترک) حاصل برابر است با:

جمله مشترک به توان دو، علاوه جمع جمله مشترک ضرب جمله مشترک، علاوه ضرب جمله مشترک.

مثال: $(4x-1)(4x+3) = (4x)^2 + (3-1)4x + (3)(-1) = 16x^2 + 8x - 3$

۴) اتحاد زوج سه جمله ای:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مثال: $(2x + y + 5)^2 = 4x^2 + y^2 + 25 + 2(2x)y + 2(2x)(5) + 2(y)(5)$
 $= 4x^2 + y^2 + 25 + 4xy + 20x + 10y$

با این چهار رکاره سال گذشته آشنا شدید. دو رکاره دیگر عبارت اند از:

۱) رکاره ملقب دومجهری:

$(a+b)^3 = a^3 + \underbrace{3a^2b}^{+1} + \underbrace{3ab^2}^{+2} + b^3$ توان ۳

وقتی خود هم یک دومجهری را به توان ۳ رسانیم به این صورت عمل می‌کنیم:

ملقب اولی جاده سه برابر مربع اولی در خود دومی جاده سه برابر مربع دومی در خود اولی جاده ملقب دومی.

مثال:

۱) $(2x + 4)^3 = (2x)^3 + \underbrace{3(2x)^2(4)}^{4x^2} + \underbrace{3(2x)(4^2)}^{16} + 4^3$
 $= 8x^3 + 48x^2 + 96x + 64$

۲) $(x - 5)^3 = x^3 + 3x^2(-5) + 3x(-5)^2 + (-5)^3$
 $= x^3 - 15x^2 + 75x - 125$

$$3) (1x+2)^2 - 7x^2 = (x^2 + 2x(2) + 2^2 + 8 - 7x^2)^2$$

$$= (x^2 + 7x^2 + 12x + 8 - 7x^2)^2 = (x^2 + 12x + 8)^2 = (x^2)^2 + (12x)^2 + 8^2 + 2(x^2)(12x) + 2(x^2)(8) + 2(12x)8 = x^4 + 144x^2 + 64 + 24x^3 + 192x + 192x$$

۱۶) کار معبر و تفاضل ملک ها (حاجان راجح)

الف) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

↑ ^{لاغر} ^{حاجان} ↑

ب) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

اگر یک درجه ای (لاغر) در یک سه جمله ای (حاجان) که با درجگی های زیر از درجگی لاغری ساخته

مانند، ضرب شود، حاصل، معبر یا تفاضل توان سوم حبات لاغری خواهد شد.

درجگی های حاجان:

۱- حبه اولی ^{توان دوم} مربع حبه اول لاغریات.

۲- حبه دومین قدرینه حاصل ضرب حبات لاغریات.

۳- حبه سومین مربع حبه دوم لاغریات.

سؤال:

$$1) (x+2)(x^2-2x+4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$$

$$2) (3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2) = (3a)^3 - (2b)^3 = 27a^3 - 8b^3$$

$$3) (\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25) = (\sqrt{x})^3 + 5^3 = x + 125$$

تجزیه:

یادآوری: واژه های مغرب و شمارنده را در اختصار به یاد دارید:

$$15 = 3 \times 5$$

۳، ۵ را شمارنده های اصل عدد ۱۵ می گوئیم. ۱۵ را مغرب حک از ۳، ۵

می نامیم. ۳ مغرب دیگری هم دارد مانند ۶، ۹، ۱۲، ...

همین مفهوم را می توان در عبارتهای جبری هم دید.

$$\text{مثلاً در روی یک مجله مشترک: } x^2 + (a+b)x + ab = \underbrace{(x+a)}_{\text{اصل}} \underbrace{(x+b)}_{\text{اصل}}$$

هر یک از عبارات $(x+a)$ و $(x+b)$ یک شمارنده یا یک عامل $x^2+(a+b)x+ab$

هستند. به معنی $x^2+(a+b)x+ab$ هم معرب $(x+a)$ هم معرب $(x+b)$

است. می توان گفت معرب های هر عبارت جبری از معرب کن عبارت در عبارتهای

جبری دیگری بدست می آید.

مثال: چند معرب برای $a-b$ بنویسید.

① $(a-b)(a+b)$

② $(a^2+ab+b^2)(a-b)$

③ $5(a-b)$

تجزیه: شکستن یک عبارت جبری به صورت حاصل معرب عامل هاست. به عبارت دیگر

نوشتن یک عبارت جبری به صورت معرب عبارتهای بزرگتر و کوچکتر.

نتیجه یک تجزیه همیشه حاصل معرب از عبارات ساده تر است.

روش‌های تجزیه :

۱- استفاده از عکس رنگارها

مثال: عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$۱) \quad x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \quad \text{رنگ در مربع دوم}$$

$$۲) \quad x^2 - \frac{1}{9} = (x - \frac{1}{3})(x + \frac{1}{3}) \quad \text{رنگ در مربع دوم}$$

$$۳) \quad x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4) \quad \text{رنگ در مربع دوم}$$

که به عنوان ۱۲ و ۷ باشد.

$$۴) \quad x^2 + 7x = (x + 4)(x^2 - 4x + 16) \quad \text{رنگ در مربع دوم}$$

چون

$$۵) \quad 12x^2 - 17x - 1 = (2x - 1)^3$$

کاربرد دیگری ندارد

۲) فاکتورگیری :

مثال: عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$۱) \quad 12x^2 - 17x = 4x(3x - 4)$$

از متغیرها توان کوثر را فاکتور می‌گیریم.

$$۲) x^5 - ۵x^3 = x^3(x - ۵)$$

$$۳) ۴a^2b - ۳ab^2 = ab(4a - 3b)$$

$$۴) 14x^2 - 20x = 2x(7x - 5) = 2x(2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5})$$

۳) دسته بندی مجدد - عزیزان

مثال: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$۱) x^4 + 2x^2 - x - 2 = (x^4 + 2x^2) - (x + 2) = x^2(x^2 + 2) - (x + 2)$$

از مضامین $x^2 + 2$ فاکتور

$$= (x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

جای تعویض

$$۲) 2x^2 + 3x + 1$$

$$= 2x^2 + 2x + x + 1 = (2x^2 + 2x) + (x + 1) = 2x(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(2x + 1)$$

فکتور از $2x$ فکتور از $(x + 1)$

$$۳) x^4 + x^2 - 2$$

$$= x^4 + x^2 - 1 - 1 = (x^4 - 1) + (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + (x^2 - 1)$$

رنگه نزدیک

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 1 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2)$$

فکتور از $x^2 - 1$ رنگه نزدیک

مثال: هریک از عبارت‌های زیر را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

الف) $x^4 - y^4$ ب) $x^6 - y^6$ پ) $8a^3 + 27$ ت) $a^3b^6 - 8$

الف) $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$ تجزیه

ب) $x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ تجزیه چهارضلع

پ) $8a^3 + 27 = (2a + 3)(4a^2 - 6a + 9)$ چهارضلع

ت) $a^3b^6 - 8 = (ab^2 - 2)(a^2b^4 + 2ab^2 + 4)$ چهارضلع

نکته: زیرکارهای محاسبات عددی (شماره هر سر).

مثال: با استفاده از اتحادها، حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $16 \times 14 = (15 + 1)(15 - 1) = 15^2 - 1 = 224$ ب) 105^2 پ) 9999^2 ت) 105^2

ب) $105^2 = (100 + 5)^2 = 100^2 + 2(100)(5) + 25$

$= 10000 + 1000 + 25 = 11025$

پ) $9999^2 = (10000 - 1)^2 = (10^4 - 1)^2 = 10^8 - 2 \times 10^4 + 1$

$= 100,000,000 - 20,000 + 1 = 99,980,001$

$$\Rightarrow 108^r = (100 + 8)^r = (10^r)^r + r(10^r) \times 8 + r(10^r)(8)^r + 8^r$$

$$= 10^4 + 10 \times 10^3 + 70 \times 10^2 + 120$$

$$= 1,000,000 + 100,000 + 70,000 + 120$$

$$= 1,100,120$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل سوم: توان های گویا و

عبارت های جبری

درس چهارم: عبارت های جبری

جلسه ششم: صفحات ۶۵ تا ۶۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

عبارت های گویا

تعریف: عبارت گویا، عبارتی است که از تقسیم دو چند جمله ای بدست می آید.

مانند: $\frac{x+2}{x-3}$ ، $\frac{4x^2-7x+1}{x^2-\sqrt{11}}$ ، $\frac{4x+5}{1}$ ، ...

وی عبارت های مانند: $\frac{\sqrt{x}}{2x-1}$ ، $\frac{4}{\sqrt[3]{x}-5}$ ، $\sqrt[5]{x^2+7x}$ ، گویا نیستند.

تذکره: عبارت های گویا برای مقاری از متغیر که معین در آن ها صفری شود، تعریف نمی شود.

مثال: عبارت های گویای زیر برای چه مقاری از x تعریف نمی شوند؟

الف) $\frac{7x-1}{4-x}$ $4-x \neq 0 \rightarrow x \neq 4$

ب) $\frac{2x^2+5x}{x^2-49}$ $x^2-49 \neq 0 \rightarrow x \neq 7, -7$

ج) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+5}$ $(x \neq 0)$ ، $x-1 \neq 0 \rightarrow (x \neq 1)$ ، $x^2+5 \neq 0$
همواره برقرار

ساده کردن عبارت های گویا:

اگر صورت و مخرج عبارت گویا، قابل تجزیه شدن باشند، با استفاده از روش های گفته شده

در تجزیه، این عمل را انجام می دهیم و حاصل های مشترک در صورت و مخرج را حذف می کنیم

مسئله: عبارات های گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^6 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$ $\xrightarrow{\sqrt{x^6}}$ $\frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)}$

جای دلافر

مخرج در کعبه ای

ب) $\frac{x^3 - 1}{(x-1)^3}$ $\xrightarrow{\sqrt{x^3}}$ $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^3} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$

جای دلافر

پ) $\frac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$ $\xrightarrow{\sqrt{x^4}}$ $\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x^2-1}$

مزدوج

ت) $\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y}$ $\xrightarrow{\sqrt{y^5}}$ $\frac{y(y^2-y-12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y-4)(y+3)}{8y(y+2)}$

فاکتور

فاکتور

یک جمله مشترک

$\xrightarrow{\text{مزدوج}}$ $\frac{y(y-2)(y+2)(y+3)}{8y(y+2)} = \frac{(y-2)(y+3)}{8}$

ضرب و تقسیم عبارتهای گویا :

ابتدا صورت و مخرج عبارت های گویا را تا حد امکان ساده می کنیم. در ضرب عبارتهای گویا صورت ها

را در هم و مخرج ها را در هم ضرب کرده و اگر عامل مشترکی در صورت و مخرج بود به هم ساده می کنیم.

در تقسیم ، عبارت اول را نوشته ، ردی را معکوس می کنیم و حاصل تقسیم را به ضرب تبدیل

و مانند ضرب عمل می کنیم.

مثال: حاصل عبارت های زیر را بیابید.

$$\text{الف) } \frac{x^2-16}{2x+8} \times \frac{x^2-2x-8}{x^2+4x+4} = \frac{(x-4)(\cancel{x+4})}{2(\cancel{x+4})} \times \frac{(x-4)(\cancel{x+4})}{(x+2)(\cancel{x+4})}$$
$$= \frac{(x-4)^2}{2(x+2)}$$

$$\text{ب) } \frac{x^2-8}{x+2} \div \frac{x^2-4x}{5x} = \frac{\overset{x(x^2-4)}{x(x-1)(x^2+2x+4)}}{x+2} \times \frac{\cancel{5x}}{\cancel{x(x-2)}(x+2)}$$
$$= \frac{5(x^2+2x+4)}{(x+2)^2}$$

جمع و تفریق عبارتهای گویا:

ابتدا در صورت امکان، معجز عبارتهای گویا را تجزیه می‌کنیم. باید بین معجزها، معجز مشترک

یا همان ک.م.م (کوچکترین معجز مشترک) بگیریم. **معجز عوامل مشترک و غیر مشترک**

بائتترین توان؛ ک.م.م معجزها خواص دارد.

مثال: حاصل کسرهایی زیر را بیابید.

$$\text{الف)} \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$$

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

$$\text{ک.م.م} = (x-1)(x+1)$$

$$= \frac{(x+1) + (x-1) - 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{3x}{x^2-4} + \frac{7}{x^2+2x}$$

$$x^2-4 = (x-2)(x+2)$$

$$x^2+2x = x(x+2)$$

$$\text{ک.م.م} = (x+2)x(x-2)$$

$$= \frac{(3x)(x) + 7(x-2)}{(x+2)x(x-2)} = \frac{3x^2 + 7x - 14}{(x+2)x(x-2)}$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$$

$$x^2(x+1)$$

$$x^2 + 3x = x(x+3)$$

$$\text{م.م.ك} = x^2(x+1)(x+3)$$

$$\therefore \frac{x^3}{x^2+4x+3} - \frac{1}{x^2(x+1)} + \frac{4}{x^2+3x}$$

$$= \frac{(x^3)(x^2) - (x+3) + 4(x)(x+1)}{x^2(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{x^5 - x - 3 + 4x^2 + 4x}{x^2(x+1)(x+3)} = \frac{x^5 + 4x^2 + 3x - 3}{x^2(x+1)(x+3)}$$

گویا کردن مخرج کسرها :

اگر مخرج کسری دارای کمال درشته باشد می توانیم با ضرب و تقسیم کسر در عبارتی مناسب

مخرج کسر را به صورت عبارتی بدون دارای کمال بنویسیم. اصطلاحاً به این عمل گویا کردن

مخرج کسری گوئیم. حالت های مختلف گویا کردن را بررسی می کنیم.

الف) مخرج فقط یک رادیکال تنها باشد (عدد یا جبری هم می تواند به صورت ضرب همراه رادیکال باشد)

اگر ضربه ۱ باشد با ضرب رتقم عبارت کسری در خود رادیکال مخرج، مخرج کسری گویای شود.

اگر ضربه ۲ باشد با ضرب رتقم عبارت کسری در رادیکالی که باعث شود رادیکال مخرج

مکعب کامل شود رادیکال از بین برود، مخرج کسری را گویای کنیم.

این عمل را برای ضربه های بالاتر هم می توان انجام داد.

مثال: مخرج کسرها را زیر را گویا کنید.

$$\text{الف) } \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \times 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$\text{ب) } \frac{n-1}{\sqrt{n}} = \frac{n-1}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(n-1)}{n}$$

$$\text{پ) } \frac{7}{\sqrt[3]{2}} = \frac{7}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{7\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{7\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$ت) \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}}$$

$$ث) \frac{2n-1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2n-1}{\sqrt[3]{x^2}} \times \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}(2n-1)}{x}$$

ب) معجز شامل جمع یا تفریق دو درادیکال با مرتبه ۲ یا یک درادیکال و یک عدد یا عبارت، باشد.

با ضرب و تقسیم عبارت کسری در مزدوج عبارت معجز و استفاده از اتحاد مزدوج، معجز کسرها گویای کنیم.

مثال: معجز کسره‌های زیر را گویا کنید.

$$۱) \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

$$۲) \frac{1}{3\sqrt{2}+4} = \frac{1}{3\sqrt{2}+4} \times \frac{3\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}-4} = \frac{1(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2})^2-4^2}$$

$$= \frac{1(r\sqrt{r}-t)}{9xr-14} = \frac{1(r\sqrt{r}-t)}{r} = t(r\sqrt{r}-t)$$

$$r) \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$r) \frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} = \frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{x+h-x} = \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h} = \sqrt{x+h} + \sqrt{x}$$

$$u) \frac{r}{r+\sqrt{v}} = \frac{r}{r+\sqrt{v}} \times \frac{r-\sqrt{v}}{r-\sqrt{v}} = \frac{r(r-\sqrt{v})}{9-v}$$

$$= \frac{r(r-\sqrt{v})}{r}$$

ج) مخرج شامل جمع یا تفریق دو رادیکال با فرجه ۳ یا یک رادیکال با یک عدد یا عبارت باشد.

با ضرب و تقسیم عبارت کسری در یک زنجیره عبارت مخرج و استفاده از اتحاد حلقه دلاغر مخرج کسر را گویا کنیم.

مثال: مخرج کسرها را گویا کنید.

$$1) \frac{2}{\sqrt[3]{5}+1} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}+1} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1}{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1} = \frac{2(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1)}{(\sqrt[3]{5})^3+1^3}$$

$$= \frac{2(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1)}{5+1} = \frac{2(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1)}{6}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1}{3}$$

$$2) \frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}}{7-3}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}}{4}$$

$$3) \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+2} = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$= \frac{(x+1)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x^2}+2^3} = \frac{(x+1)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{x+1}$$

$$= \sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4$$

$$4) \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2}+1}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2}+1}{(\sqrt[3]{x^2})^3+1^3} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2+1}$$

$$5) \frac{4}{2\sqrt[3]{2}-1} = \frac{4}{2\sqrt[3]{2}-1} \times \frac{4\sqrt[3]{2^2}+2\sqrt[3]{2}+1}{4\sqrt[3]{2^2}+2\sqrt[3]{2}+1} = \frac{4(4\sqrt[3]{2^2}+2\sqrt[3]{2}+1)}{(2\sqrt[3]{2})^3-1^3}$$

$$= \frac{4(4\sqrt[3]{2^2}+2\sqrt[3]{2}+1)}{8 \times 2-1} = \frac{4(4\sqrt[3]{2^2}+2\sqrt[3]{2}+1)}{15}$$

نکته: برای جمع یا تفریق کسرهایی که در مخرج دارای کسرها باشند ابتدا مخرج کسرها را گویای کنیم.
پس با مخرج مشترکمانده عبارت گویا حاصل می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

$$1) \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$$

روش اول: $\frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$

$$\frac{2}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1} - \frac{5x}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-2-5x}{x-1}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}-5x-1}{x-1}$$

روش دوم: $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = x-1$ م.م.م. = $(x-1)$

$$= \frac{\sqrt{x}+1+2(\sqrt{x}-1)-5x}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}-5x-1}{x-1}$$

$$2) \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1}$$

گنوایکدن معوج کیرادل :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x-1}$$

$$\text{مبارج} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x-1} - \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}{x-1}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} - \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ را بسازید.

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{1(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1)}{4}$$
$$= 2(\sqrt{5}-1)^2$$

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} \times \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{(\sqrt{5}-2)^2}{5-4} = (\sqrt{5}-2)^2$$

$$\text{جواب} = 2(\sqrt{5}-1)^2 - (\sqrt{5}-2)^2$$

$$= 2(5 - 2\sqrt{5} + 1) - (5 - 4\sqrt{5} + 4)$$

$$= 2(6 - 2\sqrt{5}) - (9 - 4\sqrt{5})$$

$$= 12 - 4\sqrt{5} - 9 + 4\sqrt{5} = 3$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های
مختلف حل آن

قسمت اول: روش تجزیه و روش ریشه زوج

جلسه اول: صفحات ۷۰ تا ۷۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

معادله درجه دوم:

هر معادله که پس از ساده شدن، بزرگترین توان متغیر آن ۲ باشد را معادله درجه دوم می نامیم.

در حالت کلی معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن $a, b, c \in \mathbb{R}$

و $a \neq 0$ هستند. به این صورت معادله شکل استاندارد درجه دوم می گوئیم.

$$\omega x^2 - 1x + 1 = 0$$

$$4x^2 - \frac{9}{2}x = 0$$

مانند:

$$\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{5} = 0$$

$$\frac{1}{11}x^2 - \sqrt{2}x + 5 = 0$$

مثال: درجه معادلات زیر را تعیین کنید. معادلات درجه دوم را به صورت استاندارد بنویسید.

۱) $4x(x-3) = 21 \Rightarrow 4x^2 - 12x - 21 = 0$ درجه دوم

$\swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $a \quad b \quad c$

۲) $(x+1)^2 - x^2 = 1 \Rightarrow \cancel{x^2} + 2x^1x^1 + \cancel{1^2} + 1 - \cancel{x^2} - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^1 + 2x = 0$ درجه دوم

$\downarrow \quad \downarrow$
 $a \quad b \quad c=0$

$$۳) (2x+1)^2 = (1+2x)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 1 + 4x + 4x^2$$

$$\Rightarrow \cancel{4x^2} + \underline{4x} + \underline{1} - \underline{1} - \underline{4x} - \cancel{4x^2} = 0 \Rightarrow -1x - 1 = 0 \quad \text{درجه اول}$$

$$۴) (x-2)(2x+1) = x^2 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1x - 2 = x^2$$

$$\Rightarrow \underline{2x^2} - \underline{x^2} - 0x - 2 = 0 \Rightarrow \overset{a}{1}x^2 - \overset{b}{0}x - \overset{c}{2} = 0 \quad \text{درجه دوم}$$

مثال: اگر مقدار $(k-2)x^2 + (2k+1)x + k = 0$ یک معادله درجه دوم باشد، k چه

$\underbrace{\hspace{1cm}}_a \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_b \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_c$

مقداری می تواند باشد؟

$$a \neq 0 \Rightarrow k-2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$$

k هر عدد حقیقی می تواند باشد به جز ۲.

تذکره: به جواب های معادله، رشته های معادله هم گفته می شود. جواب های رشته های معادله

در آن صدق می کند، یعنی اگر آن را در معادله جای گذاری کنیم، تساوی برقرار است.

مثال: اگر $x = -4$ یکی از جواب های معادله $(m+4)x^2 + (2m+9)x - 4m = 1$

باشد، مقدار m را بیابید.

$$(m+3)(-3)^2 + (2m+9)(-3) - 6m - 1$$

$$9(m+3) + (-4m-27) - 6m - 1 = 0$$

$$\underline{9m+27} - \underline{4m-27} - \underline{6m-1} = 0$$

$$\Rightarrow -m = 1 \Rightarrow m = -1$$

روش های حل معادله درجه دوم :

روش اول روش تجزیه :

ابتدا معادله را به شکل استاندارد می نویسیم. در صورت آنکه از روش های گفته شده (فاکتورگیری و اتحاد)

عبارت است چه را تجزیه کرده، از ویژگی حاصل ضرب صفر استفاده می کنیم و جواب هر معادله را می یابیم.

ویژگی حاصل ضرب صفر :

اگر A و B دو عبارت باشند و $A \times B = 0$ آنگاه حداقل یکی از آن ها صفر است.

$$A \times B = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$$

مثال: موارد زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$1) x^2 + 0x + 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+4) = 0 \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x+4=0 \rightarrow x=-4 \end{cases}$$

$$2) x^2 = 11 \Rightarrow x^2 - 11 = 0 \Rightarrow (x-9)(x+9) = 0 \begin{cases} x-9=0 \rightarrow x=9 \\ x+9=0 \rightarrow x=-9 \end{cases}$$

$$3) 3x^2 - 14 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 14) = 0 \Rightarrow x^2 - 14 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) = 0 \begin{cases} x-4=0 \rightarrow x=4 \\ x+4=0 \rightarrow x=-4 \end{cases}$$

$$4) x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x+7) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x+7=0 \rightarrow x=-7 \end{cases}$$

$$5) 0x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 0x(x-4) = 0 \begin{cases} 0x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-4=0 \rightarrow x=4 \end{cases}$$

$$6) x^2 - 7x = -12 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-3) = 0 \begin{cases} x-4=0 \rightarrow x=4 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$7) 9x^2 - 10 = 0 \Rightarrow (3x-2)(3x+2) = 0 \begin{cases} 3x-2=0 \rightarrow 3x=2 \rightarrow x=\frac{2}{3} \\ 3x+2=0 \rightarrow 3x=-2 \rightarrow x=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$1) 4x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow 4x(x+1-1) = 0 \Rightarrow 4x(x+1)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$9) x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$10) 2x^2 + 21 = -10x + x^2 \Rightarrow 2x^2 - x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$x^2 + 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x+3)(x+7) = 0 \begin{cases} x+3 = 0 \rightarrow x = -3 \\ x+7 = 0 \rightarrow x = -7 \end{cases}$$

مثال: جواب های هر سه $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ کدام است؟

$$\pm 2 \quad (\pm 3) \quad -1, 3 \quad \pm 2, \pm 1 \quad 0 \quad \pm 1$$

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 1) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) = 0 \begin{cases} x-3 = 0 \rightarrow x = 3 \\ x+3 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases} \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \end{cases}$$

+ -

توجه

روش دوم: روش ریشه زوج یا ریشه گری:

معادلات درجه دومی که در آنجا a ضرایب یا به صورت $(dx+f)^2+k=0$ هستند را

می توان با این روش حل کرد. به این صورت که عدد ثابت راست را به سمت چپ می بریم

اگر ضریب x^2 یا پرانتز خیز یک بود، در طرف را بر این ضریب تقسیم می کنیم. در آخر

از خاصیت ریشه زوج $(u^2=k \Rightarrow u=\pm\sqrt{k})$ استفاده کرده، جواب ها را می گیریم

را بدست می آوریم.

مثال: معادلات زیر را با استفاده از ریشه زوج حل کنید.

$$1) \quad x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \xRightarrow{\sqrt{\quad}} x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$$

$$2) \quad 7x^2 - 28 = 0 \Rightarrow 7x^2 = 28 \xRightarrow{\div 7} x^2 = 4 \xRightarrow{\sqrt{\quad}} x = \pm 2$$

$$3) \quad (2x+1)^2 - 25 = 0 \Rightarrow (2x+1)^2 = 25 \xRightarrow{\sqrt{\quad}} 2x+1 = \pm 5$$

$$\begin{cases} 2x+1 = 5 \rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 2x+1 = -5 \rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

$$r) \quad x^r + r = r^2 \Rightarrow x^r = r^2 - r \Rightarrow x^r = 14 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} x = \pm \varepsilon$$

$$o) \quad r(x - v)^r - 91 = 0 \Rightarrow r(x - v)^r = 91 \xrightarrow{\div r} (x - v)^r = \varepsilon 9$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} x - v = \pm v \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon x - v = v \rightarrow \varepsilon x = 1\varepsilon \rightarrow x = \frac{1\varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow x = \frac{v}{r} \\ \varepsilon x - v = -v \rightarrow \varepsilon x = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$7) \quad (r + rx)^r = \frac{r^2}{\varepsilon 9} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} r + rx = \pm \frac{r}{\sqrt{\varepsilon 9}}$$

$$\begin{cases} r + rx = \frac{r}{\sqrt{\varepsilon 9}} \rightarrow rx = \frac{r}{\sqrt{\varepsilon 9}} - r \rightarrow rx = \frac{r - 1\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon 9}} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon 9}} \xrightarrow{\div r} x = -\frac{1}{r\sqrt{\varepsilon 9}} \\ r + rx = -\frac{r}{\sqrt{\varepsilon 9}} \rightarrow rx = -\frac{r}{\sqrt{\varepsilon 9}} - r \rightarrow rx = \frac{-r - 1\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon 9}} = -\frac{r + 1\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon 9}} \xrightarrow{\div r} x = -\frac{r + 1\varepsilon}{r\sqrt{\varepsilon 9}} \end{cases}$$

$$v) \quad rx^r - r^2 = 0 \rightarrow \varepsilon x^r = r^2 \xrightarrow{\div \varepsilon} x^r = 1$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} x = \pm \sqrt{1} \Rightarrow x = \pm r\sqrt{r}$$

$$1) \quad (rx + 0)^r - r = 0 \Rightarrow (rx + 0)^r = r \xrightarrow{\sqrt{\quad}} rx + 0 = \pm \sqrt{r}$$

$$\begin{cases} rx + 0 = \sqrt{r} \Rightarrow rx = \sqrt{r} - 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{r} - 0}{r} \\ rx + 0 = -\sqrt{r} \Rightarrow rx = -\sqrt{r} - 0 \rightarrow x = \frac{-\sqrt{r} - 0}{r} \end{cases}$$

$$9) \quad (x+1)^2 + 9 = 0 \Rightarrow \underbrace{(x+1)^2}_{+} = \underbrace{-9}_{-}$$

هیچ جواب ندارد

$$10.) \quad x^2 + 7x = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2}_{+} = \underbrace{-7x}_{-}$$

هیچ جواب ندارد

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های
مختلف حل آن

قسمت دوم: روش مربع کامل و دلتا

جلسه دوم: صفحات ۷۳ تا ۷۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

روش سوم روش مربع کامل :

برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با استفاده از روش مربع کامل به ترتیب مراحل

زیر را انجام می دهیم :

۱) اگر a عددی غیر یک بود ، طرفین معادله را بر a تقسیم می کنیم تا ضریب x^2 ، یک شود.

