

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

نویسنده: سید ابوالفضل فاضل

به نام خدا

با شروع پاندمی کرونا که منجر به تعطیلی آموزش حضوری در مراکز آموزشی گردید و آموزش مجازی به اشکال مختلف به عنوان یک شیوه آموزش به طور جدی معرفی شد، بر آن شدم برای آن دسته از دانش آموزانی که به صورت صحیح آموزش مجازی دسترسی ندارند و همکارانی که بستر مناسبی برای تدریس مجازی در اختیار نداشتند، مجموعه‌ای شامل فیلم و جزوه برای درس ریاضی ۲ آماده کنم تا شاید در آن ایام سخت کمکی هر چند ناچیز به آموزش مفهومی ریاضیات و گسترش عدالت آموزشی شده باشد. آن دوران تمام شد ولی دیگر آموزش‌های تلفیقی و ترکیبی جای آموزش‌های سنتی را گرفت و فصلی جدید در امر آموزش گشوده شد.

با توجه به حجم بالای کار و تهیه همزمان فیلم و جزوه برای این درس و درس‌های دیگر قطعاً اشتباهاتی در جزوه وجود دارد که از علاقه‌مندان پوزش می‌طلبم و خوشحال می‌شوم با شناسه شاد بنده به آدرس @seyedfazelian در میان بگذارند تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح شود.

همانطور که خواهید دید جزوه به صورت جلسه‌ای و با قلم نوری تنظیم شده که فیلم هر جلسه به جزء فصل هفتم در کانال آپارات <https://www.aparat.com/s.a.fazelian> در دسترس می‌باشد.

در پایان یادآوری می‌شوم استفاده از این جزوه به هر صورت مجاز و هزینه آن فقط دعا برای عاقبت بخیری نگارنده است.

سیدابوالفضل فاضلیان

۱۴۰۲/۱/۱۱

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس اول: هندسه تحلیلی

جلسه اول و دوم: صفحات ۲ تا ۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱) فاصله دو نقطه (طول پاره خط)

اگر دو نقطه A و B مشاخر با اعداد x_A و x_B روی محور x باشند آنگاه فاصله

بین دو نقطه $|AB| = |x_B - x_A|$ می شود.

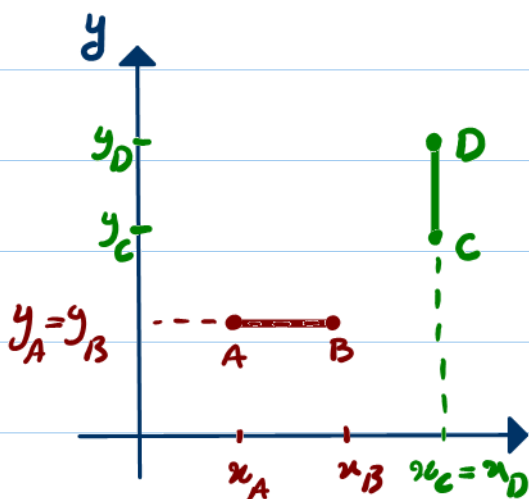


مانند :



تذکره: در دستگاه مختصات هر دو نقطه A و B که عرض برابر دارند هم عرض و به نقاط C و D

که طول مساوی دارند هم طول گفته می شود و داریم:



$$|AB| = |x_B - x_A|$$

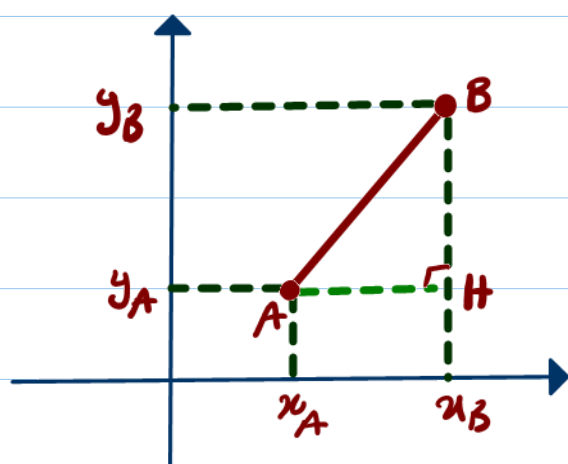
$$|CD| = |y_D - y_C|$$

فرمول شماره (۱): اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات

باشند، طول پاره خط AB یا فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

اثبات:



اگر از نقطه A بر خط عمود بر BH ردی کردیم x_A ، y_B ، x_B ، y_A و پاره عمود را H بنامیم.

مثلث ABH قائم الزامه خواهد بود و طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad (1)$$

و بر BH هم طول هست پس: $|BH| = |y_B - y_A|$

همچنین H و A هم عرض هستند پس: $|AH| = |x_B - x_A|$

با جایگذاری در رابطه (۱) داریم:

$$AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

با گرفتن رادیکال از طرفین و این خاصیت قدر مطلق ($|a|^2 = a^2$) و توجه به این نکته که طول

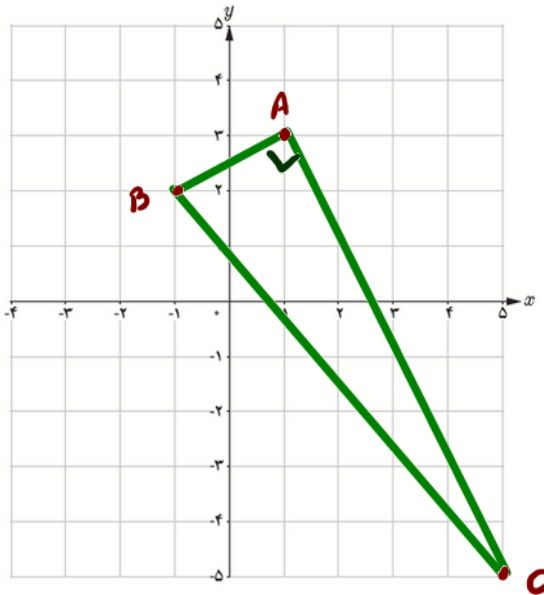
را همیشه عددی مثبت در نظر می‌گیریم خود هم داشت:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

یادآوری: شیب خط گذرا از دو نقطه $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ برابر: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

و معادله خط گذرنده از نقطه A با شیب m برابر: $y - y_A = m(x - x_A)$ است.

کارد کلاس



سه نقطه $A(1, 3), B(-1, 2), C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC ، در صفحه مختصات روبه‌رو، هستند.

(الف) مثلث را رسم کنید.

(ب) طول اضلاع مثلث را به دست آورید.

(پ) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

(ت) شیب دو خط AB و AC را به دست آورید. چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

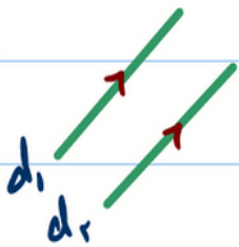
$$BC = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{85})^2 = (\sqrt{80})^2 + (\sqrt{5})^2 \rightarrow 85 = 80 + 5 \rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2$$

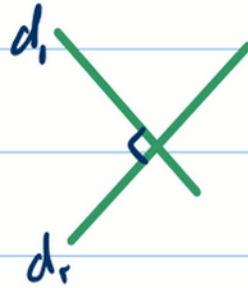
$$\begin{aligned} \text{ت) } m_{AB} &= \frac{2-3}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \\ m_{AC} &= \frac{-5-3}{5-1} = \frac{-8}{4} = -2 \end{aligned}$$

مقدار د معکوس یکدیگرند یا
حاصل ضربشان منفی یک می‌شود.

تذکره: شیب دو خط موازی با هم برابر و شیب دو خط عمود بر هم قرینه و معکوس یکدیگرند.



$$m_1 = m_2$$



$$m_1 \times m_2 = -1$$

مثال: وضعیت خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$$d_1: y = 4x - 1$$

$$d_2: 1y + 2x = 3$$

$$d_3: 12x - 3y + 1 = 0$$

نکته: ضریب x در صورت استاندارد خط $(y = mx + h)$ شیب خط است.

نکته: شیب خط $ax + by + c = 0$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

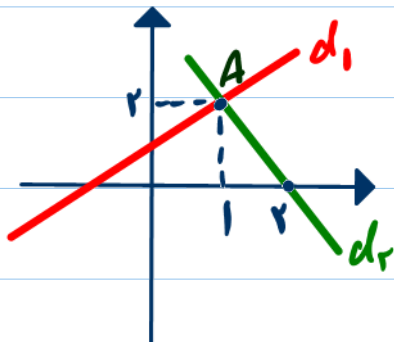
$$m_1 = 4$$

$$m_2 = -\frac{2}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$m_3 = -\frac{12}{-3} = 4$$

$$m_1 = m_3 \rightarrow d_1 \parallel d_3, \quad m_1 \times m_2 = m_3 \times m_2 = -1 \rightarrow d_2 \perp d_1, d_2 \perp d_3$$

مثال: معادله خط d_1 عمود بر d_2 را در نقطه تقابل بیابید.



$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1 \times m_2 = -1$$

$$(1, 0), (0, 2) \rightarrow m_2 = \frac{2-0}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

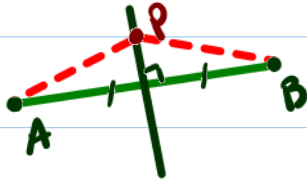
$$m_1 = \frac{1}{2}$$

$$d_1: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

نکته: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است و برعکس.

کارد کلاس

نشان دهید نقطه $P(-12, 11)$ روی عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه $A(0, -3)$ و $B(6, 15)$ قرار دارد.



کافی است ثابت کنیم $AP = BP$.

$$AP = \sqrt{(-12-0)^2 + (11+3)^2} = \sqrt{144 + 196} = \sqrt{340}.$$

$$\rightarrow AP = BP$$

$$BP = \sqrt{(-12-6)^2 + (11-15)^2} = \sqrt{324 + 16} = \sqrt{340}.$$

۱۲) مختصات نقطه وسط یک پاره خط:

اگر M وسط پاره خط AB روی محور طول ها باشد:



$$AM = MB \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

به همین ترتیب اگر M وسط پاره خط AB روی محور عرض ها باشد:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

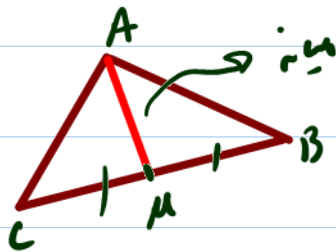
و در حالت کلی اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند:

تصویر کردن این نقاط در محور و ها به فرمول شماره ۱۲ می رسم.

فرمول شماره ۱۲: مختصات نقطه μ وسط پاره خط AB :

$$\mu = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

مثال: اگر $A(1, 9)$, $B(3, 1)$, $C(7, 11)$ سه رأس یک مثلث باشند، پاره میانه



AM را به رسم آوریم.

$$\mu = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left(\frac{3+7}{2}, \frac{1+11}{2} \right) = (5, 6)$$

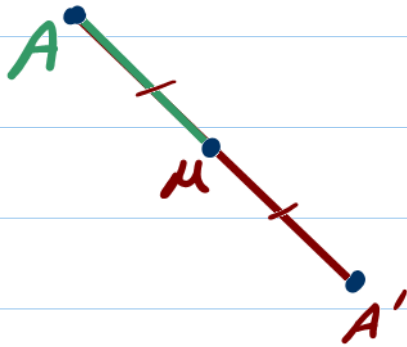
$$\mu, A \rightarrow m = \text{شیب} = \frac{9-6}{1-5} = \frac{3}{-4}$$

$$y - 9 = \frac{3}{-4}(x - 1)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + 9$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$$

نکته: قدرینه نقطه $A(x_A, y_A)$ نسبت به نقطه $M(x_M, y_M)$:



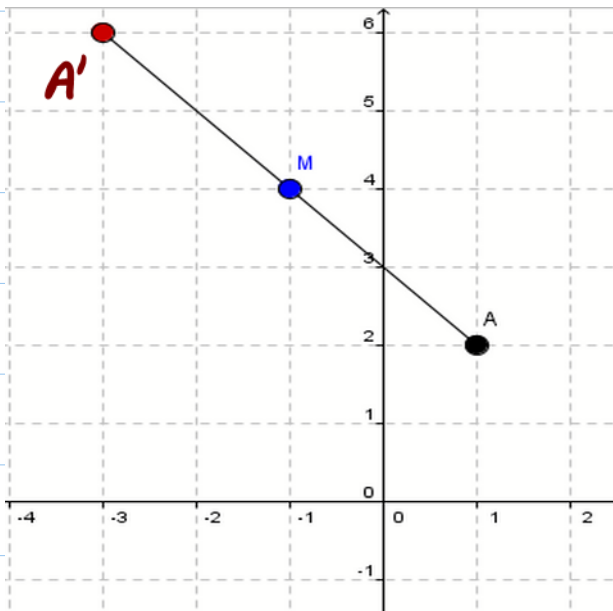
اگر A' را نقطه مدبر نظر بگیریم. چون M وسط AA' است...

واقع می شود پس خواهیم داشت:

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \rightarrow 2x_M = x_A + x_{A'} \rightarrow x_{A'} = 2x_M - x_A$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \rightarrow 2y_M = y_A + y_{A'} \rightarrow y_{A'} = 2y_M - y_A$$

مثال: قدرینه نقطه $A(1, 2)$ را نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ بیابیم.



$$x_{A'} = 2x(-1) - 1 = -3$$

$$y_{A'} = 2 \times 4 - 2 = 6$$

$$A'(-3, 6)$$

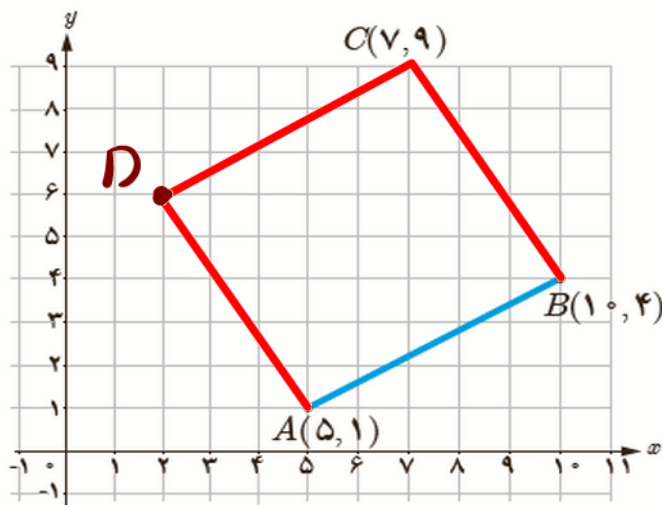
نکته: در هر چهارضلعی که قطرهایش را نصف می کنند (مانند مربع، مستطیل، لوزی و

متوازی الاضلاع) مجموع طول ها و مجموع عرض های دو رأس روبه رو هفتم برابرند.

(اثبات عنوان تمرین)

مثال: مربع $ABCD$ را با رأس های $A(5,1)$ ، $B(10,4)$ ، $C(7,9)$

در نظر بگیرید. مختصات رأس D را بیابید.

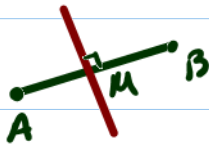


$$x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow 5 + 7 = 10 + x_D \rightarrow x_D = 2$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow 1 + 9 = 4 + y_D \rightarrow y_D = 6$$

$D(2, 6)$

مثال: معادله عمود منصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(3, 4)$ را به هم وصل کرده است.



$$M = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

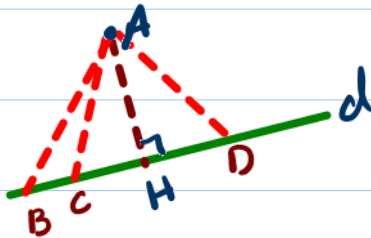
$$m_{AB} = \frac{4-1}{3+2} = \frac{3}{5} \rightarrow m = -\frac{5}{3} \text{ عمود منصف}$$

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{5}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{\times 6} 4y - 15 = -10x + 5 \rightarrow 4y + 10x = 20$$

$$\div 2 \rightarrow 2y + 5x = 10$$

۳) فاصله نقطه از خط:

بی‌رأسم فاصله یک نقطه از یک خط، کوتاه‌ترین فاصله بین فاصله عمودی از خط می‌گیریم.

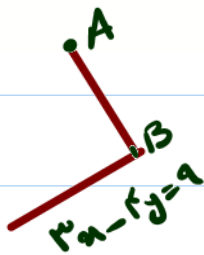


فرمول شماره ۳: (بدون اثبات می‌پذیریم)

فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر:

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱ اگر نقطه $A(2,3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟



روی خط قرار ندارد $A(2,3) \xrightarrow{\text{در خط}} 3 \times 2 - 4 \times 3 = 9$
 $6 - 12 = -6 \neq 9$

صورت کلی خط:

$$AB = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 3 - 9|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\Rightarrow S = 3 \times 3 = 9$$

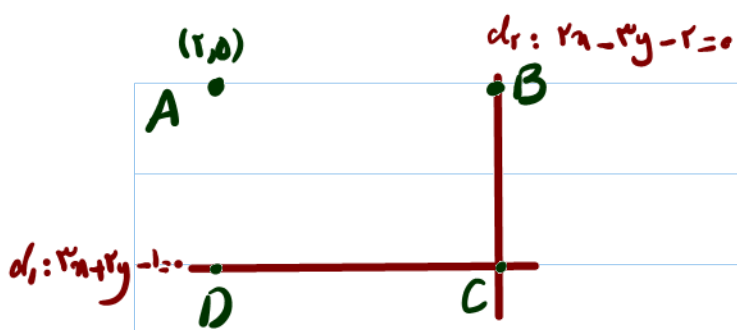
۲ دو خط $3x + 2y = 1$ و $2x - 3y = 2$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه $A(2,5)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

$$d_1: 3x + 2y = 1 \rightarrow m = -\frac{3}{2}, \quad d_r: 2x - 3y = 2 \rightarrow m = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$d_1 \perp d_r \rightarrow \text{در ضلع مجاور } d_1, d_r$$

$$(2,5) \xrightarrow{d_1} 3 \times 2 + 2 \times 5 \neq 1, \quad (2,5) \xrightarrow{d_r} 2 \times 2 - 3 \times 5 \neq 2$$

$(2,5)$ روی اضلاع قرار ندارد پس A رأس مستطیل است که به مقابل در ضلع قرار دارد.



پس داریم :

$$d_1(A, d_1) = AD = \frac{|2 \times 2 + 2 \times 5 - 1|}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{12}}$$

$$d_1(A, d_2) = AB = \frac{|2 \times 2 - 3 \times 5 - 2|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

$$S = \frac{10}{\sqrt{12}} \times \frac{13}{\sqrt{13}} = 10 \times \frac{13}{12} = 10$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

قسمت اول: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های

معادله درجه ۲

جلسه سوم: صفحات ۱۱ تا ۱۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

معادله درجه دوم :

به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد $a \neq 0$ یک معادله درجه دوم گفته می شود.

در سال گذشته بارش های حل معادله درجه دوم؛ روش تجزیه، روش جابجایی و روش دلتا

آشنا شدید.

یادآوری روش دلتا :

$$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \end{cases}$$

نکته : (روش ضرائب) برخی از معادلات درجه دوم شرایطی دارند که می توان به سرعت جواب های

آن را یافت :

الف) اگر جمع ضرائب منفی باشد یعنی : $a+b+c=0$ باشد یکی از جواب ها 1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

ب) اگر ضریب a مساوی جمع دوای دیگر باشد یعنی : $b=a+c$ باشد یکی از جواب ها 1-

و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $5x^2 - 2x - 1 = 0$ $\begin{cases} a=5 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a} = -\frac{1}{5} \end{cases}$

ب) $4x^2 + 7x + 3 = 0$ $\begin{cases} a=4 \\ b=7 \\ c=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{c}{a} = -\frac{3}{4} \end{cases}$

جمع و ضرب ریشه‌ها:

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $\Delta \geq 0$ باشد، مجموع و حاصل ضرب

ریشه‌های آن برابر است با:

$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$
 (ریشه‌های هارم)

$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

دشانت: اگر $\Delta \geq 0$ باشد داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

صورت ریشه در ضرب $P = \alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad \square \quad \text{به عنوان تمرین برای حالت } \Delta = 0 \text{ امتحان کنید.}$$

مثال: بدون حل معادله $2x^2 - 7x + 4 = 0$ مجموع و ضرب ریشه‌ها را بیابید.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{2} = \frac{7}{2} \quad , \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{2}$$

مثال: در معادله $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ یکی از جواب‌ها کس و قرینه جواب دیگر است.

$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{array}$

m را بیابید.

ریشه‌ها $\alpha, \beta = -\frac{1}{\alpha}$

$$P = \alpha\beta = \alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = -1 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow \frac{m-1}{2} = -1$$

$$\Rightarrow m-1 = -2 \Rightarrow m = -1$$

مثال: در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه دیگر باشد واحد دیگر باشد.

$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{array}$

m را محاسبه کنید.

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + 0 \xrightarrow{x^2} 2\alpha = \beta + 0 \rightarrow 2\alpha - \beta = 0$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{1} = 1 \rightarrow \alpha + \beta = 1$$

$$+ \begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

$$3\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \beta = \frac{2}{3}$$

$$p = \alpha\beta = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \rightarrow p = \frac{2}{9} = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} \rightarrow m = \frac{2}{9}$$

مثال: اگر α, β جذب های دیکارله $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند، حاصل عبارتهای زیر را بنویسید.

$$\text{الف) } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{p}$$

$$S = \frac{2}{1} = 2, p = -\frac{4}{1} = -4$$

$$= \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$$

$$\text{نکته: } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2p$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^2 - 2p}{p^2} = \frac{2^2 - 2(-4)}{(-4)^2} = \frac{4 + 8}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$-1) \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha+\beta+2}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{S+2}{1+S+P}$$

$$= \frac{2+2}{1+2-4} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$2) \alpha^r + \beta^r$$

$$\text{نکته: } (\alpha+\beta)^r = \alpha^r + r\alpha^{r-1}\beta + r\alpha\beta^{r-1} + \beta^r$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)^r - r\alpha^{r-1}\beta - r\alpha\beta^{r-1} = \alpha^r + \beta^r \Rightarrow \alpha^r + \beta^r = (\alpha+\beta)^r - r\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \alpha^r + \beta^r = S^r - rps$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = 2^4 - 4(-4)(2) = 16 + 32 = 48$$

مثال: سطر 99 نوی

معادله درجه دوم $\overset{a}{\uparrow} 2x^2 + \overset{b}{\uparrow} (2m-1)x + \overset{c}{\uparrow} 2-m=0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع

ریشه ها با معکوس حاصل ضرب آن در ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

$$-\frac{5}{2} \quad 4 \quad -1 \quad 2 \quad \frac{7}{2} \quad \checkmark$$

$$\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta} \Rightarrow S = \frac{1}{P} \rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{c}{a}} \rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$$

$$\rightarrow a^r = -bc \rightarrow r^r = -(r_m - 1)(r - m)$$

$$9 = -(4m - 2m^r - r + m) \Rightarrow -2m^r + 5m - r + 9 = 0$$

$$-2m^r + 5m + r = 0 \Rightarrow -r + r = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{r}{-2} = \frac{r}{2} \end{cases} \quad \text{غَط} \quad \checkmark$$

$$m = -1 \Rightarrow 2x^r - 4x + 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^r - 2x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$$

گزینہ ۱

حالت ریسے ہا :

دورِ شے مثبت : $S > 0$
 دورِ شے منفی : $S < 0$
 (دورِ شے ہم علامت) $p > 0$ (الف)

اندازہ ریشہ مثبت بزرگتر : $S > 0$
 اندازہ ریشہ منفی بزرگتر : $S < 0$
 دورِ شے قرینہ ہم : $S = 0$
 (دورِ شے مختلف علامت) $p < 0$ (ب)

مسئله کنکور ۹۶ رشته ریاضی:

به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دو ریشه مثبت دارد؟

$$\Delta > 0 \quad 14 < a < 14 \quad \checkmark \quad 2 < a < 14 \quad (2) \quad 2 < a < 14 \quad (2) \quad -2 < a < 2 \quad (1)$$

$$\Delta > 0, \quad p > 0, \quad s > 0$$

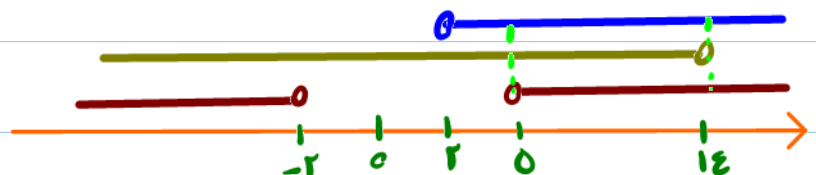
$$\Delta > 0 \rightarrow (-2(a-2))^2 - 4 \times 1 \times (14-a) > 0 \rightarrow 4(a^2 - 4a + 4) - 56 + 4a > 0$$

$$4a^2 - 12a + 16 - 56 + 4a > 0 \rightarrow 4a^2 - 8a - 40 > 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 10 > 0$$

$$\rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a > 5 \text{ یا } a < -2 \quad (1)$$

$$p > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{14-a}{1} > 0 \rightarrow a < 14 \quad (2)$$

$$s > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow 2\frac{(a-2)}{1} > 0 \Rightarrow 2a - 4 > 0 \rightarrow a > 2 \quad (3)$$



$$(1) \cap (2) \cap (3) : 5 < a < 14$$

گزینه ۴

ساخت معادله درجه دوم :

تا به حال معادله درجه دوم را داشتیم و ریشه‌ها یا ضرب و جمع ریشه‌ها را پیدا می‌کردیم.

حال می‌خواهیم ببینیم اگر اطلاعات درباره ریشه‌ها داشته باشیم، می‌توانیم معادله را بنویسیم؟

فرضیه: اگر α و β دو عدد دلخواه باشند و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشد ریشه‌ها α و β

جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ است.

اثبات: فرض کنید می‌خواهیم معادله بنویسیم که ریشه‌هایش α و β است در این صورت

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

پس:

$$x^2 + (-\alpha - \beta)x + (-\alpha)(-\beta) = 0 \quad \text{یعنی ریشه‌هایش}$$

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \quad \square$$

مثال: معادله درجه دوم بنویسید که ریشه‌هایش $2 \pm \sqrt{3}$ باشد.

$$S = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4 \quad , \quad P = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

مثال کنکور ۹۴ :

ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد

کتر است؟

$$1) x^2 - 3x + 1 = 0 \quad 2) x^2 + 3x + 1 = 0 \quad 3) x^2 - 5x + 2 = 0 \quad 4) x^2 + 5x + 2 = 0$$

اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند ریشه‌های معادله جدید :

$$\frac{1}{\alpha} - 1, \frac{1}{\beta} - 1 \quad S_{\text{جدید}} = \frac{3}{2}, P_{\text{جدید}} = -\frac{1}{2}$$

$$S_{\text{جدید}} = \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{S_{\text{قدیم}}}{P_{\text{قدیم}}} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2$$

$$= \frac{4}{-2} - 2 = -2 - 2 = -4$$

$$P_{\text{جدید}} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = (-1) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)(-1) + \frac{1}{\alpha\beta} = 1 - 3(-1) + \frac{1}{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + 3 - 2 = 2$$

$$\text{ریشه جدید: } x^2 - S_{\text{جدید}}x + P_{\text{جدید}} = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0$$

مثال: رشت‌های درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از رشت‌های $x^2 + 7x + 1 = 0$ و $x^2 + vx + 4 = 0$

بیشتر است. کدام است؟ $(1, -2)$ ✓ $(3, -1)$ $(4, \frac{1}{4})$

اگر α, β ریشه‌های $x^2 + 7x + 1 = 0$ و α, β ریشه‌های $x^2 + vx + 4 = 0$

$\alpha + 1, \beta + 1$ است. $(S = -\frac{v}{4}, P = \frac{1}{4})$

$$b = p = (\alpha + 1)(\beta + 1) = 1 + (\alpha + \beta) + \alpha\beta = 1 + S + P$$

$$= 1 - \frac{v}{4} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{6}{4} = 1 - 2 = -1$$

گزین ۲

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم (معادلات دو مجهولی)

برخی از معادلات در نگاه اول درجه دوم نیستند ولی با تغییر متغیری توان آن‌ها را به معادله درجه دوم تبدیل کرد.

به این صورت که عبارت تکرار شونده را u در نظر بگیریم بگذاریم معادله درجه دوم شود.

معادله را حل کرده u را بدست می‌آوریم. در آخر با جایگزینی u ، x را می‌یابیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad u = x^2 \quad \text{(الف)}$$

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ u=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{ب) } (x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$$

$$u = x^2 + x \Rightarrow u^2 - 18u + 72 = 0 \Rightarrow (u-12)(u-6) = 0$$

$$\begin{cases} u=12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x+4)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=3 \end{cases} \\ u=6 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases} \end{cases}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

قسمت دوم: صفرهای تابع درجه ۲

جلسه چهارم: صفحات ۱۴ تا ۱۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

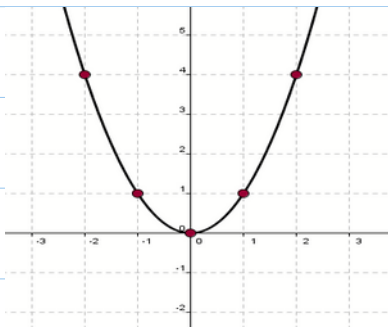
اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

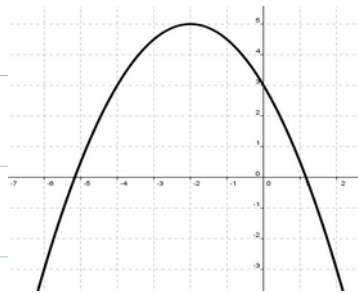
یادآوری:

به نمودار $y = ax^2 + bx + c$ که در آن $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ سهمی می‌گویند.

اگر $a > 0$ باشد سهمی رو به بالا دایر $a < 0$ باشد سهمی رو به پایین است.



$a > 0$
دارد min



$a < 0$
دارد max

در هر دو حالت نقطه $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ را رأس سهمی می‌گویند.

یعنی اگر $S(x_s, y_s)$ رأس سهمی باشد می‌توانیم معادله سهمی را به صورت:

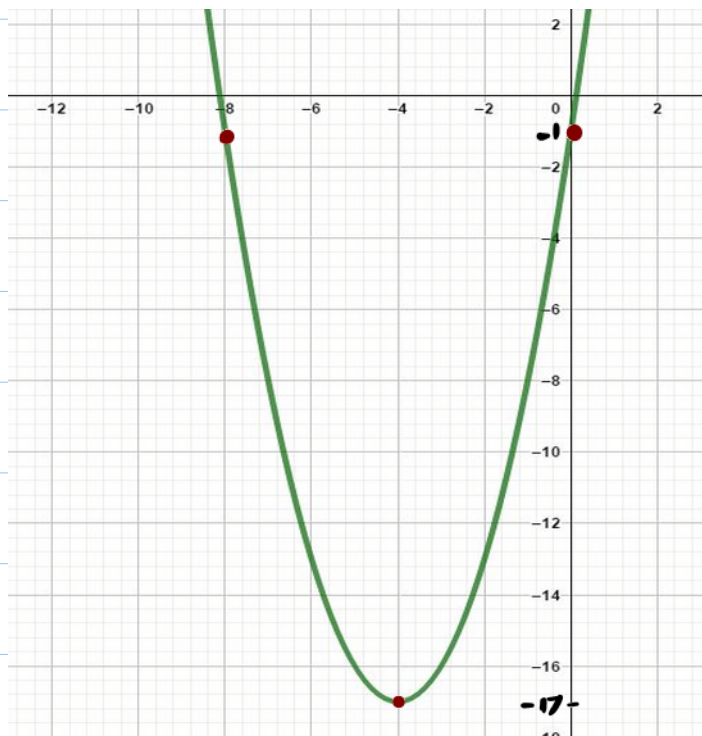
$$y = a(x - x_s)^2 + y_s \text{ هم نوشت.}$$

مثال: سهمی $y = x^2 + 8x - 1$ را رسم کنید.

x	-8	-4	0
y	-1	-17	-1

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$y = (-4)^2 + 8(-4) - 1 = 16 - 32 - 1 = -17$$



مثال: فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی باشد و سهمی از نقطه $(3, 1)$ هم بگذرد.

معادله سهمی را بنویسید.

$$y = a(x - x_A)^2 + y_A$$

$$y = a(x + 1)^2 + 9 \xrightarrow{\text{از سهمی}} 1 = a(3 + 1)^2 + 9 \rightarrow 1 = 16a + 9 \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 9$$

صفحه‌های تابع:

اگر f تابع باشد، جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را صفحه‌های تابع می‌گویند. در واقع صفحه‌های

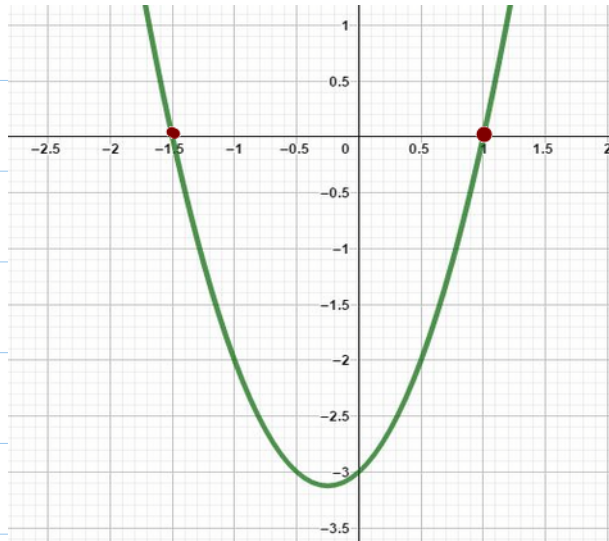
تابع، مد‌هایی از تابع هستند که اگر آنها صفر است. پس می‌توان گفت:

صفحه‌های تابع، م‌های نقاط برخورد نمودار تابع با محور x هستند.

مثال: مفزهای تابع زیر را با رسم مندرار بدیت کردید.

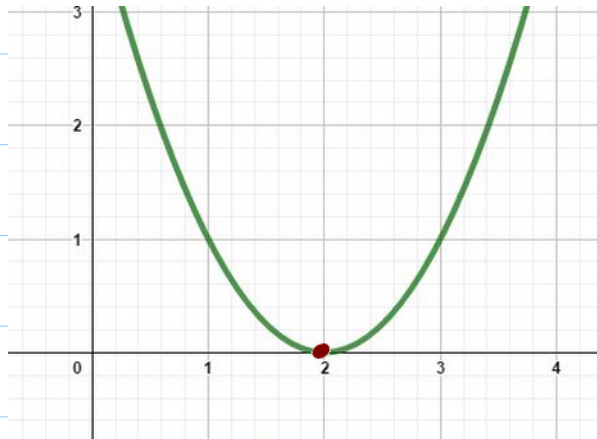
الف) $y = 2x^2 + x - 3$

$2x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1,5 \end{cases}$



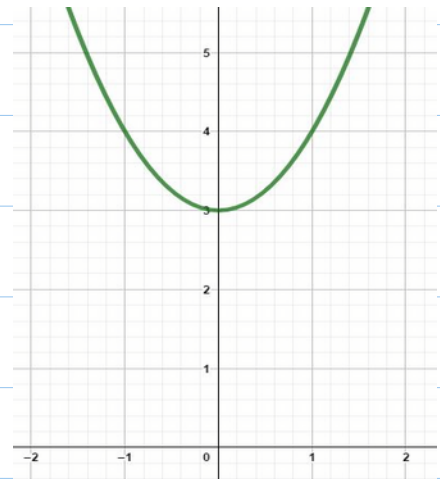
ب) $y = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$



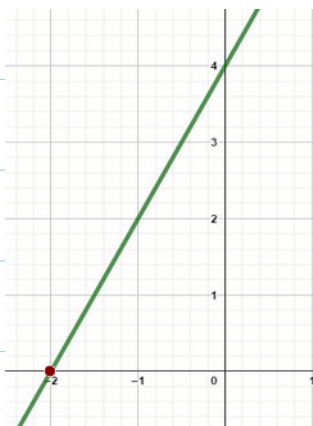
ج) $y = x^2 + 3$

$x^2 + 3 = 0$ مفز ندارد



د) $y = 2x + 4$

x	y
0	4
-2	0



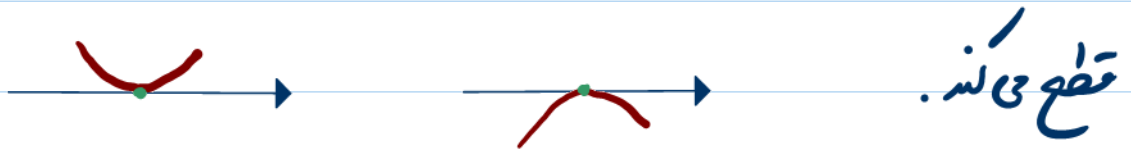
$2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$

نتیجه:

اگر Δ مثبت باشد یعنی در دو نقطه که خارج جواب های معادله هستند جذورها را قطع می کند.



اگر Δ منفی باشد یعنی فقط در یک نقطه که خارج رسم معادله است یک جذور را قطع می کند.



اگر Δ منفی باشد یعنی جذورها را قطع نمی کند زیرا معادله جواب ندارد.



مثال: به ازای کدام مقادیر a ، بنزدیک تابع $f(n) = an^2 + (a+3)n - 1$ معادله ها

$$f(n) = \underbrace{a} a n^2 + \underbrace{(a+3)}_b n - \underbrace{1}_c$$

را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

✓ (1) $a < -9$ (2) $a < -3$ (3) $a > -1$ (4) $-3 < a < 0$

دور شش منفی دارم $f(n) = 0 \rightarrow an^2 + (a+3)n - 1 = 0$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = (a+3)^2 - 4a(-1) = a^2 + 6a + 9 + 4a = a^2 + 10a + 9 > 0$$

$(a+9)(a+1)$

a	-9	-1
$-$	$+$	$-$

ج. ۲: $a < -9 \leq a > -1$ ①

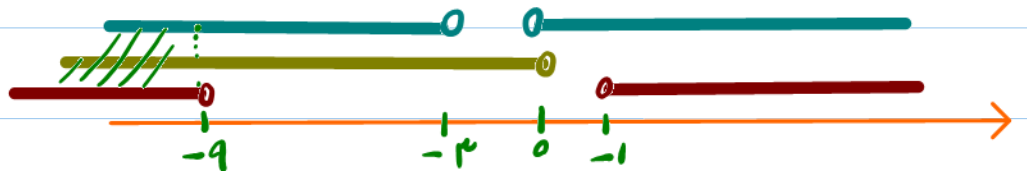
$p > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow -\frac{1}{a} > 0 \rightarrow a < 0$ ②

$q < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow -\frac{(a+3)}{a} < 0 \rightarrow \frac{a+3}{a} > 0$

a	-3	0
$+$	$+$	$-$

ج. ۲: $a < -3 \leq a > 0$ ③

① و ② و ③:



$a < -9$ $a > -1$

تفسیر مهم: اگر x' و x'' ریشه‌های تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ باشد آنگاه می‌توانیم

رابطه دکن را به صورت $y = a(x - x')(x - x'')$ هم بنویسیم.

نکته: چون x' و x'' ریشه‌های تابع $y = ax^2 + bx + c$ هستند پس جواب هر

$ax^2+bx+c=0$ است. کافی است ثابت کنیم: $a(x-x')(x-x'')=ax^2+bx+c$

$$a(x-x')(x-x'') = a(x^2 - \underbrace{(x'+x'')}_{S}x + \underbrace{x'x''}_{P})$$

$$= a(x^2 - Sx + P)$$

$$= a(x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a})$$

$$= ax^2 + bx + c \quad \square$$

نکته: طول راس کمی با ضابطه $y = a(x-x')(x-x'')$ دوطرفه است،

$$\text{یعنی: } x_s = \frac{x' + x''}{2}$$

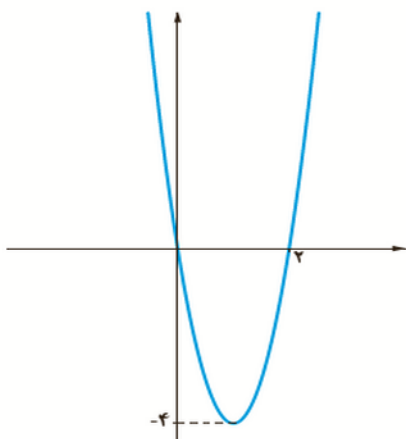
مثال: ضابطه سهمی های زیر را بنویسید.

$$x' = 0, x'' = 2$$

$$y = a(x-0)(x-2) = ax(x-2)$$

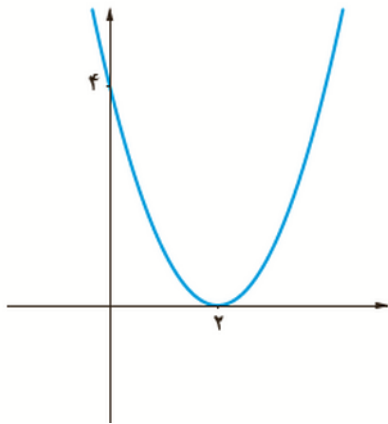
$$x_s = \frac{0+2}{2} = 1 \Rightarrow S(1, -2)$$

1)



3: در ضابطه قرار دهیم
 $-r = a(1)(1-r) \Rightarrow -r = -a \Rightarrow a = r$

$$y = rx(x-r) \Rightarrow y = rx^2 - rx$$

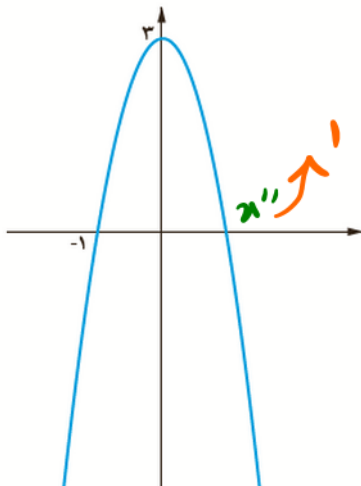


$$x' = x'' = r$$

$$y = a(x-r)(x-r) = a(x-r)^2$$

ضابطه $(0, r) \rightarrow r = a(0-r)^2 \Rightarrow r = ra \Rightarrow a = 1$

$$y = (x-r)^2 \Rightarrow y = x^2 - 2rx + r^2$$



$$x_s = \frac{x' + x''}{r} \Rightarrow 0 = \frac{-1 + x''}{r} \Rightarrow x'' - 1 = 0 \Rightarrow x'' = 1$$

$$y = a(x - (-1))(x - 1)$$

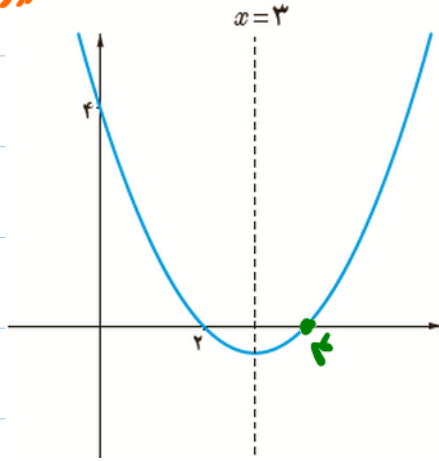
$$y = a(x+1)(x-1) = a(x^2 - 1)$$

ضابطه $(0, r) \rightarrow r = a(0^2 - 1) \Rightarrow r = -a \Rightarrow a = -r$

$$y = -r(x^2 - 1) \Rightarrow y = -rx^2 + r$$

نقطهٔ ع از دایرهٔ کبی می گذرد

۴)



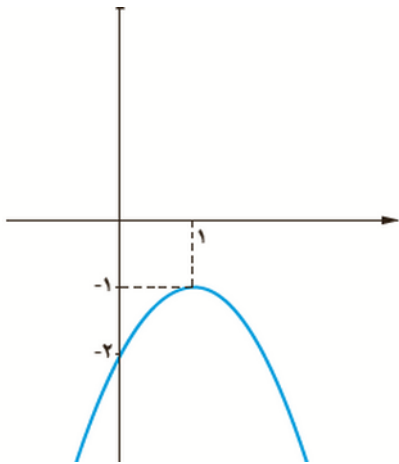
$$x_3 = 3 = \frac{r + x''}{2} \Rightarrow 4 = r + x'' \rightarrow x'' = 4$$

$$y = a(x - r)(x - 4)$$

$$(0, 4) \text{ راضیانه} \quad 4 = a(0 - r)(0 - 4)$$

$$\Rightarrow 4 = a(4) \Rightarrow a = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4)$$

۵)



$$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 4$$

$$y = a(x - x_3)^2 + y_3 \rightarrow y = a(x - 1)^2 - 1$$

$$(0, -2) \text{ راضیانه} \quad -2 = a(0 - 1)^2 - 1 \Rightarrow -2 = a - 1$$

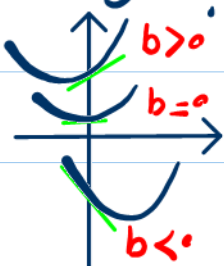
$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -1(x - 1)^2 - 1$$

$$y = -1(x^2 - 2x + 1) - 1 = -x^2 + 2x - 1 - 1 \Rightarrow y = -x^2 + 2x - 2$$

ضمت a , b , c از روی نمودار سعی :

۱- a : سعی در بالا : $a > 0$ - سعی در پایین : $a < 0$

۲- b : ضمت b ، ضمت b نسبت به محور x در محل برخورد سعی با محور y است

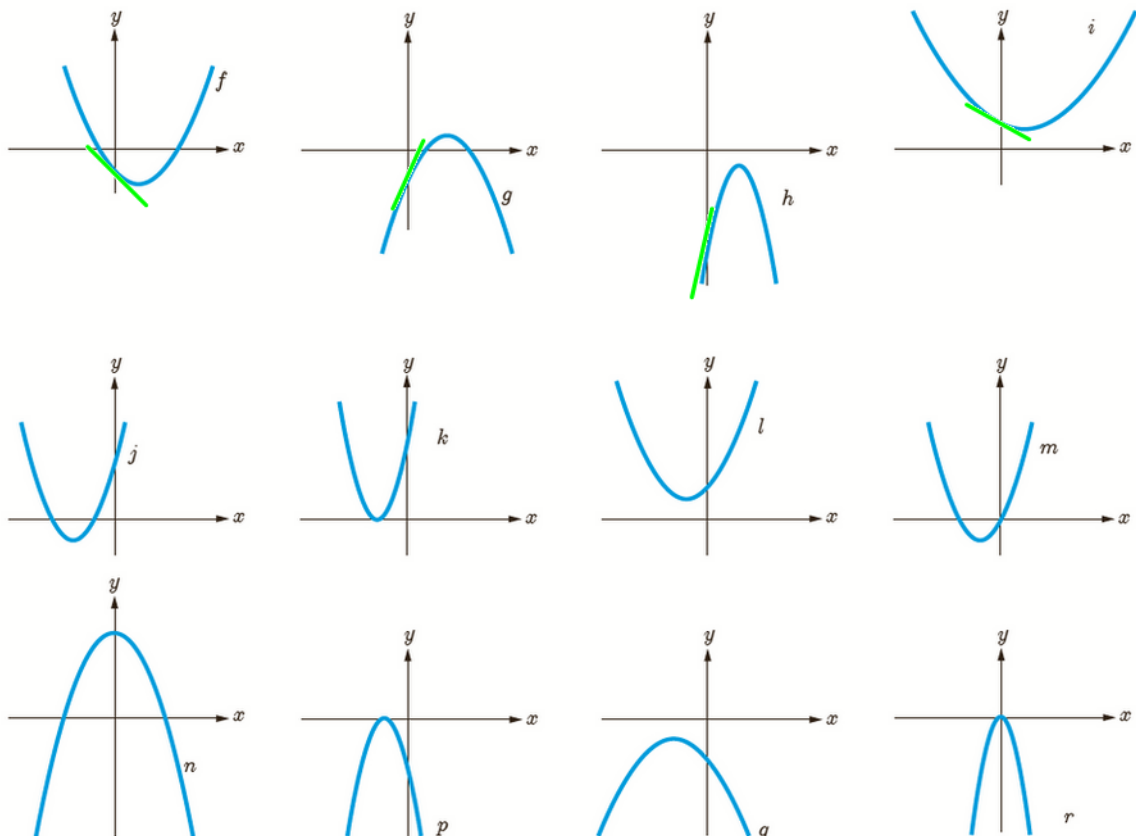


۳- C : ریشه‌ها، C عضو نقطه تلاقی سعی با محور y هاست. (محض از مبدأ)

پس اگر $C > 0$ ریشه‌ها با y مبدأ قطع کند، اگر $C = 0$ ریشه‌ها با y مبدأ قطع کند، اگر $C < 0$ ریشه‌ها با y مبدأ قطع کند.

و اگر $C < 0$ ریشه‌ها با y مبدأ قطع کند، $C < 0$ خواهد بود.

مثال: با توجه به نمودارهای زیر، جدول را تکمیل کنید.



ویژگی \ تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-
علامت b	-	+	+	-	+	+	+	+	0	-	-	0
علامت C	-	-	-	+	+	+	+	0	+	-	-	0
تعداد ریشه‌های متمایز	دو	دو	ندارد	ندارد	دو	یک	ندارد	دو	دو	یک	صفر	یک
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت	هر دو مثبت	ندارد	ندارد	هر دو منفی	منفی	ندارد	یکی منفی یکی صفر	یک	منفی	ریشه ندارد	صفر

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رايكالي

قسمت اول: حل معادلات گویا

جلسه پنجم: صفحات ۱۹ تا ۲۱

مدرس: سيد ابوالفضل فاضليان

اداره كل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تكنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

معادلات شامل عبارات گویا

عبارت گویا: عبارتی است که از تقسیم دو چند جمله‌ای است.

معادله گویا: معادله‌ای که در آن مجهول معادله در مخرج عبارت گویا و در برابر

حل معادله گویا: ابتدا کوچکترین مضرب مشترک (م.م.ک) مخرج‌ها را می‌یابیم.

سپس با ضرب طرفین معادله در م.م.ک، مخرج‌ها را از طرفین

خارج می‌کنیم و معادله حاصل را حل می‌کنیم. جوابی که در معادله است که

هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نکند.

نکته ۱: ابتدا عبارات را به فرم $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ درآوریم. حاصل ضرب طرفین را می‌گیریم.

و نیز مشترک را بتوانیم از دو طرف حذف کنیم.

مثال: معادله $\frac{2x^2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x(x^2-4)}{(x-2)(x+2)}$ را بسازیم.

$$\frac{2x^2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x(x^2-4)}{(x-2)(x+2)}$$

مثال: معادله گویای $\frac{1}{n^2+n} + \frac{n}{n^2-1} = \frac{n-1}{n^2-n}$ را حل کنید

$n(n+1) \quad (n-1)(n+1) \quad n(n-1) = n(n-1)(n+1)$

$$f \cdot f \cdot v = (n+1)n(n-1)$$

$$\cancel{n(n+1)(n-1)} \frac{1}{\cancel{n(n+1)}} + \cancel{n(n+1)(n-1)} \frac{n}{\cancel{(n-1)(n+1)}} = \cancel{n(n+1)(n-1)} \frac{n-1}{\cancel{n(n-1)(n+1)}}$$

$$\cancel{n} \cancel{+1} + n(n) = \cancel{n} \cancel{-1}$$

$$n^2 + n - n = 0 \Rightarrow n^2 - 1 = 0 \Rightarrow n(n-1) = 0$$

$$\begin{cases} n=0 & \text{و } \bar{0} \bar{0} \bar{0} \\ n^2-1=0 \rightarrow n^2=1 \rightarrow \boxed{n=\pm 1} \end{cases}$$

معادلات زیر را حل کنید.

۱ $\frac{6}{x} = 7 + \frac{x-3}{x+1}$

۲ $\frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = \frac{-3}{2}$

۳ $\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$

حل ۱: $6 \cdot x = x(x+1)$

$$\frac{1}{x} x(x+1) = 7 x(x+1) + x(x+1) \frac{(x-3)}{x+1}$$

$$7(x+1) = 7x^2 + 7x + x(x-3)$$

$$7x+7 = 7x^2 + 7x + x^2 - 3x$$

$$7x^2 - 7x - 7 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 7 \cdot (-7) = 49 + 196 = 245$$

$$x = \frac{7 \pm 11}{7} \Rightarrow x = \frac{7+11}{7} = \frac{18}{7} = 2 \checkmark, x = \frac{7-11}{7} = \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7} \checkmark$$

حل ۲: $6 \cdot x = 2p(2-p)$

$$2p(2/p) \frac{p}{2/p} + 2/p(2-p) \frac{2}{p} = 2p(2-p) (-\frac{3}{2})$$

$$2p^2 + 2(2-p)2 = p(2-p)(-3)$$

$$2p^2 + 8 - 4p = -3p + 3p^2$$

$$p^2 - 2p - 8 = 0 \rightarrow (p-4)(p+2) = 0 \begin{cases} p=4 \checkmark \\ p=-2 \checkmark \end{cases}$$

حل ۳
$$\frac{y^2 + 5}{\underbrace{y^2 + 5}_y} + \frac{y+2}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

ع. ک = $y(y+5)$

$$\cancel{y(y+5)} \frac{(y^2+5)}{\cancel{y(y+5)}} + \cancel{y(y+5)} \frac{y+2}{\cancel{y+5}} = \cancel{y(y+5)} \frac{y+1}{\cancel{y}}$$

$$y^2 + 5 + y(y+2) = (y+5)(y+1)$$

$$y^2 + 5 + \cancel{y^2} + 2y = \cancel{y^2} + 6y + 5$$

$$y + 5 = 6y + 5 \rightarrow y - 6y = 0 \rightarrow y = 0$$

مردم کنترل نه

به این جواب نرسد.

مثال ۱ معادله $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = \frac{3}{1}$ را حل کنید.

$$r.r.v = (x-2)^2$$

$$\cancel{(x-2)^2} \frac{1}{\cancel{(x-2)^2}} + (x-2)^2 \frac{2}{x-2} = 3(x-2)^2$$

$$1 + 2(x-2) = 3(x-2)^2$$

$$1 + 2x - 4 = 3(x^2 - 4x + 4)$$

$$1 + 2x - 4 = 3x^2 - 12x + 12$$

$$3x^2 - 14x + 10 = 0$$

$$\Delta = (14)^2 - 4 \times 3 \times 10 = 196 - 120 = 76$$

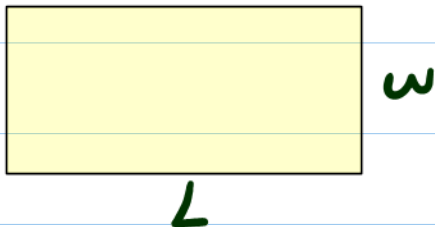
$$x = \frac{14 \pm \sqrt{76}}{2} \rightarrow x = \frac{14 + \sqrt{76}}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \checkmark$$

$$x = \frac{14 - \sqrt{76}}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \checkmark$$

مثال ۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم: $\frac{L}{w} = \frac{w+L}{L}$ آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

مستطیل طلایی: مستطیلی است که نسبت بعرض طول در آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد.



$$p = 2(L + w) = 144 \rightarrow L + w = 72 \rightarrow w = 72 - L$$

$$\frac{w+L}{L} = \frac{L}{w} \Rightarrow \frac{72-L+L}{L} = \frac{L}{72-L}$$

$$\frac{72}{L} = \frac{L}{72-L} \quad \text{م.ر.ک} = L(72-L)$$

$$\cancel{L}(72-L) \frac{72}{\cancel{L}} = L \cancel{(72-L)} \frac{L}{\cancel{72-L}}$$

$$(72-L) \cdot 72 = L^2 \rightarrow L^2 + 72L - 5184 = 0$$

$$\Delta = (72)^2 - 4(1)(-5184) = 72^2 + 4(5184) = 5(72)^2$$

$$L = \frac{-v_r \pm \sqrt{\delta(v_r)^2}}{r} = \begin{cases} \frac{-v_r + v_r \sqrt{\delta}}{r} = v_r (-1 + \sqrt{\delta}) \checkmark \\ \frac{-v_r - v_r \sqrt{\delta}}{r} = v_r (-1 - \sqrt{\delta}) \times \end{cases}$$

$$L = v_r (-1 + \sqrt{\delta})$$

$$\omega = v_r - L = v_r - (v_r (-1 + \sqrt{\delta}))$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس سوم: معادلات گویا و معادلات راینکالی

قسمت دوم: مدلسازی مسائل به صورت یک

معادله گویا

جلسه ششم: صفحات ۱۹ تا ۲۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در حل برخی مسائل عبازمدن زیر آرد، به یک معادله تری می رسم. برای ساده تر شدن حل انگیزه

مسائل کنه را به صورت زیر دسته بندی می کنیم.

نوع اول: مسائل سرعت - زمان

فصل ۲: مسائل سرعت - زمان

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین المللی امام خمینی (قَدِسَ سِرُّه) متصل می کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه ها طی می کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت قطار 10 km/h کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبه طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

$$x = vt$$

در این نوع مسائل از رابطه معادله استفاده می کنیم:

$$t = \frac{x}{v} \quad t_{\text{رفت}} = \frac{60}{v}$$

$$t_{\text{برگشت}} = t + \frac{1}{2}$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{60}{v-10}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2} \quad \text{همانگونه}$$

$$2v(v-10) \Rightarrow 12v = 12(v-10) + v(v-10)$$

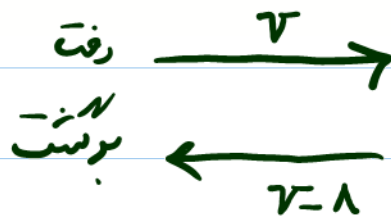
$$v^2 - 10v + 12v - 12v - 120 = 0$$

$$v^2 - 10v - 120 = 0 \rightarrow (v-20)(v+6) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = 20 \rightarrow t_{\text{رفت}} = \frac{60}{20} = 3 \text{ ساعت} \\ v = -6 \times \end{array} \right.$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{60}{20-10} = \frac{60}{10} = 6 \text{ ساعت}$$

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.



$$t_{\text{رفت}} = \frac{144}{v}$$

$$t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = 17 \quad \uparrow \text{نموت}$$

$$t_{\text{برگشت}} = \frac{144}{v-8}$$

$$\frac{144}{v} + \frac{144}{v-8} = 17 \quad \div 17 \rightarrow \frac{48}{v} + \frac{48}{v-8} = 5$$

$$\times v(v-8) \rightarrow 48(v-8) + 48v = 5v(v-8)$$

$$\rightarrow 5v^2 - 4v - 48v - 48v + 384 = 0$$

$$\rightarrow 5v^2 - 136v + 384 = 0$$

$$\Delta = (-136)^2 - (4 \times 5 \times 384) = 18496 - 7680 = 10816$$

$$\sqrt{10816} = 104$$

$$v = \frac{136 \pm 104}{5} \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{136+104}{5} = 54 \\ v = 3,2 \times \end{array} \right.$$

نوع دوم: مسائل تقسیم کار

تمرین ص ۲۳، ریاضی ۲

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

در حل این نوع مسائل می‌توانیم اگر کاری در x ساعت (رقم عدد...) انجام می‌پذیرد، در یک ساعت

(یک رقم عدد...) $\frac{1}{x}$ از کار انجام شده است.

رضای شهری: x

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{1\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{3}{5}$$

$$\times 2x$$

$$2x + 2 = 3x \rightarrow \underline{x = 2}$$

۹ ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

$$A: x$$

$$B: x+10$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{18}$$

$$\underline{18x(x+10)} \rightarrow 18(x+10) + 18x = x(x+10)$$

$$x^2 + 10x - 18x - 270 - 18x = 0$$

$$x^2 - 26x - 270 = 0$$

$$(x-30)(x+9) = 0 \quad \begin{cases} x=30 \rightarrow A \\ x=-9 \end{cases}$$

، B ، ۴۵ ، ۳۰

مثال: زمانی که طول می‌کشد تا شیر A به شهابی حوضی را پر کند، از دو برابر مدت زمانی

که شیر B همان حوض را پر کند، یک ساعت بیشتر است. اگر هر دو شیر را همزمان

باز کنیم. حوض در ۲ ساعت ۶ دقیقه و ۴۰ ثانیه پر می‌شود. شیر A به شهابی در چند ساعت حوض

را پر می‌کند؟

زمانی که شیر B به شهابی پر می‌شود: t

$2t + 1 : A$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2.1} = \frac{1}{\frac{2.1}{1}} = \frac{1}{2.1}$$

$$\underline{2.1(2t+1)}$$

$$\rightarrow 2.1(2t+1) + 2.1t = 1.t(2t+1)$$

$$\rightarrow 4.2t + 2.1 + 2.1t = 2.t^2 + 1.t$$

$$\rightarrow 2.t^2 + 1.t - 6.3t - 2.1 = 0$$

$$\rightarrow 2.t^2 - 5.3t - 2.1 = 0$$

$$\Delta = (-5.3)^2 - (4 \times 2 \times (-2.1)) = 28.9 + 16.8 = 45.7$$

$$\sqrt{45.7} = 6.7$$

$$t = \frac{5.3 \pm 6.7}{4} < \frac{5.3 + 6.7}{4} = 3 \rightarrow \text{شیر B}$$

$$\frac{5.3 - 6.7}{4} = -\frac{1.4}{4} = -\frac{7}{20} \times$$

شیر A به شهابی در ۷ ساعت ۴۰ دقیقه پر می‌شود

نوع سوم: مسائل خلط

ص ۱۷۰ احسان ۱

در یک مغازه ماهی های تزئینی، ماهی های آب شور در محلول های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلو گرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟

حالت اول: فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

مقدار نمک در محلول ۴ درصدی

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \text{ kg}$$

نمک
اضافه کنیم

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100}$$

$$\rightarrow 100(8+x) = 7(200+x) \rightarrow 800 + 100x = 1400 + 7x$$

$$\rightarrow 93x = 600 \rightarrow x = \frac{600}{93} \text{ kg}$$

حالت دوم: اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

نمک
از آب بگیریم

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

$$800 = 7(200-y) \rightarrow 7y = -800 + 1400$$

$$7y = 600 \rightarrow y = \frac{600}{7} \text{ kg}$$

در مسئله ماهی‌های تزئینی حالت سوومی هم وجود داشت که نمک به اندازه کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

y: کدِرم تبخیر آب

$$\frac{1+5}{20+5-y} = \frac{7}{100}$$

$$\rightarrow \frac{13}{20+5-y} = \frac{7}{100}$$

$$\rightarrow 1300 = 7 \times 20 + 7y$$

$$\rightarrow 7y = 1300 - 140$$

$$\rightarrow 7y = 1160 \rightarrow y = \frac{1160}{7} \approx 165.71 \text{ kg}$$

۱۶۵٫۷۱ kg از آب تبخیر

مسئله مفقوده مانند :

تمرین ص ۲۲ حسین ۱

۸ پدر بزرگ برای اهدا به مهد کودک چند اسباب بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به پدر بزرگ تخفیف می داد او می توانست با همان پول چهار اسباب بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

x : قیمت یک اسباب بازی قبل از تخفیف

قدار قبل از تخفیف
↑

قدار بعد از تخفیف
↑

$$\frac{120000}{x} + 4 = \frac{120000}{x-1000}$$

$$x(x-1000) \rightarrow$$

$$12 \times 10^4 (x-1000) + 4x(x-1000) = 12 \times 10^4 x$$

$$4x^2 - 4000x + 12 \times 10^4 x - 12 \times 10^4 \cdot 1000 - 12 \times 10^4 x = 0$$

$$4x^2 - 4000x - 12 \times 10^4 = 0$$

$$\div 4 \rightarrow x^2 - 1000x - 30000 = 0 \rightarrow \Delta = 121 \times 10^4$$

$$x = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1000 + 11000}{2} = \frac{12000}{2} = 6000 \checkmark \\ \frac{1000 - 11000}{2} = -5000 \end{array} \right.$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

قسمت سوم: معادلات رادیکالی

جلسه هفتم: صفحات ۲۲ و ۲۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مقارنات گنگ (اصم)

مقارناتی که در رزها مجهول زیر رادیکال است را مقارنات گنگ می گوئیم.

روش حل مقارنات اصم با فرم دو :

مقدار رادیکال را یک طرف و بقیه عبارت ها را سمت دیگر منتقل می کنیم.

طرفین را به توان ۲ می رسانیم تا رادیکال از بین برود. اگر باز هم رادیکال

داشته باشیم این عمل را تکرار می کنیم تا همه رادیکال ها از بین برود و مقارنات بدست

آمده را حل می کنیم.

جواب های به دست آمده به شرحی قابل قبول هستند که در مقارنات اولیه صدق کنند.

تذکر: گاهی اوقات برای سرعت عمل در تشخیص مخرج قبول بودن یا نبودن جواب می توان از نکات زیر استفاده کرد :

- عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

- هر عبارت که با یک رادیکال برابر است باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

تذکر: در مواردی که رادیکال هارر معین قرار می گیرند ابتدا مانند $x = 1$ عمل کرده با ضرب طرفین به x در ک.م.م معین ها، به دره را از حالت کسری خارج می کنیم.

مثال: موارد زیر را حل کنید.

$$k = \sqrt{6k-8} \quad \text{ث)}$$

$$x + \sqrt{x} = 6 \quad \text{ج)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1 \quad \text{چ)}$$

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2 \quad \text{ح)}$$

$$\text{ث)} \quad k^2 = 6k - 8 \rightarrow \underbrace{k^2 - 6k + 8}_{+ \quad \times} = 0$$

$$(k-4)(k-2) = 0 \quad \begin{cases} k=4 \rightarrow 4 = \sqrt{24-8} = \sqrt{16} = 4 \quad \checkmark \\ k=2 \rightarrow 2 = \sqrt{12-8} = \sqrt{4} = 2 \quad \checkmark \end{cases}$$

ج) $\sqrt{x} = 7-x \xrightarrow{\text{توان ۲}} x = (7-x)^2$ با استفاده از فرم دو مجانب

$$x = 49 - 14x + x^2$$

$$\rightarrow \underbrace{x^2 - 14x + 49}_{+ \quad \times} = 0 \rightarrow (x-9)(x-4) = 0 \quad \begin{cases} x=9 \quad \times \\ x=4 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{9} = 7-9 \rightarrow 3 = -3 \quad \times \\ \sqrt{4} = 7-4 \rightarrow 2 = 3 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$2.) \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$$

$$\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{2x-5}$$

$$\xrightarrow{\text{تربيع}} (\sqrt{x+1} - 1)^2 = 2x - 5$$

$$\rightarrow x+1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 2x-5$$

$$\rightarrow x+2-2x+5 = 2\sqrt{x+1}$$

$$\rightarrow -x+7 = 2\sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{تربيع}} x^2 - 14x + 49 = 4(x+1)$$

$$\rightarrow x^2 - 14x + 49 - 4x - 4 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x-15) = 0 \quad \begin{cases} x=3 \rightarrow \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1 \checkmark \\ x=15 \rightarrow 4 - 5 = 1 \times \end{cases}$$

$$2) \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$$

$$\xrightarrow{\times \sqrt{m}} m+1 = 2\sqrt{m} \xrightarrow{\text{تربيع}} m^2 + 2m + 1 = 4m$$

$$\rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow (m-1)^2 = 0 \rightarrow m = 1 \checkmark$$

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

۱) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

$$\underline{x(1+\sqrt{x})} \rightarrow 1-\sqrt{x} = (1-x)(1+\sqrt{x})$$

$$\rightarrow 1-\sqrt{x} = 1-x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}$$

$$\rightarrow x = \sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{x}$$

$$\rightarrow x = 2\sqrt{x} - x\sqrt{x}$$

$$\rightarrow x = \sqrt{x}(2-x)$$

$$\frac{\text{طرفین بر } \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \rightarrow x' = x(2-x+x')$$

$$x' = 2x - x^2 + x''$$

$$\rightarrow x'' - 0x' + 2x = 0 \rightarrow x(x' - 0x + 2) = 0$$

$$\boxed{x=0} \quad \frac{1-0}{1+0} = 1-0 \quad \checkmark$$

$$\boxed{x=1} \rightarrow \frac{1-1}{1+1} = 1-1 \rightarrow 0=0 \quad \checkmark$$

$$\boxed{x=2} \rightarrow \frac{1-2}{1+2} = 1-2 \rightarrow -\frac{1}{3} = -1 \quad \times$$

۲) $\frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \xrightarrow{x(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \omega(\sqrt{x}-2) = \underbrace{2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}_{\text{زوج}} - (\sqrt{x}+2)$

$$\rightarrow \omega\sqrt{x} - 4\omega = 2(x-4) - \sqrt{x} - 2$$

$$\rightarrow 0\sqrt{x} - 4\omega - 2x + 8 + \sqrt{x} + 2 = 0$$

$$\rightarrow 2\sqrt{x} = 2x \xrightarrow{\frac{\text{طرفین بر } \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} 2 = 2x' \rightarrow 2x' - 2x = 0$$

$$\rightarrow 2x(x-1) = 0 \quad \begin{cases} x=0 & 0/2 = 2+1/2 \quad \checkmark \\ x=1 & 0/0 = 2-1/1 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$3) \sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \cancel{x} + 7 = \cancel{x} + 2\sqrt{x} + 1$$

$$\rightarrow 7 = 2\sqrt{x} \rightarrow 3 = \sqrt{x} \rightarrow x = 9 \quad \checkmark \quad 4 = 3 + 1$$

$$4) \frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0 \rightarrow \times \sqrt{u} \sqrt{u-3} \rightarrow \sqrt{u} - 2\sqrt{u-3} = 0$$

$$\sqrt{u} = 2\sqrt{u-3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} u = 4(u-3) \rightarrow u = 4u - 12$$

$$\rightarrow -3u = -12 \rightarrow u = 4 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{2} = 0$$

مثال: جواب معادله زیر را در صورت وجود بنویسید.

الف) $\sqrt{t} + 2 = 0$

ب) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$

پ) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$

جواب ندارد $\times$ $\sqrt{t} = -2$ الف

جواب ندارد $\rightarrow$ امکان ندارد $(+) + (+) + 1 = 0$ ب)

جواب ندارد $\rightarrow$ $n=1$ یا $n=0$ $\rightarrow$ $1-n=0$ یا $n-2=0$ $\rightarrow$ $n=2$ $\rightarrow$ $(+) + (+) = 0$ پ)

در مثال ها با حل شتر

$$x + \sqrt{x} = 2 \rightarrow x = 4$$

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابرش باشد؟

۲ معادله $\sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x - 2} = 0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می توانستید به این نتیجه برسید؟

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

✓
 $x = 2$ هم زمان در دو رادعوی است

پس جواب ها در است.

نکته: هرگاه جمع دو رادیکال منفرجه باشد و هر دو جواب را در هر دو عبارت
رادیکال هم زمان منفی شوند.