۲) c (عدد ثابت) را سمت راست منتقل می کنیم.

۳) b (ضریب x) را نصف کرده به توان ۲ می رسانیم و عدد حاصل را به دو طرف معادله اضافه می کنیم.

۴) سمت چپ معادله را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای تجزیه می کنیم.

۵) معادله بدست آمده را از روش رسم زوج حل می کنیم.

مثال : معادله زیر را با استفاده از روش مربع کامل حل کنید.

$$1) \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad : \quad x^2 - 2x = 1 \quad \left(-\frac{2}{2}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$x^r - rx + 1 = 1 + 1 \Rightarrow (x-1)^r = 9 \stackrel{\sqrt{}}{\Rightarrow} x-1 = \pm 3$$

$$\begin{cases} x-1=3 \Rightarrow x=4 \\ x-1=-3 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

$$r) \quad x^r - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^r - 4x = -1 \quad \left(-\frac{4}{r}\right)^r = (-4)^r = 9$$

$$x^r - 4x + 9 = -1 + 9 \Rightarrow (x-3)^r = 0 \stackrel{\sqrt{}}{\Rightarrow} x-3 = \pm \sqrt{0}$$

$$\begin{cases} x-3=\sqrt{0} \Rightarrow x=3+\sqrt{0} \\ x-3=-\sqrt{0} \Rightarrow x=3-\sqrt{0} \end{cases}$$

$$s) \quad x^r - x - 1 = 0 \stackrel{+1}{\Rightarrow} x^r - \frac{1}{r}x - \frac{1}{r} = 0$$

$$\Rightarrow x^r - \frac{1}{r}x = \frac{1}{r} \quad \left(-\frac{1}{r}\right)^r = \left(-\frac{1}{r}\right)^r = \frac{1}{r^r}$$

$$\Rightarrow x^r - \frac{1}{r}x + \frac{1}{r^r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^r}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{r}\right)^r = \frac{1r+1}{r^r}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{r}\right)^r = \frac{1r}{r^r}$$

$$\sqrt{\quad} \Rightarrow x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{13}}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{13}}{4} \\ x - \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{13}}{4} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{13}}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{13}}{4} \end{cases}$$

روش چهارم روش صیادانه

اگر خبرهیم در درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را به روش مربع کامل حل کنیم داریم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \div a \neq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{اگر } \Delta = b^2 - 4ac \text{ بزرگ یا صفر باشد}$$

اگر $\Delta < 0$ باشد هیچ جواب ندارد.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{0}{4a^2} = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \quad \text{اگر } \Delta = 0 \text{ داریم}$$

اگر $\Delta > 0$ داریم:

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\begin{cases} x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

نتیجه: برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بر روی صفحه یارانه استوار دلتی

معادله را از رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ محاسبه می کنیم. با توجه به مقدار دلتا

آمده برای دلتا سه حالت خود هم داشت:

حالت اول: اگر $\Delta > 0$ (عدد مثبت) باشد، معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد که از

رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می آید.

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه حقیقی مضاعف است که از

رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ بدست می آید.

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ (عدد منفی) باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال: معادلات زیر را به روش دلتا حل کنید.

$$1) \quad 4x^2 - 8x - 1 = 0 \quad \begin{cases} a=4 \\ b=-8 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - (4 \times 4 \times (-1)) = 64 - (-16) = 64 + 16 = 80 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{80}}{2 \times 4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \begin{cases} \frac{2+\sqrt{5}}{2} = \frac{12}{12} \Rightarrow x=1 \\ \frac{2-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2) \quad x^2 + 12x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x + 36 = 0 \quad \begin{cases} a=1 \\ b=12 \\ c=36 \end{cases}$$

$$\Delta = (12)^2 - (4 \times 1 \times 36) = 144 - 144 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-12}{2 \times 1} \Rightarrow x = -6 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

$$3) \quad x^2 + 2x = -8 \Rightarrow x^2 + 2x + 8 = 0 \quad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=8 \end{cases}$$

$$\Delta = 4 - (4 \times 1 \times 8) = 4 - 32 = -28 < 0$$

هیچ جواب ندارد

$$4) \quad 21x^2 + 20x - 12 = 0 \xrightarrow{\div 1} 21x^2 + 20x - 12 = 0 \quad \begin{cases} a=21 \\ b=20 \\ c=-12 \end{cases}$$

$$\Delta = 400 - (4 \times 21 \times (-12)) = 400 - (-1008) = 400 + 1008 = 1408$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm 7}{6} \begin{cases} \frac{-5+7}{6} = \frac{2}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ \frac{-5-7}{6} = \frac{-12}{6} \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

مثال: اگر معادله $mx^2 - 2(m+1)x + m-1 = 0$ ریشه مفاد داشته باشد، مقدار m کدام است؟

$-\frac{1}{5}$ (ع) $-\frac{1}{4}$ (د) $-\frac{1}{3}$ (ب) ✓ $-\frac{1}{2}$ (ا)

$$\begin{cases} a = m \\ b = -2(m+1) \\ c = m-1 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = (-2(m+1))^2 - (4 \times m \times (m-1)) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4(m^2 + 2m + 1) - 4m(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \cancel{4}m^2 + \underline{8m} + \underline{4} - \cancel{4}m^2 + \underline{4m} = 0 \Rightarrow 12m = -4$$

$$\Rightarrow m = -\frac{4}{12} \Rightarrow m = -\frac{1}{3} \quad \text{گزینه ب}$$

مثال: اگر معادله $x^2 - x - m + 1 = 0$ دو جواب حقیقی متباين داشته باشد، عدد m کدام است؟

$m < \frac{5}{4}$ (ع) $m > \frac{5}{4}$ (د) $m < \frac{5}{6}$ (ب) $m > \frac{5}{6}$ (ا)

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-m+1 \end{cases}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-1)^2 - (4 \times 1 \times (-m+1)) > 0$$

$$\Rightarrow 1 - 4(-m+1) > 0 \Rightarrow 1 + 4m - 4 > 0$$

$$\Rightarrow 4m > 3 \stackrel{+4}{\Rightarrow} m > \frac{3}{4} \quad \text{گزینه ۱}$$

دو حالت خاص پر کاربرد در معادله درجه دوم :

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو حالت خاص وجود دارد که زیر مورد سوال قرار می گیرد.

۱) اگر $a+b+c=0$ باشد غنی جمع ضرایب مفروضه می آید که a و درگیری $\frac{c}{a}$ است.

۲) اگر $a+c=b$ باشد، کمی از ریشه a و درگیری $\frac{c}{a}$ است.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$۱) \quad 9x^2 - 7x - 2 = 0 \quad 9 - 7 - 2 = 0 \Rightarrow x=1, x=-\frac{2}{9}$$

$$۲) \quad 5x^2 + 11x + 6 = 0 \quad 5 + 6 = 11 \Rightarrow x=-1, x=-\frac{6}{5}$$

تذکر:

اگر در حل هارم درج دوم روش خاصی مدنظر نباشد، برای سرعت عمل بهتر پیشنهاد می‌شود در صورت داشتن شرایط به ترتیب زیر عمل کنید:

۱) روحیات خاص پرکاربرد

۲) تجزیه یا ریشه زنج

۳) رت

کاربرد هارم درج دوم در حل مسائل

در برخی از مسائل با اطلاعات سوال داده شده می‌توانیم یک هارم درج دوم بنویسیم و با حل هارم از روشی دلخواه و بررسی شرایط مسئله جواب را بدست آوریم.

مثال: مجموع مبدع‌های دو عدد زنج متوالی طبیعی ۳۶۰ است. این دو عدد را بیابید.

پاسخ: دو عدد زنج $۲k$ ($k \in \mathbb{N}$) و دو عدد زنج متوالی $۲k$ و $۲k+۲$

$$(2k)^2 + (2k+2)^2 = 32.$$

$$4k^2 + 4k^2 + 8k + \underline{4} - \underline{32} = 0 \Rightarrow 8k^2 + 8k - 28 = 0$$

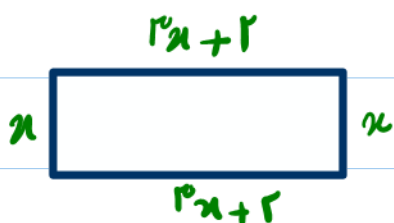
$$\div 4 \Rightarrow k^2 + k - 7 = 0 \Rightarrow (k+7)(k-7) = 0 \begin{cases} k+7=0 \rightarrow k=-7 \\ k-7=0 \rightarrow k=7 \end{cases}$$

$$2k = 14$$

$$2k+2 = 16$$

مثال: طول یک مستطیل از سه برابر عرض آن دو واحد بزرگتر است. اگر مساحت مستطیل

۳۴ متر مربع باشد، محیط این مستطیل چند متر است؟



$$S = x(3x+2) = 34 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 34 = 0$$

$$\Delta = 4 - (4 \times (-34)) = 4 - (-136) = 4 + 136 = 140$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{140}}{2 \times 3} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{35}}{6} \begin{cases} \frac{-2 + 2\sqrt{35}}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{1}{3} \\ \frac{-2 - 2\sqrt{35}}{6} = -\frac{1}{3} \rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$3x+2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 1 + 2 = 3 \text{ طول}, \text{ عرض} = \frac{1}{3}$$

$$P = 2l = 2(11 + 3) = 2 \times 14 = 28 \text{ متر}$$

مثال: اختلاف سنی دو خواهر با هم دو سال است. اگر سه سال بعد حاصل ضرب سن آنها ۱۰

شود، سن هر یک را حساب کنید.

ا: سن خواهر اول x سن خواهر دوم $x+2$

$$x \xrightarrow{+3} x+3$$

$$x+2 \xrightarrow{+2} x+4$$

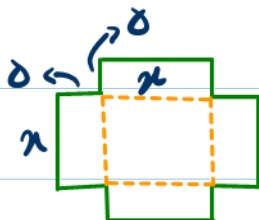
$$(x+3)(x+4) = 10 \Rightarrow x^2 + 7x + 12 - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 2 = 0$$

$$(x+13)(x-5) = 0 \quad \begin{cases} x = -13 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$x = 5, \quad x+2 = 7$$

مثال: گسترده یک جعبه شش‌بُرجی مربع القاعده به صورت شکل زیر است. اگر ارتفاع این جعبه ۵

و حجم آن 245 cm^3 باشد، مقدار x را بیابید.



$$V = x \times x \times 5 = 245$$

$$5x^2 = 245 \Rightarrow x^2 = 49 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} x = \pm 7$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ cm}$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس دوم: سهمی

جلسه سوم: صفحات ۷۸ تا ۸۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

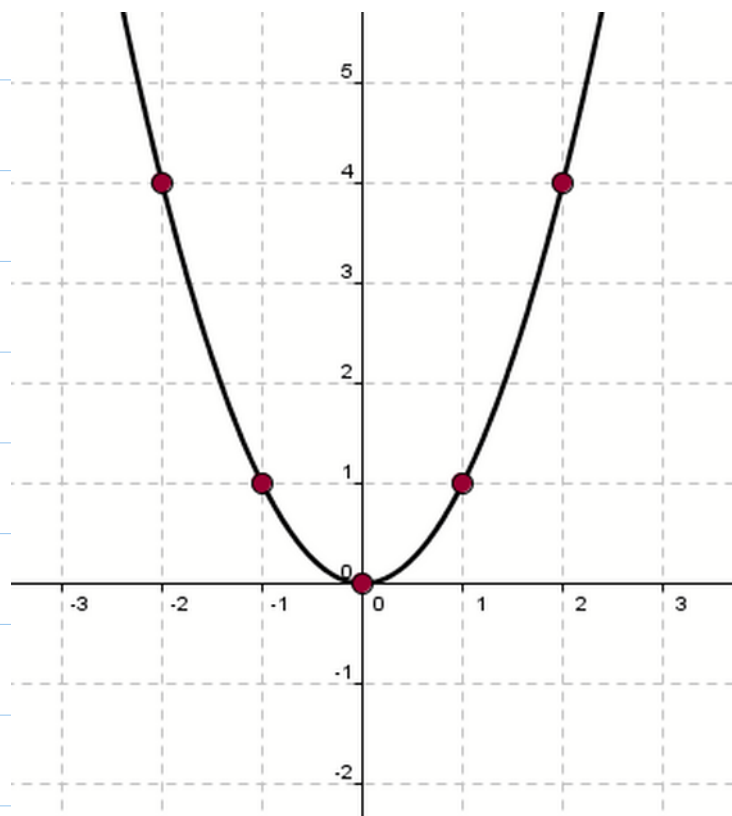
سمعی: به نمودار معادله $y = ax^2 + bx + c$ که a, b, c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$

سمعی گوییم.

مانند: $y = x^2$, $y = x^2 + 5x$, $y = 3x^2 + 2$, $y = x^2 - 4x + 1$

مثال: سمعی $y = x^2$ را رسم کنید. (سمعی بایر)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



برای سهمی $y = ax^2 + bx + c$ داریم :

۱- اگر a مثبت باشد سهمی به سمت بالا باز می شود و اگر a منفی باشد سهمی رو به پایین باز می شود.

۲- اگر سهمی به سمت بالا باز شود ، رأس سهمی پائین ترین نقطه روی نمودار است که دارای حداقل

مقدار y است (مینیمم، $\min$) و اگر سهمی به پایین باز شود ، رأس سهمی بالاترین نقطه نمودار است

که دارای حداکثر مقدار y است (ماکزیمم، $\max$)

۳- طول رأس سهمی از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ بدست می آید . برای یافتن عرض

رأس سهمی ، طول بدست آمده از رابطه بالا را در معادله سهمی جایگزین می کنیم .

همچنین می توانیم به صورت مستقیم از رابطه $y = \frac{-\Delta}{4a}$ (شماره ۱) استفاده کنیم .

۴- نمودار سهمی نسبت به خط عمودی گذرنده از رأس سهمی ، متقارن است . این خط

را محور تقارن سهمی می نامیم و معادله آن $x = \frac{-b}{2a}$ است .

مثال: برای سهمی های زیر، مختصات رأس و محله مجری تعادل را بدست آورید.

$$\text{الف) } y = x^2 + 4x - 1 \quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 1} = -2 \rightarrow y = (-2)^2 + 4(-2) - 1 = 4 - 8 - 1 = -5$$

محله مجری تعادل $x = -2$ رأس: $S(-2, -5)$

$$\text{ب) } y = 2x^2 - x$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} \rightarrow y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1-2}{8} = -\frac{1}{8}$$

محله مجری تعادل $x = \frac{1}{4}$ رأس: $S\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

$$\text{ج) } y = x^2 + 5$$

$$\text{رأس: } S(0, 5) \quad x = -\frac{b}{2a} = \frac{-0}{2 \times 1} = 0 \rightarrow y = 0^2 + 5 = 5$$

محله مجری تعادل: $x = 0$ محله ها

رسم سهمی:

ابتدا مختصات رأس سهمی را می یابیم و در یک جدول به صورت زیر قرار می دهیم.

پس دو نقطه کمی قبل و کمی بعد از طول رأس سهمی با فاصله های یکسان از رأس در

جدول می نویسیم و این نقاط که با توجه به متقارن بودن سهمی با هم برابر است را می یابیم.

سعی می‌کنیم طوری نقاط را بدست آوریم که طول کمی از ریشه صغر باشد تا محاسبات کمتری نیاز باشد. بدینسان سه نقطه سعی قابل رسم است.

x	$-\frac{b}{2a}$
y	$-\frac{\Delta}{4a}$

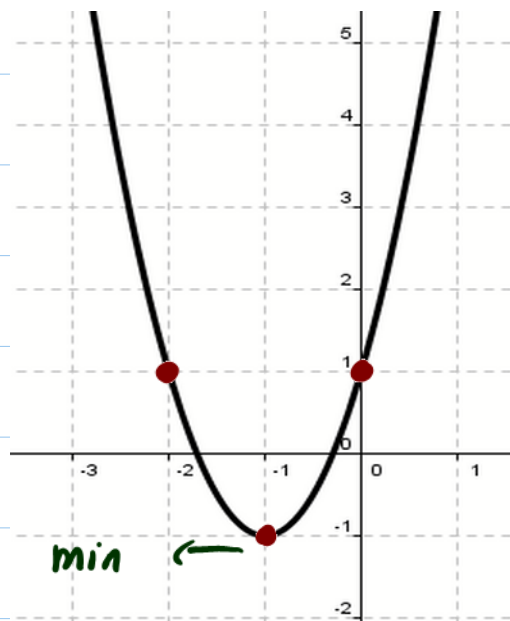
مثال: سعی‌های زیر را رسم کنید.

الف $y = 2x^2 + 4x + 1$ $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=1 \end{cases}$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \times 2} = -1 \rightarrow y = 2(-1)^2 + 4(-1) + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$$

x	-2	-1	0
y	1	-1	1

$$x=0 \rightarrow y = 2(0)^2 + 4(0) + 1 = 1$$



$$y = -x^2 + 4x - 1 \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = -(2)^2 + 4(2) - 1 = -4 + 8 - 1 = 3$$

x	0	2	4
y	-1	3	-1

$$x = 0 \rightarrow y = -(0)^2 + 4(0) - 1 = -1$$



حل برخط در سهمی با محور ها :

دفعه معرکول ها (x ها) :

برای بدست آوردن حل برخط در سهمی با محور x ها ، کافی است معادله $ax^2+bx+c=0$

را حل کنیم . از قبل می دانیم با توجه به علامت Δ سه حالت رخ می دهد .

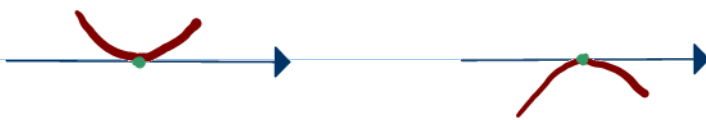
– اگر Δ مثبت باشد سهمی در دو نقطه که خارج از بازه های معادله هسته محور x ها را

قطع می کند .

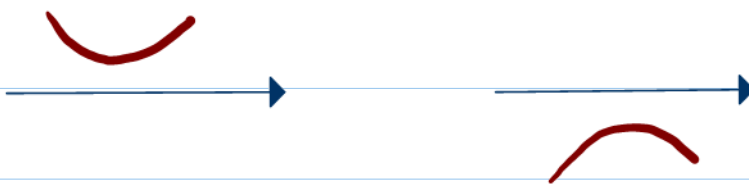


– اگر Δ منفی باشد سهمی فقط در یک نقطه که خارج از بازه های معادله است محور x ها را

قطع می کند .



– اگر Δ منفی باشد سهمی محور x ها را قطع نمی کند زیرا معادله جواب ندارد .



ب) تمرین‌ها (۹۵)

برای یافتن محل برخورد سهمی با محورهای مختصات درجه دوم

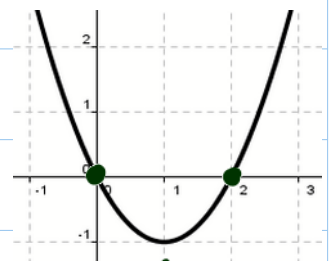
$$y = ax^2 + bx + c = c \quad \text{به جای } x=0 \text{ قرار دهیم. در نتیجه:}$$

مثال: محل برخورد سهمی‌های زیر را با محورها بدست آورید.

الف) $y = x^2 - 2x$

محل برخورد با محورها: $x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow (0,0) \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow (2,0) \end{cases}$

محل برخورد با محورهای مختصات: $x=0 \rightarrow y = 0^2 - 2(0) = 0 \rightarrow (0,0)$



لکه min

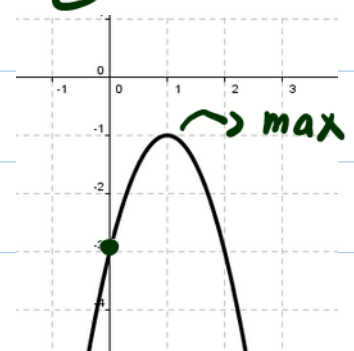
ب) $y = -2x^2 + 4x - 3$

محل برخورد با محورها: $-2x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4(-2)(-3) = 16 - 24 = -8 < 0$

سهمی محورهای مختصات را قطع نمی‌کند

محل برخورد با محورها: $x=0 \rightarrow y = -2(0)^2 + 4(0) - 3 = -3$

$\rightarrow (0, -3)$



صورت دیگری برای سهمی :

گاهی اوقات سهمی را به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ می نویسیم که $a \neq 0$.

در این صورت مختصات رأس سهمی (h, k) است. معرّفان $x = h$ است.

اگر $a > 0$ باشد سهمی به سمت بالا و اگر $a < 0$ باشد سهمی به سمت پایین باز می شود.

مثال: سهمی های زیر را رسم کنید.

دفع $y = \underbrace{(x+1)^2 - 2}_{x - (-1)}$

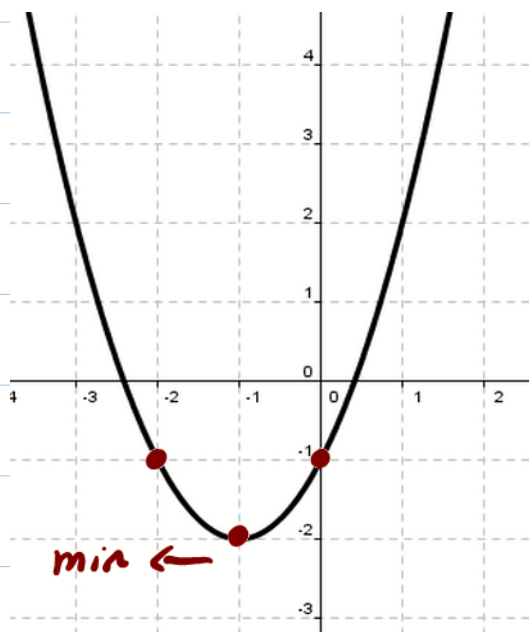
$\nearrow h$
 $\nearrow k$

برای یافتن هفتگی رأس سهمی طرد داخل را زیر را قرینه می کنیم.