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه

در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به طوری که $t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$.

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

$$2 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4 = 10 - \frac{h}{5} \rightarrow -6 = -\frac{h}{5}$$

$$\rightarrow -h = -30 \rightarrow h = 30 \text{ m}$$

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟
 ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$\text{الف) } \sqrt{x} - x = \frac{x}{2} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} + x = \frac{3}{2}x$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x = \frac{9}{4}x^2 \rightarrow \frac{9}{4}x^2 - x = 0 \rightarrow x(\frac{9}{4}x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \checkmark \\ \frac{9}{4}x = 1 \rightarrow x = \frac{4}{9} \quad \times \end{cases}$$

$$\text{ب) } x - \sqrt{x} = \frac{x}{2} \rightarrow x - \frac{x}{2} = \sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{1}{4}x^2 = x \rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x = 0 \rightarrow x(\frac{1}{4}x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \checkmark \\ x = 4 \quad \checkmark \end{cases}$$

۵ معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = 2$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل دوم: هندسه

درس اول: ترسیم‌های هندسی

جلسه اول: صفحات ۲۶ تا ۲۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

رسم هندسی فضا از خط کس دره، رسته کی

فعالیت

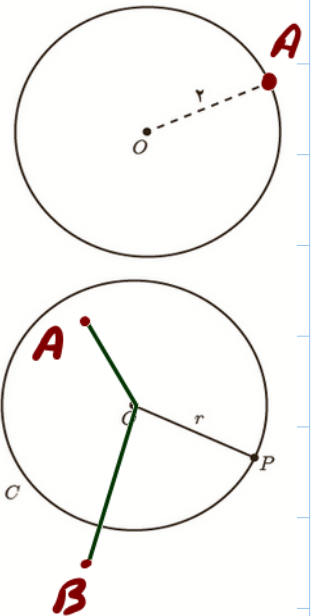
۱ یک نقطه ثابت در صفحه، مانند O را در نظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصله ثابت ۲ سانتی متر از آن هستند در نظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

دایره

۲ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر بکشید و یک نقطه دلخواه روی آن در نظر بگیرید. فاصله این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟ $OA = 2$

نتیجه: دایره $C(O, 2)$ (بخوانید دایره C به مرکز O و به شعاع ۲) را در نظر بگیرید. هر نقطه که از نقطه O به فاصله ۲ باشد، روی دایره قرار دارد و هر نقطه که روی دایره قرار دارد از نقطه O به فاصله ۲ است.

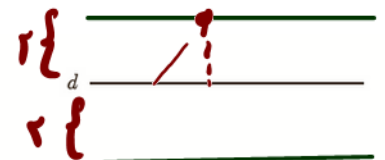
۳ مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک بار برای نقاط داخل دایره و یک بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به دست آورید.



نتیجه: A درون دایره است $\Leftrightarrow |OA| < 2$

B بیرون دایره است $\Leftrightarrow |OB| > 2$

۴ خطی مانند d در نظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از خط d هستند مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟

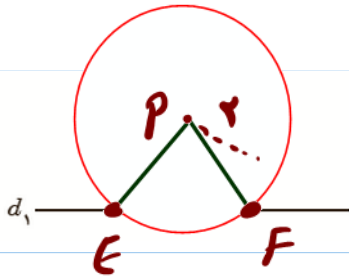


دو خط موازی با فاصله ۲ cm از خط d

۵ نقطه P به فاصله ۱ سانتی متر از خط d_1 قرار دارد.

الف) تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

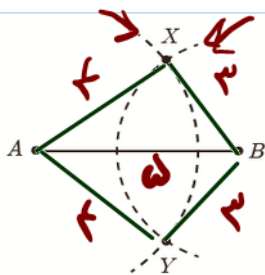


۶ نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴

سانتی متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

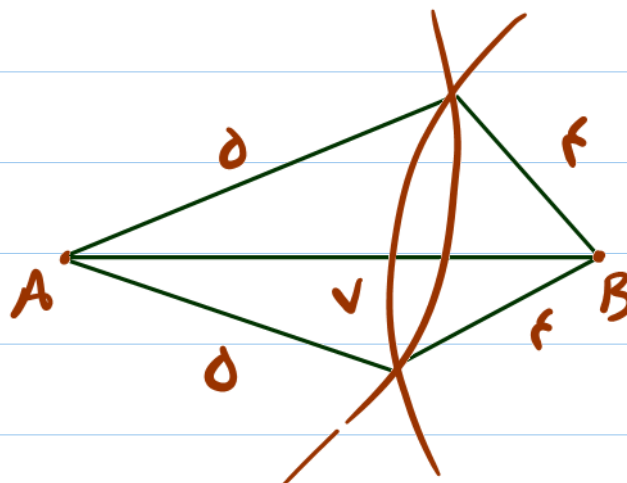
الف) اندازه اضلاع مثلث های AXB و AYB را مشخص کنید.

ب) توضیح دهید که چگونه می توانید مثلی به طول ضلع های داده شده ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

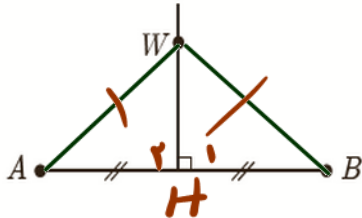


نکته: در مثلث بمعبر در ضلع از ضلع سوم کمتر است.

$$5 > 4 + 3, \quad 5 + 4 > 3, \quad 5 + 3 > 4$$



① قضیه: هر نقطه که روی محور منصف یک پاره خط باشد از دو سر پاره خط به یک فاصله است و برعکس حتی هر نقطه که از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد روی محور منصف آن پاره خط قرار دارد.



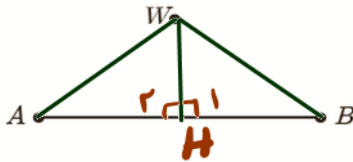
فرض $\begin{cases} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{cases}$

اثبات = رفت :

حکم $AW = BW$

$$\begin{cases} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ WH = WH \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض}} \triangle AWH \cong \triangle BWH \Rightarrow AW = BW$$

اثبات = برگشت :

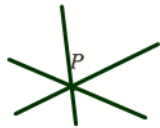


از W به A و B دو خط AW و BW رسم کنیم
حال ثابت می‌کنیم $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ ($WH \perp AB$)

$$\begin{cases} WH = WH \\ AW = BW \\ AH = BH \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض}} \triangle AWH \cong \triangle BWH \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

$$\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \rightarrow 2\hat{H}_1 = 180^\circ \rightarrow \hat{H}_1 = 90^\circ = \hat{H}_2$$

$$\rightarrow \hat{H}_1 = 90^\circ = \hat{H}_2$$



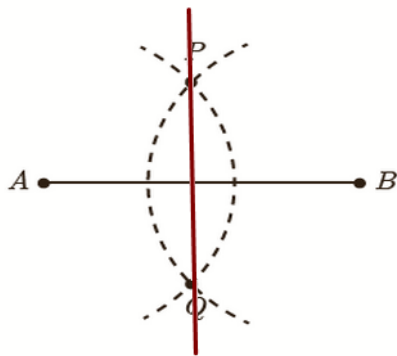
۱ نقطه P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید رسم کنید که از نقطه P عبور نمایند؟ **بیشتر**

۲ دو نقطه A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه A و B عبور نمایند؟ **یک خط**



۳ به نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟ **۲**

رسم عمود منصف یک پاره خط



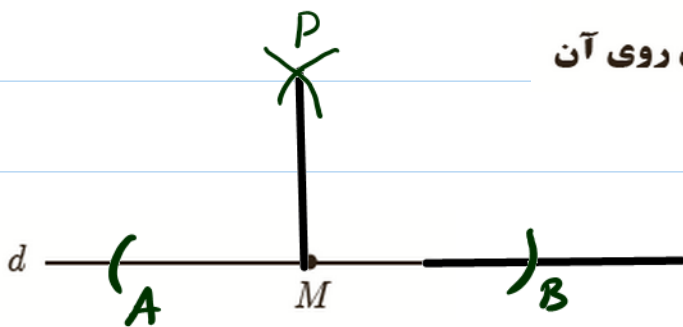
دو دایره را با راس از نقطه A و B بکشید. این دایره‌ها در دو نقطه P و Q قطع می‌شوند.

پس از آن دایره‌ها را با راس از نقطه P و Q بکشید. این دایره‌ها در دو نقطه M و N قطع می‌شوند.

خط PM را با خط QN امتداد دهید. خط PM عمود منصف پاره خط AB است.

AB است

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

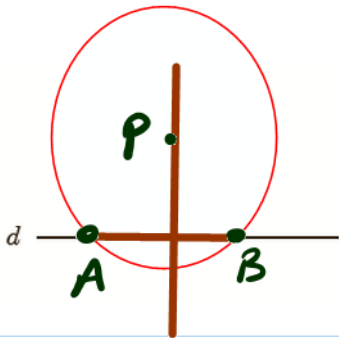


پس از آن دایره‌ها را با راس از نقطه P و Q بکشید. این دایره‌ها در دو نقطه M و N قطع می‌شوند. خط PM عمود منصف پاره خط AB است.

در این صورت $AM = MB$. حال کافی است عمود منصف پاره خط

AB را رسم کنیم. این خط عمود است و از نقطه M می‌گذرد.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



دو خانه را که بیش از فاصله P تا خط بدو کنیم، گمان می‌کنیم، یعنی بر فاصله یک

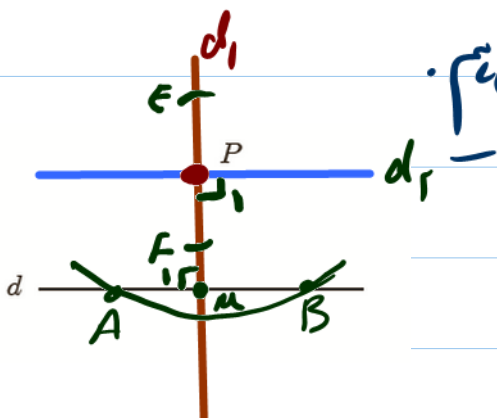
بافتد. A و B می‌باشند. در این صورت $AP = PB$.

حال کافی است محو نصف چاره خط AB را رسم کنیم. نقطه تا روی این محو نصف

واقع است زیرا $AP = PB$. بی خط محو نصف جواب ساده است.

رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

از نقطه M عمود بر خط که رسم می‌کنیم در آن را d می‌نامیم.

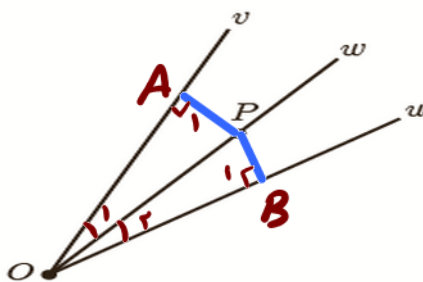


حال از نقطه P خطی عمود بر AB رسم می‌کنیم و آن را CD می‌نامیم.

خط CD موازی AB است زیرا طبق معیۀ عکس خطوط موازی در هر دو جانب چون

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \text{ پس در خط } CD \text{ موازی}$$

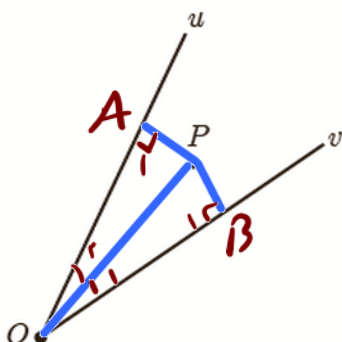
قضیه ۲: هر نقطه که روی شیار یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و بر عکس هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد روی شیار زاویه قرار دارد.



اثبات رفت :
از P بر AB و B در محور رسم می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90^\circ \\ PO = PO \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{در دو یک زاویه ص}} \hat{A}OP \equiv \hat{B}OP \Rightarrow AP = PB$$

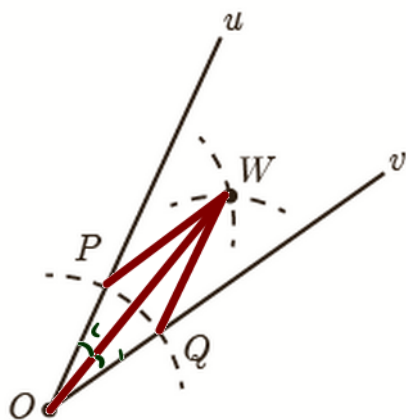
اثبات برگشت :



از P بر OA و OB در خط عمود رسم می‌کنیم و آن را CD می‌نامیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90^\circ \\ p_o = q_o \\ AP = PB \end{array} \right. \xrightarrow{\text{در دو مستطیل}} B\hat{p}_o \equiv A\hat{p}_o \rightarrow \hat{o}_1 = \hat{o}_2$$

رسم نیازمند زاویه :



به مرکز O دو قوس دایره بکشیم تا اضلاع زاویه را در P و Q قطع کند ($p_o = q_o$)

دو خط دیگر را که موازی با خط PQ باشد بکشیم و یک ربع در P و یک ربع در Q بکشیم

تا یک نقطه را در تقاطع آن‌ها پیدا کنیم ($p_w = q_w$)

پس ضلع‌های OP و OW را هم می‌کشیم

$$\left\{ \begin{array}{l} o_w = o_w \\ p_o = q_o \\ p_w = w_q \end{array} \right. \xrightarrow{\text{مستطیل}} o\hat{p}_w \equiv o\hat{q}_w \rightarrow \hat{o}_1 = \hat{o}_2$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل دوم: هندسه

درس دوم: استدلال و قضیه تالس

قسمت اول: تناسب و استدلال

جلسه دوم: صفحات ۳۱ تا ۴۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

الف) نسبت و تناسب

نسبت عدد a به b برابر $\frac{a}{b}$ است. ($b \neq 0$)

تساوی دو نسبت را یک تناسب می‌گوئیم مانند $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

درت کنید مثلاً وقتی می‌گوئیم اعداد a و b با اعداد c و d تناسب هستند یعنی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

به عبارت دیگر: $a = 2k$, $b = 5k$

ویژگی‌های تناسب:

با شرط زیر می‌توانیم همه معجزه‌ها داریم:

$$1) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

طریقین و طریق دیگر

گذری-طریق
($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$)
طریق
میانی

اثبات رفت:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\times bd} \frac{a}{\cancel{b}} \cdot \cancel{bd} = \frac{c}{\cancel{d}} \cdot \cancel{bd} \Rightarrow ad = bc \quad \square$$

اثبات برکت: $ad = bc \xrightarrow{\div bd} \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \square$

معکوس کردن شائب: $۲) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

اثبات: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\times \frac{bd}{ac}} \frac{a}{b} \times \frac{bd}{ac} = \frac{c}{d} \times \frac{bd}{ac}$

$$\Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \quad \square$$

۳) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ توابع جابجایی و دوطرفه

① $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ توابع جابجایی

② $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ توابع جابجایی

اثبات ①: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\times \frac{d}{a}} \frac{a}{b} \times \frac{d}{a} = \frac{c}{d} \times \frac{d}{a} \rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \square$

اثبات ②: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\times \frac{d}{a}} \frac{a}{b} \times \frac{d}{a} = \frac{c}{d} \times \frac{d}{a} \rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad \square$

ترکیب مثبت در صورت یا مخرج: $۴) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} & ① \\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} & ② \end{cases}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{+1} \frac{a}{b} + \frac{1}{1} = \frac{c}{d} + \frac{1}{1} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{رابطه ۱} \quad \square$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \xrightarrow{+1} \frac{b}{a} + \frac{1}{1} = \frac{d}{c} + \frac{1}{1} \rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad \text{رابطه ۲} \quad \square$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad \square$$

$$a) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} & \text{①} \\ \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} & \text{②} \end{cases} \quad \text{تفصیل نسبت در صورت یا مخرج}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{-1} \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad \text{رابطه ۱} \quad \square$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \xrightarrow{-1} \frac{b}{a} - 1 = \frac{d}{c} - 1 \rightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c} \quad \text{رابطه ۲} \quad \square$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \quad \square$$

$$7) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} \quad \text{ترکیب کسرها با هم}$$

مثال: جاهای خالی را پر کنید.

$$1) \overset{۲۴۰}{10 \times 14} = ۲۰ \times \overset{۱۲}{1۴} \Rightarrow \frac{10}{۲۰} = \frac{۲۰}{۱۴}$$

$$۲) \frac{۷}{۱۱} = \frac{۱۴}{۲۲} \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۱} = \frac{\dots ۳۶}{\dots ۲۲}$$

$$\frac{۷}{۱۱} = \frac{۱۴}{۲۲} \xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تکثیر به ۲}} \frac{۷+۱۱}{۱۱} = \frac{۱۴+۲۲}{۲۲} \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۱} = \frac{۳۶}{۲۲}$$

$$۳) \frac{۴}{۱۷} = \frac{۸}{۳۴} \Rightarrow \frac{۴}{۱۱} = \frac{\dots ۸}{\dots ۲۲}$$

$$\frac{۴}{۱۷} = \frac{۸}{۳۴} \xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تکثیر به ۲}} \frac{۴}{۱۷-۲} = \frac{۸}{۳۴-۲} \Rightarrow \frac{۴}{۱۵} = \frac{۸}{۳۲}$$

مثال: بین اواسط و وسط در تناسب $\frac{a+۱۵}{۲a+۱۰} = \frac{b+۲۱}{۲b+۱۴}$ ، نسبت $\frac{a}{b}$ را بیابید.

$$\times ۲ \rightarrow \frac{a+۱۵}{\cancel{۲(a+۱۵)}} = \frac{b+۲۱}{\cancel{۲(b+۷)}} \Rightarrow \frac{a+۱۵}{a+۵} = \frac{b+۲۱}{b+۷}$$

$$\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تکثیر به ۲}} \frac{a+۱۵}{(a+۱۵)-(a+۵)} = \frac{b+۲۱}{(b+۲۱)-(b+۷)}$$

$$\rightarrow \frac{a+۱۵}{۱۰} = \frac{b+۲۱}{۱۴} \xrightarrow{\times \frac{۲}{۲}} \frac{۲}{۲} \frac{a+۱۵}{۱۰} = \frac{۲}{۲} \frac{b+۲۱}{۱۴}$$

$$\rightarrow \frac{a+۱۵}{۱۰} = \frac{b+۲۱}{۲۱}$$

$$\xrightarrow[\text{ارابر}]{\text{توضیح است}} \frac{a+10-10}{10} = \frac{b+21-21}{b} \rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{21}$$

$$\xrightarrow[\text{وطن}]{\text{قرین حد}} \frac{a}{b} = \frac{10}{21} = \frac{5}{\sqrt{}}$$

مثال: اگر $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ ، $x+y+z=32$ باشند، x, y, z را بیابید.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{2(y+1)}{2 \times 2} = \frac{z+2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2} = \frac{x-1+y+1+z+2}{3+2+2}$$

$$= \frac{\overbrace{x+y+z}^{32} -1+1+2}{9} = \frac{30}{9} = 0$$

$$\frac{x-1}{3} = 0 \rightarrow x-1=0+1 \rightarrow x=2$$

$$\frac{y+1}{2} = 0 \rightarrow y+1=0 \rightarrow y=-1$$

$$\frac{z+2}{2} = 0 \rightarrow z+2=0 \rightarrow z=-2$$

ب) استدلال

استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانش‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی

که در ابتدا مجهول بوده است.

هر مسئله از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت اول مفروضات و داده‌های مسئله و

قسمت دوم، هدف و حکم مسئله است.

منظور از حل یک مسئله آن است که با استفاده از یک سلسله از قوانین و اصول و باتکیه

بر مفروضات مسئله به هدف مورد نظر برسیم.

به استدلایی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، **برهان** یا **اثبات** می‌گوئیم.

انواع استدلال‌ها :

۱- استدلال استقرایی :

روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموع محدودی از مشاهدات است.

اگر در چنین استدلالی این است که همیشه این احتمال وجود دارد که شواهد بیشتری کشف شوند تا نادرستی نتیجه گیری کلی را نشان دهند.

مثلاً با دیدن چند عدد حکم کلی می دهیم که هر عدد زوج، اعداد نیت ولی ۲ زوج و اعداد است.

۲- استدلال استنباطی :

روش نتیجه گیری با استفاده از حقایق است که درستی آنها را پذیرفته ایم.

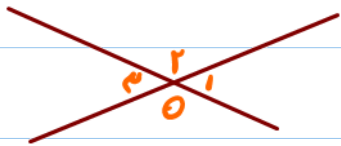
در استدلال استنباطی با فرض درست بودن چند گزاره به درستی گزاره دیگری که نتیجه استنباط است می رسم.

پس تا اینجا می توان گفت حابه کتب استدلال استقرایی ایده می گیریم و این ایده را در صورت درست بودن با استدلال استنباطی اثبات می شود.

مثال : رابطه بین دو زاویه مقابل به رأس را بیان کنید.

استدلال استقرایی : با رسم چند خط متقاطع و اندازه گیری زوایای روبه روی در به این نتیجه می رسم

که زوایای متقابل برابرند.



استدلال اشتباهی :

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 &= 180^\circ \end{aligned} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3 \quad \square$$

توجه : به نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنباطی بدست می‌آیند، **قضیه** می‌گوئیم.

هر قضیه‌ای را می‌توانیم به صورت $p \Rightarrow q$ بیان کنیم که به p فرض و به q

حکم می‌گوئیم و آن را به صورت $p \Rightarrow q$ می‌نویسیم.

عکس قضیه : اگر جای قسمت اصلی فرض و حکم را در یک قضیه عوض کنیم، عکس قضیه بدست می‌آید.

یعنی اگر فرض قضیه $p \Rightarrow q$ باشد عکس آن $q \Rightarrow p$ خواهد بود.

مثال : عکس قضیه‌های زیر را بنویسید.

الف) اگر عددی مضرب ۳ باشد، بهیچ‌رکن مضرب ۹ است.

عکس قضیه : اگر بهیچ‌عددی مضرب ۹ باشد آن عدد مضرب ۳ است.

فرض
با اگر دوزادیه متقابل بر رأس باشند دنگاه با هم برابرند

عکس قضیه: اگر دوزادیه با هم برابر باشند دنگاه آن دوزادیه متقابل بر رأس هستند.

تذکره: عکس یک قضیه می تواند درست باشد و حریفش یک قضیه باشد، می تواند نادرست باشد و

قضیه نباشد.

قضیه دوشترعی:

اگر عکس یک قضیه، حریفش قضیه باشد به آن قضیه دوشترعی می گوئیم.

قضیه دوشترعی، به صورت $p \iff q$ بیان می شود و آن را به صورت $p \iff q$ می خوانیم.

۳- مثال نقض:

بدی نشان دادن نادرستی یک حدس، مثالی که داریم که فرض آن را برقرار کنند اما حکم

درست نباشد.

سؤال: برای رد احکام زیر مثال نقض بیاورید.

الف) حاصل ضرب دو عدد گنگ همواره گنگ است. $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

ب) مربع هر عدد حقیقی از خودش بزرگتر است. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

پا به ازای هر عدد طبیعی $n^2 + n + 41$ اول است. $n = 41: 41^2 + 41 + 41 = 1722$

$$= 41 \times 42 = 41(41+1)$$

ت) هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است. **لوزی**

ث) چهار ضلعی که دو ضلع برابر و دو ضلع موازی داشته باشد، متوازی الاضلاع است.

دو نکته مهمی از این

تذکر: مثال نقض برای اثبات نیست و فقط برای رد کردن حکم صلی است.

۴- برهان خلف (اثبات غیر مستقیم)

در برهان خلف به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم،

فرض می کنیم حکم درست نباشد (**فرض خلف**) و به کمک تناقض یا نتیجه غیر ممکن می رسیم.

به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

مثال: با استفاده از بهمان خلف ثابت کنید، جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

است.

فرض: $n \in \mathbb{Q}$, $y \notin \mathbb{Q}$

حکم: $n+y \notin \mathbb{Q}$

فرض خلف: $n+y \in \mathbb{Q}$

اثبات: از آنجایی که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا می‌شود پس:

$$\text{پس: } y = n - (n+y)$$

پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

مثال: ثابت کنید اگر $n \in \mathbb{N}$ و n زوج باشد، n هم فرد است.

فرض: n زوج

حکم: n فرد

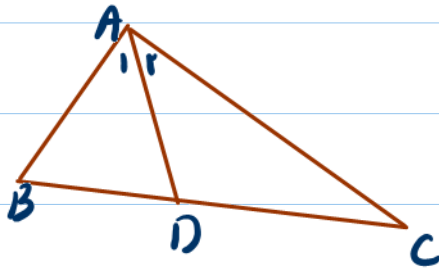
فرض منف: n زوج نباشد.

اثبات : $n = 2k$ برعکس $n' = 4k' \rightarrow n' = 2(2k')$

n' زوج شش باز $\times$ $n' = 2k'$

پس فرض حلف باطل رکن ثابت هستند.

مثال: فرض کنید AD نیمه از زاویه A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ ثابت کنید



$AB \neq AC$

فرض: AD نیمه از زاویه $(\hat{A}_1 = \hat{A}_2)$ و $BD \neq DC$

حکم: $AB \neq AC$

فرض حلف: $AB = AC$

اثبات : $\triangle ABD \cong \triangle ADC \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AD = AD \\ AB = AC \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض}} BD = DC \times$

پس فرض حلف باطل رکن ثابت هستند.

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل دوم: هندسه

درس دوم: استدلال و قضیه تالس

قسمت دوم: قضیه تالس

جلسه سوم: صفحات ۳۱ تا ۴۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

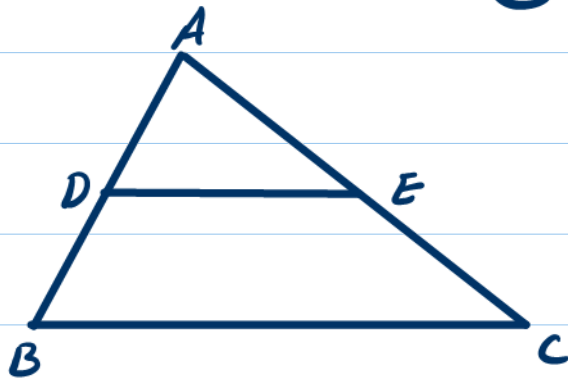
قضیه آلس:

قضیه آلس در مورد شایب پاره خط‌هایی است که دو یا چند خط موازی روی دو خط

مقاطع پیدا می‌کند.

قضیه آلس در مثلث:

اگر در مثلث ABC ، نقاط D و E روی اضلاع AB و AC باشند به طوری که $BC \parallel DE$ ،

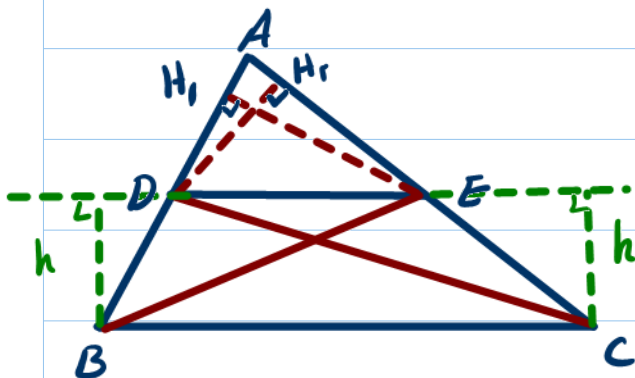


$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

آنگاه

اثبات: پاره خط DC را رسم می‌کنیم و از نقطه E پاره خط EH را بر AB

و از نقطه D پاره خط DH را بر AC می‌کشیم.



مساحت در مثلث DEB و DEC با هم

برابر است زیرا قائمه هر دو در DE و ارتفاع

کرنه (h) فاصله در خط موازی DE و BC است پس

$$S_{\triangle DEC} = S_{\triangle DEB} \quad (1)$$

نسبت مساحت دو مثلث ADE و DEB برابر است با :

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEB}} = \frac{\frac{1}{2} EH_1 \times AD}{\frac{1}{2} EH_1 \times DB} = \frac{AD}{DB} \quad (2)$$

نسبت مساحت دو مثلث ADE و DEC برابر است با :

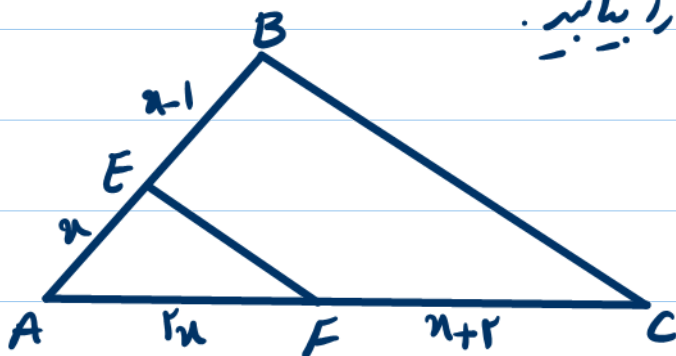
$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{\frac{1}{2} DH_1 \times AE}{\frac{1}{2} DH_1 \times EC} = \frac{AE}{EC} \quad (3)$$

طبق (1) داریم : $S_{\triangle DEC} = S_{\triangle DEB}$ پس نسبت چپ شبیه های 2، 3 با هم برابرند،

در نتیجه نسبت راست ها هم باید با هم برابر باشند یعنی :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \square$$

مثال: در شکل زیر $EF \parallel BC$ است. n را بیابید.



$$\frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x+2}$$

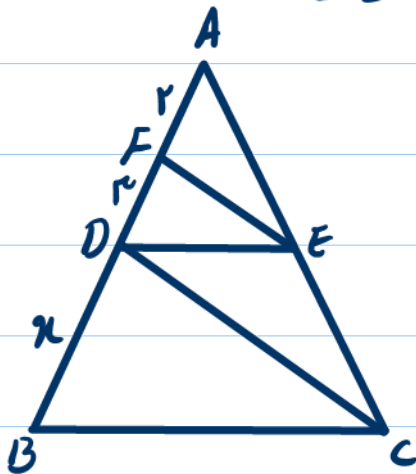
طبقه قضیه تالس

$$\Rightarrow x(x+2) = 2x(x-1) \Rightarrow x^2 + 2x = 2x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x^2 - 2x - 2x = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ غرضه } , x-4=0 \rightarrow x=4$$

مثال: در مثل زیر $DE \parallel BC$, $EF \parallel CD$ را با x را بیابید.



$$\triangle ADC : \frac{AF}{FD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{AE}{EC} \quad (1)$$

$$\triangle ABC : \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{AE}{EC} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{y}{x} \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2} = 5$$

مثال: کتدر خارج از کتدر ۹۸

امضاع مثلث ABC ، برابر $AB=6$ ، $AC=7$ ، $BC=7$ هستند. از رأس C خطی موازی

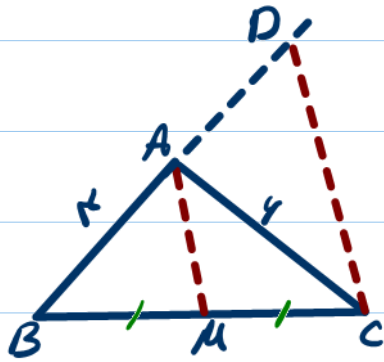
میان AM رسم شده و امتداد BA را در نقطه D قطع کرده است. اندازه BD کدام است؟

۹ (۴)

۱۵ (۳)

۸ (۲)

۷۵ (۱)



$\triangle BDC : AM \parallel DC$

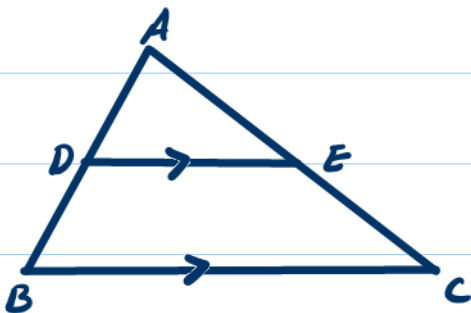
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MC} = \frac{BM}{BM} = 1$$

م. وسط BC

$$\Rightarrow \frac{f}{AD} = 1 \rightarrow AD = 2$$

$$BD = AB + AD = 2 + 2 = 4$$

گزینه ۲



صورت های دیگر قضیه تالس :

$$(1) \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (\text{متره به کل})$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow[\text{نسبت در جمع}]{\text{ترکیب}} \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \square$$

$$(2) \quad \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC} \quad (\text{متره به کل})$$

$$(1) \text{ طبق } \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \xrightarrow[\text{نسبت در مخرج}]{\text{تکمیل}} \frac{AB-AD}{AB} = \frac{AC-AE}{AC} \quad \text{اثبات :}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC} \quad \square$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{EC} \quad (۳)$$

(ثبات): $\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{EC} \quad \square$ باعکس کردن رابطه ۲

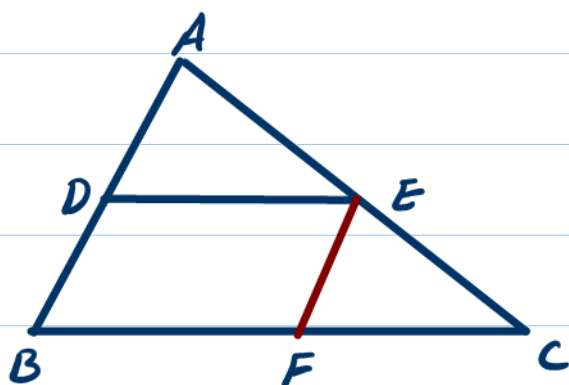
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad (۴)$$

(ثبات): $\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \square$ باعکس کردن رابطه ۱

تقسیم قضیه تالس:

اگر در مثلث ABC خطی موازی BC رسم کنیم که اضلاع AB ، AC را در نقاط D ، E قطع

کند، اضلاع مثلث ADE ، ABC مشابه اند. یعنی: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$



(ثبات):

از نقطه E پاره خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم.