رأس سهمی $(-1, -2)$

x	0	-1	-2
y	-1	-2	-1

$$x=0 \rightarrow y = (0+1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

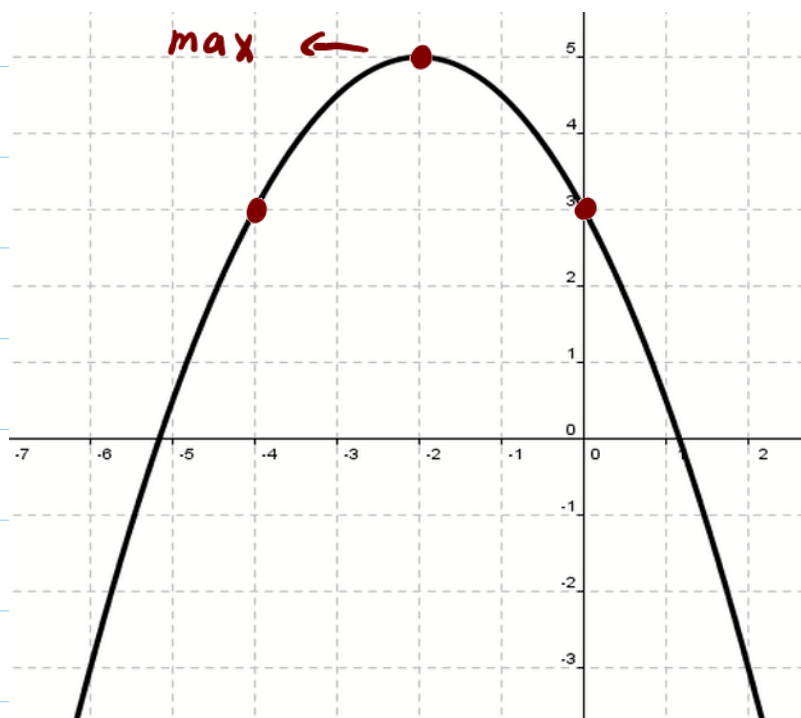


$$y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 3$$

رُشمی $(-2, 0)$

x	2	-2	0
y	2	0	2

$$x=0 \rightarrow y = -\frac{1}{4}(0+2)^2 + 3 = -\frac{1}{4} \times 4 + 3 = -1 + 3 = 2$$



نشان: نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض 2 و محور x ها را در نقاط به طول 1 و 2 قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید

$$(0, 2) \xrightarrow{\text{رُشمی}} 2 = a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow c = 2$$

$$(-1, 0) \xrightarrow{\text{رُشمی}} 0 = a(-1)^2 + b(-1) + 2 \rightarrow 0 = a - b + 2 \rightarrow a - b = -2$$

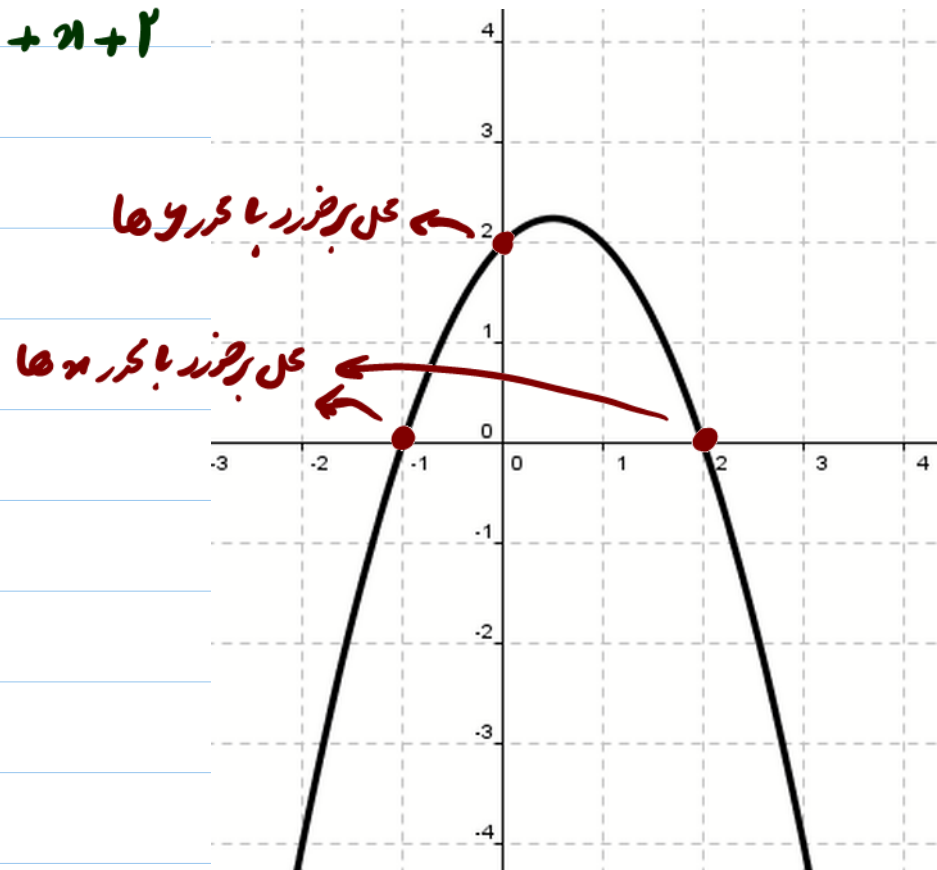
$$(2, 0) \xrightarrow{\text{رُشمی}} 0 = a(2)^2 + b(2) + 2 \rightarrow 0 = 4a + 2b + 2$$

$$\rightarrow 4a + 2b = -2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -1$$

$$+ \begin{cases} a-b=-2 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

$$2a = -2 \rightarrow a = -1 \rightarrow -1 - b = -2 \rightarrow 1 = b$$

$$y = -x^2 + x + 2$$



ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس سوم: تعیین علامت

جلسه چهارم: صفحات ۸۳ تا ۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

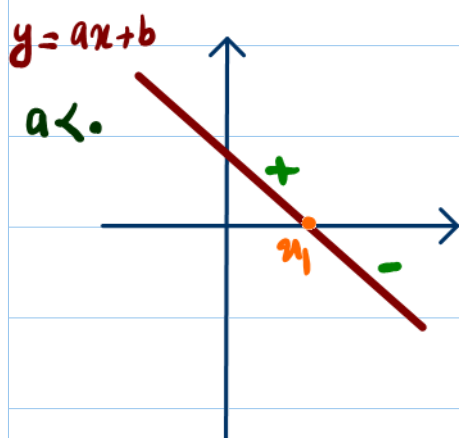
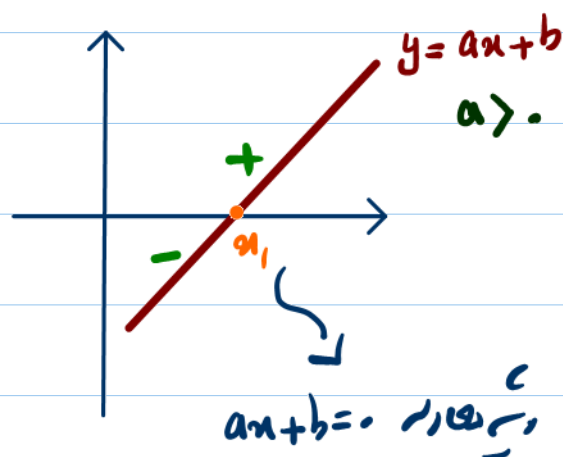
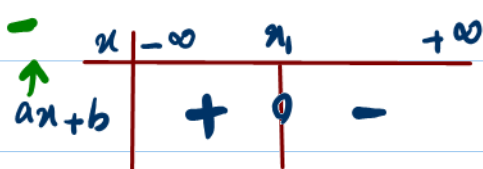
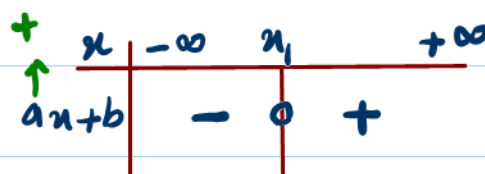
مفهوم تغییر علامت :

منظور از تغییر علامت یک عبارت جبری این است که مشخص کنیم علامت عبارت

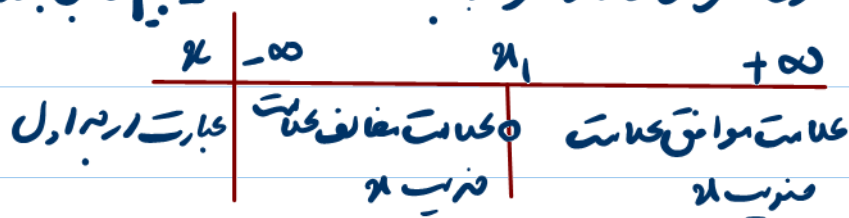
برای چه مقادیری از متغیر مثبت و برای چه مقادیری از متغیر منفی است.

۱) تغییر علامت عبارت های درجه اول ($ax+b$)

تغییر هندی: عبارت درجه اول، نشان دهنده یک خط است.



نتیجه: ابتدا عبارت را مساوی صفر قرار داده و جواب معادله را می یابیم و طبق جدول زیر عمل می کنیم:



جدول تغییر علامت :

مثال: عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $p(x) = 3x - 6$

$$3x - 6 = 0 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x - 6$	$-$	0	$+$

$x > 2: p > 0$, $x < 2: p < 0$, $x = 2: p = 0$.

۲) $q(x) = -4x + 2$

$$-4x + 2 = 0 \rightarrow -4x = -2 \rightarrow x = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-4x + 2$	$+$	0	$-$

$x \in (\frac{1}{2}, +\infty) : q < 0$

$x \in (-\infty, \frac{1}{2}) : q > 0$

$x = \frac{1}{2} : q = 0$

۲) تعیین علامت عبارت‌های درجه دوم $(ax^2 + bx + c)$

تجربه‌دهی: عبارت درجه دوم نشان دهنده یک سهمی است.

سه حالت امکان دارد:

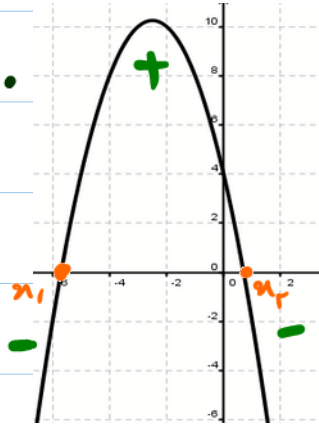
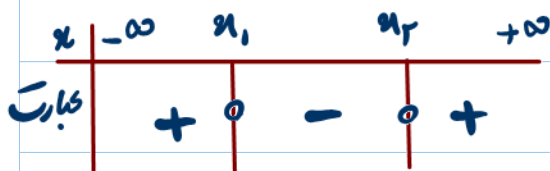
حالت اول: سهمی در دو نقطه مجزا را قطع کند یعنی $a x^2 + b x + c = 0$

دو جواب یا ریشه حقیقی دارد ($\Delta > 0$)

$a > 0$



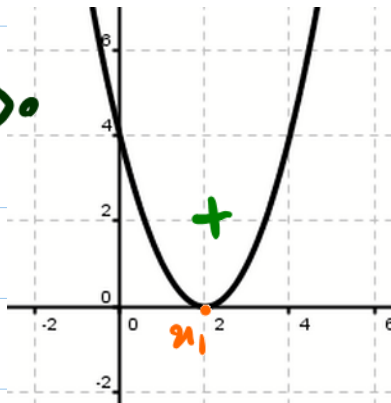
$a < 0$



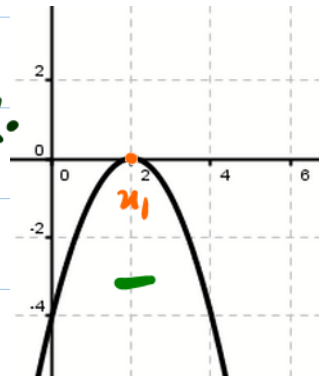
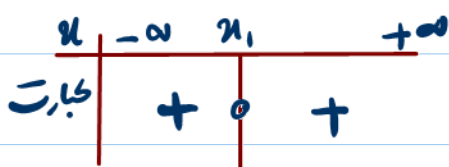
حالت دوم: سهمی در یک نقطه بر محور x تماس پیدا می کند یعنی $a x^2 + b x + c = 0$

یک ریشه مضاعف دارد: ($\Delta = 0$)

$a > 0$

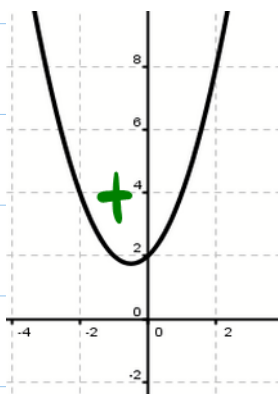


$a < 0$

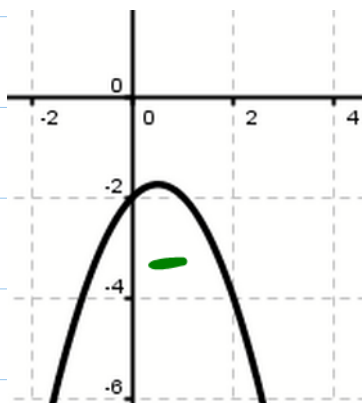
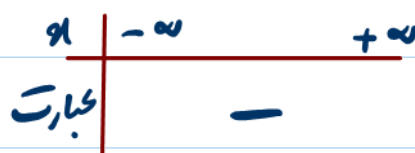


حالت سوم: سعی کردیم x ها را قطع کنیم یعنی $ax^2+bx+c=0$ رسم نداریم. ($\Delta < 0$)

$\Delta > 0$



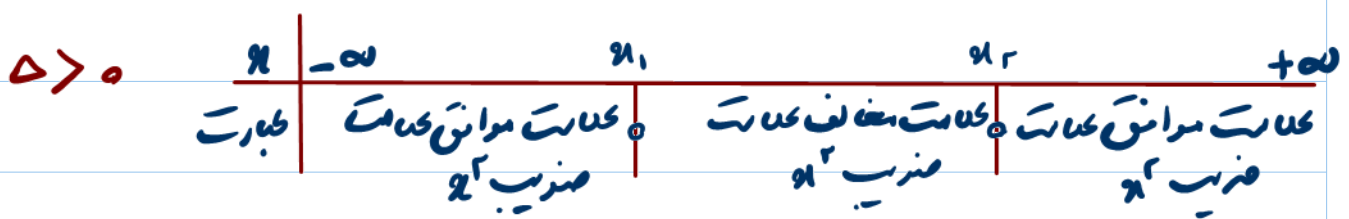
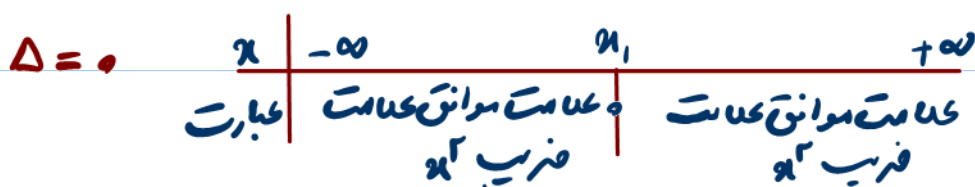
$\Delta < 0$



نتیجه: برای تعیین علامت های درجه دوم ابتدایی را بسیاری مفر قرار داده و رسم های

آن را در صورت ضرورت می یابیم. با توجه به تعداد رسم ها علامت دهنده از جدول های

زیر برای تعیین علامت استفاده می کنیم:



$$\Delta < 0 \quad x \begin{array}{c|c} -\infty & +\infty \end{array}$$

عبارت مربعی

مثال: عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

1) $p(x) = -x^2 + 3x + 2$

$$-0x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
p	$-$	$+$	$-$	$-$

$$x > 1 \text{ یا } x < -\frac{2}{3} : p < 0$$

$$-\frac{2}{3} < x < 1 : p > 0$$

2) $q(x) = x^2 + 7x + 9$

$$x^2 + 7x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 1 \times 9 = 13 - 36 = -23 < 0 \rightarrow x = -\frac{7}{2} = -3.5$$

x	$-\infty$	-3.5	$+\infty$
q	$+$	0	$+$

$$x \in (-\infty, -3.5) \cup (-3.5, +\infty) : q > 0$$

$$x = -3.5 : q = 0$$

3) $h(x) = x^2 + x + 3$

$$x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 \times 1 \times 3 = 1 - 12 = -11 < 0 \rightarrow \text{همیشه مثبت است}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
h	$+$	$+$

۳) تعیین ضرایب عبارات u که از ضرب یا تقسیم چند عبارت در جدول دوم شکل شده است.

۱. ابتدا عبارت را ماری مغز قرار می دهیم در سه حرکت را می بینیم.

۲. جدول تعیین ضرایب را رسم می کنیم و در ریف اول ریس ها را از کوچک به بزرگ قرار می دهیم.

۳. عبارت را در یک ریف نوشته و تعیین ضرایب می کنیم.

۴. در ریف آخر، کل عبارت را نوشته، ضرایب هر خانه (بازه) را از ضرب ستونی ریف های

بالای آن خانه بدست می آوریم.

۵. در نتا ط حرزی اگر ریس عبارت های صورت باشند مغز و اگر ریس عبارت های مغز باشند

تعریف شده قرار می دهیم (در ریف آخر)

نکته: عبارت های به صورت u^k یا u^{2k} نمی عبارت داخل قدر مطلق باشند یا

توان زوج داشته باشند، همواره مثبت اند.

برای تعیین ضرایب عبارت های به صورت u^{2k+1} کافی است u را تعیین می کنیم.
می توان فرد را نادیده می گیریم

مثال: عددهای زیر را تعیین علامت کنید.

خارج از صفر

1) $p(x) = (2-x)(3x+1)$

$2-x=0 \rightarrow x=2$, $3x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{p}$	r	$+\infty$		
$-(r-x)^p$		+	+	0	-	
$+ \leftarrow p_{n+1}$		-	0	+	+	
p		-	0	+	0	-

$x < -\frac{1}{3} \text{ و } x > 2 : p < 0$

$-\frac{1}{3} < x < 2 : p > 0$

$x = -\frac{1}{3} \text{ و } x = 2 : p = 0$

2) $q(x) = \frac{(x-4)(x^2+3x-4)}{-2x+1}$

$x-4=0 \rightarrow x=4$, $x^2+3x-4=0 \rightarrow x=1, -4$, $-2x+1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

	x	$-\infty$	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$		
$+$ $\nwarrow$	$+(x-1)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$+$ $\nwarrow$	$+(x^2+x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	
$-$ $\nwarrow$	$-(-2x+1)$		$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
	q		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$	$-$

$\wedge$
 ∞

تحلیل به عنوان تمرین

$$r) A = \frac{x|x-r|}{-rx^r + x + 0}$$

$$x=0, x-r=0 \rightarrow x=r$$

$$-rx^r + x + 0 = 0 \rightarrow -r + 0 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0/\varepsilon \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	$0/\varepsilon$	r	$+\infty$
$+x$		-	-	0	+	+
$ x-r $	+	+	+	+	0	+
$-rx^r + x + 0$	-	0	+	+	0	-
A	+	+	-	+	-	-

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\infty}$
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_{\infty}$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 0/\varepsilon) : A > 0$$

$$x = 0, r : A = 0$$

$$x \in (-1, 0) \cup (0/\varepsilon, r) \cup (r, +\infty) : A < 0$$

$$x = -1, 0/\varepsilon : A = 0$$

$$r) B = (2x-3)^r (x^r + 4) (4-x)$$

$$2x-3=0 \rightarrow x = \frac{3}{2}, \quad x^r + 4 = 0 \text{ جواب ندارد}, \quad 4-x=0 \rightarrow x=4$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
$(2x-3)^r$	+	0	+	+
$+x^r + 4$	+	+	+	+
$4-x$	+	+	0	-
B	+	0	+	-

$\rightarrow$ در این صف حذف کرد
 $\nearrow$ در صورت کلیت
 فقط به $4-x$
 وابسته است

تجدید جدول جزای غیر

نکته: برای شرکت عمل در حقین خدمات های ترکیبی به صورت زیر عمل می کنیم:

۱- اگر عبارت های صورت و مخرج قابل تجزیه باشند، رکنها را تجزیه می کنیم.

۲- رشم عبارت ها را بدست می آوریم.

۳- مرتبه هر رشم را مشخص می کنیم. یعنی اگر عبارت $(n-a)^k$ را داشته باشیم مرتبه

رشم $n=a$ ، k است. دقت کنید اگر عبارتی هم در صورت و هم در مخرج بود مرتبه اش

از مجموع مرتبه در صورت و مخرج بدست می آید.

۴- جدول حقین خدمات رسم کرده رشم ها را از کوچک به بزرگ قرار می دهیم. زیر رشم ها

صورت صغر و زیر رشم ها مخرج ت. ن می گذاریم. برای رشم مشترک صورت و مخرج

هم ت. ن می نویسیم.

۵- با عدد گذاری که خدمات یک خانه که می باشد کمتری را در مشخص می کنیم و به خانه های

چپ و راست حرکت می کنیم اگر به رشم مرتبه فرزند داریم خدمات را تغییر می دهیم و اگر به

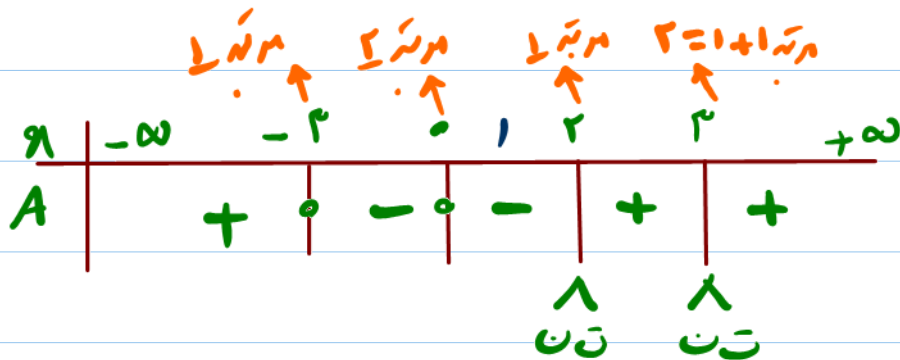
این رابطه زوج بر خودم علامت نمی‌کنند.

مثال: عبارت $A = \frac{x^2(x^2-9)}{x^2-5x+4}$ را تعیین علامت کنید.

$$A = \frac{x^2(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-4)}$$

$$x=0, x-3=0 \rightarrow x=3$$

$$x+3=0 \rightarrow x=-3, x-1=0 \rightarrow x=1$$



$$A = \frac{1(1-9)}{1-5+4} < 0$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس سوم: تعیین علامت

حل نامعادله (قسمت اول)

جلسه پنجم: صفحات ۸۸ تا ۹۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

نماواره : هرگاه بین دو یا سه عبارت جبری ؛ علامت های < یا > یا ≤ یا ≥ باشد

کیده نماواره داریم. منظور از حل نماواره مجموعه ای از اعداد است که

اگر به جای متغیر قرار دهیم به یک نماواره درستی می رسیم.

نماوارهات انواع مختلفی دارند که روش حل حرکت را ادامه بررسی می کنیم.

نماواره درجه اول :

هرگاه بزرگترین توان مجهول در نماواره کیده باشد ، آن را نماواره درجه اول

می نامیم . برای حل اینگونه نماوارهات دقیقاً مثل نماواره درجه اول ، محورها

(معلوم) راست راست و عبارت های متغیر را (مجهول) راست چپ منتقل می کنیم.

یادآوری می کنیم وقتی عدد یا عبارتی از یک سمت به سمت دیگر می رود علامت آن قرینه می شود.

در آخر دو طرف را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم تا مجموعه جواب بدست آید.

در وقت کشیدن ضریب تقسیم بر عدد رفتنی جهت نماواره را عوض می کنند.

تذکره: اگر در نهاده‌ها درجه اول ضرایب‌های کسری داشته‌باشیم با ضرب در دوطرف در

عددی مناسب، مخرج‌ها را از بین می‌بریم.

مثال: نهاده‌ها را زیر را حل کنید و معبره جواب را به شکل بازو بنویسید.

$$\text{الف) } -4x + 2 \geq 4x - 8$$

$$-4x - 4x \geq -8 - 2 \rightarrow -10x \geq -10$$

$$\xrightarrow{\div (-10)} x \leq -1 \rightarrow \text{ج. م} = (-\infty, -1]$$

$$\text{ب) } \frac{x+4}{3} < \frac{1}{2} - 5x$$

$$\times 6 \rightarrow 4x \frac{x+4}{3} < 4x \frac{1}{2} - 4x \cdot 5x$$

$$\rightarrow 2(x+4) < 2 - 20x \rightarrow 2x + 8 < 2 - 20x$$

$$\rightarrow 2x + 20x < 2 - 8 \rightarrow 22x < -6$$

$$\xrightarrow{\div 22} x < -\frac{6}{22} \quad \text{ج. م} = (-\infty, -\frac{6}{22})$$

ناهمبازی دوگانه :

اگر عبارتی مانند A همزمان در دو ناهمبازی صدق کند به صورت زیر :

$$\begin{cases} A < B \\ C < A \end{cases} \rightarrow C < A < B$$

با یک ناهمبازی دوگانه سروکار داریم. در حل این ناهمبازات اگر B ، C هر باشند

باید مجهول را با ابعادی عکس آن چیزی که با مجهول داریم نتوانیم نشانیم.

اگر B ، C هم عبارت جبری باشند دو ناهمبازی را جداگانه حل کرده، بعد جوابها

را اشتراک می گیریم.

مثال: ناهمبازات زیر را حل کنید

(الف) $-4 < 4x - 2 \leq 9$

$$\xrightarrow{+2} -2 < 4x \leq 11$$

$$\rightarrow -1 < x \leq \frac{11}{4}$$

$$\xrightarrow{\div 4} -\frac{1}{4} < x \leq \frac{11}{4}$$

$$\text{ب) } 1 < \frac{1-2n}{r} \leq 0$$

$$\times r \rightarrow r \times 1 < r \times \frac{1-2n}{r} \leq r \times 0 \rightarrow r < 1-2n \leq 0$$

$$\xrightarrow{-\varepsilon} r - \varepsilon < 1 - 2n - \varepsilon \leq 0 - \varepsilon \rightarrow -1 < -2n < 1$$

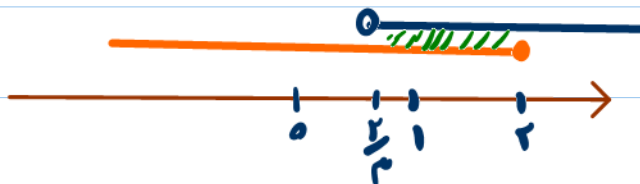
$$\div (-2) \rightarrow \frac{-1}{-2} > \frac{-2n}{-2} > \frac{1}{-2} \rightarrow \frac{1}{2} > n > -\frac{1}{2} \xrightarrow{\cup} -\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } n+1 \leq 0-n < 2n+1$$

$$\text{① } n+1 \leq 0-n \rightarrow n+n \leq 0-1 \rightarrow 2n \leq -1 \rightarrow n \leq -\frac{1}{2}$$

$$\text{② } 0-n < 2n+1 \rightarrow -n-2n < 1-0 \rightarrow -3n < 1$$

$$\div (-3) \rightarrow n > -\frac{1}{3} \rightarrow n > -\frac{1}{3}$$



$$I \cap J = \left(\frac{1}{3}, 1\right]$$

$$\text{ب) } 0-n-1 \leq 2n-\varepsilon < 3n+0$$

به عنوان تمرین

نامعادله درجه دوم و نامعادله گویا :

برای حل نامعادله درجه دوم و گویا باید از تقنین علامت استفاده کنیم. برای این کار دستا تمام عبارتها را یک طرف برده و یک طرف نامعادله را صفر می کنیم. فنی به صورت $A > 0$ ، $A < 0$ ، $A \geq 0$ ، $A \leq 0$. سپس عبارت A را تقنین علامت می کنیم و از روی جدول معبره جواب را می نویسیم .

مثال : نامعادلات زیر را حل کنید و معبره جواب را به شکل بازه بنویسید .

الف) $3x^2 - x \geq 2$

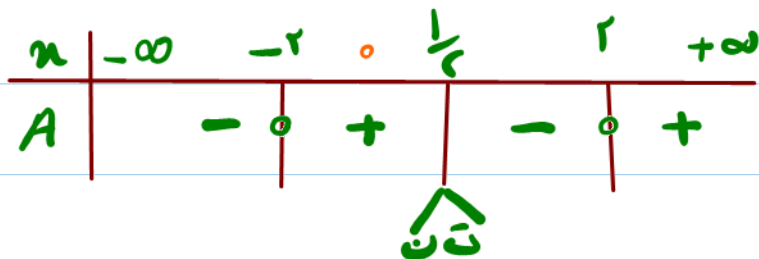
$$\underbrace{3x^2 - x - 2}_{A} \geq 0 \rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
A		$+$	0	$-$	0	$+$

$$ج. م : (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [1, +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{x^r - \varepsilon}{r-1} \leq 0$$

$$x^r - \varepsilon = 0 \rightarrow x^r = \varepsilon \xrightarrow{\sqrt[r]{}} x = \pm \sqrt[r]{\varepsilon}, \quad r-1=0 \rightarrow r=1$$

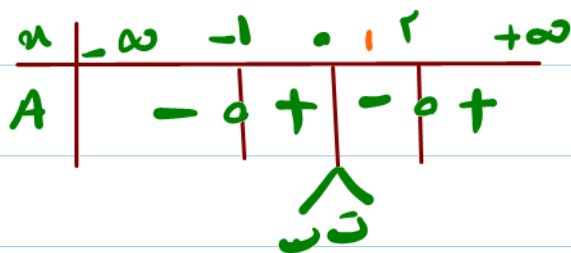


$$Z. r : (-\infty, -r] \cup (\frac{1}{r}, r]$$

$$\Rightarrow x - \frac{r}{x} \geq 1$$

$$x - \frac{r}{x} - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{x(x-r-1)(x)}{x} \geq 0 \rightarrow \frac{x^2 - x - r}{x} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - x - r}{x} = 0 \rightarrow (x-r)(x+1) = 0 \quad \begin{matrix} x=r \\ x=-1 \end{matrix}, \quad x=0$$



$$Z. r = [-1, 0) \cup (r, +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} \leq 0$$

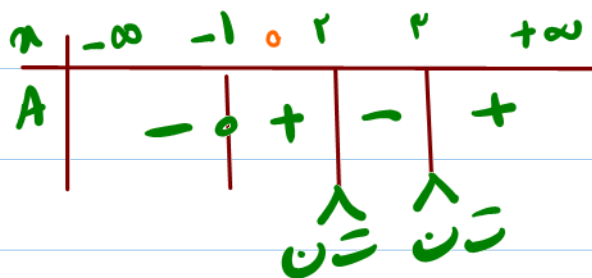
$$x^2+1=0 \rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0 \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x^2-x+1=0 \rightarrow \Delta < 0 \\ \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

چون x^2-x+1 همواره مثبت است و توانیم آن را حذف کنیم. غی

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} \leq 0$$

$$x^2-5x+6=0 \rightarrow (x-2)(x-3)=0$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$



$$\text{ج. م} = (-\infty, -1] \cup (2, 3]$$

$$\Rightarrow 0 < x^2-4x < 2$$

$$\textcircled{1} 0 < x^2-4x \rightarrow x^2-4x > 0 : x(x-4)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$



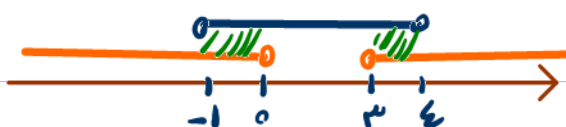
$$x < 0 \text{ یا } x > 4$$

$$\textcircled{2} x^2-4x < 2 \rightarrow x^2-4x-2 < 0 : x^2-4x-2=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=5 \end{cases}$$



$$-1 < x < 5$$

معبره جواب به در صورت زیر قابل نوشتن است:



$$(-1, 2] \cup (2, 3]$$

$$\underline{\underline{(-1, 3]}}$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس سوم: تعیین علامت

حل نامعادله (قسمت دوم، نامعادله
قدر مطلق)

جلسه ششم: صفحات ۹۱ تا ۹۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری:

قدر مطلق یک عدد حقیقی مانند x را این طور تعریف می‌کردیم که اگر x مثبت باشد قدر مطلق

آن خودش می‌شود و اگر x منفی باشد قدر مطلق آن قرینه x می‌شود یعنی:

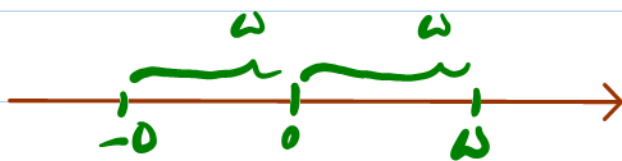
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مانند: $|4| = 4$, $|-4| = 4$, $|7| = 7$, $|-7| = 7$

قدر مطلق را به صورت دیگر نیز می‌توان تعریف کرد. $|x|$ فاصله نقطه x روی محور

از مبدأ است.

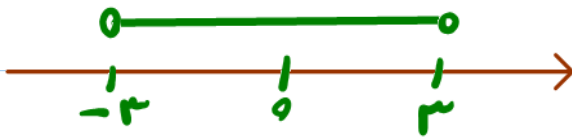
مثلاً وقتی $|5| = 5$ و $|-5| = 5$ یعنی فاصله نقطه ۵ و -۵ هر دو از مبدأ ۵ است.



حال به بحث اصلی یعنی حل فاصله ده قدر مطلق بپردازیم. منظور از حل فاصله ده ای

مانند $|x| \leq 4$ این است که مجموعه تمام x هایی که فاصله آن‌ها تا مبدأ کمتر از ۴ است

را پیدا کنیم.



روش‌های حل نامحاربه قدرمطلق :

الف) اگر a عددی حقیقی مثبت و A یک عبارت جبری باشد از ویژگی‌های زیر در حل نامحاربه

قدرمطلق کمک می‌گیریم :

$$۱) \quad |A| \leq a \rightarrow -a \leq A \leq a$$

$$۲) \quad |A| \geq a \rightarrow A \geq a \quad \vee \quad A \leq -a$$

ویژگی‌های بالا در حالتی که $a > ۰$ هم داشته باشیم برقرار اند.

تذکره: اگر a عددی منفی باشد نامساوی $|A| < a$ هیچگاه برقرار نیست و نامساوی $|A| > a$

همواره برقرار است.

مثال: معبودم جواب ناهار دست قدر مطبخ زیر را به شکل بازه بنویسید.

$$\text{الف) } |r_{n+1}| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq r_{n+1} \leq 2$$

$$\xrightarrow{-1} -1 \leq r_n \leq 1 \xrightarrow{\div r} -1 \leq x \leq \frac{1}{r} \rightarrow \text{I.R.} = [-1, \frac{1}{r}]$$

$$\Rightarrow \left| 1 - \frac{n+1}{r} \right| > \varepsilon$$

$$1 - \frac{n+1}{r} > r \rightarrow -\frac{n+1}{r} > r \xrightarrow{\times (-r)} n+1 < -r \rightarrow n < -1.$$

$$1 - \frac{n+1}{r} < -1 \rightarrow -\frac{n+1}{r} < -1 \xrightarrow{\times (-r)} n+1 > 10 \rightarrow n > 9$$



$$Z.F. = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

⇒ $||x| - r| < \omega$

$$\Rightarrow -\omega < |x| - r < \omega \xrightarrow{+r} -r < |x| < r + \omega$$

۱۱) $a < 2$ ۔ دہرہ برقرار است پس کافی است $a < 8$ (احسن)۔

$$|x| < 1 \rightarrow -1 < x < 1 \rightarrow \text{z.f.} = (-1, 1)$$

$$ج) |x^2 - 2x| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x^2 - 2x \leq 2$$

$$-2 \leq x^2 - 2x \rightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 2 : x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4 \times 1 \times 2 = -8 < 0$$

$$\rightarrow (-\infty, +\infty) \text{ ①}$$

$$\begin{array}{c|c} x & \\ \hline x^2 - 2x + 2 & + \end{array}$$

$$x^2 - 2x \leq 2 \rightarrow x^2 - 2x - 2 \leq 0 : x^2 - 2x - 2 = 0 < \begin{matrix} x = -1 \\ x = 2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow [-1, 2] \text{ ②}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & & 2 \\ \hline x^2 - 2x - 2 & + & 0 & - & 0 & + \\ & & \text{ج.} & & \end{array}$$

$$\text{①} \cap \text{②} \rightarrow \text{ج. ر} = [-1, 2]$$

ب) اگر نمادها به صورت $|A| > |B|$ و $|A| < |B|$ باشد، طرفین

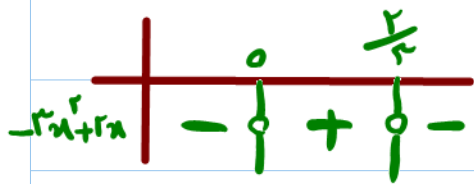
را به توان دو برسانیم تا قدرمطلق از بین برود. پس نمادها حاصل را حل می کنیم.

سؤال: نمادها را زیر را حل کنید.

$$|x-1| \geq |2x-1| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |x-1|^2 \geq |2x-1|^2 \quad \text{الف)}$$

$$\xrightarrow[\text{در یک طرف}]{\text{تکثیر و جمع}} x^2 - 2x + 1 \geq 4x^2 - 4x + 1 \rightarrow \underline{x^2 - 4x^2 - 2x + 4x} \geq 0$$

$$\rightarrow -3x^2 + 2x \geq 0 : -3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(-3x + 2) = 0 < \begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{matrix}$$



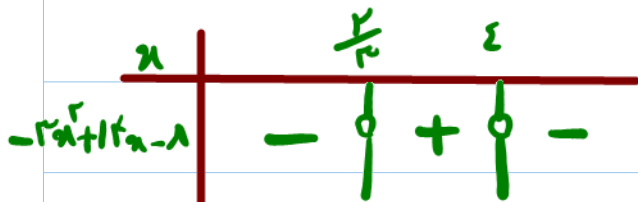
$$ج. م : \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

$$ب) \left| \frac{n+1}{3-2n} \right| > 1 \rightarrow \frac{|n+1|}{|3-2n|} > 1 \xrightarrow[\times |3-2n|]{\text{با شرط } n \neq \frac{3}{2}} |n+1| > |3-2n|$$

$$\xrightarrow{\text{ب توان ۲}} n^2 + 2n + 1 > 9 - 12n + 4n^2 \rightarrow n^2 - 4n^2 + 2n + 12n + 1 - 9 > 0$$

$$\rightarrow -3n^2 + 14n - 8 > 0 : -3n^2 + 14n - 8 = 0 \rightarrow \Delta = 196 - 4(-3)(-8) = 100$$

$$n = \frac{-14 \pm \sqrt{100}}{2(-3)} < \begin{cases} \frac{-12+10}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \\ \frac{-12-10}{-6} = \frac{-22}{-6} = \frac{11}{3} \end{cases} \rightarrow \Delta = 196 - 96 = 100$$



$$ج. م = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right) - \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

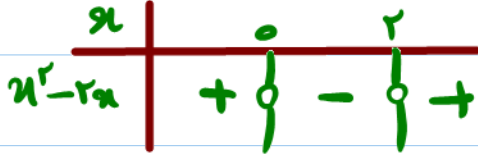
پ) در برخی موارد باید با تعیین حد امت عبارت داخل قدر مطلق و بازه بندی، قدر مطلق

را حذف کنیم و نه عبارات حاصل را حل کنیم. به جرم جواب نهاده را از اجتماع جواب های

هر مت بدست می آید.

مثال: معبره جواب نامداره زیر راجه صورت بازه بنویسید.

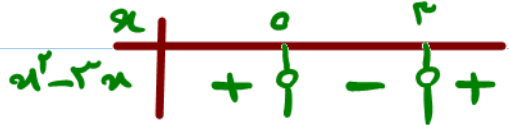
$$|x^r - rx| < x \quad x^r - rx = 0 \rightarrow x(x-r) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=r \end{matrix}$$

$$|x^r - rx| = \begin{cases} x^r - rx & x < 0 \\ -(x^r - rx) & 0 \leq x \leq r \\ x^r - rx & x > r \end{cases}$$


① $x < 0$: $x^r - rx < x \rightarrow x^r - rx - x < 0 \rightarrow x^r - rx < 0$

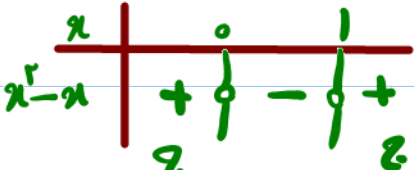
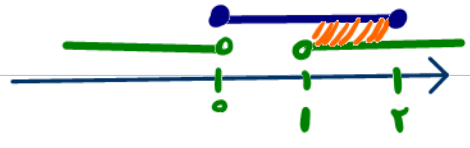
$(x < 0) \cap (0 < x < r) = \emptyset$

A



② $0 \leq x \leq r$: $-(x^r - rx) < x \xrightarrow{x(-1)} x^r - rx > -x$

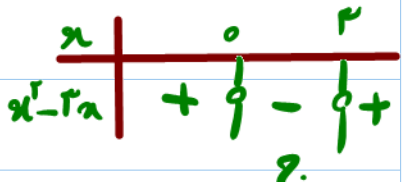
$\rightarrow x^r - x > 0$

$(0 \leq x \leq r) \cap (x < 0 \leq x > 1) = (1, r]$

B

③ $x > r$: $x^r - rx < x \rightarrow x^r - rx < 0$



$(x > r) \cap (0 \leq x < r) = (r, r)$

C

$$Q.2 = A \cup B \cup C = \emptyset \cup (1,2) \cup (2,3) = (1,3)$$

عبارت های درجه دوم همواره مثبت یا همواره منفی :

طبق حالت سوم در چنین عبارت عبارتهای درجه دوم ، اگر دلتا منفی باشد عبارت عبارت

موانع ضرب ثوابت پس می توان گفت :

الف) اگر $\Delta < 0$ و $a > 0$ نگاه $ax^2 + bx + c > 0$.

ب) اگر $\Delta < 0$, $a < 0$ نگاه $ax^2 + bx + c < 0$.

دقت کنید اگر $ax^2 + bx + c > 0$ یا $ax^2 + bx + c \leq 0$ بر نظر باشد هم به

بزرگتر ماری صفر باشد ($\Delta \leq 0$) و شرط های a به همان صورت می آید.

مثال: اگر عبارت $y = mx^2 - 4x + m$ به ازای هر مقدار x ، نامنفی باشد، حدود m را

منفی نباشد غنی مثبت یا منفی باشد

باید.

$$y = mx^2 - 4x + m \geq 0$$

$$① \ a > 0 \rightarrow \underline{m > 0}$$

$$② \ \Delta \leq 0 \rightarrow \Delta = 14 - 4m \times m = 14 - 4m^2 \leq 0 \rightarrow -4m^2 \leq -14$$

$$\div (-4) \rightarrow m^2 \geq \frac{7}{2} \rightarrow \underline{m \geq \sqrt{\frac{7}{2}} \vee m \leq -\sqrt{\frac{7}{2}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 > a^2 \rightarrow x > a \vee x < -a \\ x^2 \leq a^2 \rightarrow -a \leq x \leq a \end{array} \right\} \text{نکته}$$

$$m \text{ مجزوعه} : A \cap B = [\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty) \rightarrow m \geq \sqrt{\frac{7}{2}}$$

مثال: برای زی کتر مقادیر m ، سعی $y = (m-1)x^2 + (m-1)x - 4$ همواره زیر 3 قدر x است؟
 $y < 0$

$$y < 0 \quad ① \ \Delta < 0 \rightarrow m-1 < 0 \rightarrow \underline{m < 1}$$

$$② \ \Delta < 0 \rightarrow \Delta = (m-1)^2 - 4(m-1)(-4) < 0$$

$$\rightarrow (m-1)((m-1)+14) < 0 \rightarrow (m-1)(m+10) < 0$$

$$\rightarrow m+10 > 0 \rightarrow \underline{m > -10}$$

$$m \text{ مجزوعه} : A \cap B = (-10, 1) \rightarrow -10 < m < 1$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل پنجم: تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

جلسه اول: صفحات ۹۵ تا ۹۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

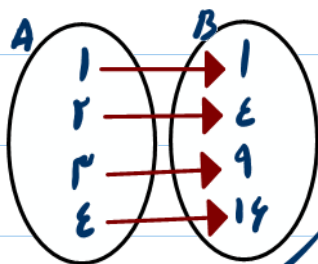
تابع یکی از مفاهیم مهم در ریاضی است که مباحثی چون حد، مشتق و... روی آن بنا

هستند. پس درک آن از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

بحث را با یک مثال شروع کنیم: اگر مربع‌های با اضلاع ۱، ۲، ۳، ۴ داشته باشیم

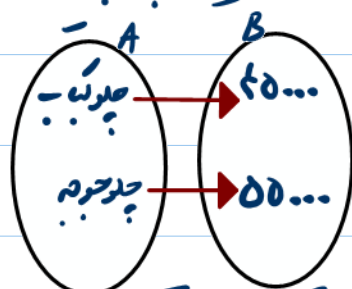
مساحت آن‌ها به ترتیب ۱، ۴، ۹، ۱۶ خواهد شد. پس در معبره $\{1, 2, 3, 4\}$

در $\{1, 4, 9, 16\}$ یک رابطه برقرار است به طوری که هر عدد از معبره اول (طول اضلاع)



به یک عدد در معبره دوم (مساحت‌ها) نظری شود.

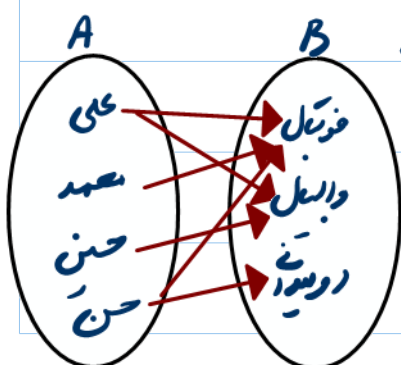
به عنوان مثال دیگر: اگر به یک دستورال بودیم، در منوی دستورال یک رابطه بین



غذاهای مختلف و قیمت آن‌ها می‌بیند.

و باز هم: در کلاس شما، هر دانش آموز به ورزش یا ورزش‌های علاقه مند است پس می‌توان

بین دانش آموزان و ورزش مورد علاقه آن‌ها یک رابطه تعریف کرد.



تابع، رابطه ای است که ویژگی خاصی دارد.

نکته: هرگاه افعای در معبره را با قاعده ای خاص یا حتی بدون هیچ قاعده نوزی به هم نگرانیم

می‌توانیم یک رابطه بین در معبره نوشته ایم

تعریف تابع:

هر تابع از معبره A به معبره B رابطه ای بین این در معبره است که در آن به هر عضو از A

دقیقاً یک عضو از معبره B نسبت داده شود.

مانند: رابطه بین اوزار و قدرتها در میان ده مانی

رابطه بین دانش آموزان به هم و نموداری که خواص

رابطه بین هر شخص و کد ملی فرد که همگی تابع هستند.

وی رابطه بین هر شهر و سوختی های آن شهر تابع نیست زیرا هر شهر ممکن است

بیشتر از یک سوختی داشته باشد.

و یا رابطه بین معبره ای که در طبیعت است و رشته دما آنجا تابع نیست زیرا هر دما در رشته

دما دارد که قدیم می‌گویند.

سوال: کدامیک از رابطه‌های نه در ابتدای درس گفتم تابع است؟ آیا دنباله‌ها، تابع هستند؟

رابطه طول اضلاع - مساحت و منوی رستوران تابع است ولی رابطه دانش آموزان - ورزش مورد علاقه تابع نیست.

بم - A را تأثیر مجستار B را خرد مجستار در نظریه گریم.

نمایش‌های مختلف تابع:

۱- نمودار پیکانی (ون)

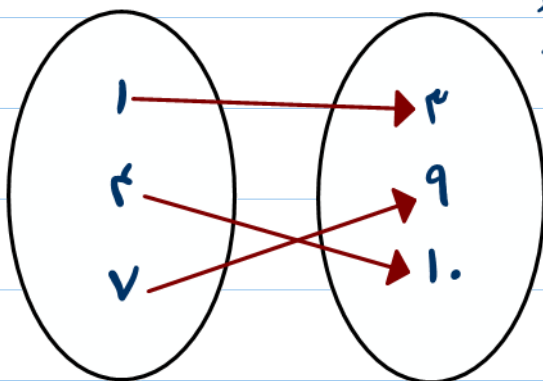
در این نمایش دفاصعبه‌ها را در بیضی‌های زیریم و با پیکان یا فلش به هم نظری کنیم.

معبده A راست چپ و B راست راست می‌نویسیم.

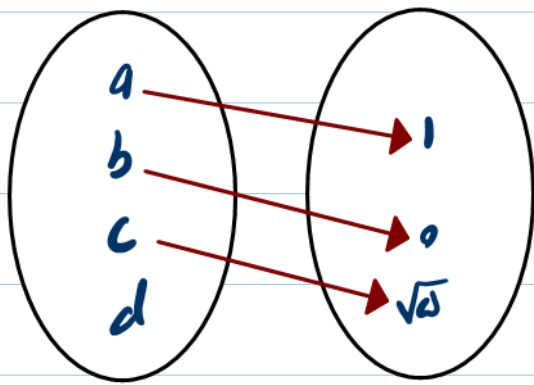
در نمودار پیکانی تابع از معبده A به معبده B ، از هر عنصر معبده A فقط یک نقطه

پیکان به عنصری از معبده B ثبت داده می‌شود.

مثال: کدامیک از رابطه‌های زیر تابع هستند؟

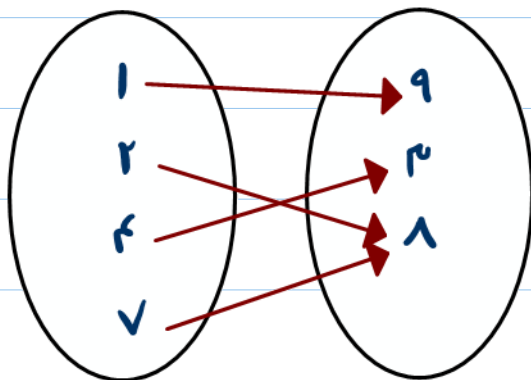


تابع است

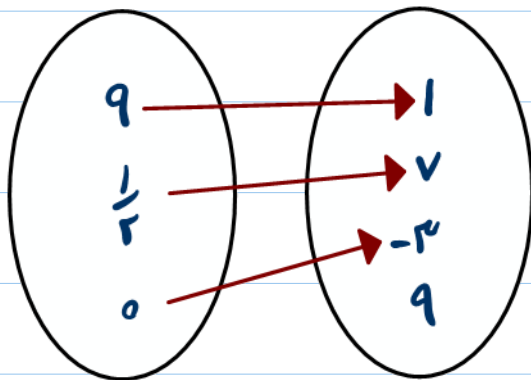


تابع نیست زیرا عضو d نظری

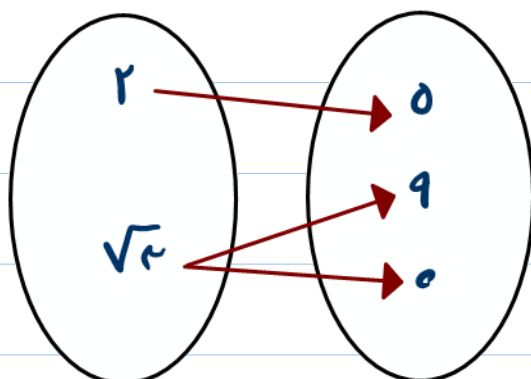
درست را است ندارد.



تابع است.



تابع است.



تابع نیست زیرا $\sqrt{2}$ به

همه به 0 و هم 9 نظریه است.

به نکات زیر در تشخیص تابع دقت کنید :

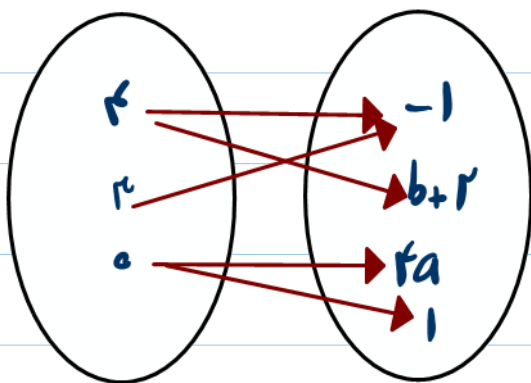
۱- به هر عنصر A باید عنصری از B نسبت داده شود.

۲- به هیچ عنصری از A نباید دو عنصر متباین از B نسبت داده شود.

۳- ممکن است عنصری از B وجود داشته باشد که به هیچ عنصری از A نسبت داده نشده باشد.

۴- ممکن است به دو یا تعداد بیشتری از عنصرهای A یک عنصر از B نسبت داده شود.

مثال : مقدارهای زیر به یک تابع است. a, b را بیابید.



$$b+2=-1 \Rightarrow b=-3$$

$$4a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

۲- نمایش زوج مرتبی

مرد و شری که داخل یک پراشر گندم بنویسیم به طوری که ترتیب نوشتن این روشی مهم باشد

رایک زوج مرتب می گوئیم.

مثلاً زوج مرتب $(۲, ۵)$ با $(۵, ۲)$ متفاوت است.

در هر زوج مرتب، عنصر اول (ست چپ) را مولفه اول (a) و عنصر دوم (ست راست) را

مولفه دوم (b) می‌گوئیم.

زنا دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) برابرند که مولفه‌های اول به هم و مولفه‌های دوم به هم برابر باشند.

یعنی $a = c$ و $b = d$

مثلاً: $(۲, ۷) \neq (۲, ۶)$ و $(۱, ۴) \neq (۴, ۱)$

هر رابطه بین مجموعه A و B را می‌توانیم به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسیم.

به این صورت که اگر عنصر a از مجموعه A را به عنصر b از مجموعه B نظر کرده باشیم، زوج مرتب

(a, b) را در این مجموعه می‌نویسیم.

در نهایت زوج مرتبی تابع، هیچ دو زوج مرتب متفاوتی وجود ندارد که مولفه اول آن‌ها برابر باشند.

مثال: کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

$$\{(2, 7), (7, 8), (-1, 0), (2, \sqrt{2})\}$$

تابع نیست

$$\{(4, 7), (8, 2), (-9, 7)\}$$

تابع است

$$\{(4, -1), (4, -2), (-2, 4), (5, 1)\}$$

تابع است

$$\{(5, \sqrt{3}), (\sqrt{4}, 7), (4, -1), (\sqrt[4]{4}, 1)\}$$

تابع نیست

$$\{(19, 1), (10, \frac{1}{4}), (11, 12), (14, 0), (10, \frac{4}{18})\}$$

تابع است.

تذکره: همیشه در زوج های متبعی که مولفه اول مادی دارند به مولفه های دوم هم دقت کنید.

اگر مولفه در شان چهارم برابر باشد، رابطه یک تابع خواهد بود.

مثال: اگر رابطه $\{(2, 2), (2, a-b), (4, 2a), (4, a+2b)\}$ تابع باشد، a, b را بیابید.

$$(2, 2) = (2, a-b) \Rightarrow a-b=2$$

$$(4, 2a) = (4, a+2b) \Rightarrow a+2b=2a \Rightarrow -a+2b=0$$

$$+ \begin{cases} a-b=2 \\ -a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} a-b=2 \\ -a+2b=0 \\ \hline b=2 \end{array} \Rightarrow a-2=2 \Rightarrow a=4$$

مثال: رابطه $\{(-2, a+1), (a, 1), (-2, 0), (-2, 2), (2, b+1)\}$ صحاح متدار.

ا و ب را بیاب.

$$(-2, a+1) = (-2, 0) \Rightarrow a+1 = 0 \Rightarrow a' = -1 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$\boxed{a=2} : \{(-2, 0), (2, 1), (-2, 2), (2, b+1)\} : b+1=1 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

صح و نت صح نه شور. $a=-2 : \{(-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (2, b+1)\}$

مثال: رابطه $\{(2, a+b), (2, 1), (2, 2), (2, ab)\}$ صحاح متدار. اگر $b > a$.

متدار $\frac{a}{b}$ کرامات ؟ $1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{4}$

$$(2, a+b) = (2, 2) \Rightarrow a+b = 2 \Rightarrow b = 2-a$$

$$(2, 1) = (2, ab) \Rightarrow ab = 1 \Rightarrow a(2-a) = 1 \Rightarrow -a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{a^2 - 2a + 1}_{\text{مربع کامل}} = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a-1 = \pm \sqrt{0}$$

$$a = 1 \pm \sqrt{0} \begin{cases} a = 1 + \sqrt{0} \Rightarrow b = 2 - 1 - \sqrt{0} = 1 - \sqrt{0} \checkmark (a > b) \\ a = 1 - \sqrt{0} \Rightarrow b = 2 - 1 + \sqrt{0} = 1 + \sqrt{0} \times \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2+\sqrt{4}}{2-\sqrt{4}} \times \frac{2+\sqrt{4}}{2+\sqrt{4}} = \frac{(2+\sqrt{4})^2}{4-4} = (2+\sqrt{4})^2 = 4+4\sqrt{4}+4$$

$$= 8+4\sqrt{4} \quad \text{گزینۀ ۴}$$

مثال: رابطه $\{(4, m), (3, m+2), (-2, m), (2, 1), (3, m')\}$ به بزرگی کدام مقدار m

تابع است؟ $2, 1, -1, 2, 3, 4$ هیچ مقدار m

$$(3, m') = (3, m+2) \Rightarrow m' = m+2 \Rightarrow m' - m - 2 = 0 \quad \begin{matrix} m = -1 \\ m = 2 \end{matrix}$$

تابع است $m = -1$: $\{(4, 1), (2, 1), (-2, 1), (1, 4)\}$

تابع نیست $m = 2$: $\{(4, 4), (2, 4), (-2, 4), (1, 4)\}$

گزینۀ ۲

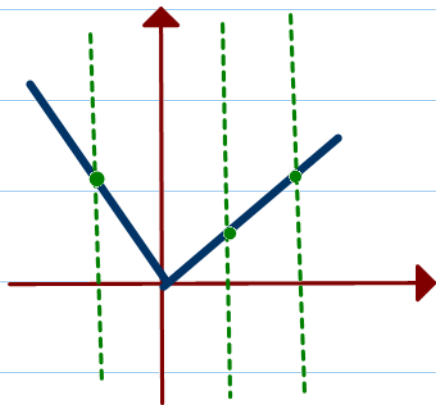
۳- نمودار مختصات

هر زوج مرتب از عددها را می توان مختصات نقطه ای در دستگاه مختصات در نظر گرفت.