چون $DE \parallel BC$ سے طبقہ ثانی داریم (صورت ۱ آئیں) :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (1)$$

از طرفی چون $EF \parallel AB$ سے طبقہ ثانی داریم (صورت ۲ آئیں) :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \quad (2)$$

چون در مورد شائب با $\frac{AE}{AC}$ مترن است پس :

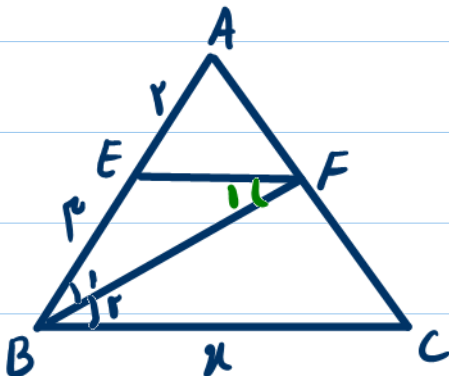
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \quad (3)$$

از طرفی چون $DEFB$ متوازی الاضلاع است $(DE \parallel BF, BD \parallel EF)$ پس :

$BF = DE$. در نتیجه از (۳) داریم :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \square$$

مثال : در شکل زیر $EF \parallel BC$. متساوی چند است ؟ $(\hat{B}_1 = \hat{B}_r)$



چون $EF \parallel BC$ با ضرب BF می داریم :

$$\hat{B}_r = \hat{F}_1$$

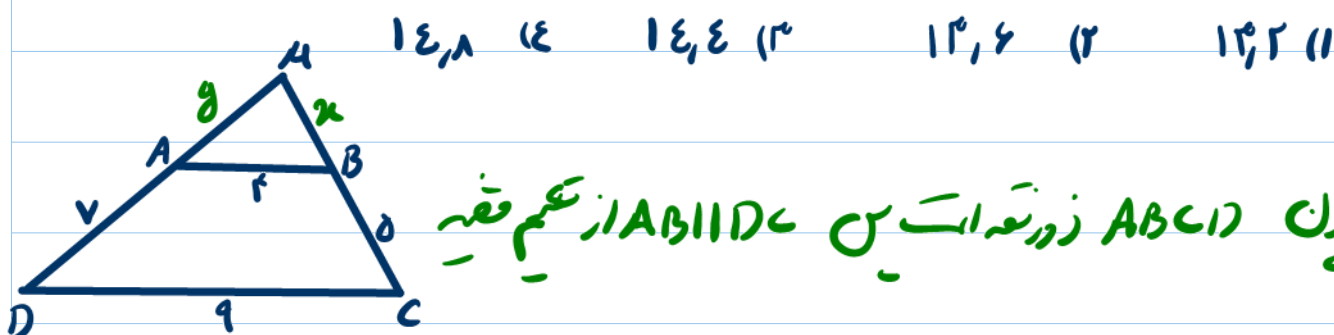
طبق فرض ما $\hat{B}_1 = \hat{F}_1$ پس $\hat{B}_1 = \hat{F}_1$ در نتیجه مثل BEF متساوی الساقین

است و $BF = EF = 4$. طبق تعمیم آس داریم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{4}{x} \rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2}$$

مثال: کنورساری ۹۹

اندازه اضلاع زوننه $ABCD$ مطابق شکل داده است. محیط مثلث MAB کجاست؟



حالا $AB \parallel DC$ زوننه است پس از تعمیم قضیه

آس برای مثلث MDC داریم:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{y}{y+v} = \frac{x}{x+d} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{y}{y+v} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4(y+v) \Rightarrow 9y - 4y = 4v \Rightarrow 5y = 4v \Rightarrow y = \frac{4v}{5} = 5.4$$

$$\frac{x}{x+d} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4(x+d) \Rightarrow 9x - 4x = 4d \Rightarrow 5x = 4d \Rightarrow x = 2$$

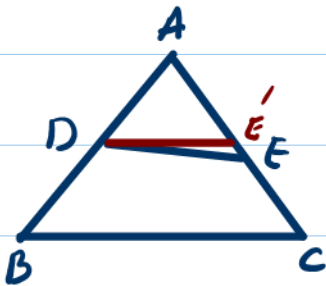
$$S_{MAB} = 5.4 + 2 + 4 = 13.2$$

نرنه ۲

عکس قضیه آلس :

اگر خطی روی دو ضلع مثلث، چهار پاره خط با اندازه‌های مشابه رِجاکند، رِنگاه

با ضلع سدم مثلث موازی است. یعنی $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$



اثبات : (با استفاده از برهان خلف)

فرض خلف : $DE \nparallel BC$

چون $DE \nparallel BC$ پس خط DE' را موازی BC رسم می‌کنیم. پس طبق قضیه آلس :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$$

از طرفی طبق فرض $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ پس می‌توان نوشت :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$$

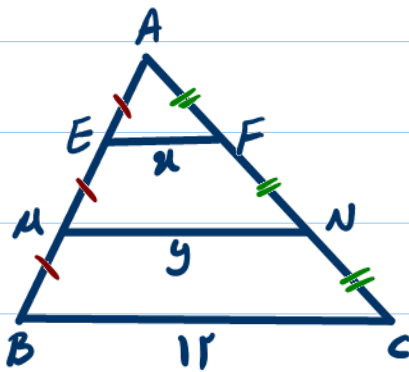
با استفاده از ویژگی ترکیب است در مجموع داریم :

$$\frac{AE}{AE+EC} = \frac{AE'}{AE'+EC} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AE'}{AC} \Rightarrow AE=AE' \quad \times$$

غنی E, E' بهم منطبق اند و این تناقض است زیرا DE' را موازی BC رسم کرده بودیم و فرض خلف این بود که $DE \parallel BC$. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تذکر: قضیه تالس یک قضیه در شریعی است.

مثال: در شکل زیر x و y را بدست آورید.



$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} = \frac{1}{2} \xRightarrow{\text{عکس تالس}} EF \parallel BC \xRightarrow{\text{تیموتالی}} \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{12}$$

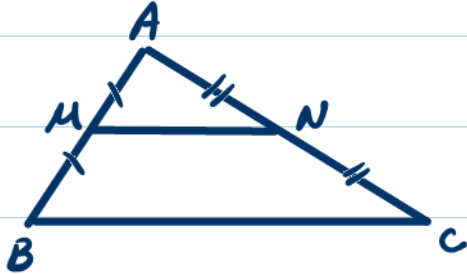
$$\Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{2}{1} \xRightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC \xRightarrow{\text{تیموتالی}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{y}{12}$$

$$\Rightarrow 3y = 24 \Rightarrow y = 8$$

نکته: اگر وسط در ضلع یک مثلث را به هم وصل کنیم، پاره خط حاصل موازی ضلع سوم و نصف

آن ضلع خواهد بود که به آن میان خط می گویند.

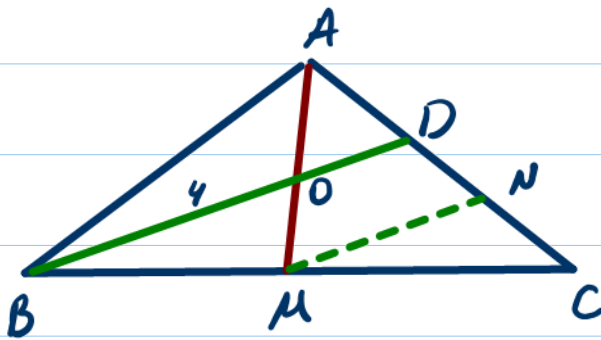


$$MN \parallel BC, \quad MN = \frac{BC}{2}$$

که میان خط

مثال: در مثلث ABC، از رأس B خطی رسم کرده ایم که از نقطه O، وسط میانه AM

گذشته و ضلع AC را در نقطه D قطع کرده است. اگر $OB = 6$ باشد، طول OD



چقدر است؟

از M موازی BD رسم می کنیم تا خط MN

درست کنیم. در مثلث AMN، OD میان خط است پس: $OD = \frac{1}{2} MN$ (۱).

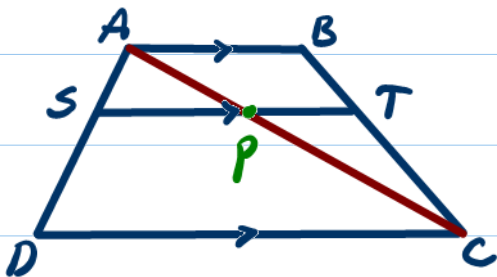
همچنین در مثلث BDC، MN میان خط است پس $MN = \frac{1}{2} BD$ (۲).

پس از (۱) و (۲) داریم: $OD = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} BD \right) = \frac{1}{4} BD = \frac{1}{4} (BO + OD)$

$$OD = \frac{1}{2}(4 + OD) \Rightarrow 2OD = 4 + OD \rightarrow OD = 4$$

قضیه تالس در زوزنه:

اگر در زوزنه $AB \parallel ST \parallel DC$ باشد آنگاه $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$



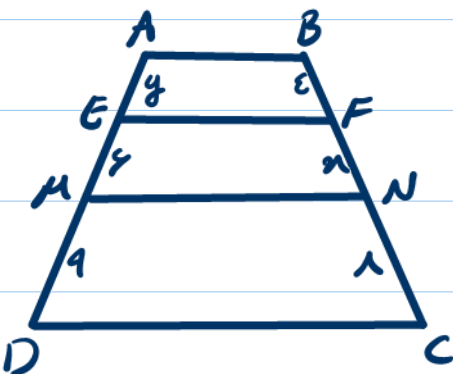
اثبات:
قطر AC را رسم می‌کنیم.

$$\triangle ADC : SP \parallel DC \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{AS}{SD} = \frac{AP}{PC} \quad (1)$$

$$\triangle ABC : PT \parallel AB \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{PC} = \frac{BT}{TC} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC} \quad \square$$

مثال: در شکل زیر AB, EF, MN, DC موازی اند. مقدار $\frac{x}{y}$ چقدر است؟



$$\triangle BDC : EF \parallel DC \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{EM}{MD} = \frac{FN}{NC} \rightarrow \frac{4}{9} = \frac{x}{1}$$

$$\Rightarrow 4x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{4} = \frac{14}{4}$$

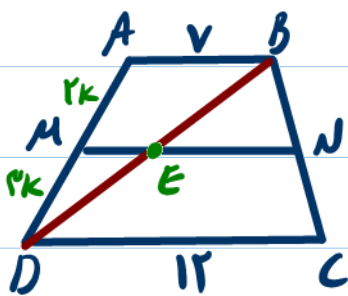
$$\text{در زوننه } ABNM : \frac{AE}{EM} = \frac{BF}{FN} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{2}{\frac{14}{4}} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$4y = 18 \rightarrow y = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \quad \frac{x}{y} = \frac{\frac{12}{4}}{\frac{9}{2}} = \frac{32}{27}$$

مثال: کشور خارج از کشور ۹۹

در زوننه ABCD، با خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$ است.

اندازه MN کدام است؟ ۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۱۲



موازی BD را رسم می‌کنیم. چون $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$

پس $MA = 2k$ ، $MD = 3k$

$$\triangle ADB: \xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{MD}{AD} = \frac{ME}{AB} \Rightarrow \frac{3k}{5k} = \frac{ME}{8} \Rightarrow 5ME = 24 \Rightarrow ME = \frac{24}{5}$$

$$\triangle BDC: \xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{BN}{BC} = \frac{EN}{CD} \text{ و } \triangle ABC \xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{BN}{BC} = \frac{AM}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{EN}{CD} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow \frac{EN}{12} = \frac{2k}{5k} \Rightarrow 5EN = 24 \Rightarrow EN = \frac{24}{5}$$

$$MN = ME + EN = \frac{24}{5} + \frac{24}{5} = \frac{48}{5} = 9 \quad \text{گزینه ۳}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل دوم: هندسه

درس سوم: تشابه مثلث‌ها

قسمت اول

جلسه چهارم: صفحات ۴۲ و ۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف دو مثلث متشابه :

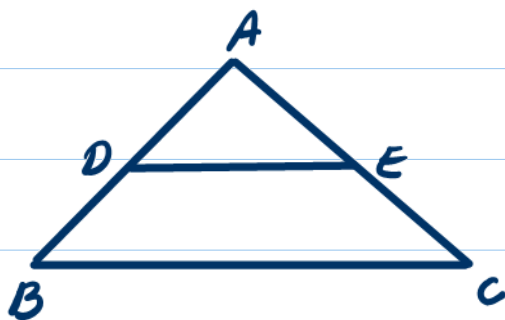
دو مثلث را متشابه گویند هرگاه زاویه‌های آن‌ها بهم برابر باشند و ضلع‌های اوجه رو به زاویه‌های مساوی، متشابه باشند.

اگر دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ متشابه باشند می‌نویسیم : $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

تذکره: نسبت اضلاع متناظر دو مثلث متشابه را **نسبت تشابه** دو مثلث می‌نامیم و معمولاً آن را با k نمایش می‌دهیم.

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها :

اگر خطی موازی یکی از ضلع‌های مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند، دلتا مثلثی کوچک بوجود می‌آید که با مثلث اصلی متشابه است.



اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم دو مثلث

$\triangle ADE$ و $\triangle ABC$ متشابه‌اند :

زاویه مشترک $\hat{A}$

(1) $\begin{cases} \hat{D} = \hat{B} : DE \parallel BC & \text{مربوط به } AB \\ \hat{E} = \hat{C} : DE \parallel BC & \text{مربوط به } AC \end{cases}$

از طرفی طبق تعمیم تالس می توان نوشت:

$$DE \parallel BC : \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (2) \quad (1), (2) \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

حالت های مشابه مثلث

با استفاده از معیار مشابه می توان ثابت کرد:

(1) اگر دو زاویه از مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، این دو مثلث مشابه اند

حالت (ز ز)

(2) اگر اندازه های دو ضلع از مثلث با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر مشابه باشند و زاویه

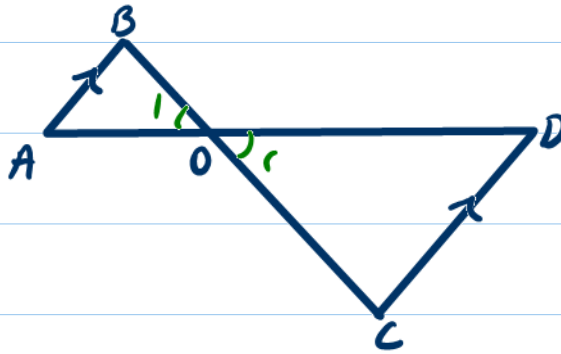
بین آنها هم برابر باشند، این دو مثلث مشابه اند. حالت (ض ض ض)

(3) اگر اندازه های سه ضلع از مثلث با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر مشابه باشند،

این دو مثلث مشابه اند. حالت (ض ض ض ض)

مثال: ثابت کنید در هر قسمت مثلث‌ها متشابه‌اند.

الف)

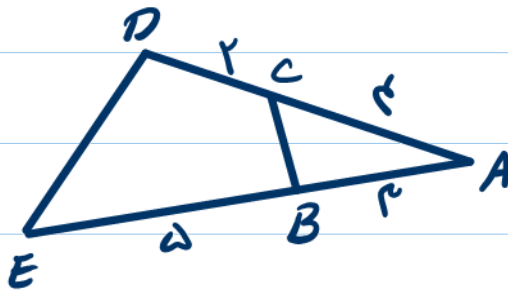


نکته: مثلث‌های معکوس بین

در خط‌های موازی متشابه‌اند.

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{مقابل در رأس} \\ \hat{A} = \hat{D} & \text{خطوط موازی در مقابل} \end{cases} \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD$$

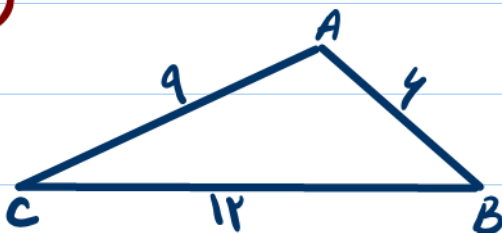
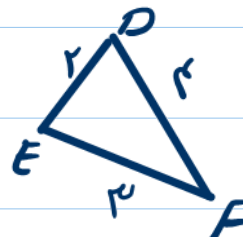
ب)



$$\begin{cases} \hat{A} : & \text{مشترک} \\ \frac{AB}{AD} = \frac{3}{4} = \frac{1}{\frac{4}{3}}, \quad \frac{AC}{AE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{1}{2} = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

پ)



$$\frac{BC}{DF} = \frac{12}{6} = 2, \quad \frac{AC}{EF} = \frac{9}{3} = 3, \quad \frac{AB}{DE} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{BC}{DF} = \frac{AC}{EF} = \frac{AB}{DE} = 2 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

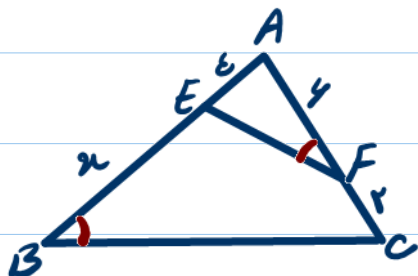
نوع نوشتن نسبت اضلاع مثلث مشابه :

نام دو مثلث را به ترتیب زاویه‌ها برابر از چپ به راست می‌نویسیم.

در نسبت اضلاع رأس‌ها را دو تا در آن انتخاب کرده در صورت و مخرج می‌نویسیم.

فقط رقت کنید صورت هر سه که همگی اضلاع یک مثلث را مخرج سه که از مثلث دیگر است.

مثال: در شکل زیر x را بیابید.



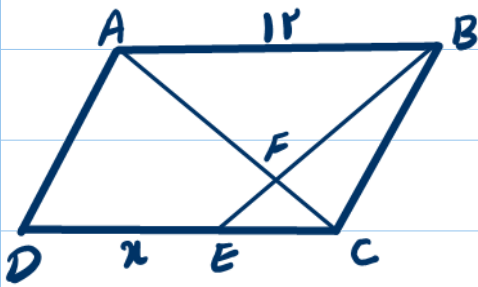
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} & \text{شترک} \\ \hat{B} = \hat{F} & \text{مخرج} \end{cases}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AFE$$

$$\Rightarrow \text{نسبت بین اضلاع} \quad \frac{AB}{AF} = \frac{BC}{FE} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{4+x}{4} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\Rightarrow 4+x = 12 \Rightarrow x = 12-4 \Rightarrow x = 8$$

مثال: در شکل زیر $ABCD$ متوازی الاضلاع است و $AF = 3FC$. مقدار x را بیابید.



چون در مثلث $\triangle AFB$ و $\triangle CFE$ در نقطه F متوازی

AB و DC محصور هستند پس با هم متشابه اند.

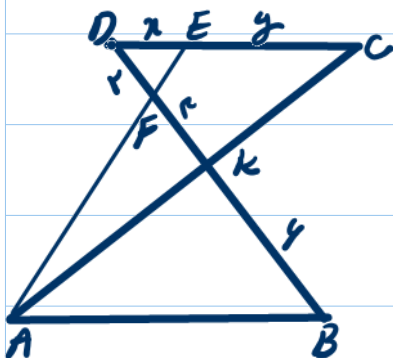
بهت بین اضلاع $\triangle AFB \sim \triangle CFE \Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{FB}{FE} = \frac{AB}{CE}$

$AF = 3FC \Rightarrow \frac{3FC}{FC} = \frac{12}{CE} \Rightarrow 3 = \frac{12}{CE} \Rightarrow CE = 4$

$AB = DC = 12 = x + CE = x + 4 \Rightarrow 12 = x + 4 \rightarrow x = 8$

مثال: در شکل زیر $DC \parallel AB$ ، مقدار $\frac{x}{x+y}$ چقدر است؟

$\frac{1}{10}$ (1) $\frac{2}{10}$ (2) $\frac{4}{10}$ (3) $\frac{7}{10}$ (4)



$DE \parallel AB : \triangle DEF \sim \triangle BAF$
مثلث ها همشابه

$\frac{DE}{BA} = \frac{EF}{AF} = \frac{DF}{BF}$

$\Rightarrow \frac{x}{BA} = \frac{1}{9} \quad (1)$

$$DC \parallel AB : \overset{D}{DKC} \sim \overset{B}{DKA} \Rightarrow \frac{DK}{BK} = \frac{KC}{KA} = \frac{DC}{BA}$$

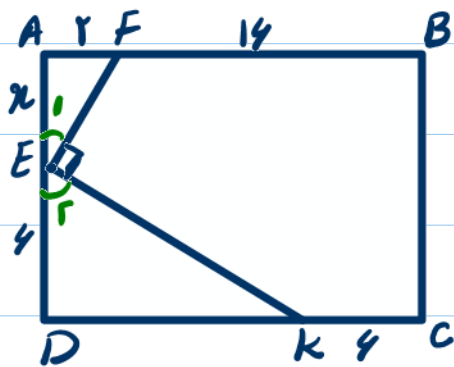
سنت لخصه

$$\Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{x+y}{BA} \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\frac{12}{9}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{x}{BA}}{\frac{x+y}{BA}} \Rightarrow \frac{12}{50} = \frac{x}{x+y} \Rightarrow \frac{6}{25} = \frac{x}{x+y}$$

گزین ۲

مثال: در شکل زیر $ABCD$ مستطیل است. مقدار x چقدر است!



$$\begin{matrix} 180 & 110 & 100 & 120 \end{matrix}$$

$$\hat{E}_1 + 90^\circ + \hat{E}_r = 180^\circ$$

زاویه نیم صفحه

$$\Rightarrow \hat{E}_1 + \hat{E}_r = 90^\circ \quad (1)$$

$$\hat{E}_r + \hat{D} + \hat{K} = 180^\circ : \text{مجموع زوای در هر مثلث}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_r + 90^\circ + \hat{K} = 180^\circ \Rightarrow \hat{E}_r + \hat{K} = 90^\circ \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \hat{E}_1 + \hat{E}_r = \hat{E}_r + \hat{K} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{K}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{E}_1 = \hat{K} \\ \hat{D} = \hat{A} = 90^\circ \end{array} \right. \Rightarrow AFE \sim DEK$$

$$\frac{AF}{DE} = \frac{\cancel{FE}}{\cancel{EK}} = \frac{AE}{DK} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{9}{12} \quad (DK = DC - 4 = 18 - 4 = 12)$$

$$\Rightarrow 4n = 22 \Rightarrow n = 2 \quad \text{نیم}$$

فرضیه: فرض کنید دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مشابه باشند و نسبت شباهت آن‌ها برابر k باشد.

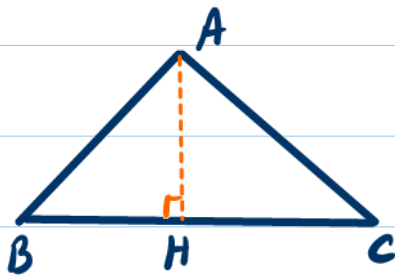
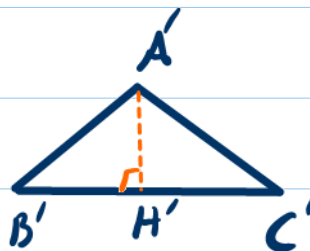
اگر AH و $A'H'$ ارتفاع‌های واربر BC و $B'C'$ باشند آنوقت:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2 \quad (ب)$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k \quad (ب)$$

$$\frac{AH}{A'H'} = k \quad (اف)$$

اثبات:



$$\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ, \quad B = B' \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle A'B'H'$$

(اف)

→ k

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BH}{B'H'} = \frac{AH}{A'H'} \Rightarrow k = \frac{AH}{A'H'} \quad \square$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' : k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (ب)$$

$$\Rightarrow AB = k A'B', \quad BC = k B'C', \quad AC = k A'C'$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = \frac{kA'B' + kA'C' + kB'C'}{A'B'+A'C'+B'C'}$$

$$= \frac{k(A'B'+A'C'+B'C')}{A'B'+A'C'+B'C'} = k \quad \square$$

پ

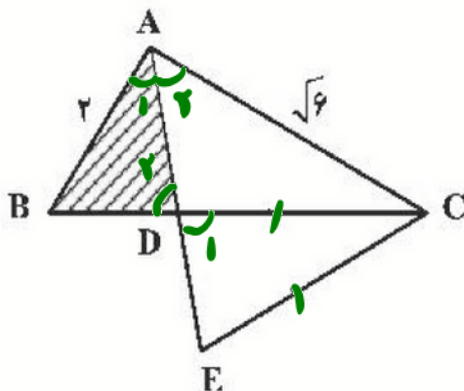
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AH}{\frac{1}{2} B'C' \times A'H'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AH}{A'H'} = k \times k = k^2 \quad \square$$

تذکر: نسبت هر دو جزء مشاط از جنس یاره خط عینی ارتجاع، میانه، نیم ساز، محیط و... در مثلث

متناسب برابر است با نسبت تشابه.

مثال: کنکور ۹۹ خارج از کشور

در شکل زیر، AD نیمساز زاویه A و CE = CD است. نسبت مساحت های دو مثلث ABD و ACE کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_r : \quad AD \text{ نیم از } \hat{A}$$

حرف $CE=CD$ است پس مثلث (ACE) متساوی الساقین است، $\hat{D}_1 = \hat{E}$ (۱)

از طرفی (۲) $\hat{D}_1 = \hat{D}_r$ زیرا مستقیم بر رأس اند.

$$(1), (2) \Rightarrow \hat{E} = \hat{D}_r$$

در نتیجه: $ACE \sim ABD$ و

$$نسبت\ متناهی = k = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{\sqrt{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \left(\frac{2}{\sqrt{4}}\right)^2 = \frac{4}{4} = \frac{2}{2} \quad \text{نیز ۲}$$

مثال: نسبت هار مساحت های دو مثلث متناهی، $\frac{49}{128}$ است. اگر یک میانه مثلث کوچکتر ۲۱ واحد

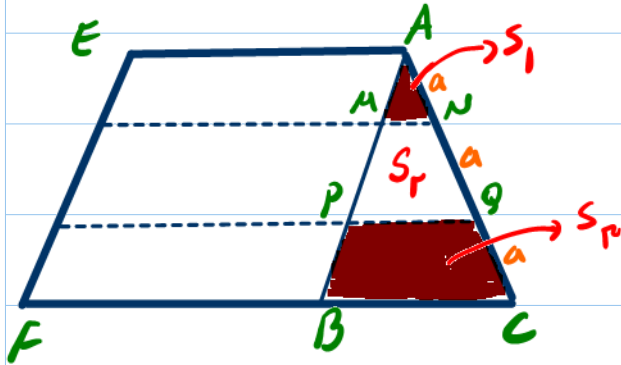
باشد، میانه مضارب این ضلع در مثلث بزرگتر چند واحد است؟

$$\frac{S_1}{S_r} = \frac{49}{128} = k^2 \Rightarrow k = \frac{7}{\sqrt{128}} = \frac{7}{\sqrt{4 \times 2 \times 2}} = \frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{a_1}{a_r} = k = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{21}{a_r} = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow a_r = \frac{21 \times 4\sqrt{2}}{7} = 24\sqrt{2}$$

مثال: هندسه خارج ۹۸:

یک ساق ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره خط موازی یکدیگرند.



نسبت مساحت ذوزنقه‌های برابر است؟

$$\frac{1}{6} \quad (1) \quad \frac{1}{8} \quad (2) \quad \frac{2}{9} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\triangle AMN \sim \triangle APQ : \frac{S_1}{S_1 + S_2} = \left(\frac{a}{2a}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4S_1 = S_1 + S_2 \rightarrow 3S_1 = S_2$$

$$\triangle APQ \sim \triangle ABC : \frac{S_1 + S_2}{S_1 + S_2 + S_3} = \left(\frac{2a}{3a}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow 9S_1 + 9S_2 = 4S_1 + 4S_2 + 4S_3$$

$$\Rightarrow 9S_1 + 27S_1 = 4S_1 + 12S_1 + 4S_3$$

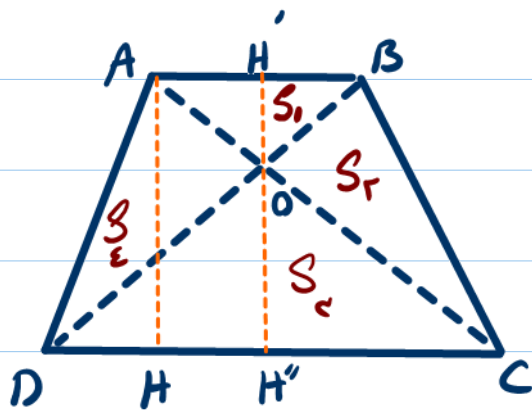
$$\Rightarrow 20S_1 = 4S_3 \Rightarrow 5S_1 = S_3$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_3} = \frac{S_1}{5S_1} = \frac{1}{5}$$

گزینه ۲

در زونته ای با طول قاعده‌ها ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک

مان‌کن، چند واحد مربع است؟ ۱۱ ۱۸ ۱۲ ۲۴ ۱۴ ۲۸



نکته: در زونته همواره مساحت محدود به یک

مان‌دگرها، بهم برابرند. ($S_1 = S_2$)

$$O \triangle AB \sim O \triangle DC : k = \frac{AB}{DC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{OH'}{OH''} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{OH'}{OH''}$$

$$HH' = 10 \Rightarrow OH' + OH'' = 10 \Rightarrow OH' = 2, OH'' = 6$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 16, S_3 = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = 36$$

$$S_{\text{کل}} = \frac{1}{2} (8 + 12) \times 10 = 100 \Rightarrow S_1 + S_2 = S_{\text{کل}} - (S_1 + S_3)$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow 2S_1 = 100 - (16 + 36) = 100 - 52 = 48 \Rightarrow S_1 = 24$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل دوم: هندسه

درس سوم: تشابه مثلث‌ها

قسمت دوم: روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

جلسه پنجم: صفحات ۴۴ و ۴۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

برخی روابط طولی در مثلث قائم الزاویه :

قضیه: اگر سه مثلث $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, و $\triangle A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

و $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ کنواکه $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

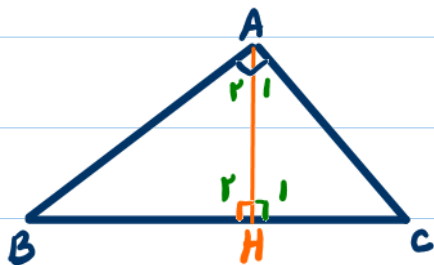
اثبات: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' \text{ (1)}, \hat{B} = \hat{B}' \text{ (3)}, \hat{C} = \hat{C}'$

$\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C'' \Rightarrow \hat{A}' = \hat{A}'' \text{ (2)}, \hat{B}' = \hat{B}'' \text{ (4)}, \hat{C}' = \hat{C}''$

$\square \hat{A} = \hat{A}'' \text{ (1), (2)} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}''$ و $\hat{B} = \hat{B}'' \text{ (3), (4)} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارده بر وتر، دو مثلث قائم الزاویه به وجود

می‌آورد که با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

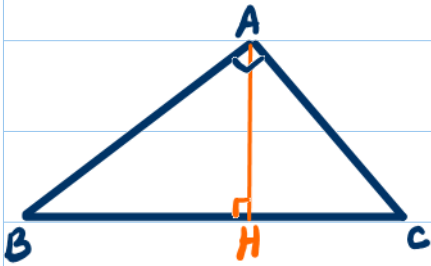


اثبات: $\triangle ABC \sim \triangle HBA \text{ (1)}$ $\left\{ \begin{array}{l} \hat{B} = \text{مترک} \\ \hat{H} = \hat{A} = 90^\circ \end{array} \right.$

$\triangle ABC \sim \triangle HAC \text{ (2)}$ $\left\{ \begin{array}{l} \hat{C} = \text{مترک} \\ \hat{H} = \hat{A} = 90^\circ \end{array} \right.$

$\Rightarrow \triangle HBA \sim \triangle HAC \text{ (1), (2) و قضیه یاب}$

نتیجه: اگر در مثل قائم الزامی $\triangle ABC$ ، ارتفاع AH دارد بر وتر باشد ($\hat{A}=90^\circ$)، ریشه:



$$AH^2 = HB \times HC \quad (1)$$

$$AB^2 = BH \times BC \quad (2)$$

$$AC^2 = CH \times BC \quad (3)$$

$$AH \times BC = AB \times AC \quad (4)$$

$$\triangle HAC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HA} = \frac{AC}{BA} \Rightarrow AH^2 = HB \times HC \quad \text{ثبت (1)}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HA} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow AB^2 = BH \times BC \quad \text{ثبت (2)}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = CH \times BC \quad \text{ثبت (3)}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \quad (1) \quad \text{ثبت (4)}$$

$$(1) = (2) \Rightarrow AH \times BC = AB \times AC \quad \text{ثبت}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \quad (2)$$

تذکر: به چهار رابطه بالا، رابطه طوط در مثلث قائم الزامی می‌گویند.

مثال: با استفاده از رابطه طوط در مثلث قائم الزامی، قضیه فیثاغورس را ثابت کنید.

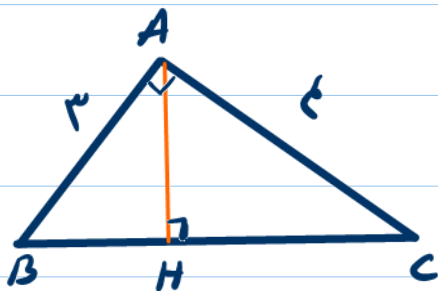
با جمع روابط طوط (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$AB^2 + AC^2 = HB \times BC + HC \times BC = BC(HB + HC) = BC \times BC$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \square$$

مثال: در مثلث قائم الزامی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $AB = 3$ ، $AC = 4$ است. طول قطعه

بزرگتری که ارتفاع وارد بر وتر، بر روی وتر ایجاد می‌کند، چقدر است؟



$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$AC^2 = HC \times BC \Rightarrow 4^2 = HC \times 5$$

$$\Rightarrow 16 = HC \times 5 \Rightarrow HC = \frac{16}{5}$$

مثال: کشید، خارج ۹۸:

در مستطیل ABCD به طول $AB=17$ ، از نقطه A عمود AH بر قطر BD رسم شد.

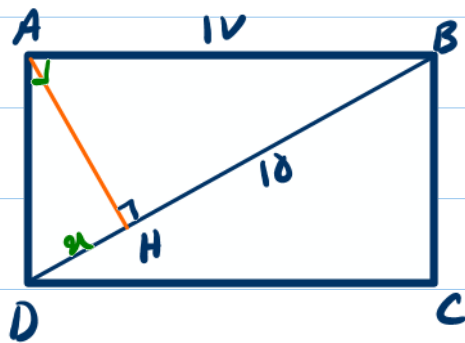
اگر $BH=15$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چند بزرگتر است؟

$$\frac{17}{15} \quad (ع)$$

$$\frac{17}{15} \quad (ب)$$

$$\frac{1}{15} \quad (د)$$

$$\frac{17}{15} \quad (ا)$$



$$ADB: AB^2 = BC \times BH$$

$$17^2 = (15+x) \times 15$$

$$\Rightarrow 289 = 225 + 15x \Rightarrow 289 - 225 = 15x$$

$$\Rightarrow 64 = 15x \Rightarrow x = DH = \frac{64}{15} \Rightarrow BD = BH + Dx$$

$$\Rightarrow BD = 15 + \frac{64}{15} = \frac{225 + 64}{15} = \frac{289}{15}$$

$$\frac{289}{15} - 19 = \frac{289 - 285}{15} = \frac{4}{15}$$

گزینه ۱

مثال: کشور ۹۸ :

در مثل قائم الزامی ABC ، اضلاع قائم $AB = 3\sqrt{5}$ و $AC = 4$ ، ارتفاع AH و میانه AM

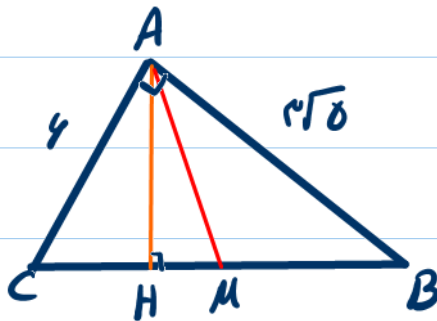
رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AHH است؟

۱۸ (۴)

۱۵ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 4^2 + (3\sqrt{5})^2$$

$$= 16 + 45 = 61 \Rightarrow BC = 9$$

$$AC^2 = BC \times CH \Rightarrow 4^2 = CH \times 9 \rightarrow 16 = CH \times 9 \Rightarrow CH = \frac{16}{9}$$

از طرفی چون AM میانه است پس M وسط BC است از سیمه: $CM = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2}$

$$HM = CM - CH = \frac{9}{2} - \frac{16}{9} = \frac{1}{2}$$

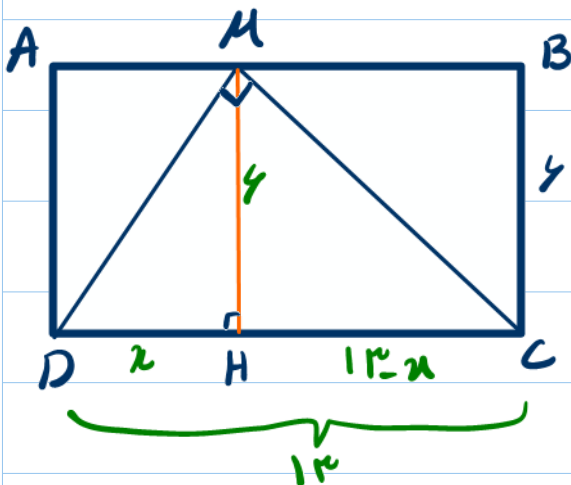
چون AH ارتفاع مشترک در مثلث است پس نسبت مساحت ها ثابت قافیه است:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AHH}} = \frac{BC}{HM} = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 18 \quad \text{گزینه ۴}$$

مثال: در مستطیج به دجار ۱۲ و ۶ واحد، نقطه M بر روی ضلع نزدیکتر قرار دارد و خطوط

واصل از M به دو رأس دیگر مستطیج بر هم عمودند. فاصله نزدیکترین رأس مستطیج

از M کجاست؟ ۱۱ ۳ ۲ ۵ ۳ ۴ ۵ ۴



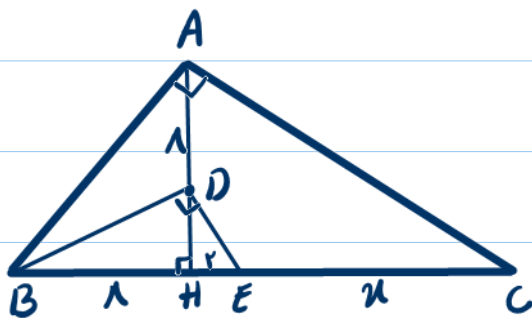
$$MH^2 = DH \times HC$$

$$4^2 = x \times (12 - x)$$

$$\Rightarrow 16 = 12x - x^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 16 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-8) = 0$$

نیز ۳ $\Rightarrow DH = AM = 4$ چون DH مقعره و ضرایب $\begin{cases} x=4 \\ x=8 \end{cases}$

مثال: در مثل مقابل مقدار x کجاست؟



$$12 \times 4$$

$$16 \times 12$$

$$16 \times 12$$

$$12 \times 12$$

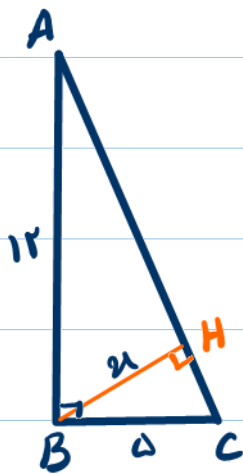
$\triangle BDE$: $DH^2 = BH \times HE = 8 \times 2 = 16 \rightarrow DH = 4$

$$AH = AD + DH = 1 + 2 = 12$$

$$ABC : AH^2 = BH \times HC \Rightarrow 12^2 = 1(2+x)$$

$$\Rightarrow 18 = x + 2 \Rightarrow x = 16 \quad \text{گزینہ ۳}$$

مثال: در شکل زیر مقدار x کجاست؟



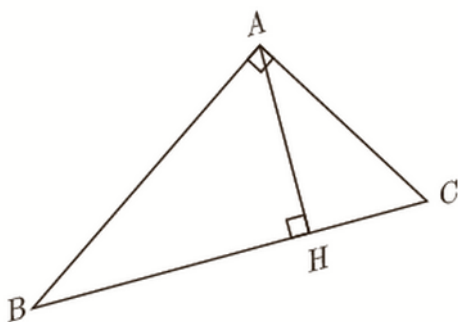
$$\frac{44}{13} (4) \quad \frac{40}{13} (3) \quad \frac{44}{11} (2) \quad \frac{40}{11} (1)$$

$$AC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow AC = 13$$

$$BH \times AC = AB \times BC \Rightarrow x \times 13 = 12 \times 5 \Rightarrow x = \frac{40}{13} \quad \text{گزینہ ۳}$$

تمرین ۲ صفحه ۴۵ کتاب ری

در مثلث قائم الزاویه روبه رو در هر حالت، اندازه پاره خط خواسته شده را به دست آورید.



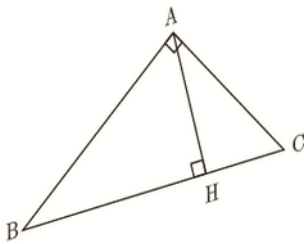
الف) $BC=10$ و $BH=9$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow AB^2 = 9 \times 10 \Rightarrow AB = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 100 = 90 + AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$

$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow 3\sqrt{10} \times \sqrt{10} = AH \times 10 \Rightarrow 3 \times 10 = AH \times 10 \Rightarrow AH = 3$$

ب) $AC=5$ و $CH=2$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$



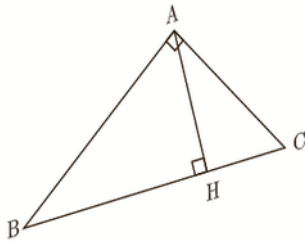
$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow 25 = 2 \times BC$$

$$\Rightarrow BC = \frac{25}{2}$$

$$BH = BC - CH = \frac{25}{2} - 2 = \frac{25-4}{2} = \frac{21}{2}$$

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow AH^2 = \frac{21}{2} \times 2 = 21 \Rightarrow AH = \sqrt{21}$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow AB^2 = \frac{21}{2} \times \frac{25}{2} = \frac{025}{2} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{025}}{2}$$



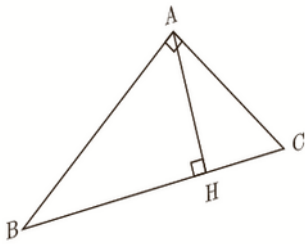
ب) $AB = 8$ و $AC = 6$ و $BC = ?$ و $AH = ?$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\Rightarrow BC = 10$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 10 = 8 \times 6 \rightarrow AH = \frac{48}{10} = 4.8$$

ت) $AB = 12$ و $AH = 6$ و $BH = ?$ و $BC = ?$ و $AC = ?$



$$\Delta ABH : AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$\Rightarrow 144 = 36 + BH^2 \Rightarrow BH = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

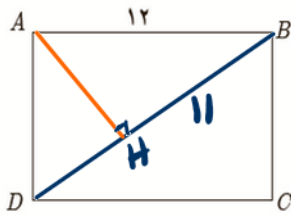
$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 144 = 6\sqrt{3} \times BC \Rightarrow BC = \frac{12 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{24 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3}$$

$$BC = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$$

$$CH = BC - BH = 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$AC^2 = CH \times BC = 2\sqrt{3} \times 8\sqrt{3} = 16 \times 3 = 48 \Rightarrow AC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

تمرین ۳ صفحه ۴۵ کتاب ری



شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطه A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازه عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازه عرض مستطیل را محاسبه کنید.

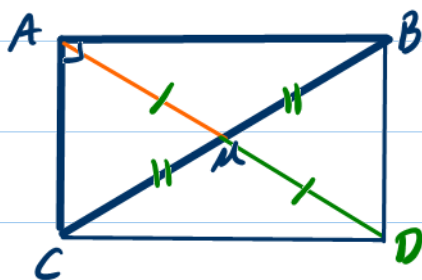
$$\triangle ABH : 12^2 = AH^2 + 11^2 \Rightarrow AH^2 = 144 - 121 = 23 \Rightarrow AH = \sqrt{23}$$

$$AH^2 = DH \times BH \Rightarrow 23 = DH \times 11 \rightarrow DH = \frac{23}{11}$$

$$BD = DH + BH = \frac{23}{11} + 11 = \frac{23 + 121}{11} = \frac{144}{11}$$

$$AD^2 = DH \times BD = \frac{23}{11} \times \frac{144}{11} \Rightarrow AD^2 = \frac{144 \times 23}{121} \Rightarrow AD = \frac{12}{11} \sqrt{23}$$

نکته: در هر مثلث قائم الزامی، اندازه میانه واربر بر وتر، نصف وتر است.



رابطه:

AM را به اندازه خردی استاندارد می رسم.

از D به B و C وصل می کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} AM = MD \\ MB = MC \end{array} \right.$$

ABCD متوازی الاضلاع است. $\Rightarrow$ در یک ضلع ABCD متوازی الاضلاع هر دو قطر را نصف کرده اند $\Rightarrow MB = MC$

$ABCD$ متوازی الاضلاع است که در آن $\hat{A} = 90^\circ$ است پس $ABCD$ مستطیل است.

پس $AD = BC$ از طرفی $AM = \frac{1}{2}AD$ پس $AM = \frac{1}{2}BC$ $\square$

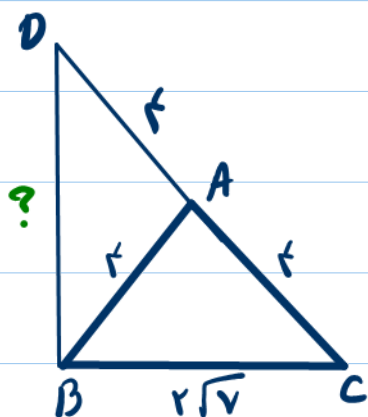
تذکر: حلقه مقصود بالا درست است. یعنی اگر در مثلث اندازه میانه واردر بزرگ ضلع

نصف اندازه کن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزامی است.

مثال: در مثلث متساوی الساقین ABC ، $AB = AC = 4$ و $BC = 2\sqrt{7}$ است.

ضلع AC را به اندازه خرد تا نقطه D (متساوی دهم) $(AD = AC)$. اندازه BD کدام است؟

(۱) $2\sqrt{10}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) $2\sqrt{14}$



در مثلث BD^2 ، AB میانه است و اندازه آن

نصف ضلع CD است پس طبق تذکره بالا مثلث BD^2

$$DC^2 = BD^2 + BC^2$$

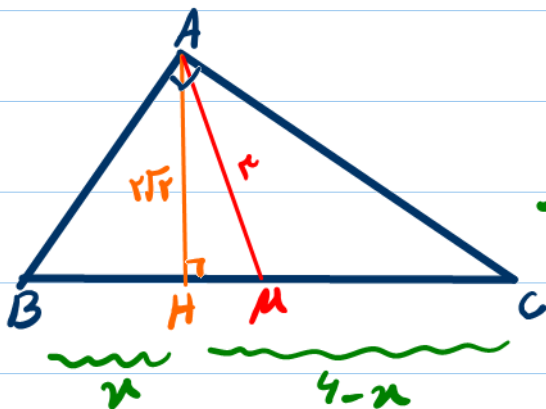
در رأس B قائم الزامی است.

$$\Rightarrow 16 = BD^2 + (2\sqrt{7})^2 \Rightarrow BD^2 = 16 - 28 = -12 \Rightarrow BD = 4 \quad \text{گزینه ۳}$$

مثال: کوچکترین ضلع مثلث قائم الزامی را که اندازه ارتفاع و میانه واربر بر در آن

بر ترتیب $2\sqrt{2}$ و 3 است کدام است ؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) $3\sqrt{2}$



در مثلث قائم الزامی، میانه واربر بر در، نصف در

است. پس :

$$AM = BM = CM = 3 \Rightarrow BC = 6$$

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = x(6-x) \Rightarrow 8 = 6x - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases}$$

چون $AM < BM$ پس $BH=2$ در نتیجه $CH=4$.

$$AB^2 = BH \times BC = 2 \times 6 = 12 \Rightarrow AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \checkmark \quad \text{گزینه ۲}$$

$$AC^2 = CH \times BC = 4 \times 6 = 24 \Rightarrow AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل سوم: تابع

درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع
قسمت اول: یادآوری و معرفی برخی توابع خاص

جلسه اول: صفحات ۴۸ تا ۵۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

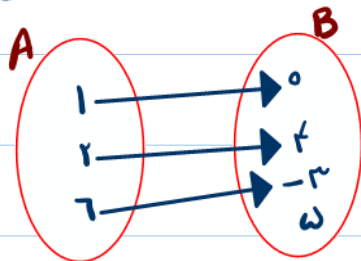
اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری مفهوم تابع :

هر تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A

دقیقاً یک عضو از B نسبت می دهد. A را دامنه، B را هم دامنه این تابع



$$B = \{0, 4, -3\} = \text{هم دامنه}$$

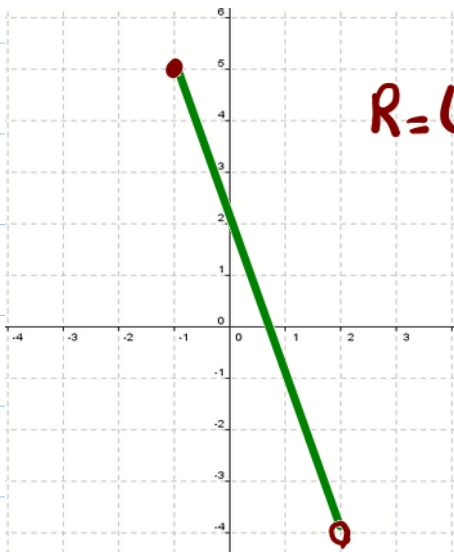
$$R = \{0, 4, -3\} = \text{بر}$$

می نامیم.

مجموعه عضوهای از B را که به عضوی از A نسبت داده شده اند **بر** این تابع

می نامیم. بنابراین **بر** این تابع زیرمجموعه ای از هم دامنه تابع است.

مثال : برای تابع $f: [-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ که دامنه از نمایش های زیر نیز قابل قبول است؟
 $f(x) = -3x + 2$



$$R = (-4, 5]$$

- هم دامنه دامنه
- (-4, 5] $\nsubseteq$ (-2, 5)
- (الف) $\times$ $\begin{cases} f: [-1, 2) \rightarrow (-2, 5) \\ f(x) = -3x + 2 \end{cases}$
- (ب) $\times$ $\begin{cases} f: [-1, 2) \rightarrow [1, +\infty) \\ f(x) = -3x + 2 \end{cases}$ $[1, +\infty) \nsubseteq (-4, 5]$
- (ج) $\checkmark$ $\begin{cases} f: [-1, 2) \rightarrow (-4, 5] \\ f(x) = -3x + 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 9 \div 4 \\ -11 \div 5 \\ 2 \div -3 \end{array}$$

مثال :

برای تابع $f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \frac{1}{9}]$ کدام یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟ ^{مربع}

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(الف)

$$\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \infty) \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \frac{1}{9}] \\ f(x) = x \end{cases}$$

(پ)

$$\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(ت)

الف) قابل قبول نیست زیرا دامنه تغییر کرده است.

ب) قابل قبول است زیرا $[0, \infty) \subseteq [0, \frac{1}{9}]$.

پ) قابل قبول نیست زیرا ضابطه تابع تغییر کرده است.

ت) قابل قبول است زیرا $\mathbb{R} \subseteq [0, \frac{1}{9}]$.

تأج به عنوان ماشین

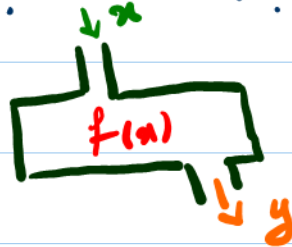
می‌توان تأج را ماشینی در نظر گرفت که به ازای هر ورودی یک خروجی تولید می‌دهد. ورودی‌ها

از دامنه تأج درآید و خروجی‌ها در برد هستند. در ضمن به ازای هر ورودی دقیقاً

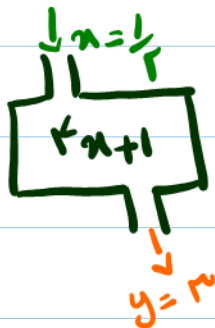
یک خروجی صادر دارد. البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند.

اگر n مخفی از دامنه تابع f و n خودی این تابع n باشد، می‌نویسیم $y = f(n)$

به عبارتی که داشتن تابع روی و دوری انجام می‌دهد تا خودی را تحول دهد، ضابطه تابع می‌گویند.



مثال: اگر خودی داشتن تابع $f(n) = 4n + 1$ عدد ۳ باشد، دوری آن چه دوری بوده است؟



$$3 = 4n + 1 \Rightarrow 3 - 1 = 4n$$

$$\Rightarrow 2 = 4n \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

جمع بندی:

- برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه هم دامنه ضابطه تابع داده شده باشد

- اگر هم دامنه داده نشده باشد فقط ضابطه و دامنه را داشته باشیم، می‌توانیم

هم دامنه را هر مجموعه‌ای که شامل برر باشد در نظر بگیریم.

- اگر دامنه داده نشده باشد، بزرگترین مجموعه‌ای که اعضای آن را بتوانیم به جای n

قرار دهیم و خودی و تحول بگیریم، دامنه در نظر می‌گیریم.

تساوی دو تابع :

دو تابع f و g با هم برابرند هرگاه :

$$D_f = D_g \quad (\text{دوم})$$

ب) برای هر x از دامنه یکان داشته باشیم $f(x) = g(x)$.

به عبارت دیگر برای هر x در دوری یکان، خروجی ها هم یکی باشد.

مثال : در هر قسمت تساوی دو تابع را بررسی کنید.

$$\text{الف) } f = \{(-2, 7), (\underline{3}, 7), (4, 0)\}$$

$$D_f = D_g = \{-2, 3, 4\} \rightarrow f \neq g$$

$$g = \{(-2, 7), (4, 0), (\underline{3}, 4)\}$$

$$\text{ولی } f(3) \neq g(3)$$

$$\text{ب) } f(x) = 4x - 1, \quad g(x) = \frac{1x - 2}{2} = 2\left(\frac{4x - 1}{2}\right) = 4x - 1$$
$$f = g$$

$$\text{پ) } \begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \end{cases}$$

زیرا مقادیر هایشان نه :

$$f \neq g$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f: [0, r] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = rx^r - 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g: (0, r) \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = rx^r - 1 \end{array} \right.$$

$$D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g: \quad \text{دائمه جابر است}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) \\ f(x) = x+1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{rx+r}{r} = \frac{r(x+1)}{r} = x+1 \end{array} \right.$$

$$f = g$$

$$\begin{array}{ll} 2) \quad f(x) = \frac{x}{x} & g(x) = 1 \\ D_f = \mathbb{R} - \{0\} & D_g = \mathbb{R} \end{array}$$

$$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

برخی توابع خاص :

۱) تابع گویا :

اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد

به تابع باصداقه $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ و دامنه $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ تابع گویا

می‌گوئیم.

به عبارت دیگر دامنه توابع گویا = اعداد حقیقی منهای ریشه‌های مخبر

$$D_f = \mathbb{R} - \{ \text{اعدادی که مخبر را صفر می‌کند} \}$$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{2x-1}{\omega x+3}$

$$\omega x + 3 = 0 \Rightarrow \omega x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{\omega}$$

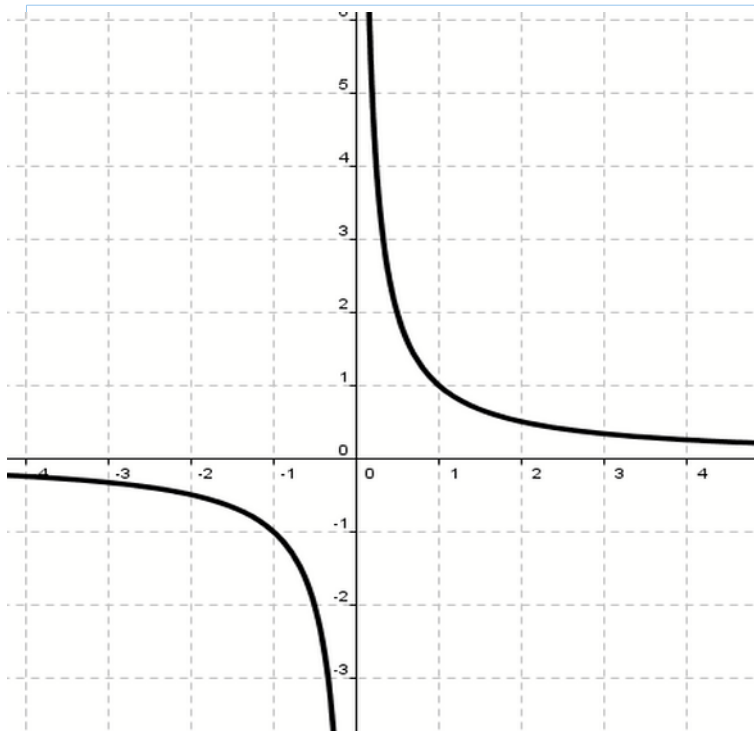
$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{\omega} \right\}$$

ب) $g(x) = \frac{x}{2x^2-3x+1}$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$2 - 3 + 1 = 0 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\}$$



$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ متوار تابع}$$

۱۲) تابع ریشه نام :

الف) اگر n عدد طبیعی و زوج باشد به تابعی که به هر عدد نامنفی، ریشه n ام نامنفی آن

رابطت می دهد تابع ریشه n ام می گوئیم.

ب) اگر n عدد طبیعی و فرد و مخالف n باشد، به تابعی که به هر عدد حقیقی ریشه n ام

آن را نسبت می دهد تابع ریشه n ام می گوئیم.

$$n \text{ زوج} : g(x) = \sqrt[n]{f(x)} \rightarrow D_g = D_f$$

$$n \text{ زوج} : g(x) = \sqrt[n]{f(x)} \rightarrow D_g = \{x \in D_f \mid f(x) \geq 0\}$$

به عبارت دیگر دامنه توابع رادیکالی با فرض حوز هم دامنه تابع زیر رادیکال است و

برای یافتن دامنه توابع رادیکالی با فرض زوج، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر

قرار می دهیم و نامعادله حاصل را حل می کنیم.

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{1-2x} \quad 1-2x \geq 0 \rightarrow -2x \geq -1 \xrightarrow{:(-2)} x \leq \frac{1}{2}$$

$$D_f = (-\infty, \frac{1}{2}]$$

$$\text{ب) } g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x-4}} \quad D_g = D_{\frac{2x}{x-4}} \rightarrow D = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$\text{ج) } h(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2x+4}}$$

$$\frac{1-x}{2x+4} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 1-x=0 \rightarrow x=1 \\ 2x+4=0 \rightarrow x=-2 \end{cases}$$

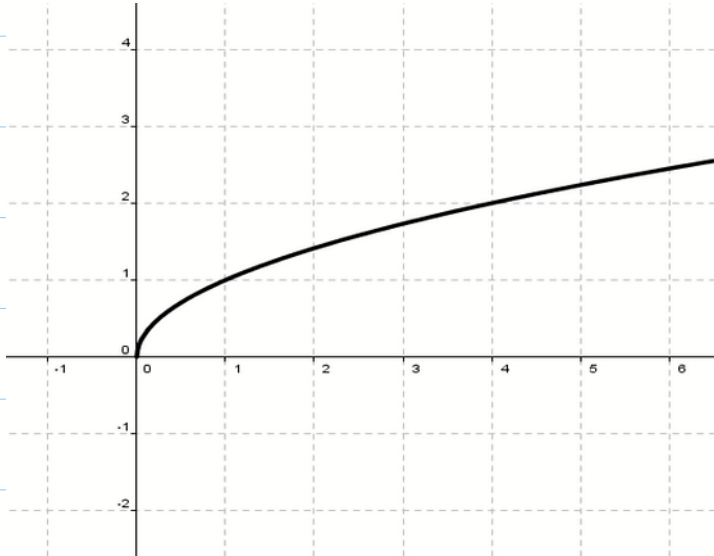
x	-2	1	
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$2x+4$	$-$	$+$	$+$
$\frac{1-x}{2x+4}$	$-$	$+$	$-$

2

$$D_h = (-2, 1]$$

منوار تابع رادیکالی (رشته دوم مثبت)

منوار تابع $y = \sqrt{x}$ به صورت زیر است :



در ریاضی با قوانین انتقال برای رسم منوارها آشنا شوید. این قوانین را برای تابع

رادیکالی به کار می بریم :

الف) $y = \sqrt{x} + k$:
- $k > 0$: منوار k واحد سمت بالا
- $k < 0$: منوار k واحد سمت پایین
انتقال عمودی

ب) $y = \sqrt{x+k}$:
- $k > 0$: منوار k واحد سمت چپ
- $k < 0$: منوار k واحد سمت راست
انتقال دخی

ج) $y = -\sqrt{x}$: منوار مثبت به بعد و هافتنه می شود .
انعکاس

د) $y = \sqrt{-x}$: منوار مثبت به بعد و هافتنه می شود .
انعکاس

نکته: برای رسم تابعی به صورت $y = a\sqrt{bx+c} + d$ از دانه و نقطه‌های کمک

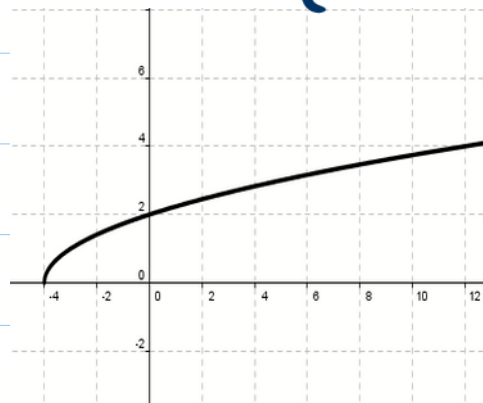
می‌گیریم (در ریاضی ۲ با ذکر قاعده‌های کمی این نوع تبدیل‌ها بیشتر بررسی می‌شود)

در ریاضی ۲ به زمره همین نکته (انتقالی) کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

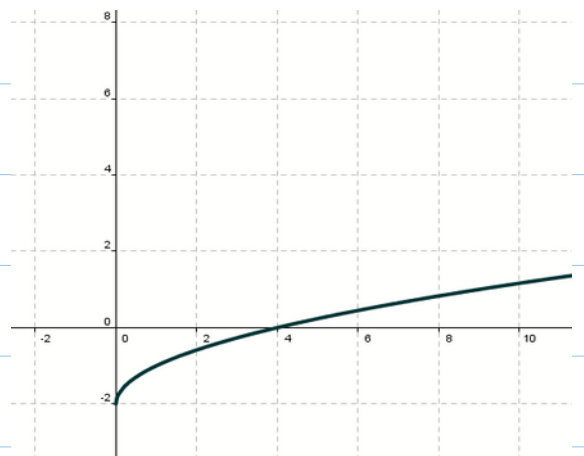
الف) $y = \sqrt{x+4}$

انتقال افقی ۴ واحد به چپ



ب) $y = \sqrt{x} - 2$

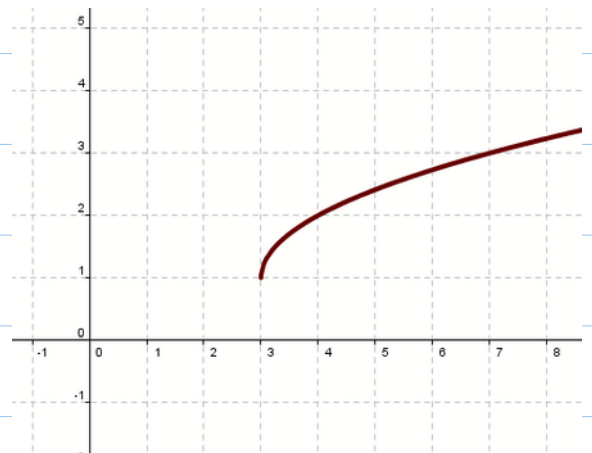
انتقال عمودی ۲ واحد به پایین



ج) $y = 1 + \sqrt{x-3}$

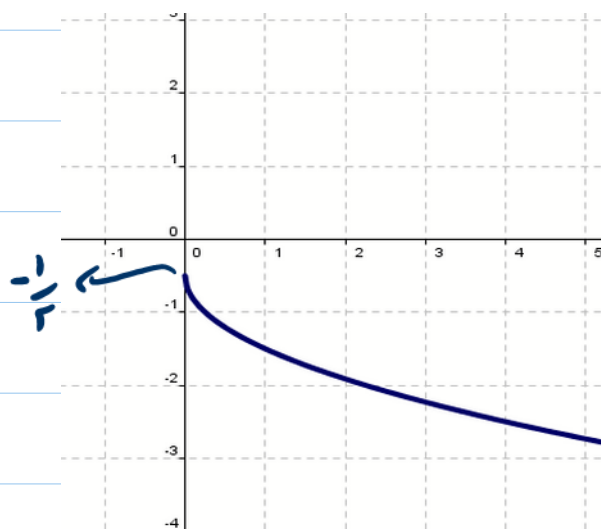
انتقال عمودی ۱ واحد به بالا

انتقال افقی ۳ واحد به راست



$$=) y = -\sqrt{x} - \frac{1}{x}$$

انتقال محوری به یک پاشی
دفعات به قدر x صا

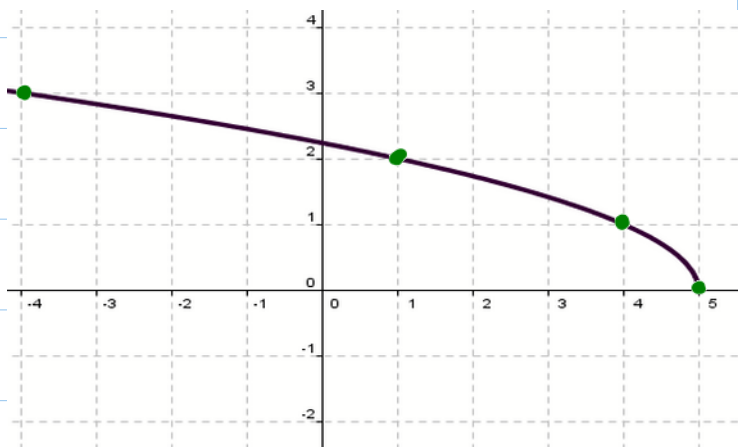


$$=) y = \sqrt{-x+5}$$

$$D: -x+5 \geq 0 \rightarrow -x \geq -5$$

$$\div (-1) \rightarrow x \leq 5$$

x	-4	1	4	5
y	3	2	1	0

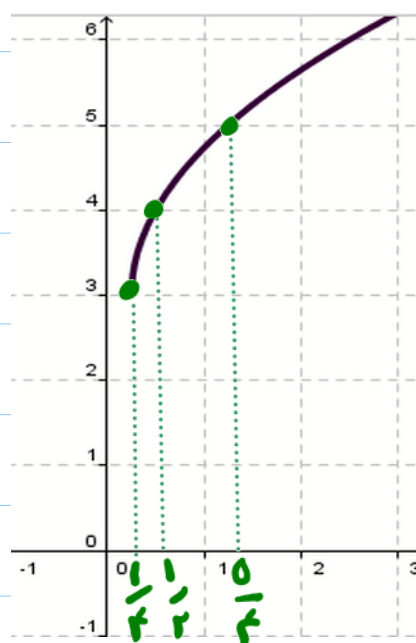


مثال: نمودار تابع $y = \sqrt{x-1} + 3$ را رسم کنید.

$$D: x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$\rightarrow x \geq \frac{1}{x}$$

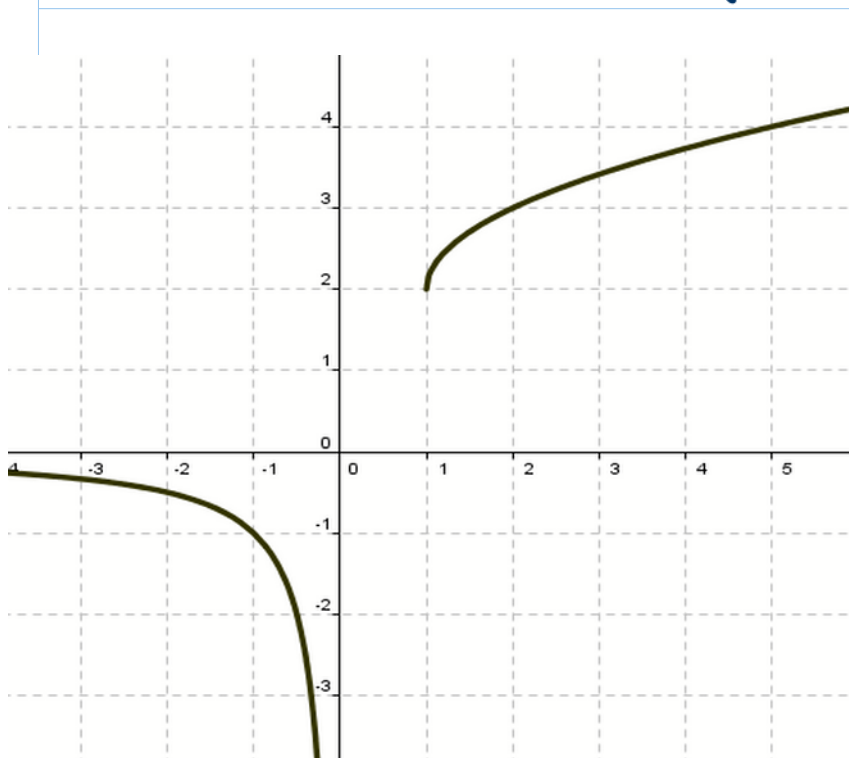
x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{5}{x}$
y	3	4	5



یادآوری: توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند، توابع قطعی

یا چند ضابطه‌ای نامیده می‌شوند.

مثال: معزدار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ \sqrt{x-1} + 2 & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و بردار آن را تعیین کنید.



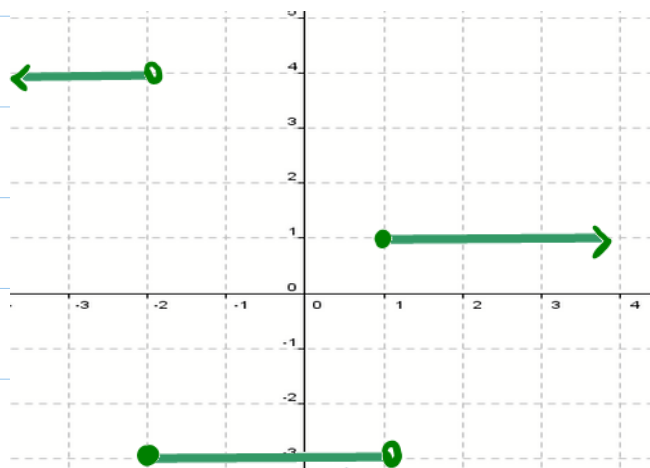
$$D = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

$$R = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$$

تذکر: اگر در توابع چند ضابطه‌ای، همه ضابطه‌ها تابع ثابت باشند (یعنی عددی که معزدارش خط افقی

می‌شود) آن را تابع پله‌ای می‌نامند.

مثال: معزدار تابع $y = \begin{cases} 4 & x < -2 \\ -3 & -2 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید.



قبل از اینکه آخرین نوع توابع خطی توابع جزء و صحیح را ببینیم به نکته ای در باره تشخیص
توابع بزرگ یا نزول یک رابطه از روی ضابطه اشاره کنیم.

نکته: رابطه یا تابع

فرض کنید رابطه ای بین x و y به صورت یک سادی داریم. در این صورت y تابعی
از x است اگر و فقط اگر به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد که در
سادی داده شده صدق کند.

برای تشخیص تابع بودن یا نبودن یک رابطه سعی می کنیم y را بر حسب x بدست آوریم
و نشان دهیم که تابع هست یا خیر. روش دیگر استفاده از مثال نقض است.