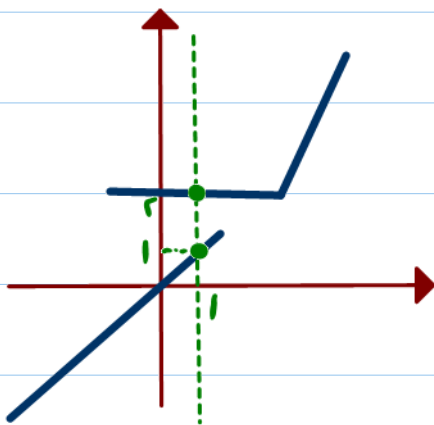
در نمایش نمودار مختصات یک رابطه زما تابع است که در نمودار مختصات آن، عرضی موازی

محورهاها، نمودار را حد اکثر در یک نقطه قطع کند.

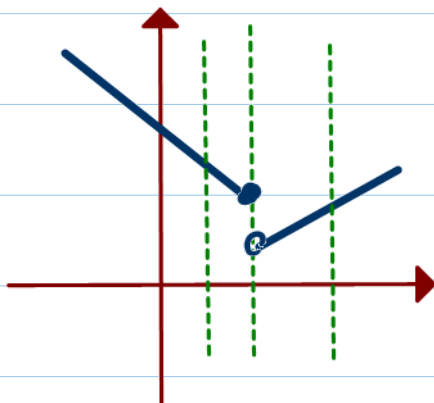
سؤال: کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟



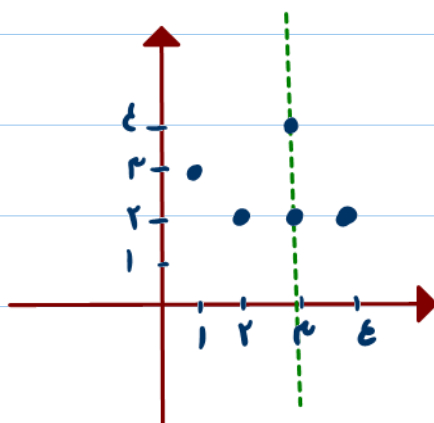
تابع است



تابع نیست



تابع است



تابع نیست

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل پنجم: تابع

درس دوم: دامنه و برد توابع

جلسه دوم: صفحات ۱۰۱ تا ۱۰۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

دامنه و برد تابع :

در نمایش زوج مدتی : مجموعه همه مولفه های اول زوج مدتی ها را تشکیل دهنده تابع را

دامنه تابع و مجموعه همه مولفه های دوم را برد می گویند.

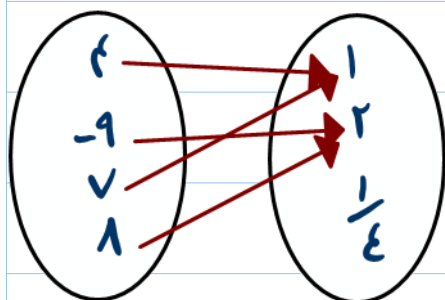
در نمایش یکانی : اعضای مجموعه اول (ست چپ یا A) دامنه و اعضای از مجموعه دوم

(ست راست یا B) که به آنها یککان دارد شده است بر ترف می شود.

در نمایش نمودار مختصاتی : مایه نقاط روی محور ها دامنه و مایه نقاط روی محور ها برد است.

تذکر: دامنه را با D و برد را R نمایش دهیم.

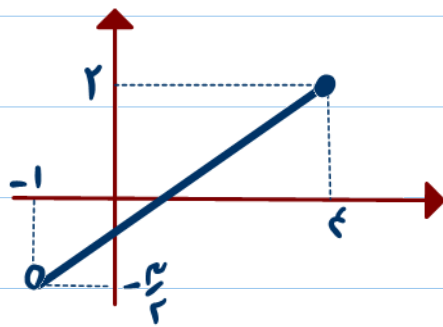
مثال: دامنه و برد توابع زیر را بیابید.



$$D = \{4, -9, 7, 1\} \quad R = \{1, 2\}$$

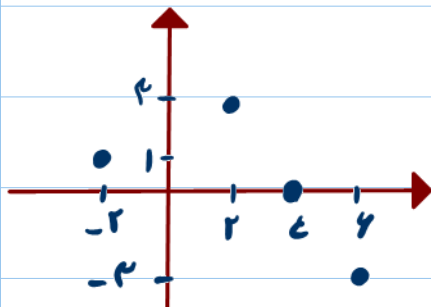
$$\{(4, 1), (4, 5), (7, 7), (15, 9), (1, 5)\}$$

$$D = \{2, 4, 6, \sqrt{8}, 1\} \quad R = \{1, 5, 7, 9\}$$



$$D = (-1, 4]$$

$$R = (-\frac{1}{4}, 2]$$



$$D = \{-2, 2, 4, 6\}$$

$$R = \{1, 3, 5, -3\}$$

مثال: در هر قسمت تابعی با شرایط خواسته شده مثال بنویسید.

الف) دامنه $\mathbb{R}$ و فاصله صعود داشته باشد. $\{(1, 4), (2, 5), (3, 1)\}$

ب) برد $\mathbb{R}$ و یک فاصله صعود داشته باشد. $\{(2, 1), (5, 1)\}$

پ) مقدار اصفای دامنه در بر مادی باشد. $\{(4, 7), (1, 11), (9, 1)\}$

ت) دامنه در هر دو نامشعب باشند.

$$\{(2, 1), (4, 3), (6, 5), \dots\}$$

مثال: اگر مقدار اصفی بر تابع $f = \{(1, 4), (3, 5), (5, 4)\}$ کمتر از مقدار اصفی دامنه

آن باشد، a را بیاوریم. $D_f = \{1, 3, 5\}$ ۴ عضو

می خواهیم در دو اصفی باشد یعنی $a' = 5$ و $a' = 4$: $R_f = \{4, 5, 4\}$

$$a' = 5 \Rightarrow a = \pm\sqrt{5} \quad \text{و} \quad a' = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{4}$$

مثال: اگر بر تابع $f = \{(2, 2m+n), (3, 2m), (4, 4)\}$ تک اصفی باشد، $m \times n$ را بیابیم.

$$2m+n = 2m = 4$$

$$2m = 4 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow 2 \times 2 + n = 4 \Rightarrow 4 + n = 4 \Rightarrow n = 2$$

$$m \times n = 2 \times 2 = 4$$

مقدار تابع:

اگر زوج مرتب (a, b) در ناحیه زوج مرتبی تابع f باشد یعنی $f(a) = b$

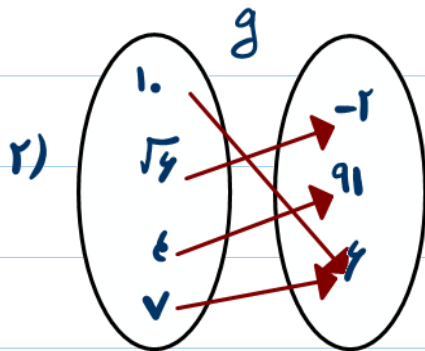
دی گوییم مقدار تابع f در a برابر با b است.

مثال: در هر قسمت مقدارهای خواسته شده را بدست آورید.

$$1) f = \{(1, -1), (4, 0), (5, 7), (11, 1), (-1, 2)\}$$

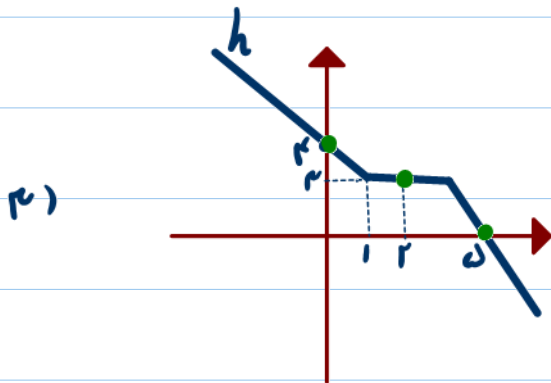
مقدار جمع f در x برابر 1 است. $f(1) = 1$

$$f(5) \times f(1) = 7 \times (-1) = -7$$



$$g(4) = 91$$

$$2g(7) - 4g(\sqrt{4}) = 2 \times 4 - 4 \times (-2) = 12 + 8 = 20$$



$$\frac{h(0) + 4h(2)}{h(0)} = \frac{0 + 4 \times 3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

مثال: در تابع $f = \{(1, a+1), (2, a-5b), (3, 2b), (5, a-2)\}$ اگر $f(2) = 4$ و $f(1) = 2$ باشد

پس a, b را بیابیم. $\frac{f(5)}{f(3)}$ را بیابیم.

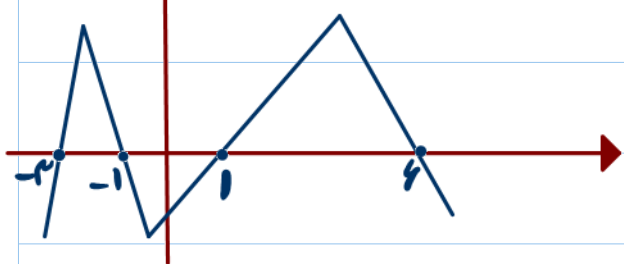
$$f(2) = 4 \Rightarrow a - 5b = 4$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$1 - 5b = 4 \Rightarrow -5b = 3 \Rightarrow b = -\frac{3}{5}$$

$$f(5) = a - 2 = 1 - 2 = -1, f(3) = 2b = 2(-\frac{3}{5}) = -\frac{6}{5} \Rightarrow \frac{f(5)}{f(3)} = \frac{-1}{-\frac{6}{5}} = \frac{5}{6}$$

مثال: نمودار تابع f داده شده است. برای چه اعدادی a داریم $f(a) > 0$ ؟



$$f(a) : \begin{matrix} \circ & + & \circ & \circ & + & + & + & + & \circ \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{matrix}$$

$$a \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

منطقه تابع (نمایش جبری)

اگر ارتباط بین متغیرهای اول و دوم تابع f را بتوان به صورت یک عبارت جبری نشان داد،

به این رابطه جری، ضابطه تابع می گوئیم.

مثلاً: اگر در تابع f دو نقطه دوم هر زوج مرتب پنج برابر دو نقطه اول باشد ضابطه تابع

$$y = f(x) = 5x \text{ می باشد.}$$

مثال: برای تابع $f = \{(2, 1), (4, 2), (5, \frac{5}{4})\}$ یک ضابطه جری بنویسید.

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

مثال: اگر $f(x) = 4x - 1$ ، $g(x) = x^2 + 3x$ باشند مقدار $\frac{2f(11) - 5g(2)}{g(-4)}$ را حساب کنید.

$$f(11) = 4(11) - 1 = 43, \quad g(2) = 2^2 + 3(2) = 4 + 6 = 10, \quad g(-4) = (-4)^2 + 3(-4) = 16 - 12 = 4$$

$$= 14 - 12 = 4 \quad \frac{2f(11) - 5g(2)}{g(-4)} = \frac{2 \times 43 - 5 \times 10}{4} = \frac{86 - 50}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

نکته:

می توان تابع را داشتنی در نظر گرفت که به ازای هر ورودی یک خروجی تحول می دهد. ورودی ها

از دامنه تابع داده می شوند و خروجی ها در بردارند. در ضمن به ازای هر ورودی دقیقاً

یک خروجی صادر دارد. البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند

اگر x عضوی از دامنه تابع f و y خروجی این تابع y باشد، می‌نویسیم $y = f(x)$

به نحوی که داشتن تابع روی و مداری انجام می‌دهد تا خروجی را تحول دهد، ضابطه تابع می‌گویند.



تذکر: اگر دامنه داده نشده باشد، بزرگترین مجموعه‌ای که اعضای آن را بتوانیم به جای x

قرار دهیم و خروجی تحول بگیریم، دامنه در نظر می‌گیریم.

مثال: تابع f با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ را در نظر بگیرید. با دامنه‌های زیر به‌دراکن را

در نگاه متفاوت رسم کنید.

$$D_f = \{-2, -1, 0, 1, 4\} \text{ دامنه}$$

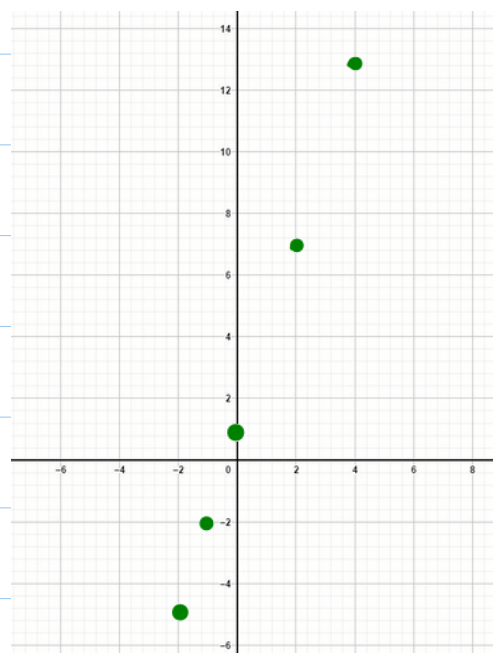
$$f(-2) = 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -5$$

$$f(-1) = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$f(0) = 2(0) + 1 = 1$$

$$f(1) = 2(1) + 1 = 3, \quad f(4) = 2(4) + 1 = 9$$

$$R_f = \{-5, -1, 1, 3, 9\}$$

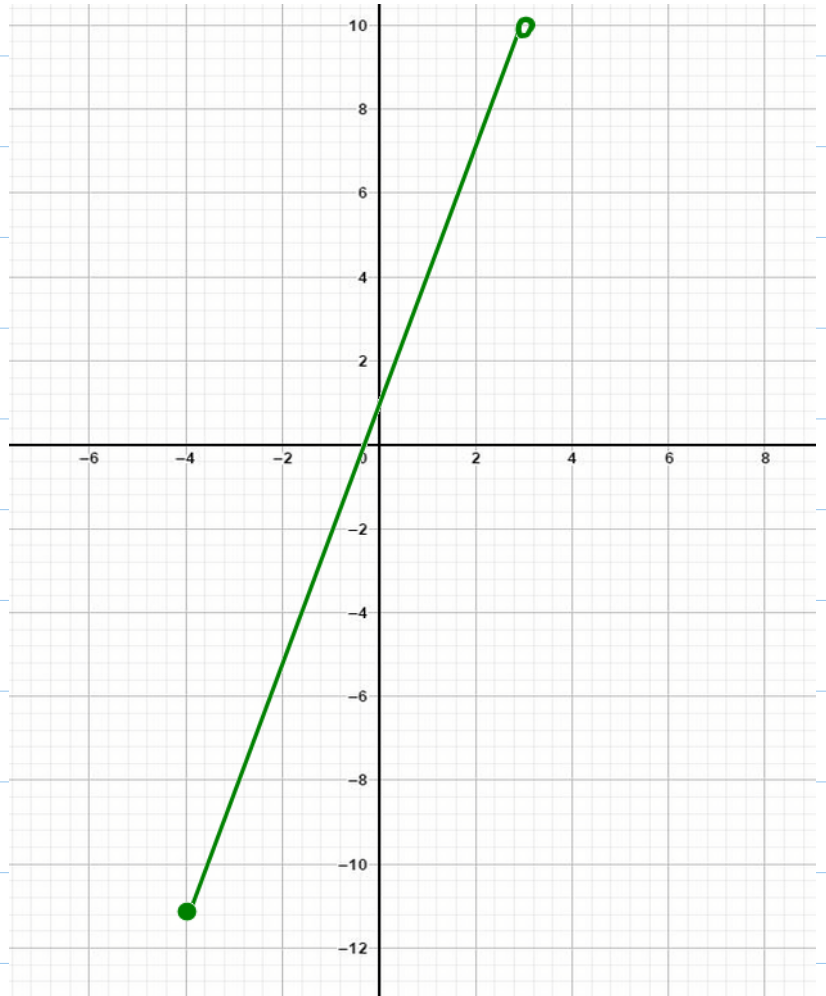


ب) $D_f = [-4, 3)$

$$f(-4) = c(-4) + 1 = -11$$

$$f(3) = c(3) + 1 = 10$$

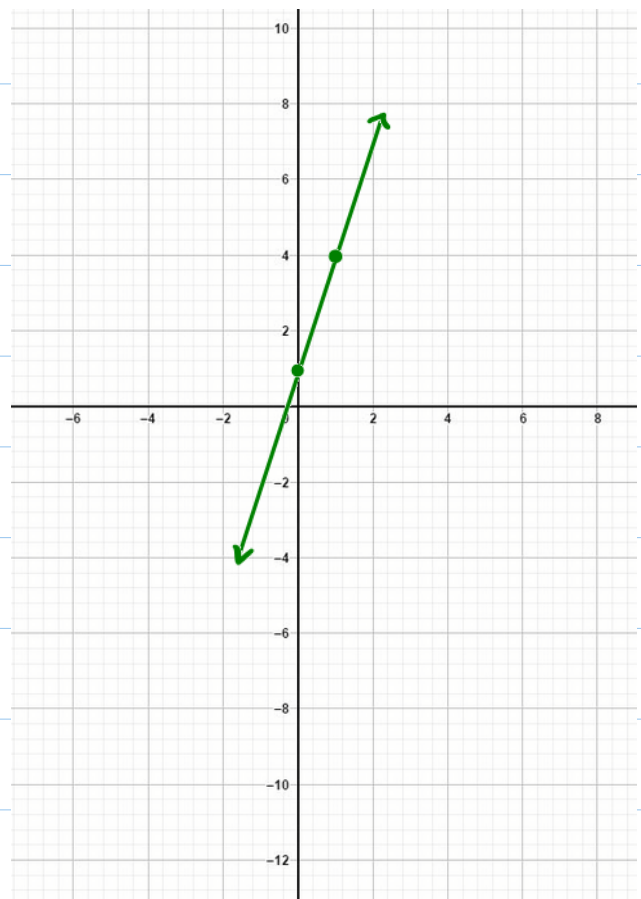
در ادامه به رسم نمودار می‌پردازیم



ب) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(0) = c(0) + 1 = 1$$

$$f(1) = c(1) + 1 = 4$$



مثال: اگر $f(x) = x^2 + \epsilon x$ ، حاصل مقدار زیر را بنویسید.

الف) $f(f(1))$

$$f(1) = 1^2 + \epsilon(1) = 1 + \epsilon = 0 \Rightarrow f(f(1)) = f(0) = 0^2 + \epsilon(0) = 0 + 0 = 0$$

ب) $f(3x) = (3x)^2 + \epsilon(3x) = 9x^2 + 3\epsilon x$

ج) $f\left(\frac{x}{n}\right) = \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \epsilon\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\epsilon}{n^2} + \frac{1}{n} = \frac{\epsilon + n}{n^2}$

د) $f(\sqrt{x}-1)$

$$f(x) = x^2 + \epsilon x + \epsilon - \epsilon = (x+1)^2 - \epsilon \Rightarrow f(x) = (x+1)^2 - \epsilon$$

جواب

$$f(\sqrt{x}-1) = (\sqrt{x}-1+1)^2 - \epsilon = (\sqrt{x})^2 - \epsilon = x - \epsilon = x - 1$$

مثال: مجموع $f(n) = \frac{nx}{n^2+1}$ ، اگر $f(k) = 1$ ، بنویسید $f(k-1)$ کد های است؟

$$\frac{\epsilon}{0} \text{ یا}$$

$$\frac{1}{x}$$

$$0 \text{ یا}$$

$$-1 \text{ یا}$$

$$f(k) = \frac{rk}{k^r+1} = 1 \Rightarrow k^r+1 = rk \Rightarrow k^r - rk + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^r = 0 \Rightarrow k=1$$

$$f(k-1) = f(1-1) = f(0) = \frac{r \times 0}{0^r+1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{نیز}$$

مثال: اگر $f(x) = ax^r + bx^r$ ، اگر $f(1) - f(-1) = -5$ ، a و b را بیابید؟

$$1 \quad 1 \quad -5 \quad 1 \quad -5 \quad 1$$

$$f(1) = a(1)^r + b(1)^r = a + b$$

$$f(-1) = a(-1)^r + b(-1)^r = -a + b$$

$$f(1) - f(-1) = a + b - (-a + b) = -5 \Rightarrow a + b + a - b = -5$$

$$2a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \quad \text{نیز}$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x^r}{x+1}$ ، $f(f(a)) = \frac{5}{r}$ ، a را بیابید؟

$$\frac{5}{r} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$f(f(a)) = \frac{f(a)^r}{f(a)+1} = \frac{5}{r} \Rightarrow \frac{f(a)^r}{f(a)+1} = \frac{5}{r}$$

$$0 f(a) - c f(a) = 9 - 0 \Rightarrow 2 f(a) = 9 \Rightarrow f(a) = \frac{9}{2}$$

گزینه ۲: $f(a) = \frac{a+2}{a+1} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2a+2 = a+2 \Rightarrow 2a-a = 2-2 \Rightarrow a=0$

مثال: اگر $f(9x-2) = 9x+7$ باشد، $f(-1)$ را بیابید.

بیابیم x ای را پیدا کنیم که $9x-2 = -1$:

$$9x-2 = -1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$f\left(9 \times \frac{1}{9} - 2\right) = 9 \times \frac{1}{9} + 7 = 1 + 7 = 8$$

مثال: اگر $f(2x-1) = x^2 - 1$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

$$2x-1 = t \Rightarrow 2x = t+1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{2}$$

$$f(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{t^2 + 2t + 1}{4} - 1 = \frac{t^2 + 2t + 1 - 4}{4} = \frac{t^2 + 2t - 3}{4}$$

$$f(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{4}$$

$$t \rightarrow x : f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4}$$

مثال: اگر $f(n) = \frac{n+r}{r}$, $f(n) = r f(n-1)$, مقدار k گزینید؟

$1 \leq$

$-1 \leq$

$r \leq$

$-r \leq$

$$f(k-r) = \frac{k-r+r}{r} = \frac{k}{r}$$

$$f(r) = \frac{r+r}{r} = \frac{0}{r}$$

$$f(k-1) = \frac{k-1+r}{r} = \frac{k+r}{r}$$

$$\frac{k}{r} + \frac{0}{r} = r \left(\frac{k+r}{r} \right) = k+r$$

$$\frac{k}{r} + \frac{0}{r} = k+r \quad \times r \rightarrow k+0 = rk+r$$

$$k-rk = r \Rightarrow -k = r \Rightarrow k = -r \quad \text{گزینه ۴}$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل پنجم: تابع

درس سوم: انواع تابع

قسمت اول

جلسه سوم: صفحات ۱۰۹ تا ۱۱۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

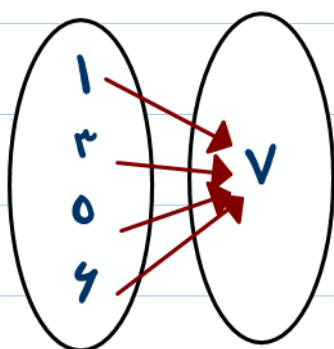
انواع تابع

۱. تابع ثابت:

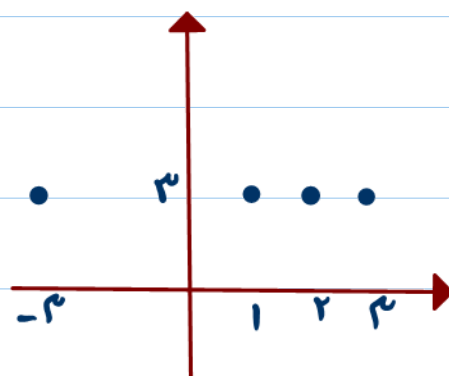
تابعی است که برد آن فقط یک عنصر دارد. ضابطه تابع ثابت f به صورت:

$$f(x) = c \quad c \in \mathbb{R}$$

است.



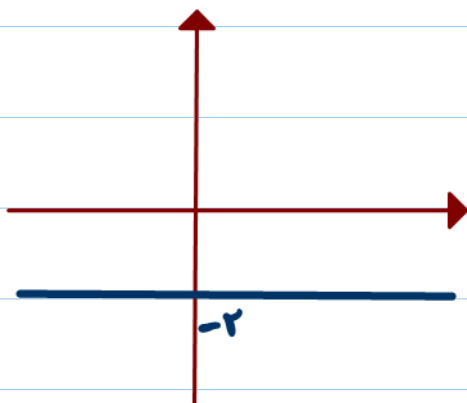
مانند:



$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$$

تذکر: اگر دامنه تابع ثابت $\mathbb{R}$ باشد، بنابر آن یک خط افقی موازی محور x حالت.

مانند:



$$f(x) = -2 \quad D_f = \mathbb{R}$$

مثال: اگر $f = \{(2, 4), (3, m-2), (-2, m+2n), (-4, mn+k)\}$ یک تابع ثابت

باشد، mnk کدام است؟

$$-5.4$$

$$5.13$$

$$-6.12$$

$$6.11$$

چون تابع ثابت $f(x) = 4$ است پس:

$$m-2=4 \Rightarrow m=6$$

$$m+2n=4 \Rightarrow 6+2n=4 \Rightarrow 2n=-2 \Rightarrow n=-1$$

$$mn+k=4 \Rightarrow 6(-1)+k=4 \Rightarrow k=10$$

$$mnk = 6(-1)(10) = -60$$

گزینه ۲

۱۲) تابع همنی:

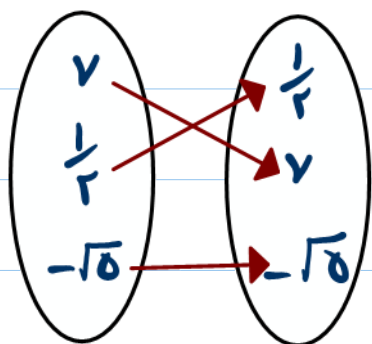
تابعی است که دامنه و بردار آن مساوی اند و هر عضو از دامنه تابع به همان عضو در برد

تابع نظری شود. ضابطه تابع همنی f به صورت:

$$f(x) = x$$

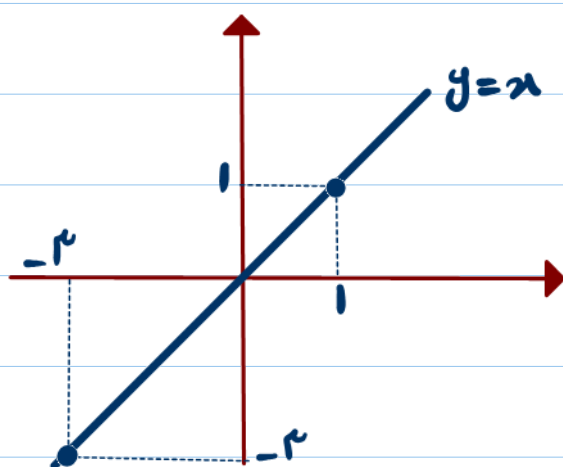
است.