مثال: کدام یک از معادلات زیر را به صورت تابعی از x مشخص می کنند؟

مثال نقض $y=0$ و $y=1 \rightarrow x=2$ تابع نیست
 (الف) $y - \sqrt{y} = x - 2$

(ب) $y^3 - 3y^2 + 3y = x$
 $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = x - 1 \rightarrow (y-1)^3 = x-1 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} y-1 = \sqrt[3]{x-1}$
 $y = \sqrt[3]{x-1} + 1$ تابع هست

(پ) $y^2 + x = 4$
 $y^2 = 4 - x \xrightarrow{\sqrt{}} |y| = \sqrt{4-x} \rightarrow y = \pm \sqrt{4-x}$
 $x=1 \rightarrow y = \pm \sqrt{3}$ تابع نیست

(ت) $|x| + |y| = 1$
 مثال نقض: $x=0 \rightarrow |y|=1 \rightarrow y = \pm 1$ تابع نیست

(ث) $y^2 + 4x^2 = 4xy$
 $y^2 - 4xy + 4x^2 = 0 \rightarrow (y-2x)^2 = 0 \rightarrow y-2x=0$
 $y=2x$ تابع است

(ج) $|x| + (y-1)^2 = 0$

جمع درجدارت مثبت مغز شده است پس هر دو صفر اند

$|x|=0 \rightarrow x=0$

$(y-1)^2=0 \rightarrow y=1$

این رابطه فقط شامل یک نقطه است پس تابع است
 $(0, 1)$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل سوم: تابع

درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع

قسمت دوم: تابع جزء صحیح

جلسه دوم: صفحات ۵۴ و ۵۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

جزء صحیح

تعریف ۱) جزء صحیح هر عدد حقیقی بزرگترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچکتر یا با

آن برابر باشد.

تعریف ۲) اگر عدد حقیقی x بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ باشد، جزء صحیح

x را برابر k تعریف کرده و می نویسیم: $[x] = k$. جزء صحیح عدد صحیح

با خودش برابر است.

تعریف ۳) برای هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از x

بزرگتر نباشد. جزء صحیح x را با بهار $[x]$ نمایش می دهیم.

$$[2,2] = 2$$

مثال:

$$[-5] = -5$$

$$[-3,9] = -3$$

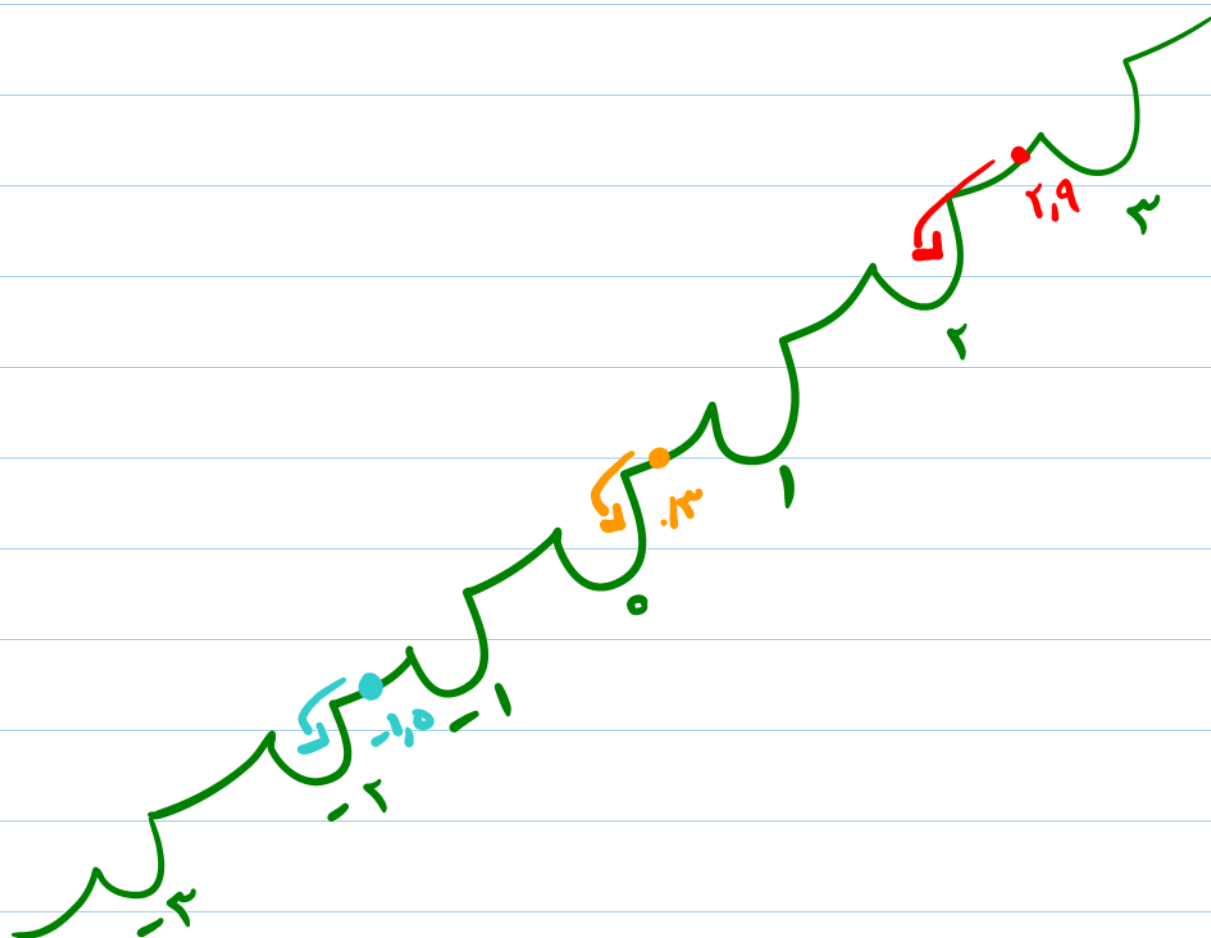
نکته: برای یافتن جزء صحیح یک عدد حقیقی می توان از **سطح شیب دار چاله دار** زیر استفاده کنیم.

در این شکل اعداد صحیح چاله ها و اعداد غیر صحیح روی سطح شیب دار و بین چاله ها

قرار می گیرند. با توجه به شیب این سطح، واضح است اگر توی را در موقعیت یک عدد

روی سطح قرار دهیم، توپ در اولین چاله می افتد. عدد صحیح مربوط به چاله

همان جزء صحیح عدد است.



مثال: چند صحیح‌های زیر را ببینید.

$$\text{الف) } \left[\frac{15}{4} \right] = [3.75] = 3$$

$$\text{ب) } [-1.4] = -2$$

$$\text{پ) } \left[\sqrt{2} \right] = 1 \quad \text{چون } 1.4 = \sqrt{2}$$

$$\text{ت) } \left[\frac{1}{3} \right] = 0$$

$$\text{ث) } [-1.7] = -2$$

$$\text{ج) } -10 < x < -9 \rightarrow [x] = -10$$

$$\text{بج) } [\sqrt[3]{71}] : 64 < 71 < 125 \rightarrow 4 < \sqrt[3]{71} < 5 \rightarrow [\sqrt[3]{71}] = 4$$

برخی از ویژگی‌های چند صحیح:

۱) اگر u عبارتی بر حسب x باشد از آنجا که $[u] = k$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$k \leq u < k+1$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\{ \frac{1-4x}{3} \} = -2 \quad (الف)$$

$$-2 \leq \frac{1-4x}{3} < -2+1 \xrightarrow{\times 3} -6 \leq 1-4x < -5 \xrightarrow{-1} -7 \leq -4x < -6 \xrightarrow{\div (-4)} \frac{7}{4} \geq x > 1 \rightarrow 1 < x \leq \frac{7}{4}$$

$$ب) \{ x^2 + x \} = -1$$

$$-1 \leq x^2 + x < 0 \rightarrow \begin{cases} -1 \leq x^2 + x \rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 & (1) \\ x^2 + x < 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 \times 1 = -3 \rightarrow x^2 + x + 1 > 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(2) x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \rightarrow x = 0, -1 \quad \frac{x}{x+1} + \frac{-1}{1-1} + \frac{0}{0} \rightarrow x \in (-1, 0)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -1 < x < 0$$

(۲) حاصل یک جزء صحیح همراه عددی صحیح است یعنی $[x] \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$(الف) \{ x \} - 7 = 0 \rightarrow \{ x \} = 7 \rightarrow [x] = \frac{7}{4}$$

معادله جواب ندارد

$[x^2]$ عدد صحیح است. ۱- هم از آن کم شود

ب) $x = [x^2] - 1$

حاصل عدد صحیحی شود. چون این عبارت با x برابر است پس x هم صحیح و عددی می‌دانیم توان ردیم که عدد صحیح، عددی صحیح است پس $[x^2] = x^2$

$$x^2 - 1 = x \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \rightarrow x = 3, -2$$

۳) اگر عدد صحیح k در n جزو صحیح جمع یا تفریق شده باشد می‌توان آن را از جزو صحیح

خارج کرد یعنی:

$$[n+k] = [n] + k$$

$$[n] + [-n] = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{Z} \\ -1 & n \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (۱۴)$$

مثال: اگر x صحیح نباشد، حاصل $[x^2-7] + [4-x^2]$ را به دست آوریم.

$$[x^2] - 7 + 4 + [-x^2] = [x^2] + [-x^2] - 3$$

$$x = \frac{1}{3} \rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \notin \mathbb{Z}$$

$$x = \sqrt{5} \rightarrow x^2 = 5 \in \mathbb{Z}$$

$$[x^2] + [-x^2] = \begin{cases} 0 & x^2 \in \mathbb{Z} \\ -1 & x^2 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$[x^2] + [-x^2] - 3 = \begin{cases} -3 & x^2 \in \mathbb{Z} \\ -4 & x^2 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۱۳ تابع جزء صحیح :

به توانجی که متغیرش داخل جزء صحیح باشد ، تابع جزء صحیح می گوئیم .

ساده ترین تابع جزء صحیح که به هر عدد جزء صحیحش را نسبت می دهد تابع

$$y = [x] \text{ است.}$$

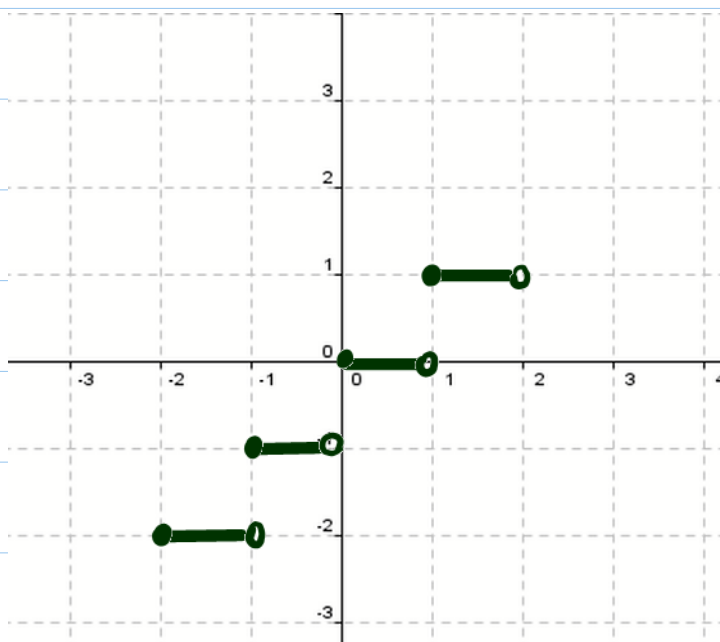
مثال : نمودار تابع $y = [x]$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم کنید .

پله اول : $-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = [x] = -2$

پله دوم : $-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = -1$

پله سوم : $0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$

پله چهارم : $1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1$



رسم نمودار توابع به صورت $f(x) = [ax] + k$ در یک بازه

ابتدا طول پله را از رابطه $\frac{1}{|a|}$ می یابیم. سپس از ابتدای بازه داده شده

پله ها را تشکیل داده و برای هر پله مقدار y را حساب می کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را در بازه داده شده رسم کنید.

$$f(x) = [2x] + 1 \quad [-1, 1]$$

$$\frac{1}{|a|} = \frac{1}{2}$$

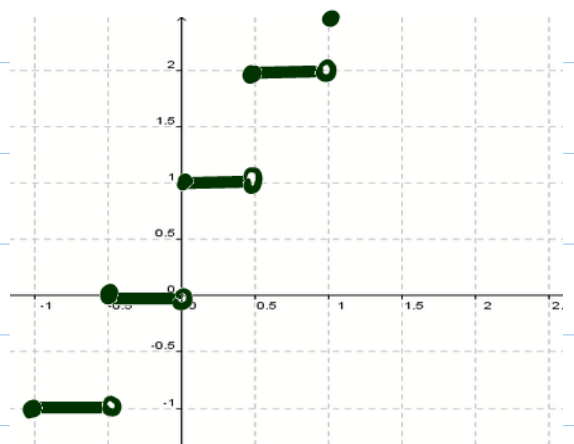
$$x^2 \rightarrow -1 \leq 2x < -\frac{1}{2} \rightarrow y = [2x] + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$x^2 \rightarrow -\frac{1}{2} \leq 2x < 0 \rightarrow y = -1 + 1 = 0$$

$$x^2 \rightarrow 0 \leq 2x < 1 \rightarrow y = 0 + 1 = 1$$

$$x^2 \rightarrow 1 \leq 2x < 2 \rightarrow y = 1 + 1 = 2$$

$$x = 1 \rightarrow y = [2 \times 1] + 1 = 2 + 1 = 3$$

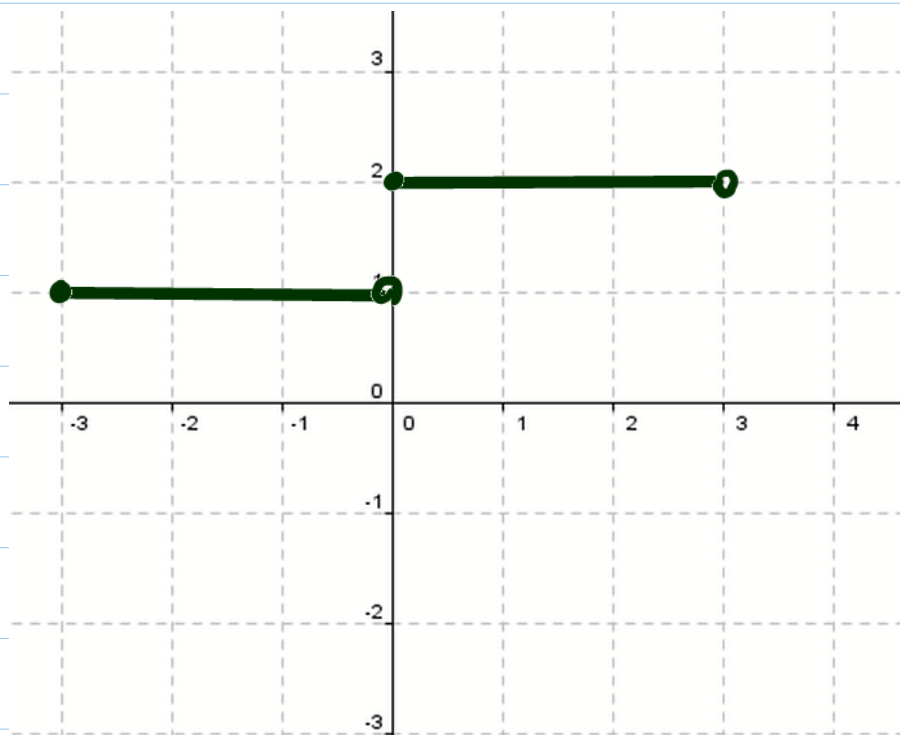


$$ب) \quad g(x) = \left[\frac{1}{3}x + 2 \right] = \left[\frac{1}{3}x \right] + 2 \quad [-3, 3)$$

$$\text{محول} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

$$\text{پہلے درجہ : } -3 \leq x < 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} -1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \rightarrow y = \left[\frac{1}{3}x \right] + 2 = -1 + 2 = 1$$

$$\text{دوسرے درجہ : } 0 \leq x < 3 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \rightarrow y = 0 + 2 = 2$$



ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل سوم: تابع

درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک به یک

جلسه سوم: صفحات ۵۷ تا ۶۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع یک به یک :

تابع f را یک به یک می گوئیم به شرطی که دو عضو متمایز از دامنه به دو عضو متمایز در برد

نظر شوند. به عبارت دیگر f یک به یک است هرگاه به ازای هر دو عضو دلخواه از

دامنه f عاقله x_1 و x_2 داشته باشیم :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

بدیهی یک به یک بودن تابع در نمایش های مختلف است :

۱) نمایش زوج مرتبی : زمانی یک به یک است که مولفه دوم مساری نداشته باشد. اگر

مولفه های دوم مساری داشت باید مولفه های اول هم برابر باشند.

$$f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 4), (5, 3), (4, 1)\}$$

$$g = \{(3, \frac{1}{4}), (9, 0), (4, 1), (5, 2)\}$$

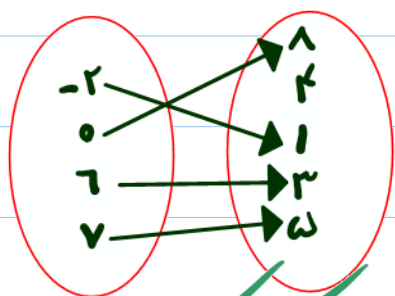
یک به یک نیست
یک به یک هست

مثال :

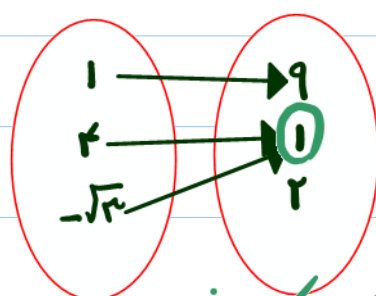
۲) نمایش نموداری : زمانی یک به یک است که به هر عضو دایره دوم (ست راست)

بیشتر از یک فلش وارد نشود.

مثال :



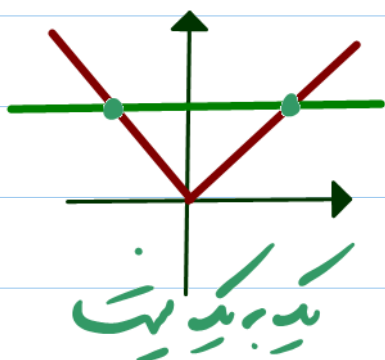
یک به یک نیست



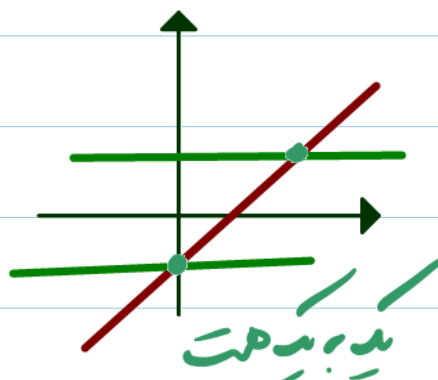
یک به یک نیست

۱۳) نمایش نموداری : زمانی یک به یک است که هر خط موازی محور y واحد اکثر در یک نقطه

نمودار را قطع کند.



یک به یک نیست



یک به یک هست

مثال :

۱۴) نمایش داشتنی : زمانی یک به یک است که هر خطی فقط مربوط به یک عددی باشد به عبارت دیگر
هر خطی نگه‌داری نداشته باشیم.



یک به یک نیست



یک به یک نیست

مثال :

۱۵) نمایش جبری (ضابطه‌ای) : زمانی یک به یک است که برای هر دو عضو x_1 و x_2 از دامنه f مانند

$x_1 \neq x_2$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

به عبارت دیگر یک به جای x در ضابطه تابع x_1 و یک بار x گذشته و باید متوجه شد
 قرار می دهیم. اگر به سادگی $x_1 = x_2$ رسیدیم نکته تابع یک به یک خواهر بود.

مثال:

الف) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + 1} = \sqrt{x_2^2 + 1} \xrightarrow{\text{مربع}} x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \xrightarrow{\sqrt{}} x_1 = x_2 \quad \text{یک به یک هست}$$

ب) $f(x) = x^2 - 4$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{}} |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \quad \text{یک به یک نیست}$$

مثال: اگر تابع: $f = \{(\underline{a^2}, \underline{1}), (\underline{4}, \underline{1}), (\underline{2a+b}, \underline{2}), (\underline{7}, \underline{2}), (a, b)\}$

یک به یک باشد a, b را بیابیم.

$$a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$$

$$2a + b = 7 \quad \begin{cases} a=2 \rightarrow 4+b=7 \rightarrow b=3 \\ a=-2 \rightarrow -4+b=7 \rightarrow b=11 \end{cases}$$

تجربہ یک به یک نیست $a=2, b=3 \rightarrow f = \{(4,1), (6,2), (2,2)\}$

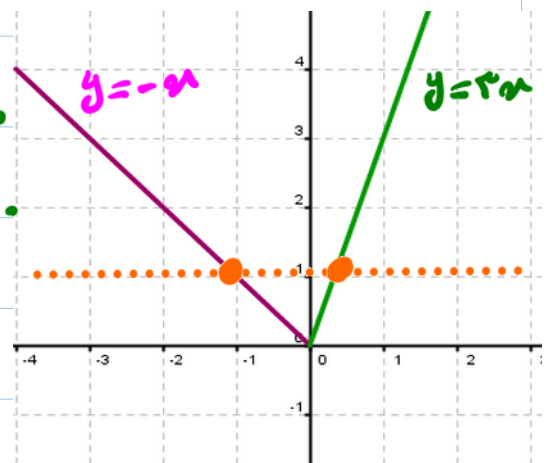
تجربہ یک به یک نیست $a=-2, b=11 \rightarrow f = \{(4,1), (6,2), (-2,11)\}$

مثال: کدام از توابع زیر یک به یک است؟ چرا؟

الف) $f(x) = x + 2|x|$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2x & x < 0 \\ x + 2x & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$$

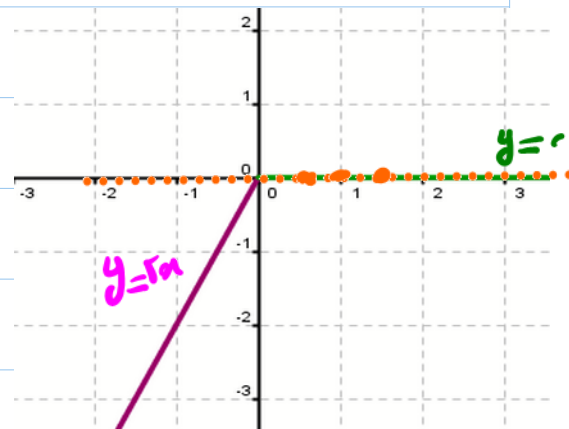
یک به یک نیست



ب) $f(x) = x - |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x - (-x) & x < 0 \\ x - x & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

یک به یک نیست



$$\text{1-)} f(x) = x^2 - 2x^2$$

$$x=0 \rightarrow y=0$$

$$x=2 \rightarrow y = 2^2 - 2(2)^2 = 4 - 8 = 0$$

تابع یک به یک نیست

$$\text{2-)} f(x) = x^2 + 3x$$

$$x=0 \rightarrow y=0$$

$$x=-3 \rightarrow y = 9 + 3(-3) = 0$$

تابع یک به یک نیست

$$\text{3-)} f(x) = \frac{[x] + [-x]}{x}$$

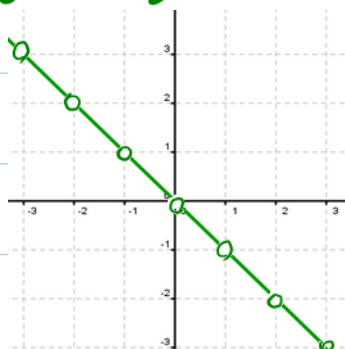
$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\text{2-)} f(x) = \frac{x}{[x] + [-x]}$$

$$D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$$[x] + [-x] = 0 \rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1 \rightarrow f(x) = \frac{x}{-1} \Rightarrow f(x) = -x$$

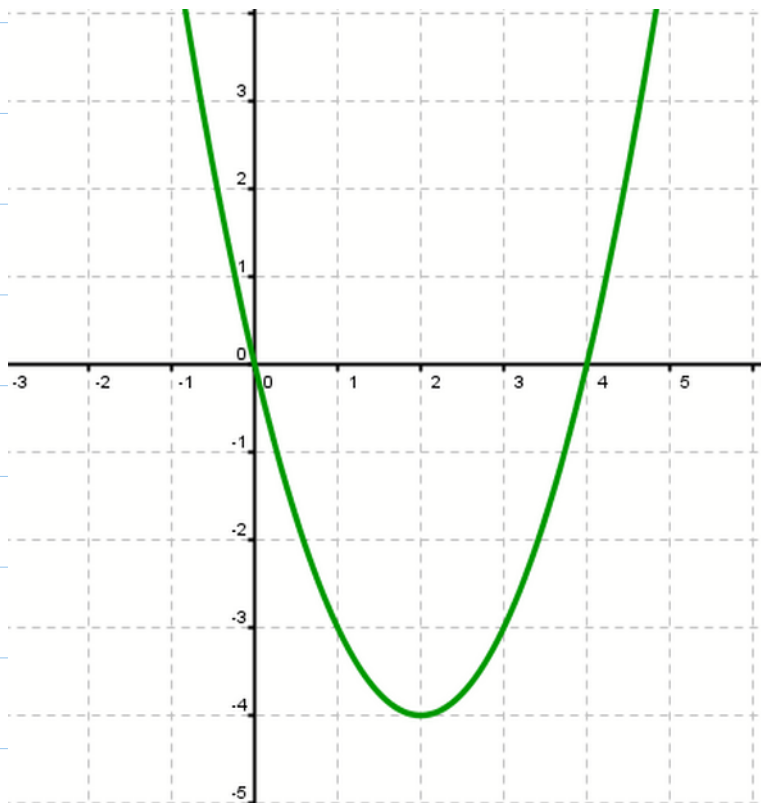


تابع یک به یک است.

نکته: می‌توانیم با محدود کردن دامنه، از یک تابع غیر یک به یک تابعی یک به یک بسازیم.

مثال: ابتدا ثابت کنید تابع $f(x) = x^2 - 4x$ یک به یک نیست. سپس با محدود کردن دامنه

آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید.



خط‌های مرزی محدودها

و صدور دارند که تابع را در

دو نقطه مقطع می‌کنند پس تابع

یک به یک نیست.

برای تبدیل به یک به یک

$$[0, 2] \cup [2, +\infty) \cup (-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$$

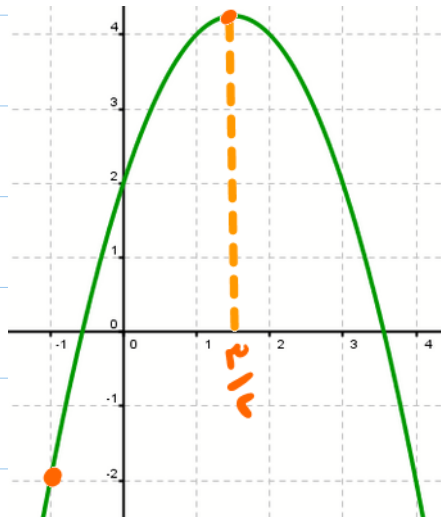
نکته: تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ با دامنه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یک به یک است.

مثال: تابع $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ روی بازه $[-1, a]$ یک به یک است. حد اکثر مقدار a

راش منحنی

حد در است ؟

$$a = -\frac{3}{2(-1)} = \frac{3}{2}$$



مثال:

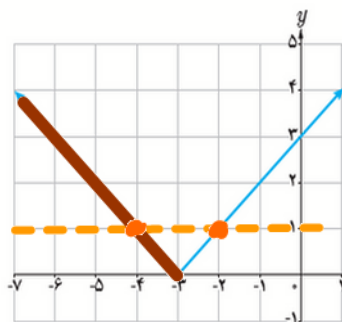
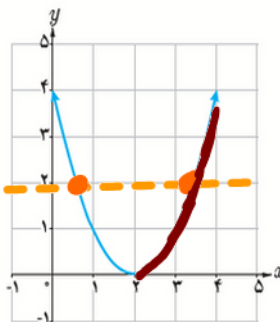
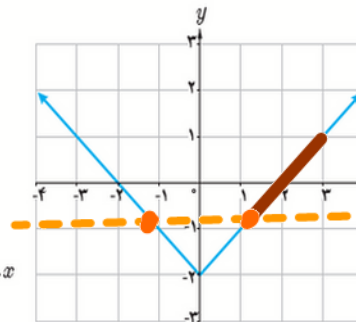
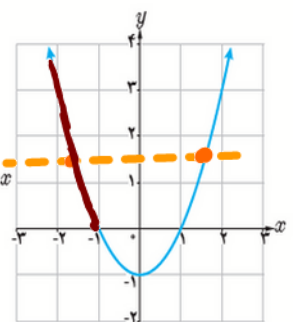
تابع های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y = |x+3|$

ب) $y = (x-2)^2$

پ) $y = |x|-2$

ت) $y = x^2 - 1$



$$D = (-\infty, -3]$$

$$D = [2, +\infty)$$

$$D = [1, 3]$$

$$D = (-\infty, -1)$$

وارون تابع :

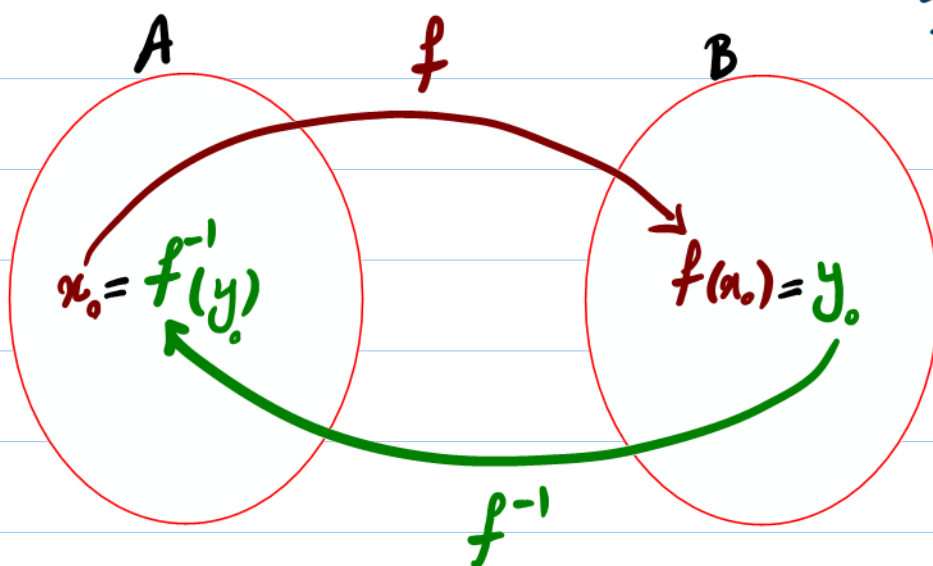
برای بدی تابع ، تابعی دیگر وجود دارد که عکس تابع اصلی مثل کرده و خودی را به ورودی تبدیل می کند . به چنین تابعی ، تابع معکوس یا تابع وارون می گویند .

تعریف : وارون تابع f را عباری است که در آن به ازای هر x در A ، به ورودی

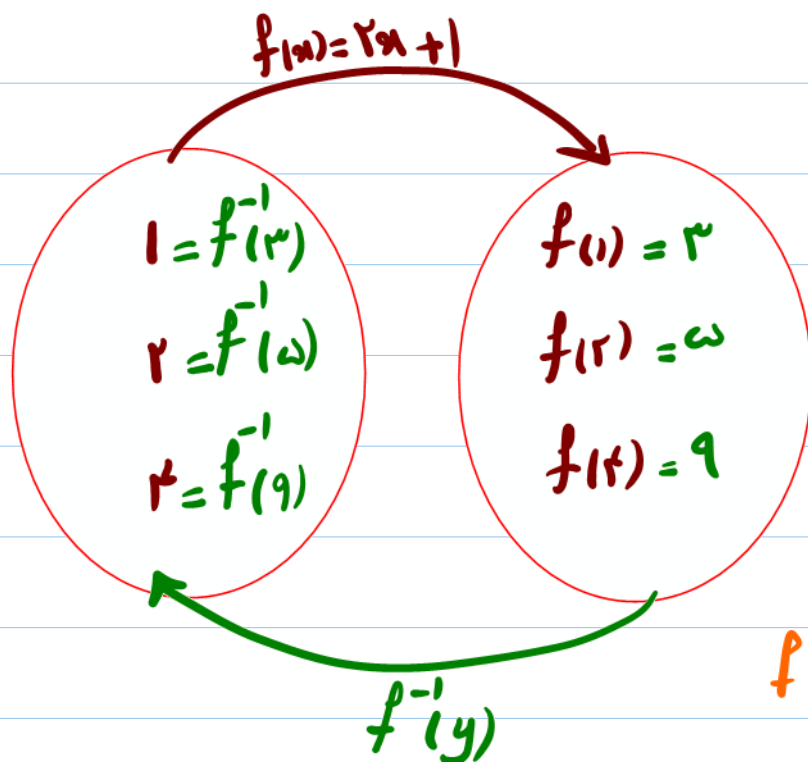
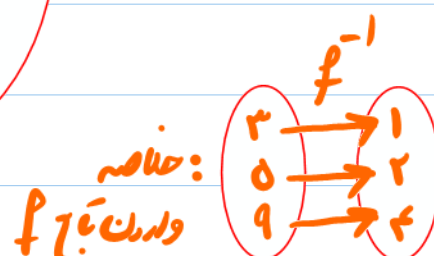
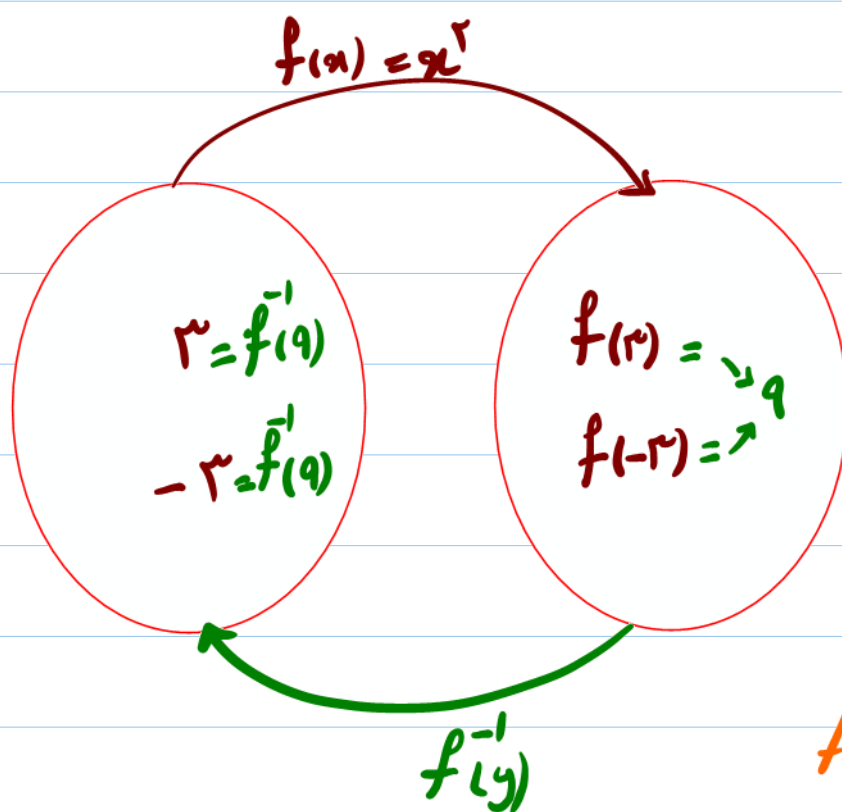
مربوطه می رسم . مثلاً اگر تابع f از دامنه A به B از بر ببرد ، وارون تابع f

که آن را با f^{-1} نشان می دهند عنصر y را به عنوان عکس از دامنه B می برد

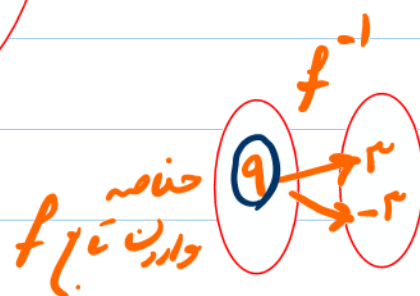
از معبره بر می گرد .