مانند:



$$f = \{(0,0), (-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}), (2,2), (1,1), \dots\}$$

تذکر: اگر دامنه تابع هفتی، $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن خط $y=x$ یعنی نیم‌نوار ربع اول و سوم است.



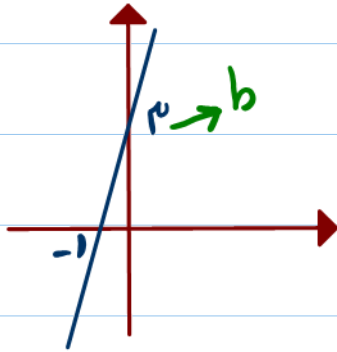
مثال: تابع $f = \{(1, -2), (a-2b), (2, a+b), (1,0), \dots\}$ هفتی است. a, b را بیابید.

$$\begin{cases} a-2b = -2 \\ a+b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a-2b = -2 \\ \underline{a+b = 2} \\ -3b = -4 \end{matrix} \Rightarrow b = \frac{4}{3} \Rightarrow a + \frac{4}{3} = 2 \Rightarrow a = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

۱۳. تابع خطی:

مربعی که ضابطه آن به صورت $f(x) = ax + b$ باشد، را تابع خطی می‌گویند.

مثال: مقدار تابع خطی f به صورت زیر است. اگر $f(2a) - f(a) = 15$ باشد a را بیابید.



عرض از مبدأ = محل برخورد خط با محور y ها $= 2 = b$

شیب = وقتی از $x = -1$ به $x = 0$ حرکت کنیم y از 0 به 3 می‌رسد $= 3$

$$f(x) = 3x + 2 \Rightarrow 3(2a + 2) - (3(a) + 2) = 15$$

$$12a + 12 - 4a - 2 = 15 \Rightarrow 8a = 5 \Rightarrow a = 1$$

مثال: اگر در تابع $f(x) = -2x - 3$ دامنه $[-2, 4]$ باشد، بردار تابع را بیابید.

$$D = [-2, 4] : \quad -2 \leq x \leq 4 \xrightarrow{x(-2)} 4 \geq -2x \geq -8$$

$$\Rightarrow -8 \leq -2x \leq 4 \xrightarrow{-\frac{2}{2}} -11 \leq -2x - 3 < 1$$

$$\Rightarrow -11 \leq f(x) < 1 \Rightarrow R = [-11, 1)$$

۱۴ تابع چندجمله‌ای :

تابعی است که ضابطه آن چندجمله‌ای درجه n است. یعنی ضابطه آن به صورت:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0.$$

است که ضرایب a_0 تا a_n عدد حقیقی اند و $n \in \mathbb{N}$. اگر دامنه تابع چندجمله‌ای مشخص

نشده باشد، دامنه آن $\mathbb{R}$ است.

$$f(x) = 1x^4 - 9x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 0x + 17 \quad \text{مانند:}$$

$$f(x) = 7x^2 - x + 1, \quad f(x) = 7x + 4, \quad f(x) = x, \quad f(x) = 0$$

نتیجه:

۱) تابع ثابت، تابع چندجمله‌ای درجه صفر است. همچنین می‌توان گفت سطر در تابع

ثابت، ضرایب باقی می‌ماند.

۲) تابع خطی، تابع چندجمله‌ای درجه اول است. همچنین می‌توان گفت سطر در تابع خطی

خطی باشد یک عرض از مبدأ می‌گذرد.

۳) تابع خطی، تابع چندجمله‌ای درجه اول است.

۴) ضابطه تابع چندجمله‌ای درجه دوم به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که مقدار

آن یک‌سنگی است. ($a \neq 0$)

مثال: در تابع چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + ax^2 + bx$ داریم $f(1) = 2$ ، $f(-1) = -4$

a و b را بدست آورید.

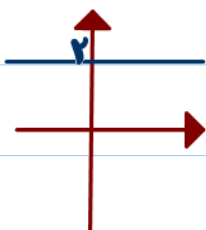
$$f(1) = 1^2 + a(1)^2 + b(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

$$f(-1) = (-1)^2 + a(-1)^2 + b(-1) = -4 \Rightarrow -1 + a - b = -4 \Rightarrow a - b = -3$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = -3 \end{cases}$$

$$\underline{2a = -2} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow -1 + b = 1 \Rightarrow b = 2$$

مثال: اگر شش زیر بندهای تابع $f(x) = (a+b-1)x + b - 4$ باشد، a و b را بیاب!



۱۴

۳ ۴

۵ ۶

۱۱ ۱۲

$$f(x) = \underbrace{(a+b-1)}_0 x + \underbrace{b-4}_2 = 2$$

$$\Rightarrow a+b-1=0 \Rightarrow a+b=1$$

$$b-4=2 \Rightarrow b=6 \Rightarrow a+6=1 \Rightarrow a=-5$$

$$b-a = 6 - (-5) = 6 + 5 = 11 \quad \text{نیزه ۲:}$$

مثال: اگر $f(x) = (a-2)x^2 + (b-4)x + a+b-c$ ضابطه یک به یک ضابطه باشد

$\mathbb{R}$ باشد، مقدار c کجاست؟

$\forall x$

$\forall x$

$\forall x$

$\forall x$

$$f(x) = \underbrace{(a-2)}_0 x^2 + \underbrace{(b-4)}_1 x + \underbrace{a+b-c}_0 = x$$

$$a-2=0 \Rightarrow a=2$$

$$b-4=1 \Rightarrow b=5$$

$$a+b-c=0 \Rightarrow 2+5-c=0 \Rightarrow c=7 \quad \text{نیزه ۳}$$

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل پنجم: تابع

درس سوم: انواع تابع

قسمت دوم

جلسه چهارم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۱۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

(۵) تابع چند ضابطه‌ای :

تابعی است که برای زیر مجموعه‌های مختلف از دامنه‌اش، ضابطه‌های متفاوتی دارد :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A_1 \\ f_2(x) & x \in A_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in A_n \end{cases}$$

و $D_f = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ است.

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & x \geq 0 \\ x+2 & x < 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(2) + f(-2)$ را بیابید.

$2 > 0$: ضابطه اول: $f(2) = 2(2) - 4 = 4 - 4 = 0$

$$\Rightarrow f(2) + f(-2) = 0 + 1 = 1$$

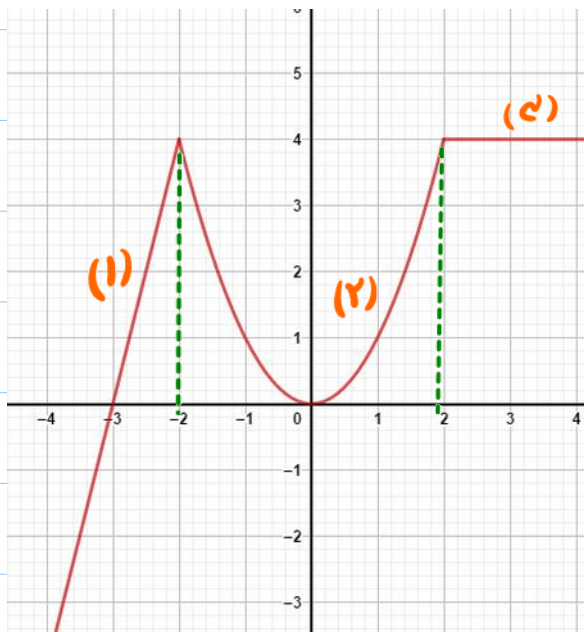
$-2 < 0$: ضابطه دوم: $f(-2) = -2 + 2 = 0$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 1 \\ 2-x & x \leq 1 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(f(-1))$ را بیابید.

$-1 < 1$: ضابطه دوم: $f(-1) = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

ضابطه اول: $3 > 1$
 $f(f(-1)) = f(3) = 3 + 2 = 5$

مثال: نمودار زیر را در نظر بگیرید. ضابطه آن را بدست آورید.



(1) : $(-4, 0), (-2, 4)$

$$m = a = \frac{4 - 0}{-2 + 4} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) : y - 0 = 2(x + 4)$$

$$\Rightarrow y = 2x + 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & x \leq -2 \\ x^2 & -2 < x < 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

مثال: برآیند $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & 0 \leq x < 2 \\ x^2 + 2x & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ را بدست آورید.

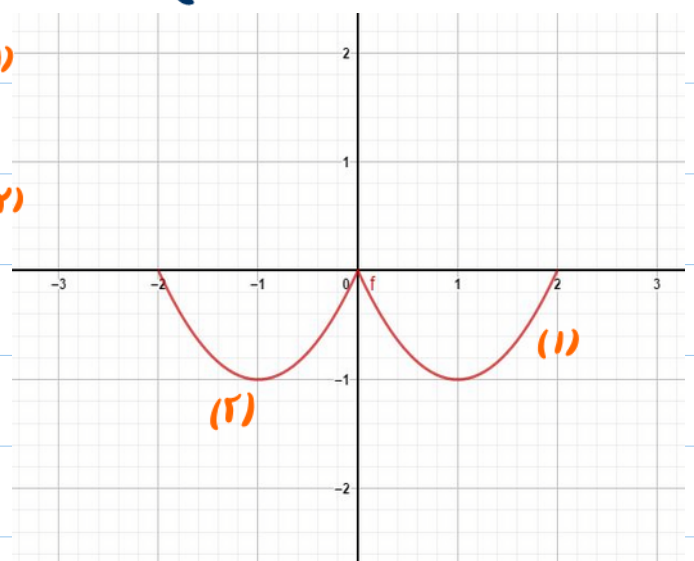
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & 0 \leq x < 2 \\ (x+1)^2 - 1 & -2 \leq x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

x	0	1	2
y	0	-1	0

(1)

x	-2	-1	0
y	0	-1	0

(2)



$$R_f = [-1, 0]$$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx & x \geq -1 \\ x + m & x \leq -1 \end{cases}$ تابع باشد، m کدام است؟

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \quad 14 \quad 2 \quad 4 \quad -2 \quad 4$$

ضابطه اول: $f_1(-1) = (-1)^2 + m(-1) = 1 - m$

ضابطه دوم: $f_2(-1) = -1 + m$

تابع است: $f_1(-1) = f_2(-1) \Rightarrow 1 - m = -1 + m \Rightarrow 2 = 2m \Rightarrow m = 1$
گزینه ۱

۱۶ تابع قدر مطلق:

تابعی است که در ضابطه آن متغیر داخل قدر مطلق است.

مانند: $y = |x| + 1$, $y = |3x - 1|$, $y = -5|x + 2| + 4$

تذکر: به کمک تعریف قدر مطلق، توابع قدر مطلق را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم.

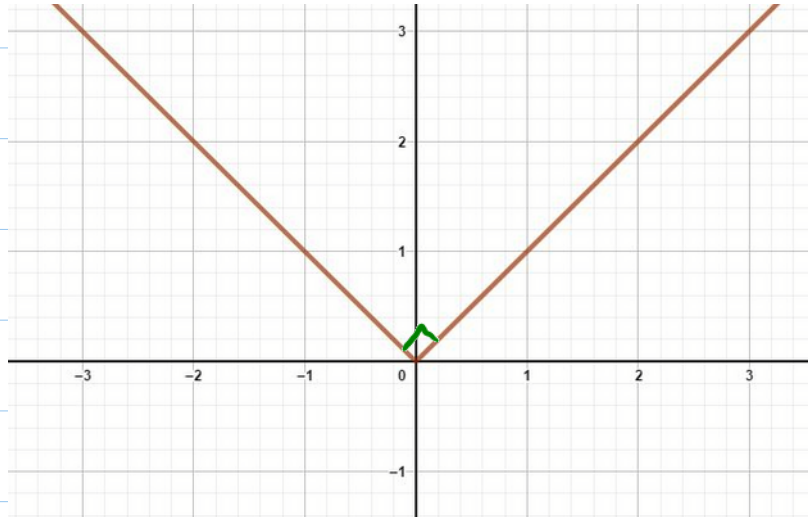
به این صورت که عبارت داخل قدر مطلق را بخش‌های مثبت می‌کنیم و با توجه به علامت

عبارت، قدر مطلق را حذف می‌کنیم.

مثال: مقدار تابع $f(x) = |x|$ را رسم کنید.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$



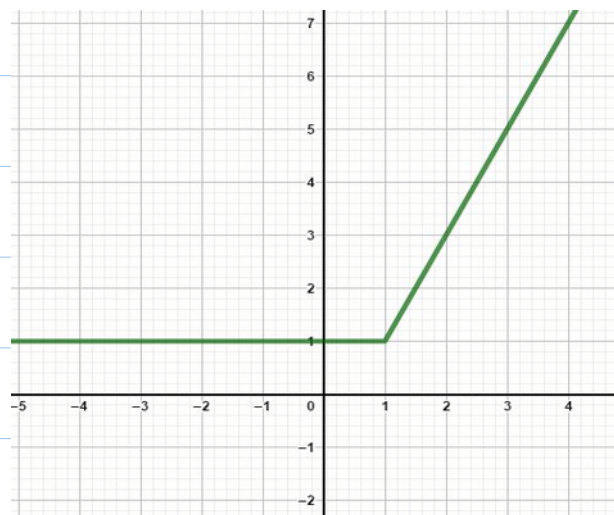
مثال: مقدار تابع زیر را رسم کنید.

1) $y = x + |x-1|$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$$f(x) = \begin{cases} x + x - 1 & x \geq 1 \\ x - \underbrace{(x-1)}_{-x+1} & x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$$

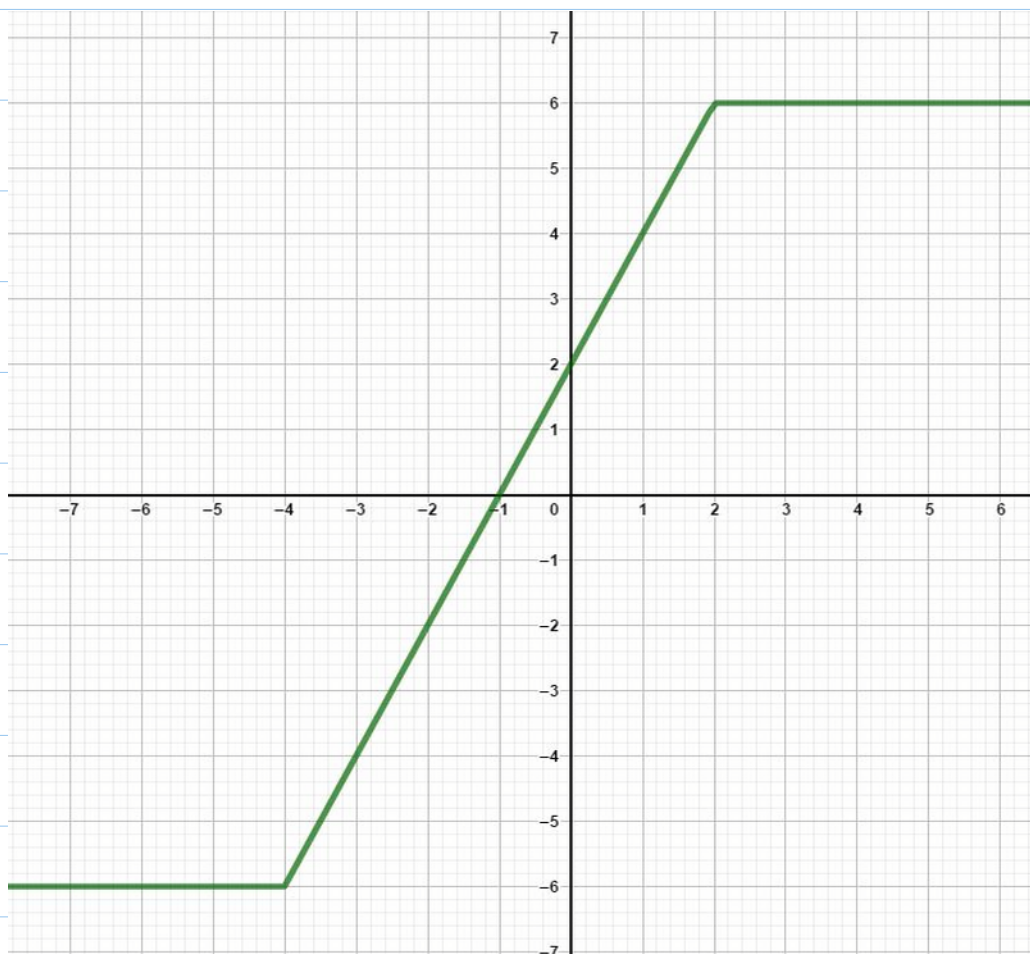


$$r) \quad y = |x+1| - |x-2|$$

	$-x - \varepsilon$	$x - r$	$r + \infty$
$x + \varepsilon$	-	+	+
$x - r$	-	-	+

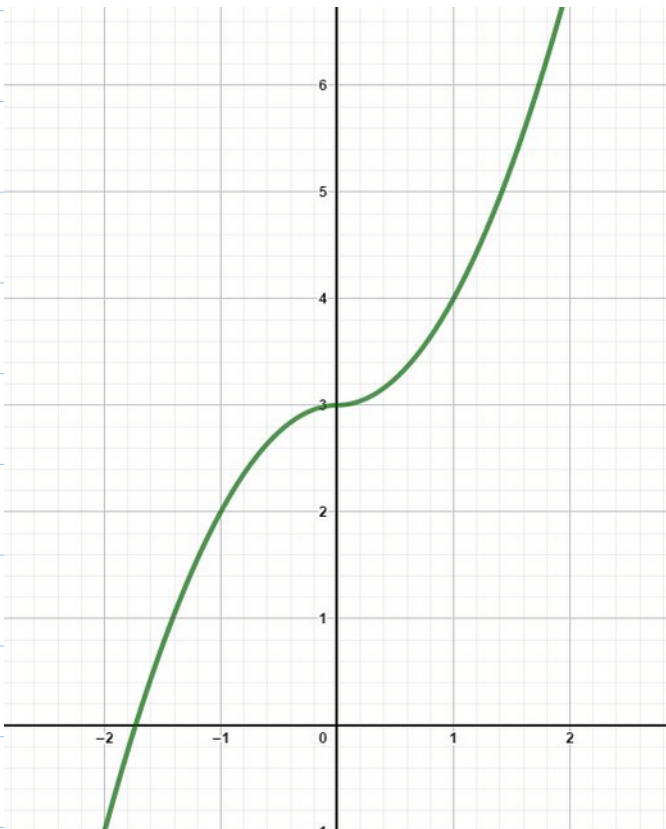
$$f(x) = \begin{cases} -(x+\varepsilon) - (-x-r) & x \leq -\varepsilon \\ x+\varepsilon - (-x-r) & -\varepsilon < x < r \\ x+\varepsilon - (x-r) & x \geq r \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x-\varepsilon+x-r & x \leq -\varepsilon \\ x+\varepsilon+x-r & -\varepsilon < x < r \\ x+\varepsilon-x+r & x \geq r \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -4 & x \leq -\varepsilon \\ r x + r & -\varepsilon < x < r \\ 4 & x \geq r \end{cases}$$



$$2) y = x/|x| + 1$$

$$y = \begin{cases} x(x) + 1 & x \geq 0 \\ x(-x) + 1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x^2 + 1 & x < 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y = x^2 + 1 & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y = -x^2 + 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

مثال: اگر $f(x) = |1-x| + \varepsilon$ باشد مقدار $f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{2}-1)$ را بیابید.

$$f(\sqrt{2}) = \underbrace{|1 - \sqrt{2}|}_{<0} + \varepsilon = -(1 - \sqrt{2}) + \varepsilon = -1 + \sqrt{2} + \varepsilon = \sqrt{2} - 1 + \varepsilon$$

$$f(\sqrt{2}-1) = |1 - (\sqrt{2}-1)| + \varepsilon = |1 - \sqrt{2} + 1| + \varepsilon = \underbrace{|2 - \sqrt{2}|}_{>0} + \varepsilon$$

$$f(\sqrt{2}-1) = 2 - \sqrt{2} + 2 = 4 - \sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{2}-1) = 2 + \sqrt{2} + 4 - \sqrt{2} = 6$$

سؤال: اگر $f(x) = |x-2|+1$ را در نظر بگیریم، $rf(r-|a|) - f(r+|a|)$ را محاسبه کنید.

$$(1) \quad |a| \quad (2) \quad |a|+1 \quad (3) \quad |a|-1 \quad (4) \quad \text{مهر}$$

$$f(r-|a|) = |r-|a|-2|+1 = \underbrace{|-|a||}_{<0} + 1 = -(-|a|) + 1 = |a| + 1$$

$$f(r+|a|) = |r+|a|-2|+1 = \underbrace{| |a| |}_{>0} + 1 = |a| + 1$$

$$rf(r-|a|) - f(r+|a|) = r(|a|+1) - (|a|+1) = |a|+1$$

گزینه ۲

رسم نمودار به کمک انتقال :

نمودار برخی توابع را می توان از روی نمودار توابع معروف رسم کرد.

انتقال افقی و عمودی :

۱- $f(x \pm a)$: برای رسم نمودار $y = f(x + a)$ نمودار f را روی محور x ها

a واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $y = f(x - a)$ نمودار

f را روی محور x ها a واحد به سمت راست منتقل کنیم. (انتقال افقی)

۲- $f(x) \pm a$: برای رسم نمودار $y = f(x) + a$ نمودار f را روی محور y ها

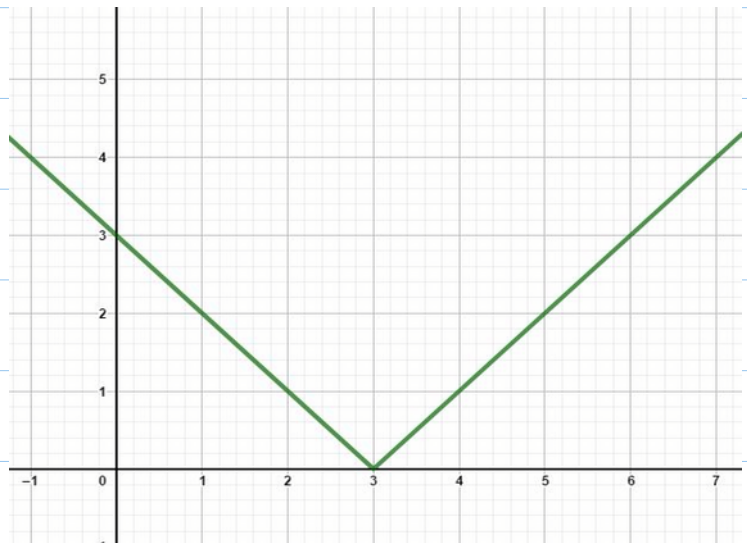
a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $y = f(x) - a$ نمودار

f را روی محور y ها a واحد به سمت پایین منتقل کنیم. (انتقال عمودی)

نکته: برای رسم $-f(x)$ نمودار f را نسبت به محور x ها مقعنه می کنیم.

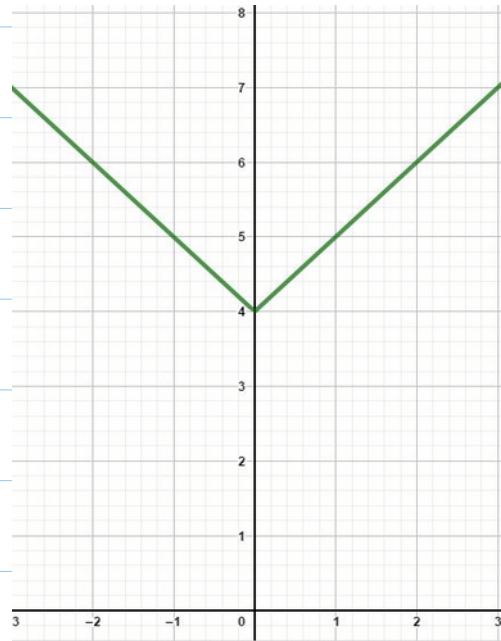
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = |x - 3|$



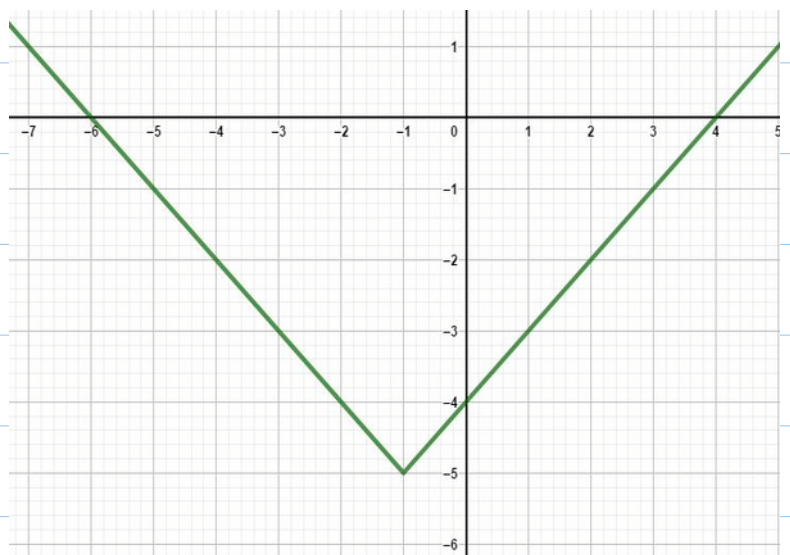
انتقال انحنای ۳ واحد به راست

۲) $y = |x| + 4$



انتقال عمودی ۴ واحد به بالا

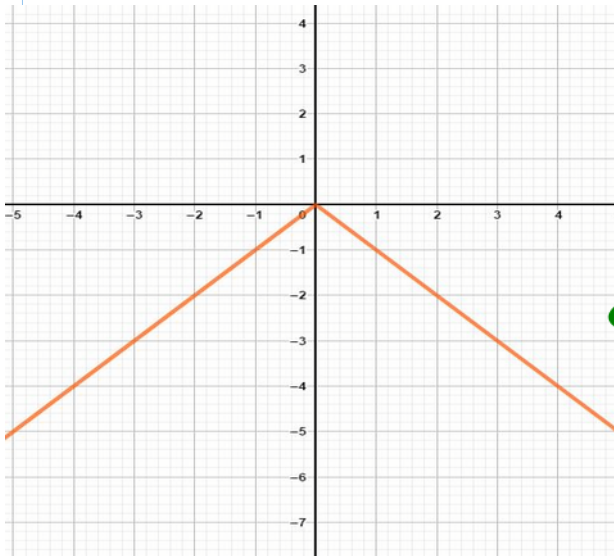
۳) $y = |x + 1| - 5$



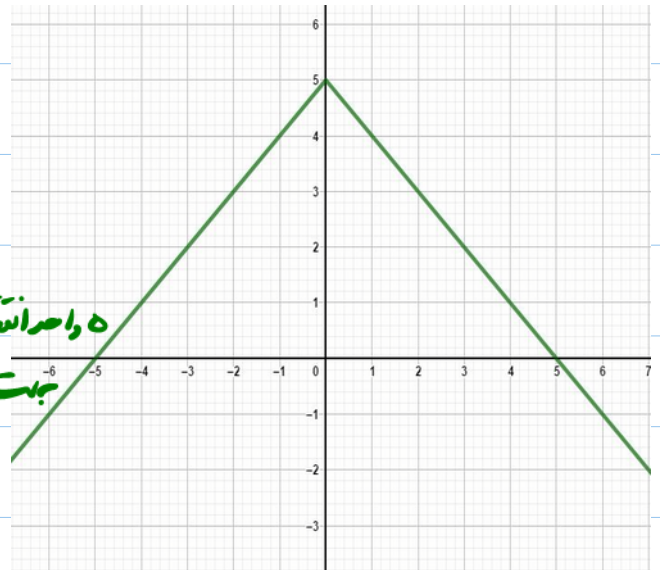
انتقال انحنای ۱ واحد به چپ

انتقال عمودی ۵ واحد به پایین

$$۴) y = -|x| + ۵$$



$$y = -|x|$$

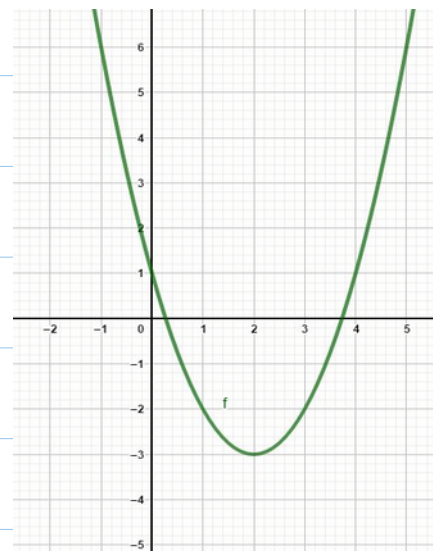


$$y = -|x| + ۵$$

۵ واحد انتقال عمودی
به سمت بالا

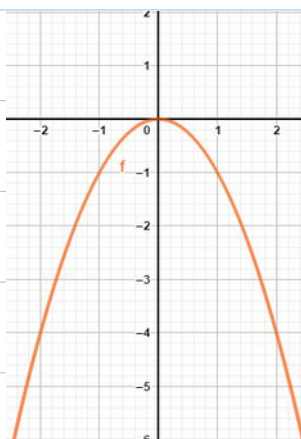
$$۵) y = (x-۲)^۲ - ۳$$

۳ واحد سمت راست انتقال از منبع



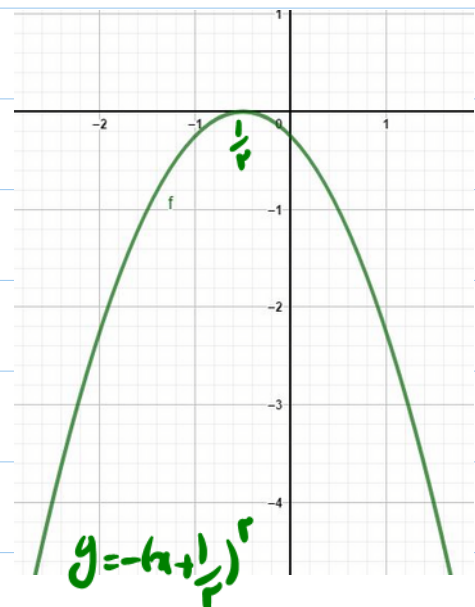
۳ واحد به پایین انتقال عمودی

$$۶) y = -(x + \frac{1}{4})^۲$$



$$y = -x^۲$$

۱/۴ واحد انتقال از منبع
به سمت چپ



$$y = -(x + \frac{1}{4})^۲$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = x^2 - 6x + 2$ را ابتدا ۵ واحد به سمت چپ، سپس ۷ واحد به بالا

انتقال داده ایم. ضابطه تابع جدید کدام است؟

$y = x^2$ (۱) $y = (x-6)^2$ (۲) $y = x^2 - 7$ (۳) $y = (x-6)^2 - 14$ (۴)

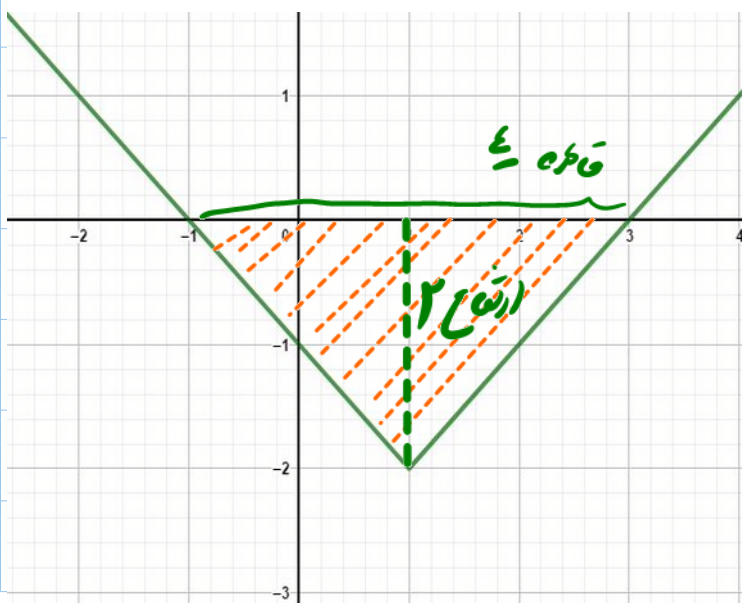
$$y = f(x+6) + 7$$

$$y = (x+6)^2 - 6(x+6) + 2 + 7 = x^2 + 12x + 36 - 6x - 36 + 2 + 7 = x^2 + 6x + 9$$

گزینه ۱
 $\Rightarrow y = x^2$

مثال: مساحت ناحیه محدود به بالای نمودار تابع $f(x) = |x-1| - 2$ و پاره‌خط $y=2$ چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷



$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

گزینه ۲

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

صفحات: ۱۱۸ تا ۱۴۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

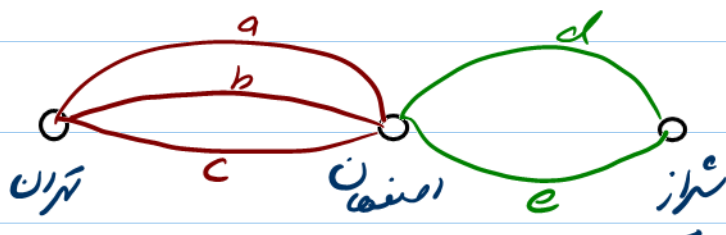
گروه ریاضی
استان همدان

درس اول: شمارش

اگرچه در نظر اول، شمارش کار ابتدایی و درمان جوده می‌کند، اما گاهی با مائمی پیچیده برخورد می‌کنیم.

هدف از آنالیز ترکیبی ارائه روش‌های شمارش و تعیین تعداد حالات ممکن، بدون شمارش است.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم با اتوبوس از تهران به اصفهان، سپس به شیراز برویم. برای سفر از تهران به اصفهان سه مسیر a ، b و c و از اصفهان به شیراز دو مسیر d و e وجود داشته باشد. می‌خواهیم بدانیم به چند طریق می‌توان با گذر از این مسیرها از تهران به شیراز رفت؟



همانطور که در شکل‌های بالا به وضوح است: ad, bd, cd, ae, be, ce است.

این مطالب را با نمودار درختی زیر هم می‌توان شاخه‌دار:



درمانه بالا جواب به تعداد انتخاب‌های دو مرحله‌ایست سرهم بستگی دارد. در واقع پاسخ مسئله از حاصل ضرب تعداد

حالات دو مرحله‌ای $۴ \times ۳ = ۱۲$ بدست می‌آید.

این تکنیک شمارش را اصل ضرب می‌نامیم که یکی از مهم‌ترین اصول عدد شمارش است.

اصل قذیب : فرض کنید ریسمان کاری k مرحله دارد. اگر مرحله اول را بتوان به m_1 طریق

ریسمان دارد، مرحله دوم را به m_2 طریق و... مرحله k ام را به m_k طریق

ریسمان دارد، کل کار مورد نظر را می توان به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق ریسمان دارد.

مثال : نوعی اتوبوس در مدل ۱۰۰۰، اگر به ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (یاری - اتوماتیک) تولید می شود.

الف) این شرکت به چند روش می تواند این نوع اتوبوس را تولید کند؟ $5 \times 10 \times 3 \times 2 = 300$

ب) این شرکت به چند روش اتوبوس مشکی دنده اتوماتیک تولید می کند؟ $5 \times 10 \times 1 \times 1 = 10$

مثال : با حروف a, b, c, d, e, f

الف) چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت؟ $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$

ب) چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت که حرف تکراری نداشته باشند؟ $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

مثال : الف) چند عدد سه رقمی داریم؟ $9 \times 10 \times 10 = 900$ ۹۰۰ صفر نمی توان گذاشت

ب) چند عدد سه رقمی با رقم های متفاوت و صفر ندارد؟ $9 \times 9 \times 8 = 720$

ج) چند عدد سه رقمی با رقم های متغیر داریم؟ $10 \times 9 \times 8 = 720$

تذکره : در مسائل شمارش، ابتدا از خانه ای شروع می کنیم که بیشترین محدودیت را دارد.

مثال : با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟ اولی ۵ $5 \times 6 \times 4 = 120$

مثال : با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد سه رقمی می توان ساخت بطوریکه

الف) عدد حاصل زوج باشد. $4 \times 5 \times 6 = 120$ اولی ۵ آخری ۵
 ب) عدد حاصل از ۵۰۰۰ بزرگتر باشد. $4 \times 6 \times 5 \times 4 = 480$ اولی ۵ آخری ۵

مثال: با دوف صند ۱۰ خود نشسته و بدون تکرار دوف چند صند سه نفری می‌توان نشست بطوریکه:

$$1 \times 5 \times 4 = 20 \quad \leftarrow \text{ی}$$

الف) با (ی) شروع شود!

$$1 \times 4 \times 1 = 4 \quad \leftarrow \text{ش}$$

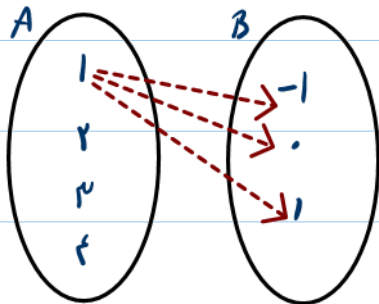
ب) با (ی) شروع و به (ش) ختم شود!

مثال: یک نفر از ۱۰ اسدال چهار نفری ای و ۵ اسدال دو نفری ای (به-منز) دارد. فرزی قصد دارد به اسدال هاهم همرست تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد، اگر معیور باشد به همه اسدال هاهم جواب دهد؟

$$4^{10} \times 2^5 = \quad \leftarrow \text{به-منز}$$

$$11 \quad 10 \times 4 \quad 12 \quad 2^5 \times 4 \quad 13 \quad 2^5 \quad 14 \quad 4 \quad 15 \quad 2$$

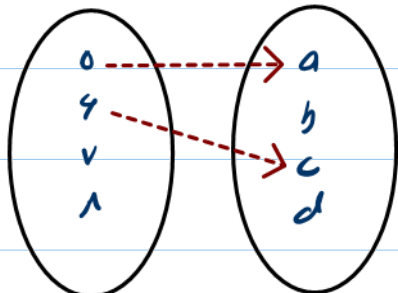
نکته: همانقدر که در فصل قبل دیدیم که یک تابع از A به B باید هر یک از اعضای A را به یکی از عضوهای B وصل کنیم. پس برای هر کدام از اعضای A به توار $(n \text{ حالت})$ داریم. پس توار تابع‌ها از معیور m عضوری به هر معیور n عضوری برابر است: n^m



مثلاً اگر از $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به $B = \{1, 2, 3\}$ یک تابع بنویسیم، از هر کدام از اعضای A سه یکسان می‌تواند خارج شود. پس توار تابع‌های A به B برابر $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ است.

مثال: از معیور $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ به معیور $B = \{a, b, c, d\}$ چند تابع می‌توان نوشت که حتماً شامل زوج مرتب $(0, a)$ و فاقه زوج مرتب $(4, c)$ باشد؟

$$18 \quad 11 \quad 26 \quad 12 \quad 36 \quad 13 \quad 48 \quad 14$$



تبعات تابع‌ها را می‌نویسیم که شامل $(0, a)$ باشد. به این اعضای $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ هر کدام چهار حالت داریم $4^8 = 65536$ و یکی بدون $(4, c)$ را از این بین تابع‌ها که هم $(0, a)$ و هم $(4, c)$ دارند را باید از 65536 کم کنیم. بر $5, 6, 7, 8$ هر کدام ۴ حالت داریم $4^4 = 256$. پس:

$$65536 - 256 = 65280$$

اصل جمع: فرض کنید بتوان کاری را از k روش انجام داد. اگر روش اول به m_1 طریق،

روش دوم به m_2 طریق و... و روش k ام به m_k طریق ممکن باشد و خود هم

نقطه‌ای از این k روش را انتخاب کنیم، برای انجام کار در نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$
یا از روش اول یا از روش دوم یا...
 طریق وجود دارد.

مثال: یک خانم در خانه اش دو نوع شیرینی و سه نوع شربت دارد. او می‌خواهد از میوه‌های شیرینی‌ها انتخاب کند. به چند طریق می‌تواند این کار را بکند اگر:

الف) بخواند به میوه‌های یک نوع شیرینی و دو نوع شربت بدهد $2 \times 3 = 6$

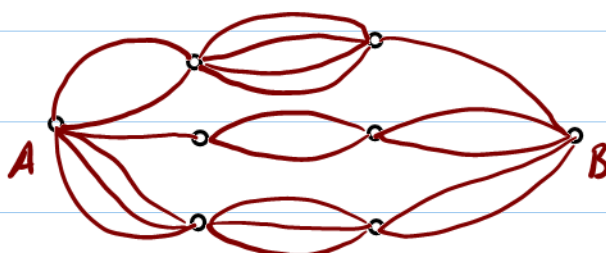
ب) بخواند به میوه‌های یک شیرینی و یک شربت بدهد $2 + 3 = 5$

تفاوت اصل جمع و اصل ضرب:

۱) در اصل ضرب، یک کار به چندین مرحله است و هر مرحله تقسیم بندی می‌شود و در هر مرحله حالت‌های متفاوتی می‌پذیرد ولی در اصل جمع، کار تقسیم بندی نمی‌شود بلکه کل کار در یکی از دسته‌های انتخابی انجام می‌شود.

۲) به عنوان مثال در اصل ضرب بین مرحله‌ها «و» می‌کنیم زیرا کارها را جدا جدا داریم ولی در اصل جمع می‌توانیم بین مراحل از «یا» استفاده کنیم. **تذکره:** در برخی مسائل هر دو اصل ضرب و جمع با هم استفاده می‌شود.

مثال: از شهر زیر چند مسیر از A به B وجود دارد بعد از آن در طی هر مسیر از نقاطی دوبار عبور نکنیم؟



$$(2 \times 4 \times 1) + (1 \times 2 \times 2) + (2 \times 4 \times 2) = 20$$

مثال: کثرت‌تر ۱۴۰۱ شتره‌ری

چند عدد طبیعی پنج رقمی با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت که ارقام آن یک در میان زوج و فرد باشند؟

۲۴۰۰ (۴)

۲۱۶۰ (۳)

۱۹۲۰ (۲)

۱۸۴۰ (۱)

ز ف ز ف ز ف ز

$$۴ \times ۵ \times ۴ \times ۴ \times ۳ = ۹۶.$$

$$+ = ۲۱۶.$$

$$۵ \times ۵ \times ۴ \times ۴ \times ۳ = ۱۲۰.$$

مثال: کثرت‌تر ۹۹ شتره‌ری (خارج)

تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام غیر تکراری که شامل رقم ۵ باشند، کدام است؟

۱۶۵۸ (۴)

۱۷۴۸ (۳)

۱۷۹۲ (۲)

۱۸۴۸ (۱)

۵۰۰۰

$$۱ \times ۹ \times ۸ \times ۷ = ۵۰۴$$

$$+ = ۱۸۴۸$$

$$۸ \times ۱ \times ۸ \times ۷ \times ۴ = ۱۳۴۴$$

۵۰۰۰ شتره‌ری یا ۵۰۰۰ شتره‌ری یا ۵۰۰۰ شتره‌ری یا ۵۰۰۰ شتره‌ری

درس دوم: جابلیت

فرض کنید n شیء متمایز داریم. به صورت از قرار گرفتن این اشیاء در کنار هم یک **جابلیت** می‌گوئیم.

مثال: می‌خواهیم یک یایب، یک صدها و یک دیز را در یک خط بچینیم. برای جابجه اول سه حالت داریم. حال فرض کرد یکی از صدها را انتخاب کردیم برای جابجه دوم دو حالت داریم و به همین ترتیب برای جابجه سوم، یک حالت باقی می‌ماند پس بنا بر اصل ضرب، تعداد جابلیت‌های این ۳ صدها برابر است: $3 \times 2 \times 1 = 6$ است.

در نتیجه تعداد حالت‌های چین n شیء متفاوت که هم طبق اصل ضرب $1 \times 2 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$ است.

تعریف: فاکتوریل:

یکی از نمادهای حرف ریاضی که در مسائل خیلی به کار می‌رود و به ویژه در نوشتن فرمول‌های ترکیبیات از آن استفاده می‌شود، **فاکتوریل** است.

حاصل ضرب ریاضی $n!$ را با $n!$ نشان می‌دهیم و آن را n فاکتوریل می‌خوانیم. پس:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

همچنین برای بازسازی روابط ترکیبیات قرار می‌دهیم: $0! = 1$.

مثال: ساده کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \frac{5!}{4!} &= \frac{5 \times 4!}{4!} = 5 \\ \text{ب)} \quad \frac{1!}{4!} &= \frac{1 \times 7 \times 2!}{4!} = 0.6 \\ \text{ج)} \quad \frac{9! \times 1!}{1! \times 5!} &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{1 \times 5!} = 9 \times 8 \times 7 = 504 \\ \text{د)} \quad \frac{4! + 2!}{5!} &= \frac{24 + 2}{120} = \frac{26}{120} = \frac{13}{60} \end{aligned}$$

نکته: $n! = n \times (n-1)!$

مثال: در عبارت مقابل برابری چه توان نوشت؟

$$19(18!) + 19! = \square!$$

$$19 \times 18! + 19 \times 18! = 19! + 19 \times 18! = 19!(1 + 18) = 19! \times 19 = 20!$$

مثال: کدام از اعداد زیر مربع کامل است؟

۱) $\frac{14! \cdot 15!}{2}$ ۲) $\frac{15! \cdot 16!}{2}$ ۳) $\frac{17! \cdot 18!}{2}$ ۴) $\frac{18! \cdot 19!}{2}$

گزینه ۳
 $\frac{n! \times (n+1)!}{2} = \frac{n! \cdot n! \cdot (n+1)}{2} = \underbrace{(n!)^2}_{\text{مربع کامل}} \times \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{\text{مربع کامل}}$
 فقط $\frac{18}{2} = 9$ صحیح است. $n=17, n+1=18$

مثال: حاصل $\frac{(n+1)!}{n(n-2)!}$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۹۹۹۹ ۲) ۱۰۰۱ ۳) ۶۲۵ ۴) ۱۱۰

از مربع کامل که واحد کمتر فقط $1000 - 1 = 999$
 $A = \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{n(n-2)!} = (n+1)(n-1) = n^2 - 1$

مثال: ص ۱۲۹ کتاب (ری) حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $9 \times 8 = \frac{9!}{7!}$

ب) $9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9!}{5!}$

پ) $11 \times 10 \times 9 = \frac{11!}{8!}$

ت) $8 = \frac{8!}{7!}$

ث) $n(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!}$

ج) $n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n!}{(n-4)!}$

نکته: می‌توان تعداد جایگاه‌های n شی‌های مختلف را با $n!$ نمایش داد.

مثال: به ضوابط V که به تعداد n می‌تواند در یک قطعه کب بچسبند؛ $7! = 0.4$

مثال: ۶ نفر A, B, C, D, E, F به ضوابط می‌توانند در یک صف بایستند و هر کدام:

الف) A و B کنار هم بایستند؟
 ب) بین A و B دقیقاً یک نفر باشد؟
 ج) بین A و B می‌تواند C, D, E, F قرار یزد.

۱) $2! \times 5! = 24$ (۴+۱)
 ۲) $4 \times 2! \times 4! = 192$
 ۳) $4! \times 4! = 288$

کتابخانه
 کتابخانه
 کتابخانه

تبدیل به ترتیب:

تعداد جایگشت های r تایی از n شیء متمایز یا جابجایی دیگر تعداد انتخاب های r شی

از بین n شیء متمایز را که در کنارها ترتیب قرار گرفتن اهمیت داشته باشد را با $p(n, r)$

نشان می دهیم و چون تبدیل r شی از n شی متمایز گفته می شود. طبق اصل ضرب مقدار تبدیل ها:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) \times \frac{(n-r) \times (n-r-1) \times \dots \times 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times \dots \times 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

در نتیجه:
$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: a, b, c جایگشت ها $a, b, c, a, b, c, c, b, a, b, a, c, c, a, b, c, c, b$ $p(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

مثال: از ۱۱ بازیکن تیم فوتبال می خواهیم ۴ نفر از آنها را که هم ترار هم به هم خط این کار می می فرزند.

$$p(11, 4) = \frac{11!}{8!} = 11 \times 10 \times 9 \times 8$$

تذکر: در حالت جابجایی با اصل ضرب هم قابل حل می شود.

مثال: با حروف a, b, c, d, e, f, g و اینکه ۵ حرفی می توان ساخت که حرف اول صد بار و حرف آخر ۲۰ بار می

$$2 \times p(5, 4) \times 1 = 120$$

a, e b

مثال: با ارقام از ۱ تا ۹ عدد ۱۲۴۶۷۹ چند عدد سه رقمی با رقم تکراری می توان ساخت:

$$p(9, 3) = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 120$$

$$0 \times 1! (E) \quad 1 \times 1! (E) \quad 1 \times 0! (E) \quad 0 \times 1! (I)$$

که در دوف n, r و $p(r, n)$ در دین ضاعفاً برابرند پس: $p(4, 2) = 1 \times 2 = 2$

$$y_1, \dots, y_r, \dots, y_n, y_{r+1}, \dots, y_r, 1, y_1, \dots, 1$$

$$p(4,4) \times p(4,4) \times p(0,2) = 144 \dots$$

Vr. 6 Pg. 12 12. 12 9. 11

$$\frac{4n!}{(n-r)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r-1)!} \Rightarrow \frac{4n!}{(n-r)!} = \frac{(n+1)n!}{(n-r)!} \rightarrow n+1=4 \rightarrow n=3 \rightarrow p(4,0) = vr.$$

4 (E) 0 (S) 2 (R) 1 (I)

$$\frac{9!}{\varepsilon!} + 0 \times \frac{9!}{0!} = \frac{1 \cdot 1}{(1-n)!} \Rightarrow 9! \left(\frac{1}{\varepsilon!} + \frac{0}{0!} \right) = \frac{1 \cdot 9!}{(1-n)!} \rightarrow \frac{1}{\varepsilon!} + \frac{1}{\varepsilon!} = \frac{1}{(1-n)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon!} = \frac{1}{(1-n)!} \rightarrow (1-n)! = 0 \times \varepsilon! = 0! \rightarrow 1-n=0 \rightarrow n=0$$

42 (2) 12 (2) 1. (2) 12. (1)



مسئله ها و تمرین های مهم کتاب درسی:

مثال ۱۳

با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف:

الف) $7!$ و $8!$

ب) $7! \times 2$

پ) $p(4, 1)$ و $p(2, 4)$
 بقیه حروف

ت) $4! \times 4!$

ث) $4! \times 4!$

ج) $7! \times 4$

باقی حروف

الف) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می شود؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می شوند؟

ت) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» چهار حرف اول باشند؟

ث) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟

ج) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

تمرین ۱۴

۴) در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

$$2 \times p(20, 3) = 2 \times \frac{20!}{17!} = 2 \times \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 1440 \text{ ثانیه}$$

تمرین ۱۵

۵) با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها با «گل» شروع می شود؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟

پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ت) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ث) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

الف) $4!$ و $6!$

ب) $p(4, 4) = \frac{4!}{1!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

پ) $5! \times 2$
 باقی حروف

ت) $2! \times p(4, 2) = 2 \times \frac{4!}{2!} = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$

ث) $4! \times 2! \times 2 = 96$
 باقی حروف



درس سوم: ترکیب

بهر انتخاب r شی از n شی متغیر که در آن ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، که

ترکیب r تایی از n شی را گوییم و تعداد آن را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که از رابطه زیر می‌توانیم بدست آوریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

اثبات: اگر تعداد جابجاییهای r تایی از n شی را می‌گوییم $P(n, r)$ چنانچه در آن ترتیب اهمیت دارد، ترکیب r تایی از n شی را می‌گوییم $C(n, r)$ چنانچه در آن ترتیب اهمیت ندارد.

همین‌طور $P(n, r)$ را بر تعداد جابجاییهای r تایی می‌توانیم تقسیم کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ترکیبهای r تایی $\{a, b, c\}$ $\rightarrow$ $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

حالات خاص در رابطه ترکیب:

۱) $\binom{n}{0} = 1$ مثال $\binom{0}{0} = 1$ ۲) $\binom{n}{n} = 1$ مثال $\binom{1}{1} = 1$

۳) $\binom{n}{1} = n$ مثال $\binom{7}{1} = 7$ ۴) $\binom{n}{n-1} = n$ مثال $\binom{6}{5} = 6$

۵) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ مثال $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$ ۶) $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!}$

مثال $\binom{7}{4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!} = 35$

۷) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \frac{n-1}{k-1} \times \dots \times \frac{n-k+1}{1}$

مثال: $\binom{10}{4} = \frac{10}{4} \times \frac{9}{3} \times \frac{8}{2} \times \frac{7}{1} = 210$

۱) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ مثال: $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$ $\binom{10}{8} = \binom{10}{2}$

۲) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ مثال: $\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}$ $15 = 10 + 5$ **رابطه پاسکال**

مسئله کتاب ریاضی

کار در کلاس

۱ در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز مشخص شود؟

$P(5, 2)$	ترتیب مهم است	الف) ساختن کلمه‌ای سه حرفی بدون تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنی و بی معنی).
$C(5, 2)$	مهم نیست	ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز.
$P(7, 2)$	ترتیب مهم است	پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند.
$C(7, 2)$	مهم نیست	ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند.
$C(11, 2)$	مهم نیست	ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت.
$P(11, 2)$	مهم است	ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال‌های طلا، نقره و برنز داده شود.