مثال :



دارد تابع فرد تابع نیست :



تابع وارون پذیر : اگر وارون تابع f ، تابع باشد، f را وارون پذیر می گوئیم.

نکته : تابع f وارون پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد

۱) محاسبه وارون تابع از روی نمایش زوج مرتبی :

گاهی است جای مولفه اول در درم را عوض کنیم : $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$

مثال: وارون پذیر است $f = \{(1, 4), (-1, 5), (2, 4)\}$ (الف)

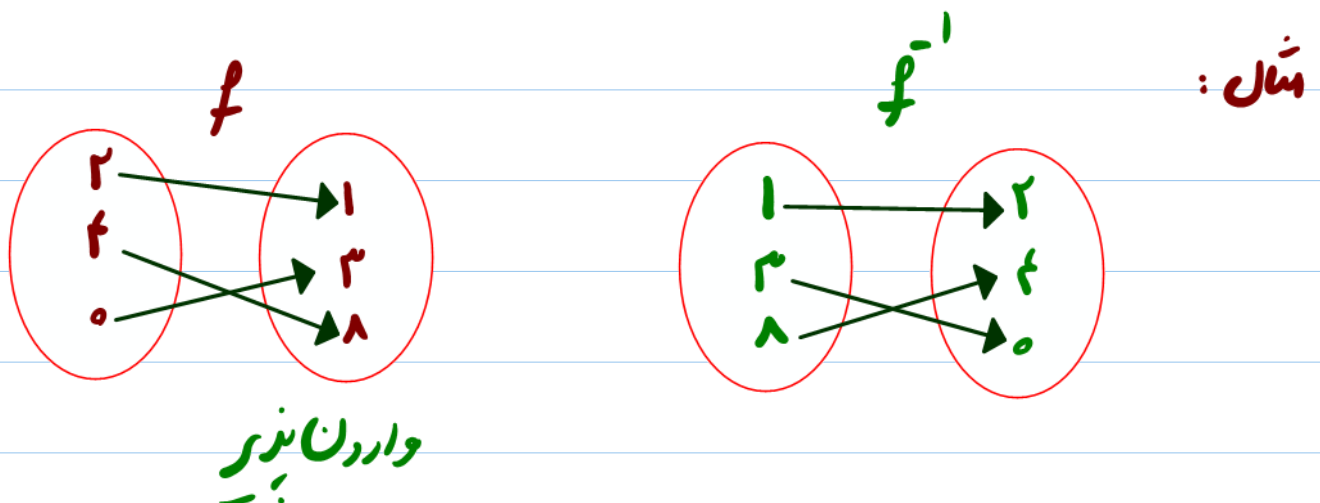
$$f^{-1} = \{(4, 1), (5, -1), (4, 2)\}$$

وارون پذیر نیست $g = \{(2, 3), (4, -1), (5, 2), (7, 3)\}$ (ب)

تابع نیست : $h = \{(3, 2), (-1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ (ج)

۲) محاسبه وارون تابع از روی نمایش نمودار دین :

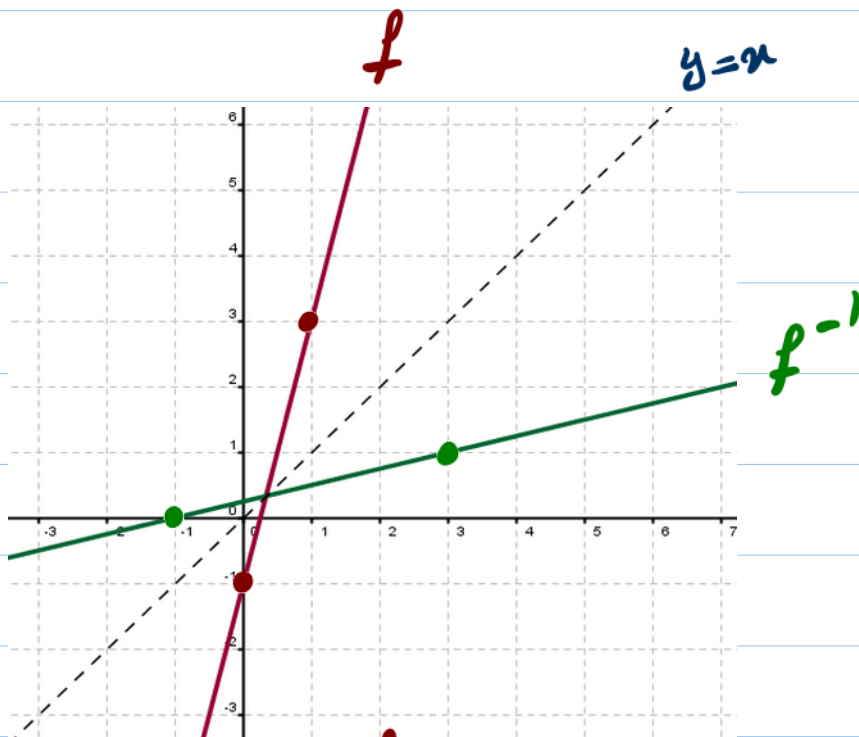
گاهی است جهت فلش ها یا جای دربره ها را عوض کنیم .



۱۳ محاسبه وارندن تابع از روی نمایش دستگاه مختصات:

کافی است قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ (نیم‌مازناص اول و سوم) بکشیم

زیرا دو نقطه (y, x) و (x, y) نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.



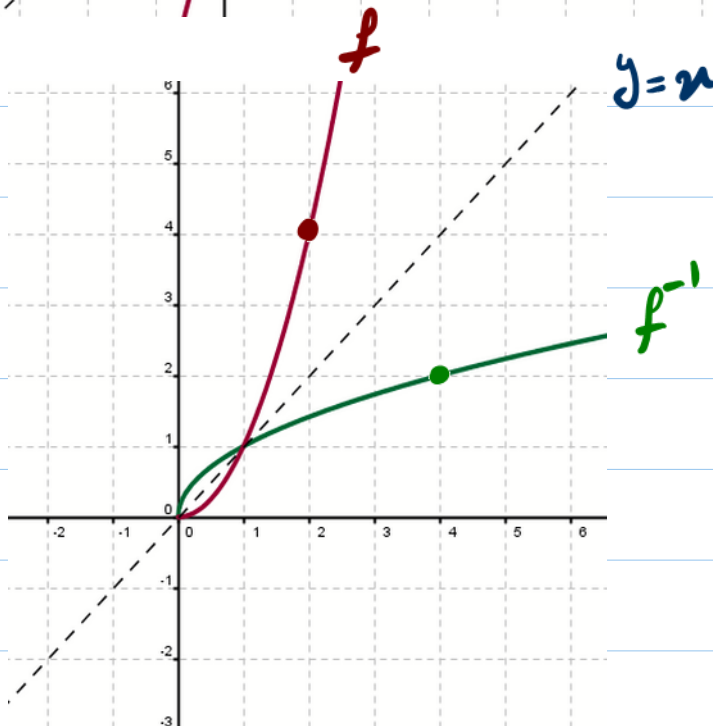
تذکره: جهت‌آب برای دقتی‌تر

شدن نمودار f چه نقطه

روی f پیدا کنیم جای x, y

را عرض کنیم تا نقطه روی f^{-1}

به دست آید.



چند نکته: اگر f وارون پذیر باشد آنگاه

۱- اگر $f(a)=b$ آنگاه $f^{-1}(b)=a$. به عبارت دیگر اگر نقطه (a,b)

روی منحنی تابع f باشد آنگاه نقطه (b,a) روی منحنی f^{-1} است.

$$۲- (f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$$

$$۳- D_{f^{-1}} = R_f \quad , \quad D_f = R_{f^{-1}}$$

۴- اگر f و f^{-1} در نقطه (a,b) مماس باشند آنگاه $f(a)=b$, $f^{-1}(b)=a$.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-9} + \sqrt{x+9}$ باشد مقدار $f(9) + f^{-1}(4)$ را بیابید.

$$f(9) = \sqrt{9-9} + \sqrt{9+9} = 0 + 3 = 3$$

$$f^{-1}(4) = 9$$

$$f(9) + f^{-1}(4) = 3 + 9 = 12$$

مثال: اگر $g = \{(1, 4), (2, 2), (1, 5), (0, -1)\}$, $f = \{(2, 2), (1, 3), (4, -1), (0, 6)\}$

، $f^{-1}(a) + \underline{g^{-1}(r)} = 4$ ، مقدار $g(a)$ ، ایدت دورید.

$$g(3) = 2 \rightarrow \underline{g^{-1}(2)} = 3$$

$$f^{-1}(a) + 3 = 4 \rightarrow f^{-1}(a) = 3 \rightarrow f(3) = a = 2$$

$$g(a) = g(2) = 4$$

مثال: سزدار تابع $f(x) = -x^2 + mx + n$ در نقطه $(-1, \frac{1}{3})$ سزدار تابع وارون را قطع کند.

مقدار m, n را بیابید.

$$f(-1) = \frac{1}{3} \rightarrow -\underbrace{(-1)^2}_{+1} - m + n = \frac{1}{3} \rightarrow -m + n = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}m + n = -1 \rightarrow \frac{1}{3}m + n = -1 + \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{3}m + n = \frac{-28}{9} \xrightarrow{\times 3} m + 3n = -\frac{28}{3} \quad (2)$$

$$\begin{cases} -m + n = -\frac{2}{3} \\ m + 3n = -\frac{28}{3} \end{cases} \rightarrow n = -\frac{22}{9} = -\frac{1}{9} \rightarrow -m - \frac{1}{9} = -\frac{2}{3} \rightarrow m = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$n = -\frac{22}{9}$

۴) یافتن معکوس تابع داشتن :

اگر تابع به صورت معکوس داشته باشد، مراحل زیر را انجام دهیم :

۱- به جای $f(x)$ ، y قرار دهیم .

۲- مانند یک معادله به آن نگاه می کنیم که می خردیم x را بیابیم حتی x را بر حسب

y بیابیم .

۳- به جای x ، $f^{-1}(x)$ در جای y ، x قرار دهیم .

مثال: داشتن توابع زیر را بیابید .

$$1) f(x) = 4x - 7$$

$$y = 4x - 7 \rightarrow y + 7 = 4x \xrightarrow{\div 4} \frac{y+7}{4} = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$$

$$2) f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

$$y = \frac{3x+2}{x-1} \rightarrow yx - y = 3x + 2 \rightarrow yx - 3x = 2 + y$$

$$x(y-2)=2+y \rightarrow x = \frac{2+y}{y-2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

$$3) y = 3 - \sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1} = 3-y \xrightarrow{\text{بهر توان ۲}} x+1 = (3-y)^2 \rightarrow x = (3-y)^2 - 1$$

$$f^{-1}(x) = (3-x)^2 - 1$$

$$x+1 = 9-6y+y^2 \rightarrow x = y^2-6y+8$$

مرت دوم

$$f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 8$$

تذکر: اگر تابعی یک به یک نباشد پس واردن پذیر نیست ولی می توانیم با محدود کردن دامنه

تابع دهن را یک به یک کنیم و وارزش را به دست آوریم.

مثال: با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 + 4x + 4$ ، ضابطه تابع وارده را بیابید.

$$D = (-\infty, -\frac{b}{2a}] = (-\infty, -\frac{4}{1}] = (-\infty, -2]$$

با این دامنه تابع یک به یک و در نتیجه وارده پذیر می شود.

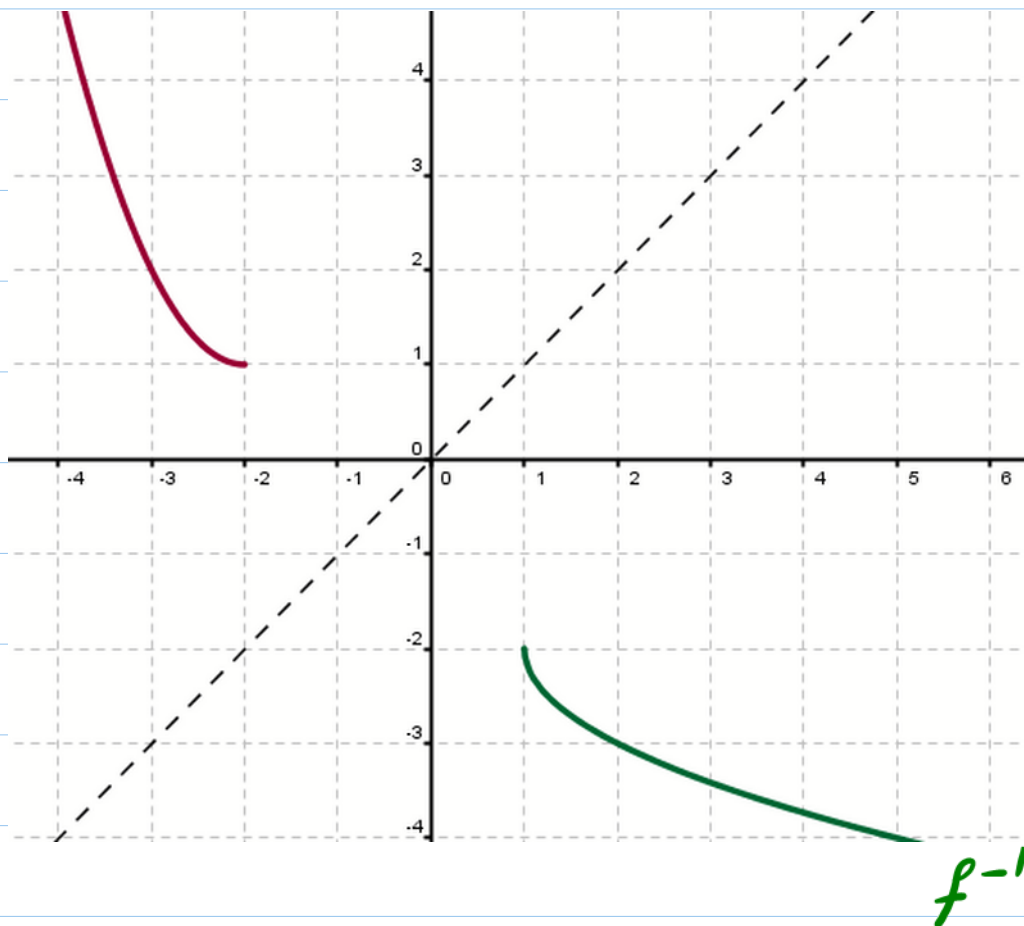
$$f(x) = \underbrace{x^r + r x + r + 1}_{x+r+1-\frac{r}{x}+1} = (x+r)^r + 1$$

$$y = (x+r)^r + 1 \rightarrow y-1 = (x+r)^r \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{y-1} = |x+r|$$

$$\sqrt{y-1} = -(x+r) \rightarrow \sqrt{y-1} = -x-r$$

$$x = -r - \sqrt{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = -r - \sqrt{x-1}$$

$f: x \leq -r$



مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x < 1 \\ 0x+1 & x \geq 1 \end{cases}$ داریم، f را بساز.

دامنه f^{-1} : $D_{f^{-1}} = R_f$

$$x < 1 \xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{x} < \sqrt{1} \xrightarrow{+1} \sqrt{x+1} < 1$$

$$x \geq 1 \xrightarrow{x \geq 0} 0x \geq 0 \xrightarrow{+1} 0x+1 \geq 1$$

پس f^{-1} است:

$$y = \sqrt{x+1} \rightarrow y-1 = \sqrt{x} \rightarrow x = \frac{y-1}{1} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{1}$$

$$y = 0x+1 \rightarrow y-1 = 0x \rightarrow x = \frac{y-1}{0} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{0}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1} & x < 1 \\ \frac{x-1}{0} & x \geq 1 \end{cases}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل سوم: تابع

درس سوم: اعمال جبری روی توابع

جلسه چهارم: صفحات ۶۵ تا ۶۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

احمال ردی توابع :

فرض کنید f و g در تابع باشند، در این صورت :

۱- جمع f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از

$$\text{این دامنه مشترک داریم: } (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

حاصل جمع در تابع f و g را با $f+g$ نمایش می دهیم

۲- تفاضل f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از

$$\text{این دامنه مشترک داریم: } (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

تفاضل در تابع f و g را با $f-g$ نمایش می دهیم

۳- ضرب f و g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g$ است و برای هر x از

$$\text{این دامنه مشترک داریم: } (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

حاصل ضرب در تابع f و g را با $f \times g$ نمایش می دهیم

۴- تقسیم f بر g : تابعی است که دامنه آن $D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

است و برای هر x از دامنه این تابع داریم: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

تقسیم تابع f بر تابع g را با $\frac{f}{g}$ نمایش می‌دهیم.

مثال (نوع مرتب):

اگر داشته باشیم: $f = \{(\underline{-2}, \underline{1}), (\underline{3}, \underline{0}), (\underline{1}, \underline{4}), (\underline{6}, \underline{0})\}$

مطلوب است: $g = \{(\underline{1}, \underline{9}), (\underline{0}, \underline{0}), (\underline{3}, \underline{7}), (\underline{-2}, \underline{2}), (\underline{6}, \underline{\sqrt{2}})\}$

$$D_f \cap D_g = \{1, 3, -2, 6\}$$

الف) $f + g = \{(1, 13), (3, 12), (-2, 3), (6, \sqrt{2})\}$

ب) $f \times g = \{(1, 36), (3, 35), (-2, 2), (6, 0)\}$

ج) $\frac{f}{g} = \{(1, \frac{1}{9}), (3, \frac{0}{7}), (-2, \frac{1}{2}), (6, 0)\}$

د) $\frac{g}{f} = \{(1, \frac{9}{1}), (3, \frac{7}{0}), (-2, \frac{2}{1}), (6, \frac{\sqrt{2}}{0})\}$

در y ها ضربه می‌خورند

ه) $2f - 3g$

$$2f = \{(-2, 2), (3, 1), (1, 1), (4, 0)\}$$

$$3g = \{(1, 27), (0, 0), (3, 21), (-2, 6), (4, 24)\}$$

$$2f - 3g = \{(-2, -4), (3, -11), (1, -19), (6, -24)\}$$

مسأل (ضابطه جبری)

دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید. مطلوب است:

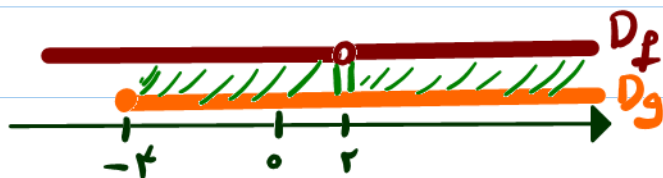
الف) دامنه و ضابطه توابع $f-g$ و $\frac{f}{g}$.

ب) محاسبه مقادیر $(f+g)(0)$ ، $(\frac{g}{f})(-3)$ ، $(4f - \frac{1}{f}g)(5)$.

الف) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+1}{x-2} - \sqrt{x+4}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D_g : x+4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4 \rightarrow D_g = [-4, +\infty)$$



$$D_f \cap D_g = [-4, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$D_{f-g} = [-4, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{x+1}{x-2}}{\sqrt{x+4}} = \frac{x+1}{(x-2)(\sqrt{x+4})}$$

از رانده مشترک خارج می‌کنیم $\rightarrow n = -4 \rightarrow \sqrt{n+4} = 0 \rightarrow g(n) = 0$

$$D_{\frac{f}{g}} = (-4, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$ب) (f+g)(0) = f(0) + g(0) = \frac{0+1}{0-2} + \sqrt{0+4} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(-3) = \frac{g(-3)}{f(-3)} = \frac{\sqrt{-3+4}}{\frac{-3+1}{-3-2}} = \frac{1}{\frac{-2}{-5}} = \frac{5}{2}$$

$$(4f - \frac{1}{2}g)(0) = 4f(0) - \frac{1}{2}g(0) = 4 \times \frac{0+1}{0-2} - \frac{1}{2}\sqrt{0+4}$$

$$= 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 = 8 - \frac{1}{2} = \frac{16-1}{2} = \frac{15}{2}$$

مثال: (زوج مرتب و ضابطه جبری)

اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ ، $g = \{(3, 1), (1, 7), (-4, 4), (0, 6)\}$ باشند،

توابع $f+g$ ، $\frac{g}{f}$ را بیابید.

$$D_g = \{3, 1, -4, 0\}$$

$$D_f: x^2 - 2x \geq 0 \quad \xrightarrow{\text{عبارت ۲، ۰، ۶}}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ x^2 - 2x & + & - & + \end{array}$$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$D_f \cap D_g = \{1, -1, 0\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{9-x} + 1 = \sqrt{x} + 1$$

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = \sqrt{1+1} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 1 = 1$$

$$f+g = \{(1, 1+\sqrt{1}), (-1, 1+\sqrt{2}), (0, 1)\}$$

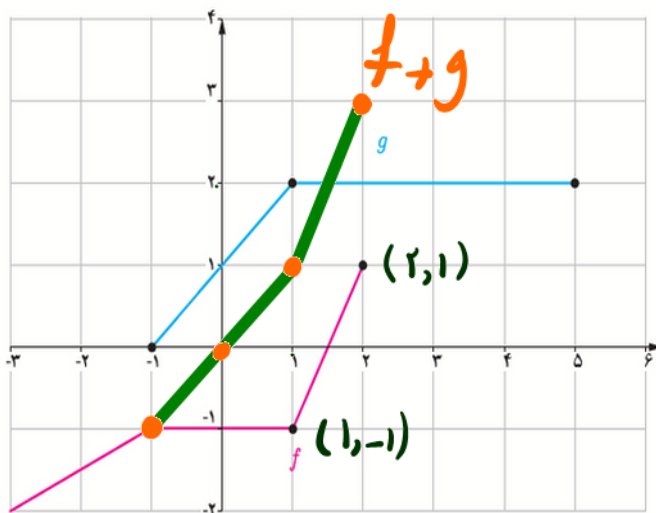
$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(-1) = \frac{g(-1)}{f(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{0}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{ \left(1, \frac{1}{\sqrt{1}}\right), \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

مثال: (منرداری)



نمودارهای توابع f و g داده شده است.
 الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به دست آورید.
 ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.
 پ) ضابطه توابع $f+g$ و f ، g را به دست آورید.
 ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با
 (ب) مقایسه کنید.

$$\text{الف) } (f+g)(1) = f(1) + g(1) = -1 + 2 = 1$$

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -1 + 0 = -1$$

$$\text{ب) } D_f = [-1, 5] \quad D_g = (-\infty, 2]$$

$$D_f \cap D_g = [-1, 2] \quad \text{این نقطه از این راننه تابع داریم می کشیم}$$

$$(f+g)(-1) = -1 \quad , \quad (f+g)(0) = f(0) + g(0) = -1 + 1 = 0$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 1 + 2 = 3 \quad , \quad (f+g)(1) = 1$$

$$\text{این نقاط درون } f+g \text{ هستند: } (-1, -1), (0, 0), (2, 3), (1, 1)$$

۲۰

در دامنه $x \in [-1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-3 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$m = \frac{1+1}{2} = 2$$

$$y-1 = 2(x-2)$$

$$y-1 = 2x-4$$

$$y = 2x-3$$

در دامنه $x \in [1, 2]$

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} x+1-1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-3+2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} x & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

ن) بنده هر دو یکی است و هر دو در یک خط راست قرار می‌گیرند.

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: واحدهای اندازه گیری زاویه

جلسه اول: صفحات ۷۲ تا ۷۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

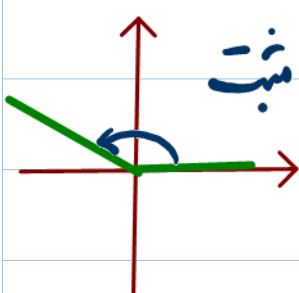
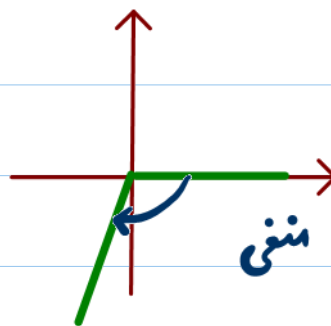
گروه ریاضی
استان همدان

زاویه و موقعیت استاندارد :

زاویه از یک رأس و دو ضلع تشکیل شده است. اگر رأس زاویه روی مبدأ مختصات

و ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور x باشد می‌گوئیم زاویه در موقعیت استاندارد

مشخص شده است. اگر زاویه مثبت باشد چار ساعتگرد و اگر منفی باشد ساعتگرد می‌چرخیم.

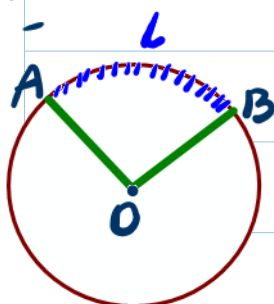


چندتریف در دایره :

۱) زاویه مرکزی : زاویه ای است که رأس آن روی مرکز دایره است و اضلاع آن

شعاع دایره اند.

۲) کمان : هر دو نقطه روی دایره آن را به دو قسمت تقسیم می‌کنند به جز آن که می‌گوئیم.



و به اندازه ای از محیط دایره که جدا کرده اند. طول کمان می‌گوئیم.

$$\widehat{AB} = L$$

۳) اندازه کمان: اندازه کمان همان زاویه مرکزی مقابل به آن است: $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$

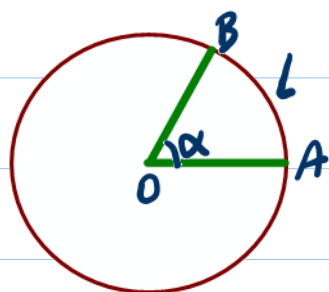
واحدهای اندازه گیری زاویه:

الف) درجه: اگر خط را بره را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، زاویه مرکزی مقابل

به هر کمان ۱ است.

اگر در دایره $C(0, r)$ داشته باشیم $\widehat{AOB} = \alpha$ و طول کمان AB

را L بگیریم نگاه:

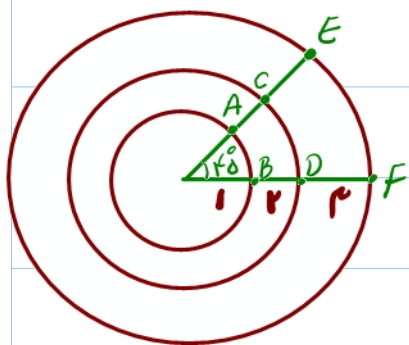


$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{L}{2\pi r}$$

$$L = \frac{\alpha}{360} (2\pi r) = \frac{\alpha}{180} \pi r$$

مثال: طول کمان مقابل به زاویه ۴۵ در دایره‌ای به شعاع ۱۰، ۲ را حساب کنید.



$$\widehat{AB} = \frac{45}{180} \pi \times 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\widehat{CD} = \frac{45}{180} \pi \times 2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{EF} = \frac{45}{180} \pi \times 3 = \frac{3\pi}{4}$$

مثال: در مثال قبلی نسبت طول کمان به ضلع زاویه مرکزی برابر است.

$$\frac{\widehat{AB}}{r} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$$

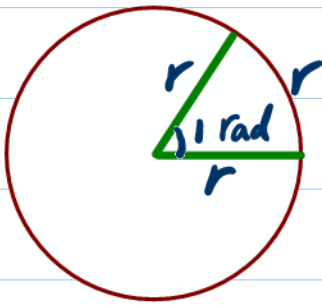
$$\frac{\widehat{CD}}{r} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\widehat{EF}}{r} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

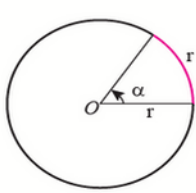
نتیجه: نسبت طول کمان به رادیوس زاویه مرکزی به ضلع زاویه مرکزی و به مقدار ثابت است.

نتایج است. از این مقدار ثابت برای بیان زاویه به واحد رادیان استفاده می‌کنیم.

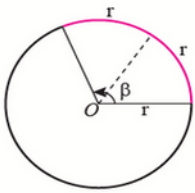
نکته: یک دایره، اندازه زاویه مرکزی مقابل کمانی است که طول آن برابر با رادیان است.



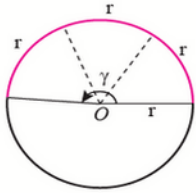
شعاع دایره است. یک دایره تقریباً ۵۷٫۲۹ است.



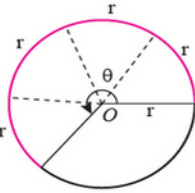
$$\alpha = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad}$$



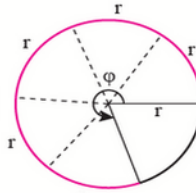
$$\beta = \frac{2r}{r} = 2 \text{ rad}$$



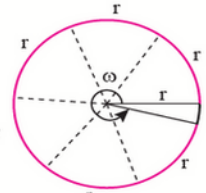
$$\gamma = \frac{3r}{r} = 3 \text{ rad}$$



$$\theta = \frac{4r}{r} = 4 \text{ rad}$$



$$\phi = \frac{5r}{r} = 5 \text{ rad}$$



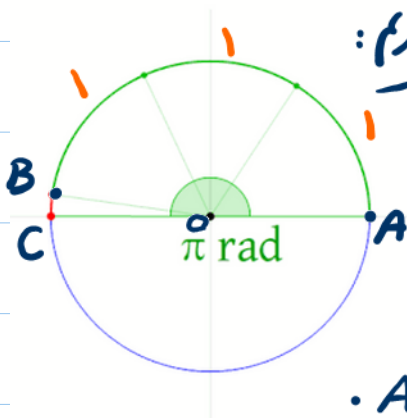
$$\omega = \frac{6r}{r} = 6 \text{ rad}$$

تبدیل واحدهای زاویه:

طول کمان درجه درجه زاویه ۱۸۰، نصف محیط دایره است پس: رادیان است. π رادیان است.

$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

به صورت دیگری نیز می‌توانیم به این نتیجه برسیم. دایره ای به شعاع واحد داریم:



بنابراین: $\hat{AOB} = \pi \text{ rad}$

زاویه $\hat{AOC}$ یک زاویه نیم‌صفحه است پس $\hat{AOC} = \pi$.

جواب است بدانید از BA ، قوس AC ، قوس AB معروف π است پس:

$$\hat{AOC} = \pi \text{ rad}$$

پس نتیجه می گیریم π رادیان 180° است.

نتیجه: اگر D اندازه زاویه بر حسب درجه و R اندازه زاویه بر حسب رادیان باشد داریم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

با استفاده از تناسب بالا:

(الف) تبدیل رادیان به درجه:

$$D = R \times \frac{180}{\pi}$$

(ب) تبدیل درجه به رادیان

$$R = D \times \frac{\pi}{180}$$

مثال: زوایای زیر را به رادیان تبدیل کنید.

$$1) \quad 30^\circ \quad R = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$2) \quad 45^\circ \quad R = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

$$3) \quad 60^\circ \quad R = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$f) 27.^\circ \quad R = 27. \times \frac{\pi}{180.} = \frac{3\pi}{2}$$

$$o) 36.^\circ \quad R = 36. \times \frac{\pi}{180.} = 2\pi$$

$$g) 135.^\circ \quad R = 135 \times \frac{\pi}{180.} = \frac{3\pi}{2}$$

$$v) 21.^\circ \quad R = 21. \times \frac{\pi}{180.} = \frac{7\pi}{6}$$

$$n) 33.^\circ \quad R = 33. \times \frac{\pi}{180.} = 11 \frac{\pi}{6}$$

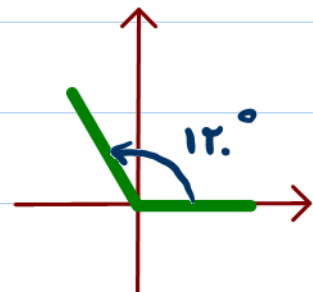
$$q) 72.^\circ \quad R = 72 \times \frac{\pi}{180.} = 2 \frac{\pi}{5}$$

$$i.) 4.^\circ \quad R = 40 \times \frac{\pi}{180.} = \frac{\pi}{9}$$

مثال: زوایای زیر را به درجه تبدیل کنید و درجه‌های آن را به رadian نیز بنویسید.

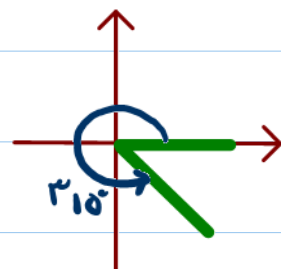
$$1) \frac{2\pi}{3} \quad D = \frac{2\pi}{3} \times \frac{180.}{\pi} = 120.^\circ$$

نیم دایره



$$2) \frac{7\pi}{6} \quad D = \frac{7\pi}{6} \times \frac{180.}{\pi} = 210.^\circ$$

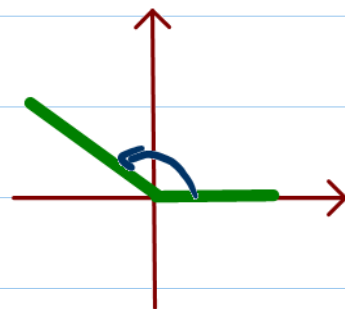
نیم دایره



$$۳) \frac{4\pi}{5}$$

$$D = \frac{4\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = 144^\circ$$

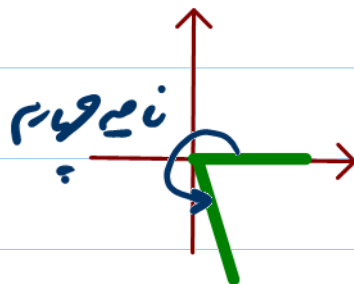
نصف دوم



$$۴) 5 \text{ rad}$$

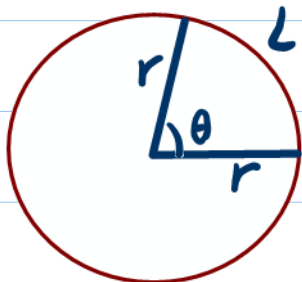
$$D = 5 \times \frac{180}{\pi} = \frac{900}{\pi}$$

$$D = \frac{900}{\pi} \approx 286.48^\circ$$



نکته: اگر در دایره از شعاع ۲ اندازه ای زاویه مرکزی بجهت رادیان θ باشد

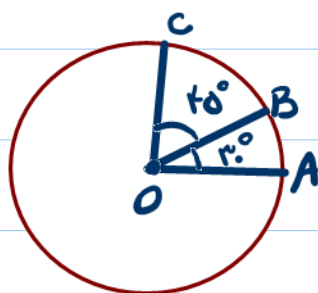
طول کمان در دایره برابر با L از رابطه زیر بدست می آید:



$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow L = r\theta$$

رادیان

مثال: در شکل زیر طول کمان AB برابر 4π است. طول کمان BC را بیابید.