۲ در هر کدام از موارد «کاردرکلاس ۱» تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده کردن جواب نیست)

مثال: از بین ۷ فوتبالبست، ۵ والیبالیست و ۳ تنیس‌گرمی‌خوار هم‌کلاس سه نفر تشکیل دهیم به‌طوری‌که در این کار **رابطه مهم** :

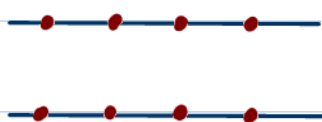
الف) $\binom{15}{3} = \frac{15 \times 14 \times 13}{6} = 455$ **مقدار هیچ نداشته باشیم.**

ب) $\binom{7}{1} \binom{5}{1} \binom{3}{1} = 7 \times 5 \times 3 = 105$ **از هر سه رشته یک نفر در کلاس باشد.**

پ) $\binom{7}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} = \frac{7 \times 6}{2} + \frac{5 \times 4}{2} + 1 = 46$ **دو نفر از یک رشته باشند.**

ت) $\binom{7}{1} \binom{4}{2} + \binom{7}{2} \binom{3}{1} + \binom{5}{2} \binom{3}{1}$ **سه نفر از دو رشته باشند.**

مثال: در خط زیر روی هر یک از خط‌ها ۵ نقطه را مشخص کرده‌ام. چند مثلث مستطی که همه رئوس‌های آن از میان این نقطه‌ها انتخاب شده باشد؟



الف) ۶ ب) ۴۸ ج) ۱۲ د) ۴۶

سه نقطه نباید روی یک خط باشند. ۲ نقطه از ۵ نقطه را به هم وصل می‌کنیم: $\binom{5}{2} \times 2 = 48$

مثال: دانش آموزی با سه برادر و مادر از نوزده سوار یک اتومبیل پانچ دهد و باید به دست کم چهار ریش از پنج ریش اول جواب دهد. او به چند طایفه می تواند به سوارات پانچ دهد؟

$\begin{matrix} 106 & (1) & 166 & (2) & 186 & (3) & 196 & (4) \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{از ۱ تا ۵} & \text{از ۶ تا ۱۰} & \text{از ۱۱ تا ۱۵} & \text{از ۱۶ تا ۱۹} & \text{از ۲۰ تا ۲۴} \end{matrix}$

$$\binom{5}{0}\binom{14}{5} + \binom{5}{1}\binom{14}{4} = 140 + 56 = 196$$

مثال کسری تجربی ۹۹:

به چند طریق می توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

$\begin{matrix} 84 & (1) & 87 & (2) & 91 & (3) \checkmark & 95 & (4) \end{matrix}$

$\binom{7}{0} = \binom{7}{7} = \frac{7!}{0!7!} = 1$
 $\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!6!} = 7$
 $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$

گزینه ۲: $21 + 70 = 91$

$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$
 $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$
 $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$
 $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = 21$
 $\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!1!} = 7$
 $\binom{7}{7} = \frac{7!}{7!0!} = 1$

مثال کسری تجربی ۹۸:

گل فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می تواند دسته گل های متمایز درست کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

$\begin{matrix} 126 & (1) & 140 & (2) & 154 & (3) \checkmark & 168 & (4) \end{matrix}$

$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 70 + 56 + 28 = 154$
 $\frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$

مثال: مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 10\}$

(الف) چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد؟

(ب) چند زیرمجموعه ۵ عضوی شامل عدد ۶ دارد؟

(ج) چند زیرمجموعه ۶ عضوی فاقد عدد ۶ دارد؟

$\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$

$\binom{9}{4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$

$\binom{9}{5} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 63$

← ۶ از ۱ تا ۱۰
 ← انتخاب شده
 ← باقی مانده

نتیجه: تعداد زیرمجموعه های ۴ عضوی برابر $\binom{n}{4}$ است و تعداد زیرمجموعه های ۵ عضوی برابر $\binom{n}{5}$ است پس:

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

مثال: مقدار زیر را در $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = 501$ کدام است؟

۱۱ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ۸ (۱)

$$\binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} = 501 \Rightarrow 2^n - 1 - n - 1 = 501$$

$$\Rightarrow 2^n - n = 502 \rightarrow n = 9$$

مثال: اگر $p(n, r) = C(n, r) + 46$ باشد، $C(n+1, n-1)$ کدام است؟

۲ (۱) ۵۵ (۲) ۴۵ (۳) ۴۰ (۴)

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)}{r} + 46 \Rightarrow n(n-1) = \frac{n(n-1)}{r} + 46 \Rightarrow 2(n^2 - n) = n^2 - n + 72$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow (n+8)(n-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -8 \\ n = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(1, 8) = C(1, 2) = \frac{1 \cdot 8}{2} = 40$$

مثال: از بین ۸ نفر که علی در میان آنها هستند، چند روش می‌توان سه نفر انتخاب کرد، طوری که علی انتخاب نشود و در میان آنها باشد؟

۱۵ (۱) ۱۰ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴)

رضا حتماً انتخاب می‌شود پس فقط ۲ انتخاب دیگر داریم و چون علی نباید انتخاب شود این ۲ نفر از ۶

$$\binom{6}{2} = 15$$

مثال: به چند طریق می‌توانیم از بین ۷ جفت کفش، ۵ تنه برداریم به طوری که فقط یک جفت تنه برداریم؟

۱۲۲ (۱) ۱۲۲ (۲) ۱۱۲ (۳) ۱۲۲ (۴) ۱۱۲ (۵)

جفت انتخابی (۷) حالت داریم. پس ۳ تنه می‌ماند. اول ۳ جفت از ۶ جفت کفش برداریم

$$\binom{6}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 112$$

مثال: با حرف a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت؟

۱۸۰ (۴) ۶ (۳) ۱۲ (۲) ۱۰ (۱)

a, e, i, b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z

$$\binom{4}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{11}{1} = 180$$

۱۳۹

۳) در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

$$\binom{n}{2} = 28$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 28 \rightarrow n(n-1) = 56 \rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \rightarrow (n-8)(n+7) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{n=8}, n=-7 \text{ غایب}$$

۱۴۰

۷) یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هرگاه
(الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد؟
(ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند؟
(پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟
(ت) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچ یک از ادویه های دسته دوم سازگاری ندارند؟

$$\text{الف)} \quad \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$

$$\text{ب)} \quad \binom{2}{1} \binom{8}{2} + \binom{2}{2} \binom{8}{1} = 1 \times 28 + 1 \times 8 = 36$$

$$\text{پ)} \quad \binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119$$

هر سه استفاده نمی شوند

$$\text{ت)} \quad \binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

۸) مسئله ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با :

$$\text{الف)} \quad \binom{5}{3} \times \binom{6}{2}$$

$$\text{ب)} \quad \binom{5}{3} + \binom{6}{2}$$

۵ دانش آموز ۵ درس و ۶ دانش آموز ۶ درس دارند. به چند طریق می توانیم ۵ نفره شش نفره را در یک گروه ۵ نفره قرار دهیم و ۳ دانش آموز ۳ درس را به ۳ دانش آموز ۳ درس انتخاب کنیم؟

۵ دانش آموز ۵ درس را به ۵ دانش آموز ۵ درس و ۶ دانش آموز ۶ درس را به ۶ دانش آموز ۶ درس قرار دهیم. در هر گروه ۵ نفره ۳ دانش آموز ۳ درس و ۲ دانش آموز ۲ درس قرار دهیم.

ریاضی ۱

پایه دهم تجربی-ریاضی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دهم تجربی-ریاضی

فصل هفتم: آمار و احتمال

صفحات: ۱۴۱ تا ۱۷۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس

- پدیده یا آزمائش تصادفی: پدیده ای است که نتیجه آن را نتوان قبل از رخداد، به طور قطعی

پیش بینی کرد. مانند پرتاب تاس یا سکه

- فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک آزمائش تصادفی را فضای نمونه می نامیم

و آن را با Ω نمایش می دهیم. به هر عضو فضای نمونه یک برداری گوئیم.

مثلاً در پرتاب یک تاس فضای نمونه ای $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است.

تذکر: مقدار اعضای فضای نمونه ای پرتاب n تاس: 6^n

مقدار اعضای فضای نمونه ای پرتاب m سکه: 2^m

مقدار اعضای فضای نمونه ای برای جفت خانوارهای با k فرزند: 2^k

مقدار اعضای فضای نمونه ای پرتاب n تاس و m سکه: $6^n \times 2^m$

- شمار تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک شمار تصادفی در آن فضای نمونه می گویند.

و آن را $A, B, C, \dots$ نشان می دهیم.

مثلاً در پرتاب تاس آمدن عدد فرد $A = \{1, 3, 5\}$ یک شمار است.

اعمال روی مجموعه‌ها: اگر A و B مجموعه‌های تعدادی فضای نمونه S باشند:

الف) **مجموعه A و B :** مجموعه $A \cup B$ از عناصری که حداقل یکی از دو مجموعه A یا B را می‌دهد:

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

ب) **مجموعه اشتراک A و B :** مجموعه $A \cap B$ از عناصری که هر دو مجموعه A و B را می‌دهند:

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

پ) **تفاضل A و B :** مجموعه $A - B$ از عناصری که در A هستند ولی در B نیستند:

$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(از A اشتراک A و B را حذف می‌کنیم.)

ت) **مستقیم مکمل مجموعه:** مجموعه A' از عناصری که در A نیستند:

$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\} \quad (A' = S - A)$$

مثال: در کتاب دو ناس جیم:

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (4,4)\}$$

الف) فضای نمونه ای را بنویسید.

$$A = \{(4,4), (2,5), (0,4), (4,4)\}$$

ب) مجموعه A به صورت دو ناس ۹ باشد را بنویسید.

$$B = \{(3,4), (4,4), (4,4), (4,4)\}$$

پ) مجموعه B اعداد زوجی هر دو ناس ۴ باشد را مشخص کنید.

$$A \cap B = \{(4,4), (4,4)\}$$

$$B - A = \{(4,4), (4,4)\}$$

ت) مجموعه $A \cap B$ ، $B - A$ را بنویسید.

احتمال رخ دادن یک پیاپی: احتمال وقوع پیاپی A از فضای نمونه ای S را $P(A)$

نمایش می دهیم و از رابطه زیر می بینیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیاپی}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه ای}}$$

در وقت کشید برای یافتن $n(A)$ و $n(S)$ در صورت امکان با نوشتن پیاپی فضای نمونه ای،

تعداد اعضای آنها را حساب می کنیم در غیر این صورت از تکنیک هایی که برای شمارش خواننده ایم استفاده می کنیم.

مثال: در یک تاس یک پیاپی و یک سکه یک هم احتمال آن را بیابید.

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\} \quad P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

(الف) سکه رو و تاس عدد اول بیاید.

$$B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$$

(ب) سکه پشت یا تاس عدد زوج بیاید.

$$P(B) = \frac{9}{12}$$

مثال: در یک خانواده با سه فرزند، احتمال آن را بیابید که حداقل دو فرزند دختر داشته باشند.

$$A = \{(g, g, b), (g, b, g), (b, g, g)\} \quad P(A) = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

مثال: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ عددی دو رقمی می سازیم. با چه احتمالی عدد ساخته شده اول است؟

$$S = \{11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 55\} \quad n(S) = 16$$

$$A = \{11, 13\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

مثال: در کسری ۴ سوخته من، ۳ سوخته ری و ۵ سوخته قرمز داریم. اگر سه سوخته با هم بردن به طور مطلق است احتمال اینکه:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{60}{220}$$

(الف) سه رنگ مشخص خارج شوند.

(ب) سوخته های خارج شده فقط از دو رنگ باشند.

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \binom{4}{1} + \binom{5}{2} \binom{3}{1}}{220} = \frac{120}{220}$$

(ج) فقط یک سوخته ری باشد.

$$P(C) = \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{2}}{220} = \frac{6}{220}$$

(د) حداقل دو سوخته قرمز باشد.

$$P(D) = \frac{\binom{5}{2} \binom{3}{1} + \binom{5}{1} \binom{4}{2} + \binom{5}{1} \binom{3}{1}}{220}$$

مثال: از میان ۶ سوخته با شماره های ۱ تا ۶، سه سوخته به هم خارج می کنیم. با چه احتمالی مجموع شماره های خارج شده زوج است؟

مجموع سه عدد زوج زوج است که به دو صورت زوج به زوج باشد.

$$n(A) = \binom{3}{2} + \binom{3}{2} \binom{3}{1} = 10 \quad P(A) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

مثال کثرت جواب ۹۹:

پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده اند. با کدام احتمال کتاب های هم زبان، کنار هم قرار می گیرند؟

$$\frac{1}{56} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{28} \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{21} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{14} \quad (۱)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \times 3! \times 2!}{11!} = \frac{5! \times 3! \times 2}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$$

گزینه ۳

مثال: ۲ هندسی و ۴ مربعی در آن قرار دارند در یک مجموع مغزای کنند با چه احتمالی از این مغزای هندسی و درخشان مغزای درخشان

$$\frac{1}{15} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{15} \quad (۲)$$

$$\frac{6}{15} \quad (۱)$$

است؟

$$n(A) = \frac{4 \times 4 \times 2 \times 1 \times 2}{8}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{6!} = \frac{6}{15}$$

مثال: چهار رقم - را از ۴ راه به تعداد ۱۱ رقم قرار دهیم. آخری چهار رقمی حاصل شود. با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی غیر صفر حاصل می شود؟

$$\frac{5}{9} \quad 15 \quad \frac{4}{9} \quad 12 \quad \frac{5}{12} \quad 11 \quad \frac{1}{9}$$

چون گفته به تعداد ۱۱ رقم در یک تکرار متفاوت است.

$$n(s) = 4 \times 4 \times 2 \times 1 = 18$$

مجموع چهار رقم ۰، ۱، ۲، ۳ برابر است. پس هر رقم شده ۴ بر ۴ بخش پذیری است پس ۱ است از مجموع ۴.

$$n(A) = \begin{cases} 4 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{9} = 6 \\ 2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{9} = 4 \end{cases} \quad + = 10 \quad p(A) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

مثال: در کلاس ۵ سوره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این سوره ها را به طور تصادفی ۲ بار می کشیم و بدون جایگزینی خارج می کنیم. با کدام احتمال دو سوره با شماره یک فرد متوالی خارج می شوند؟

$$\frac{1}{11} \quad 11 \quad \frac{2}{11} \quad 12 \quad \frac{4}{12} \quad 15$$

کلاس ۵ سوره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این سوره ها را به طور تصادفی ۲ بار می کشیم و بدون جایگزینی خارج می کنیم. با کدام احتمال دو سوره با شماره یک فرد متوالی خارج می شوند؟

$$n(s) = 5 \times 4 = 12$$

$$n(A) = 4 \times 2 = 8 \quad p(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$p(A) = \frac{12}{12} = 1$$

مثال: ۴ دانش آموز در آزمون ریاضی شرکت کرده اند. با چه احتمالی:

$$p(A) = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{12^4}$$

$$p(B) = \frac{12}{12^4}$$

$$p(C) = \frac{1}{12^4}$$

الف) ماه تولد هیچ یک از آن ها؟

ب) هر یک از آن ها ماه تولد شده اند؟

پ) هر یک از آن ها روز تولد شده اند؟

مثال: از مجموع ۱۰ مهره (طبیعی یک رنگی، دو عدد به تعداد انتخاب می کنیم. با چه احتمالی کوچکترین عدد انتخاب شده ۶ است؟

$$\frac{1}{12} \quad 11 \quad \frac{2}{45} \quad 12 \quad \frac{1}{9} \quad 13 \quad \frac{4}{48} \quad 14$$

$$n(s) = \binom{9}{2} = 36 \quad \text{و} \quad \binom{1}{1} \binom{9}{1} = 9 \quad p(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

چند خاصیت خاص :

- الف) اگر A ته باشد آنگاه $p(A) = 0$ است و به عبارت دیگر A **غیر ممکن** می گویند.
- ب) اگر $A = S$ باشد آنگاه $p(A) = 1$ است و به عبارت دیگر A **حتی** می گویند.
- ج) اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه A و B **رایشدهای ناهمپوش** می گویند.

اصول احتمال

(۱) احتمال هسته عددی بین ۰ و ۱ است یعنی $0 \leq p(A) \leq 1$.

$$p(S) = 1 \quad (۲)$$

(۳) اگر A و B **ناهمپوش** باشند: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

تذکر: اصل سوم قابل تعمیم بر هر تعداد رویداد است.

چند قانون مهم در احتمال: (اثبات به عنوان تمرین)

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) \quad (۱)$$

$A \cap B'$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (۲)$$

$$p(A') = 1 - p(A) \quad (۳)$$

مثال: اگر $p(A \cup B) = \frac{6}{8}$ ، $p(A \cap B) = \frac{1}{8}$ و $p(A') = \frac{3}{8}$ ، مقدار $p(B-A)$ کدام است؟

$\frac{1}{8}$ (۱) $\frac{5}{24}$ (۲) $\frac{5}{24}$ (۳) $\frac{7}{24}$ (۴)

$$p(A) = \frac{5}{8}, \frac{6}{8} = \frac{5}{8} + p(B) - \frac{1}{8} \Rightarrow p(B) = \frac{11}{24} \Rightarrow p(B-A) = \frac{11}{24} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

مثال: اگر $p(A \cup B) = \frac{1}{4}$ و $p(A' \cup B') = \frac{1}{4}$ ، مقدار $p(A-B)$ کدام است؟

0 (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

$$p(A \cup B) = \frac{1}{4} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - p(A \cap B) = \frac{3}{4} \Rightarrow p(A \cup B)' = \frac{3}{4}$$

پس $A \cap B = A \cup B$ در نتیجه $A = B$ ، $p(A-B) = 0$.

مثال: احتمال اینکه فردی از هر دو شرکت A و B خرید کند $\frac{1}{10}$ است. اگر احتمال خرید این فرد، فقط از شرکت A برابر

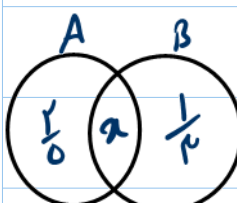
$\frac{6}{10}$ باشد، احتمال خرید این فرد از شرکت A کدام است؟

$\frac{1}{7}$ (۱) $\frac{2}{8}$ (۲) $\frac{3}{9}$ (۳) $\frac{4}{6}$ (۴)

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} p(A-B) = \frac{1}{4} \\ p(A \cap B) = \frac{1}{10} \\ p(A) = ? \end{cases} \\
 & p(A-B) = p(A) - p(A \cap B) \\
 & \frac{1}{4} = p(A) - \frac{1}{10} \Rightarrow p(A) = \frac{7}{20}
 \end{aligned}$$

مثال: اگر $p(A-B) = \frac{2}{5}$ و $p(B-A) = \frac{1}{5}$ باشد، بیشترین مقدار $p(A) + p(B)$ کدام است؟

$\frac{1}{10}$ (۱) $\frac{11}{10}$ (۲) $\frac{19}{10}$ (۳) $\frac{24}{10}$ (۴)



بیشترین مقدار $p(A) + p(B)$ در آن حالت که بیشترین اشتراک باشد.

$$p(A \cup B) = 1 \Rightarrow \frac{1}{5} + x + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

$$p(A) + p(B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{19}{5}$$

مثال: در رتبه بندی دو دانش آموز، احتمال اینکه مجموع رتبه‌های آن‌ها برابر ۷ باشد را $p(A)$ و احتمال اینکه هر دو دانش آموز رتبه‌های متفاوتی داشته باشند را $p(B)$ می‌نامیم. $p(A-B)$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴)

$A-B$: مجموع رتبه‌های کمتر از ۷ باشد و هر دو دانش آموز رتبه‌های متفاوت داشته باشند.

$$p(A-B) = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}$$

$A-B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4), (5, 7), (7, 5)\}$

مثال: اگر $B \subseteq A$ ثابت کنید: الف) $P(A-B) = P(A) - P(B)$ ب) $P(B) \leq P(A)$

الف) $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \xrightarrow{\text{قانون ۱}} P(A-B) = P(A) - P(\overbrace{A \cap B}^B) = P(A) - P(B)$

ب) طبق الف $\rightarrow P(A) = \overbrace{P(A-B)}^{\geq 0} + P(B) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$

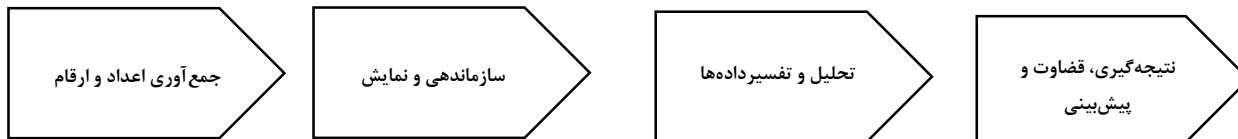
مقدمه

آمار در روزگاران کهن اغلب به معنای جمع آوری اطلاعات مربوط به جمعیت به کار می‌رفت و بیشتر به منظور جمع-آوری مالیات یا برای فعالیت‌های نظامی استفاده می‌شد. ولی در حال حاضر تقریباً در تمامی علوم که نیاز به اثبات ادعا و طبقه‌بندی اطلاعات مبتنی بر شواهد تجربی باشد، علم آمار حضور دارد.

تعریف آمار: مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

تعریف علم آمار: مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

نتیجه: طبق تعریف علم آمار مراحل علم آمار به شکل زیر است:



جامعه آماری یا جمعیت

به مجموعه افراد یا اشیائی که حداقل دارای یک صفت یا ویژگی مشترک (صفات مشخصه) باشند و درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت می‌گیرد، جامعه آماری می‌گوییم و هریک از افراد یا اشیا را عضو جامعه می‌نامند.

تذکر: تعداد اعضای جامعه را اندازه یا حجم جامعه می‌گویند.

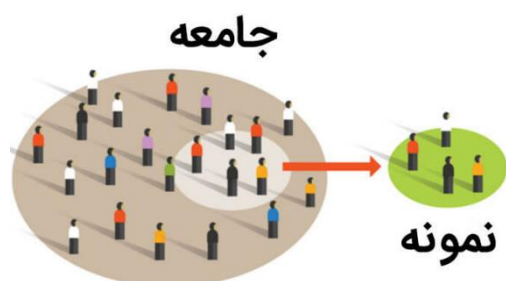
مثال: در مطالعه و بررسی (متوسط وزن دانش‌آموزان مدارس متوسطه دوم شهر همدان) جامعه آماری عبارت است از تمامی دانش‌آموزانی که در مدارس متوسطه دوم شهر همدان تحصیل می‌کنند. ویژگی مشترک (صفت مشخصه) این جامعه تحصیل در مدرسه متوسطه دوم است.

دقت کنید بررسی‌های آماری روی صفات مشخصه انجام نمی‌شود زیرا افراد جامعه نسبت به این صفات فرقی با یکدیگر ندارند.

بررسی کل جامعه (سرشماری) مخصوصاً وقتی جامعه بسیار بزرگ باشد اغلب کاری زمان‌بر و دشوار است از این رو تعریف جدیدی ارائه می‌دهیم.

نمونه

قسمتی از جامعه را که طبق ضوابط مشخصی انتخاب می‌شود و مطالعه آن به جای مطالعه تمام جامعه صورت می‌گیرد، نمونه می‌نامیم. معمولاً به مصداق مشت نمونه خروار است نتیجه حاصل از مطالعه نمونه را به تمام جمعیت تعمیم می‌دهند.



نمونه‌ای را که در آن، همه اعضای جامعه، شانس انتخاب یکسان در آن دارند، نمونه تصادفی نامیده می‌شود.

مثال: در مثال بررسی (متوسط وزن دانش‌آموزان مدارس متوسطه دوم شهر همدان) می‌توانیم مدرسه شما را به عنوان یک نمونه تصادفی انتخاب کنیم.

تذکر: تعداد اعضای نمونه را اندازه یا حجم نمونه گویند.

متغیر

ویژگی یا صفتی که در افراد مختلف جامعه یکسان نیست و معمولاً از فردی به فرد دیگر تغییر می‌کند را متغیر می‌نامیم. عدد یا عبارتی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.

مثال: در مثال (بررسی متوسط وزن دانش‌آموزان مدارس متوسطه دوم شهر همدان) متغیر، وزن است.

انواع متغیرها

به دو نوع کمی و کیفی تقسیم می‌شوند:

(۱) **متغیر کمی:** متغیری است که مقادیر عددی می‌گیرند و واحد اندازه‌گیری یا شمارش دارند. مانند سن، معدل،

قد، وزن، درآمد و...

انواع متغیرهای کمی:

الف) **متغیر پیوسته:** متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار

کند. مانند قد، وزن و...

ب) **متغیر گسسته:** متغیری که پیوسته نباشد. مانند تعداد فرزندان و...

(۲) **متغیر کیفی:** متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند. مانند: جنس، مرغوبیت، شغل، نوع بیماری، وضع تاهل،

رنگ ماشین، گروه خونی و...

انواع متغیرهای کیفی:

الف) **متغیر ترتیبی:** که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد. مانند: سطح تحصیلات و...

ب) **متغیر اسمی:** متغیر کیفی که ترتیبی نیست. مانند جنسیت و...

مثال: نوع هریک از متغیرهای زیر را مشخص کنید.

(۱) رنگ اتومبیل‌های موجود در یک نمایشگاه ماشین کیفی - اسمی

(۲) درجه حرارت کلاس درس بر حسب سانتیگراد در روزهای سال کمی - پیوسته

(۳) گنجایش آب یک تانکر کمی - پیوسته

(۴) تعداد شکایات رسیده به یک پاسگاه پلیس کمی - گسسته

(۵) درآمد دانشجویان شاغل کمی - پیوسته

(۶) وضعیت تاهل کارمندان یک شرکت کیفی - اسمی

(۷) سن دانشجویان شرکت کننده در یک دوره هنری کمی - پیوسته

(۸) مدت زمان پاسخ گویی به سؤالات یک امتحان کمی - پیوسته

(۹) رشته تحصیلی کیفی - اسمی

(۱۰) ارزیابی تحصیلی (ضعیف، معمولی و خوب) کیفی - ترتیبی

(۱۲) نمره آخرین آزمون کمی - پیوسته

کنکور ۹۹ خارج: نوع متغیر (رتبه های شرکت کنندگان در آزمون سراسری) کدام است؟

(۱) کمی - پیوسته (۲) کمی - گسسته (۳) کیفی - ترتیبی (۴) کیفی - اسمی

جواب: گزینه ۳

کنکور ۹۲ داخل: کدام مورد زیر متغیر محسوب نمی شود؟

(۱) وزن اعضای یک خانواده (۲) تعداد خودروهای شهرهای ایران

(۳) دمای هوای یک شهر در روزهای مختلف (۴) شرکت کنندگان در یک مسابقه ورزشی

جواب: گزینه ۴