$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = 4\pi \\ \theta_1 = \widehat{AB} = 30^\circ \xrightarrow{\text{رادیان}} \frac{\pi}{6} \\ \theta_2 = \widehat{BC} = 40^\circ \xrightarrow{\text{رادیان}} \frac{\pi}{9} \\ \overline{BC} = ? \end{array} \right.$$

$$\widehat{AB} = r\theta_i \rightarrow 4\pi = r \times \frac{\pi}{4} \times \frac{4}{\pi} \rightarrow r = 4\pi \times \frac{4}{\pi} = 16$$

$$\widehat{BC} = r\theta_r \rightarrow \widehat{BC} = 16 \times \frac{\pi}{4} = 4\pi$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های

مثلثاتی

قسمت اول

جلسه دوم: صفحات ۷۷ تا ۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

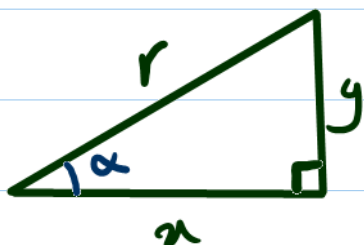
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری:

نسبت های مثلثاتی:



$$1) \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}}$$

$$2) \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$$

$$3) \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha}$$

$$4) \cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha}$$

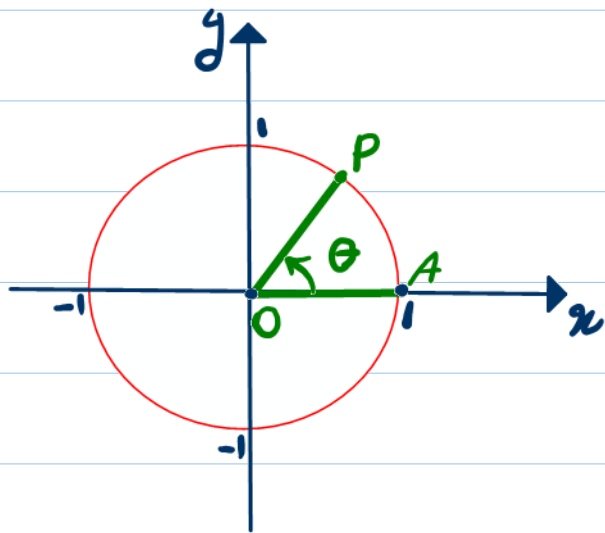
تعریف دایره مثلثاتی: دایره ای به شعاع یک واحد که مرکز آن مبدأ مختصات است.

زاویه در دایره مثلثاتی: ضلع ابتدایی هر زاویه روی قسمت مثبت محور x ها واقع است و ضلع

دوم حرکت می کند (این ضلع خط دایره را قطع می کند) اگر ضلع دوم در خلاف

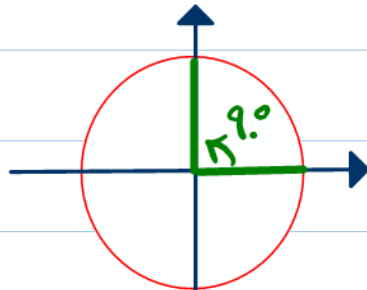
جهت عقربه های ساعت حرکت کند زاویه مثبت می سازد و اگر در جهت

عقربه های ساعت حرکت کند زاویه منفی می سازد.

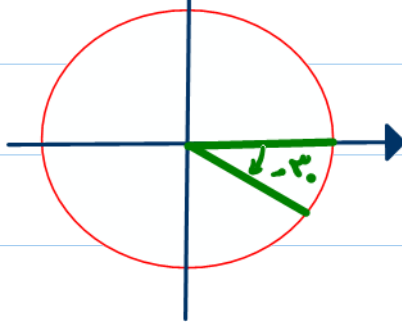


مثال: زوایای زیر را در دایره شش ضلعی مشخص کنید.

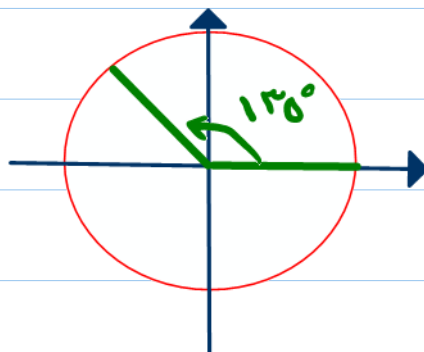
الف) 9°



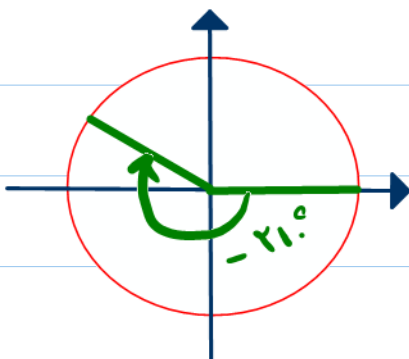
ب) -3°



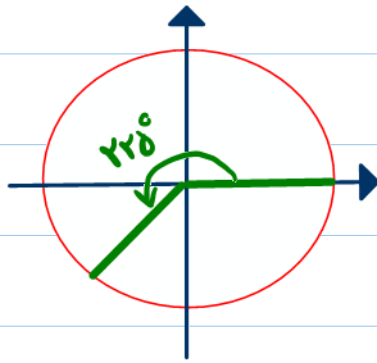
ج) 135°



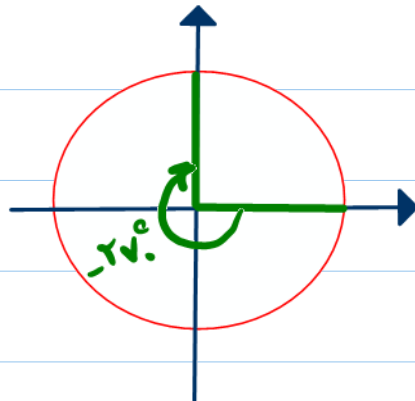
د) -21°



ث) 225°



ج) -27°

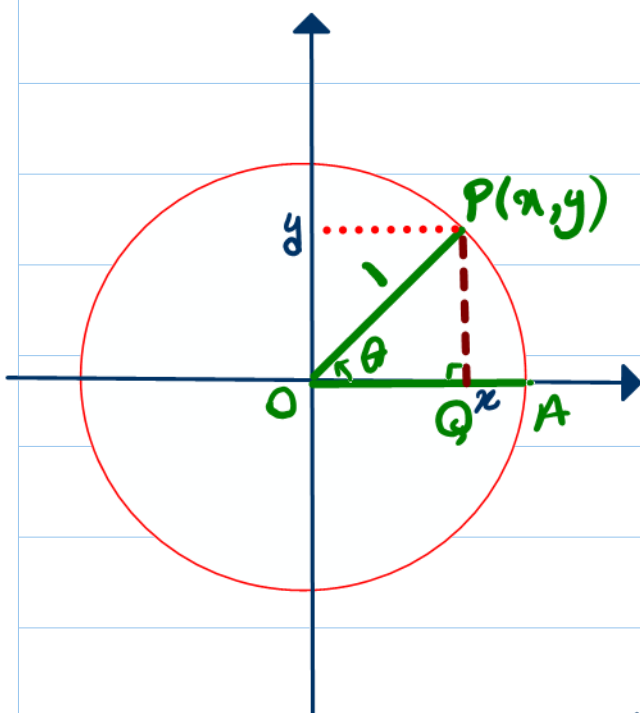


نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی :

زاویه θ را دایره مثلثاتی در نظر بگیرید.

اگر ضلع دوم این زاویه محط دایره را

در نقطه $P(x, y)$ قطع کند و از این نقطه



به محور x ها عمود کنیم تا این محور را در Q قطع کند، مثلث قائم‌الزاویه $\triangle OPQ$ بدست

می‌آید. حال داریم :

$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin \theta$$

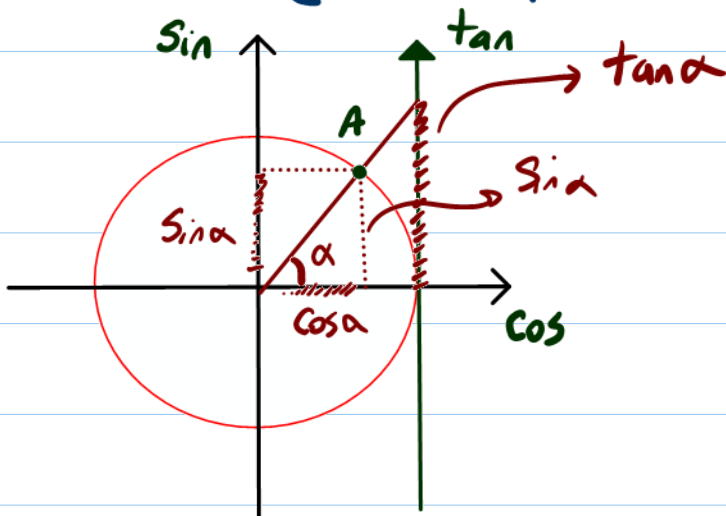
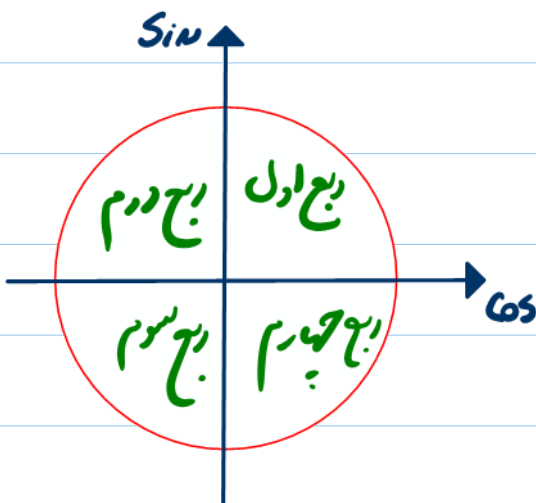
$$\cos \theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \theta$$

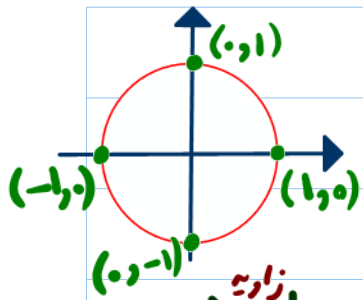
$$\cot \theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \cot \theta$$

تواردار: در دایره مثلثاتی محور x ما را $\cos$ ها، محور y ما را $\sin$ ها می نامیم.

این دو محور به هم، دایره مثلثاتی را به چهار ناحیه یا ربع مثلثاتی تقسیم می کنند.

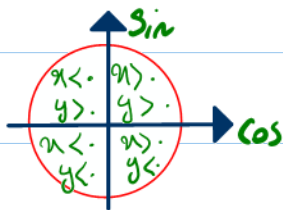


$0^\circ < \theta < 90^\circ$	:	θ در ربع اول
$90^\circ < \theta < 180^\circ$	:	θ در ربع دوم
$180^\circ < \theta < 270^\circ$	:	θ در ربع سوم
$270^\circ < \theta < 360^\circ$	:	θ در ربع چهارم



جدول نسبت های مثلثاتی زوایای مرزی 0° ، 9° ، 18° ، 27° ، 36°

نسبت \ زاویه θ	0°	9°	18°	27°	36°
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot \theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده



* جدول علامت های نسبت های مثلثاتی در نواحی چهارخانه

نسبت \ ناحیه	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin$	+	+	-	-
$\cos$	+	-	-	+
$\tan$	+	-	+	-
$\cot$	+	-	+	-

نکته: $\sin$ و $\cos$ برای هر زاویه دایره واحدی بین -1 تا 1 هستند.

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

* جدول نبت های مثلثاتی زوایای ۳۰، ۴۵، ۶۰ درجه

زاویه نبت	۳۰	۴۵	۶۰
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

کمان های هم خانواره :

زاویه حاده $0 < \alpha < 90^\circ$

نوع اول : برای بدست آوردن نبت های مثلثاتی زوایای به صورت $k\pi \pm \alpha$

اگر k زوج باشد $k\pi$ را حذف می کنیم و اگر k فرد باشد، k را حذف

می کنیم (غنی $\pi \pm \alpha$) . حال ناحیه مربوط به زاویه را یافته و نبت را می بینیم .

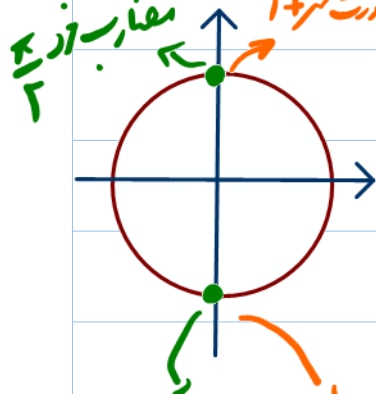
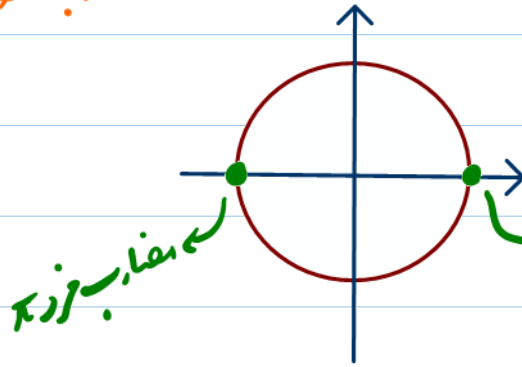
نوع دوم : برای بدست آوردن نبت های مثلثاتی زوایای به صورت $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$

غنی مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ ، استر ناحیه و کم است نبت را مشخص می کنیم . در آخر

اسم نبت را عوض می کنیم غنی به جای $\sin$ ، $\cos$ و برعکس و به جای $\tan$ ،

$\cos$ در بخش قرار هم دهنده را می بینیم.

مغرب $\pm$ صورت کمره ۱

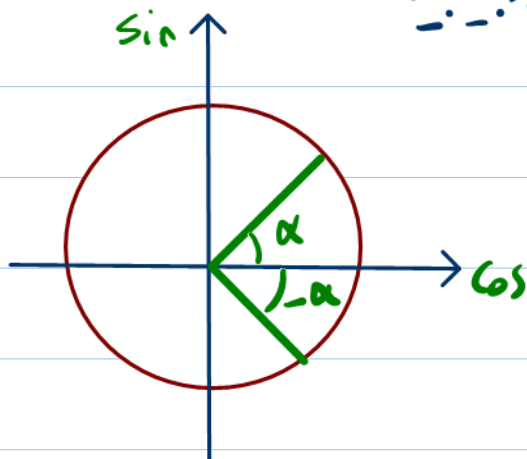


مغرب زوج π

مغرب زوج π

مغرب $\pm$ = صورت کمره ۱

مثال: نسبت متضاد زاویه α - (قرینه زاویه) را بیابید.



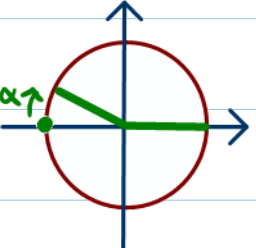
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

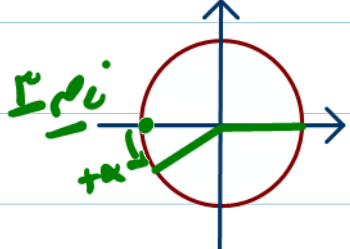
$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

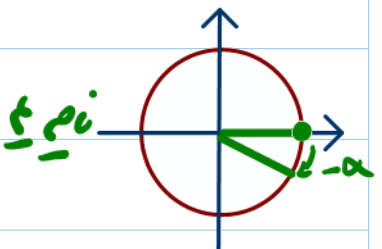
$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

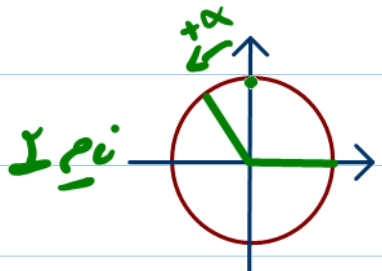
$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

مثال: سترهای مشتقاتی زیر را بحسب α بنویسید.

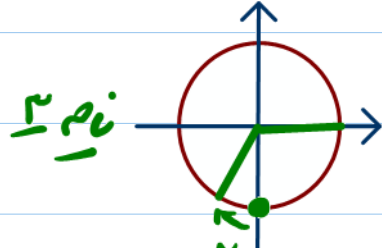
1) $\sin(2\pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ 

2) $\cos(2\pi + \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ 

3) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$ 

4) $\sin\left(\frac{20\pi}{7} + \alpha\right) = \cos \alpha$ 

$20+1=21 \neq 2k$

5) $\tan\left(\frac{11\pi}{7} - \alpha\right) = \cot \alpha$ 

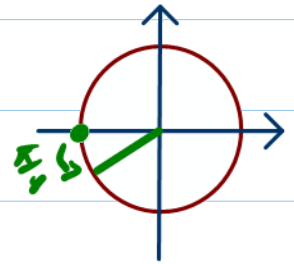
$11+1=12 = 2k$

نکته: اگر زوایا به صورت مجموع یا تفاضل با $k\pi$ یا $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ داده نشوند باید

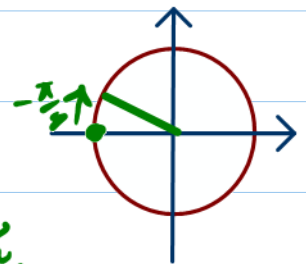
باشکستن زاویه آنها را به یکی از دو نوع گفته شده در آوریم.

مثال: مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را بیابید.

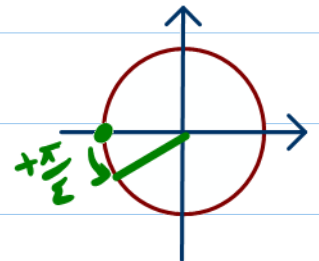
$$1) \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$



$$2) \tan(-150^\circ) = -\tan 150^\circ = -\tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -(-\tan \frac{\pi}{6}) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

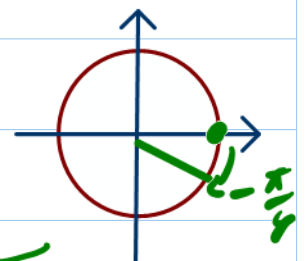


$$3) \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



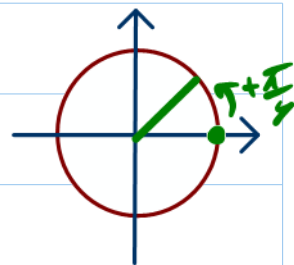
$$4) \cot 330^\circ = \cot(360^\circ - 30^\circ) = \cot(2\pi - \frac{\pi}{6})$$

$$= \cot(-\frac{\pi}{6}) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$



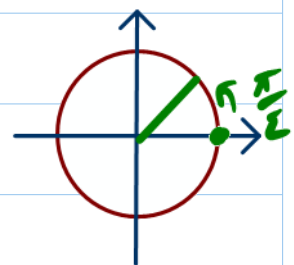
$$0) \sin \frac{13\pi}{4} = \sin \left(\frac{12\pi + \pi}{4} \right) = \sin \left(3\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



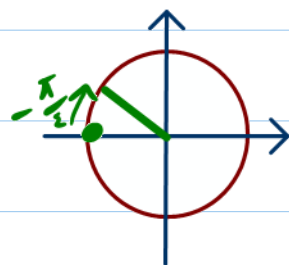
$$1) \cos \left(-\frac{17\pi}{4} \right) = \cos \frac{17\pi}{4} = \cos \frac{16\pi + \pi}{4}$$

$$= \cos \left(4\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



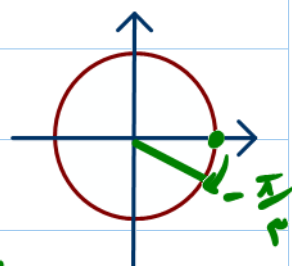
$$2) \tan \frac{5\pi}{4} = \tan \frac{4\pi + \pi}{4} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \tan \frac{\pi}{4} = 1$$



$$3) \sin \frac{7\pi}{4} = \sin \frac{6\pi + \pi}{4} = \sin \left(1\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

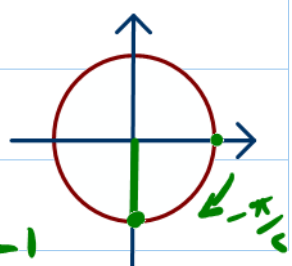


نشان: حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید:

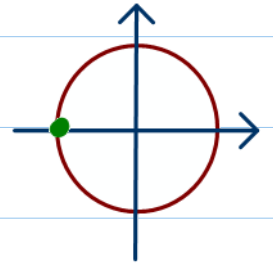
$$1) \sin 63^\circ + \tan (-54^\circ) = 2 \times 14.$$

$$\sin 42^\circ = \sin (72^\circ - 30^\circ) = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$



$$\tan(-0^\circ) = -\tan(0^\circ) = -\tan(1 \times 180^\circ) = -\tan(\pi) = 0$$



$$\sin \omega = -1 + 0 = -1$$

$$2) \cos(-72^\circ) + \cot(-4^\circ) + \tan 72^\circ - \tan(-4^\circ) =$$

$$\cos(-72^\circ) = \cos 72^\circ = \cos(1 \times 180^\circ) = \cos \pi = 1$$

$$\cot(-4^\circ) = -\cot 4^\circ = -\cot(180^\circ + 4^\circ) = -\cot(\pi + \frac{\pi}{180})$$

$$= -\cot(\pi + \frac{\pi}{180}) = -\cot \frac{\pi}{180} = -\frac{\sqrt{180}}{180}$$

$$\tan 72^\circ = \tan \pi = 0$$

$$\tan(-4^\circ) = -\tan 4^\circ = -\tan(\pi + \frac{\pi}{180}) = -\tan \frac{\pi}{180} = -\frac{\sqrt{180}}{180}$$

$$\sin \omega = 1 - \frac{\sqrt{180}}{180} + 0 + \frac{\sqrt{180}}{180} = \frac{180 - \sqrt{180} + \sqrt{180}}{180} = \frac{180}{180}$$

$$3) \sin(\frac{20\pi}{3}) - \cos(\frac{23\pi}{4}) =$$

$$\sin(\frac{20\pi}{3}) = \sin \frac{14\pi + \pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{23\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{16\pi - \pi}{8}\right) = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{2}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$$

$$f) \frac{\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} =$$

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\frac{6\pi - \pi}{8} = \sin\pi - \frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{4\pi - \pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\tan\frac{4\pi}{3} = -\tan\frac{4\pi + \pi}{3} = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \omega = \frac{\sqrt{\frac{2}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}}{-\sqrt{\frac{2}{2}} - \sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{-\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های

مثلثاتی

قسمت دوم

جلسه سوم: صفحات ۷۷ تا ۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

باتوجه به کجی حبه قبل در باره همان های هم خانواده گفتیم، نتایج زیر را برای زوایای متمم و

مکمل داریم:

الف) دوزادیه متمم:

می دانیم هرگاه مجموع دوزادیه 90° یا $\frac{\pi}{2}$ شود می گوئیم زوایای متمم می گیرند.

پس α و $\frac{\pi}{2} - \alpha$ متمم اند زیرا: $\frac{\pi}{2} - \alpha + \alpha = \frac{\pi}{2}$

حال باتوجه به زوایای نوع دوم خواهیم داشت:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$$

ب) دوزادیه مکمل:

ما داریم هرگاه جمع دوزادیه 180° یا π دارند باشد، مکمل یکدیگر خوانده می‌شود.

پس α ، $\pi - \alpha$ مکمل هم‌اند زیرا: $(\pi - \alpha) + \alpha = \pi$

حال با توجه به زوایای نوع اول داریم:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

مثلاً $\sin 2^\circ = \cos 7^\circ$ ✓ $2^\circ + 7^\circ = 9^\circ$ نست

ب) $\tan 2^\circ = \cot 5^\circ$ ✗ $2^\circ + 5^\circ = 7^\circ \neq 9^\circ$

$$\Rightarrow \sin 140^\circ = \sin 40^\circ \quad \checkmark$$

$$140^\circ + 40^\circ = 180^\circ \quad \text{مکمل}$$

$$\text{ثاني) } \cos 120^\circ = \cos 60^\circ \quad \times$$

$$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \quad \text{مکمل}$$

$$\text{ثالث) } \tan 140^\circ = -\tan 40^\circ \quad \checkmark$$

$$140^\circ + 40^\circ = 180^\circ \quad \text{مکمل}$$

$$\text{رابع) } \cot 110^\circ = -\cot 80^\circ \quad \times$$

$$110^\circ + 80^\circ = 190^\circ \neq 180^\circ$$

مثال: کدام دو زاویه مکمل هم هستند؟

$$10^\circ, \frac{7\pi}{12} \quad 227,8^\circ, -\frac{3\pi}{8} \quad 144^\circ, \frac{\pi}{6} \quad 3^\circ, \frac{4\pi}{3} \quad 1$$

$$1) \quad \frac{4\pi}{3} = 240^\circ \rightarrow 240^\circ + (-3^\circ) = 237^\circ \neq 180^\circ \quad \times$$

$$2) \quad \frac{\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ \rightarrow 144^\circ + 36^\circ = 180^\circ \quad \checkmark$$

$$3) \quad -\frac{3\pi}{8} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -67,8^\circ \rightarrow 227,8^\circ - 67,8^\circ = 160^\circ \neq 180^\circ \quad \times$$

$$4) \quad \frac{7\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 105^\circ \rightarrow 105^\circ + 10^\circ = 115^\circ \neq 180^\circ \quad \times$$

مثال: اگر $\sin \theta = 1/4$ ، زاویه‌ی حاده باشد، حاصل $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ را بیابید.

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$$

$$\text{یادآوری: } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - (1/4)^2 = 1 - 1/16 = 15/16$$

$$\rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{15/16} \xrightarrow{0 < \theta < 90^\circ} \cos \theta = \sqrt{15}/4$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta = \sqrt{15}/4$$

مثال: حاصل عبارت $A = \sin 14^\circ + \sin 14^\circ + \sin 14^\circ + \cos 10^\circ + \cos 11^\circ + \cos 13^\circ$

را بدست آورید.

$$\sin 14^\circ = \sin 2^\circ, \sin 14^\circ = \sin 2^\circ, \sin 14^\circ = \sin 2^\circ$$

$$\cos 10^\circ = -\cos 8^\circ, \cos 11^\circ = -\cos 7^\circ, \cos 13^\circ = -\cos 5^\circ$$

$$A = \sin 2^\circ + \sin 2^\circ + \sin 2^\circ - \cos 8^\circ - \cos 7^\circ - \cos 5^\circ$$

$$\cos 8^\circ = \sin 1^\circ, \cos 7^\circ = \sin 2^\circ, \cos 5^\circ = \sin 3^\circ$$

$$A = \sin 2^\circ + \sin 2^\circ + \sin 2^\circ - \sin 1^\circ - \sin 2^\circ - \sin 3^\circ = 0$$

مثال: مقدار عبارت $A = \frac{-\sin^2 t^\circ - \sin^2 0^\circ + 1 - \sin v^\circ}{\tan t^\circ \tan 0^\circ - 1 - 2 \cos 2^\circ}$ را بدست آورید.

$$-\sin^2 t^\circ - \sin^2 0^\circ = -(\sin^2 t^\circ + \sin^2 0^\circ) = -(\cos^2 0^\circ + \sin^2 0^\circ) = -1$$

$$\tan t^\circ \times \tan 0^\circ = \cot 0^\circ \times \tan 0^\circ = 1$$

یادآوری: $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \rightarrow \tan \theta \times \cot \theta = 1$

$$A = \frac{-1 + 1 - \sin v^\circ}{1 - 1 - 2 \cos 2^\circ} = \frac{-\sin v^\circ}{-2 \cos 2^\circ} = \frac{\sin v^\circ}{2 \sin v^\circ} = \frac{1}{2}$$

مثال: اگر $\tan 10^\circ = a$ حاصل عبارت $B = \frac{\sin v^\circ + 2 \sin 10^\circ}{2 \sin 140^\circ - \sin 140^\circ}$ را بدست آورید.

متسم: $\sin 110^\circ = \cos(-10^\circ) = \cos 10^\circ$ ، متسم: $\sin v^\circ = \cos 10^\circ$

متسم: $\sin 140^\circ = \sin(-10^\circ) = -\sin 10^\circ$ ، متسم: $\sin 140^\circ = \sin 10^\circ$

$$B = \frac{\cos 10^\circ + 2 \cos 10^\circ}{2 \sin 10^\circ + \sin 10^\circ} = \frac{3 \cos 10^\circ}{3 \sin 10^\circ} = \cot 10^\circ = \frac{1}{\tan 10^\circ} = \frac{1}{a}$$

یادآوری: $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ، $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

مثال: شماره ۹۹ (تجربی)

حاصل عبارت $\tan(300^\circ)\cos(210^\circ) + \tan(480^\circ)\sin(840^\circ)$ کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند).

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = \tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\tan 60^\circ$$

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ$$

$$\tan 480^\circ = \tan(360^\circ + 120^\circ) = \tan(120^\circ) = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ$$

$$\sin 840^\circ = \sin(720^\circ + 120^\circ) = \sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$$

$$= (-\tan 60^\circ)(-\cos 30^\circ) + (-\tan 60^\circ)(\sin 60^\circ)$$

$$= -\tan 60^\circ (-\cos 30^\circ + \sin 60^\circ) = -\tan 60^\circ (-\sin 60^\circ + \sin 60^\circ)$$

$$= -\tan 60^\circ \times 0 = 0$$

گزینه ۱

مثال: شماره ۹۹ (تجربی خارج)

حاصل عبارت $\tan(285^\circ)\tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ)\cos(255^\circ)$ کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند).

$-\cos^2(15^\circ)$ (۴)

$-\sin^2(15^\circ)$ (۳)

$\cos^2(15^\circ)$ (۲)

$\sin^2(15^\circ)$ (۱)

$$\tan 110 = \tan(\overset{\nearrow \frac{3\pi}{2}}{270} + 10) = -\cot 10$$

$$\tan(-140) = -\tan 140 = -\tan(\overset{\nearrow \pi}{180} - 10) = -(-\tan 10) = \tan 10$$

$$\sin(1.90) = \sin(\overset{\nearrow 4\pi}{1.80} + 10) = \sin 10$$

$$\cos(200) = \cos(270 - 10) = -\sin 10$$

$$\text{جواب} = (-\cot 10)(\tan 10) - \sin 10(-\sin 10)$$

$$= -1 + \sin^2 10 = -(1 - \sin^2 10) = -\cos^2 10 \quad \text{گزینه ۴:}$$

مثال: سطر ۹۸ (ریاضی)

حاصل عبارت $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۱)$$

$$\tan \frac{11\pi}{4} = \tan \frac{12\pi - \pi}{4} = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin \frac{15\pi}{4} = \sin \frac{16\pi - \pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{13\pi}{4} = \cos \frac{12\pi + \pi}{4} = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{جواب} = -1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \frac{2}{4} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{گزینه ۲}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل چهارم: مثلثات

درس سوم: توابع مثلثاتی

جلسه چهارم: صفحات ۸۸ تا ۹۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

نسبت های مثلثات را می توان بعنوان تابع نیز در نظر گرفت زیرا برای هر زاویه بعنوان ورودی

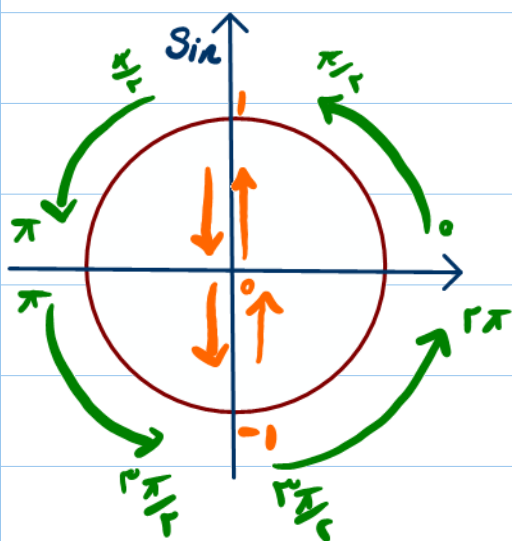
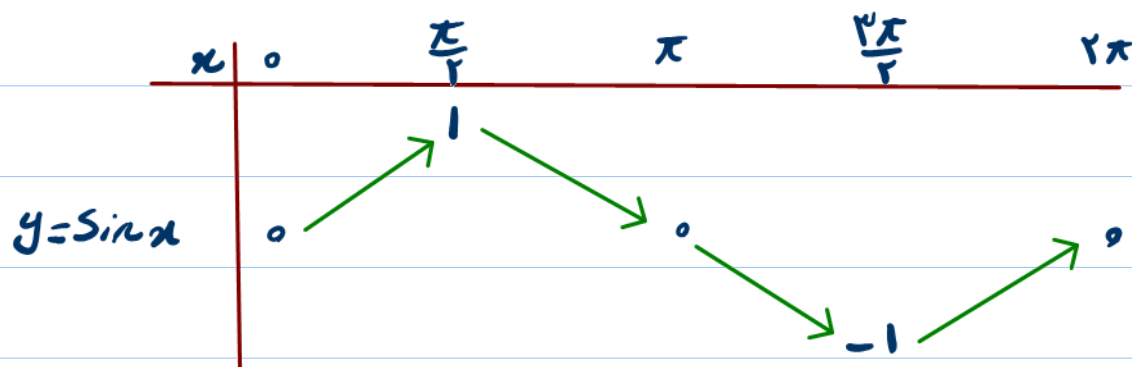
فقط یک مقدار نسبت مثلثاتی بعنوان خروجی داده می شود مثلاً برای سینوس :

$$y = \sin x$$

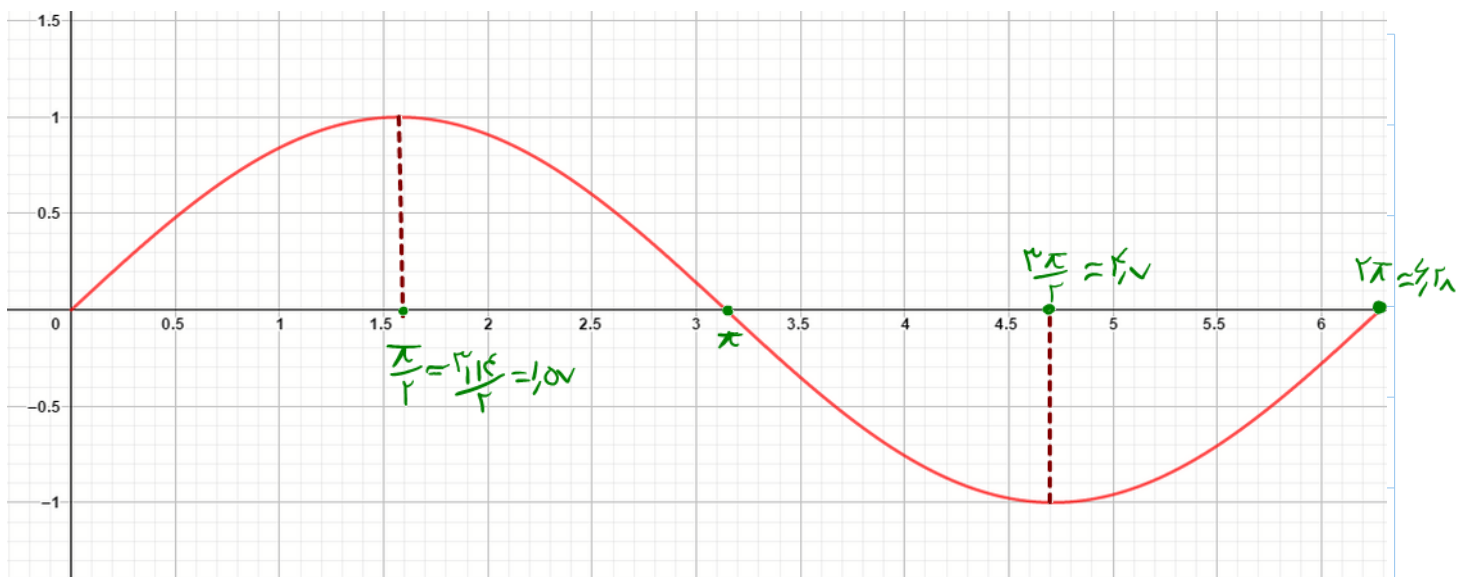
$$y = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

دفعه رسم نمودار تابع $y = \sin x$

اگر x بر حسب رادیان باشد با استفاده از دایره مثلثاتی جدول زیر را نتیجه می گیریم :

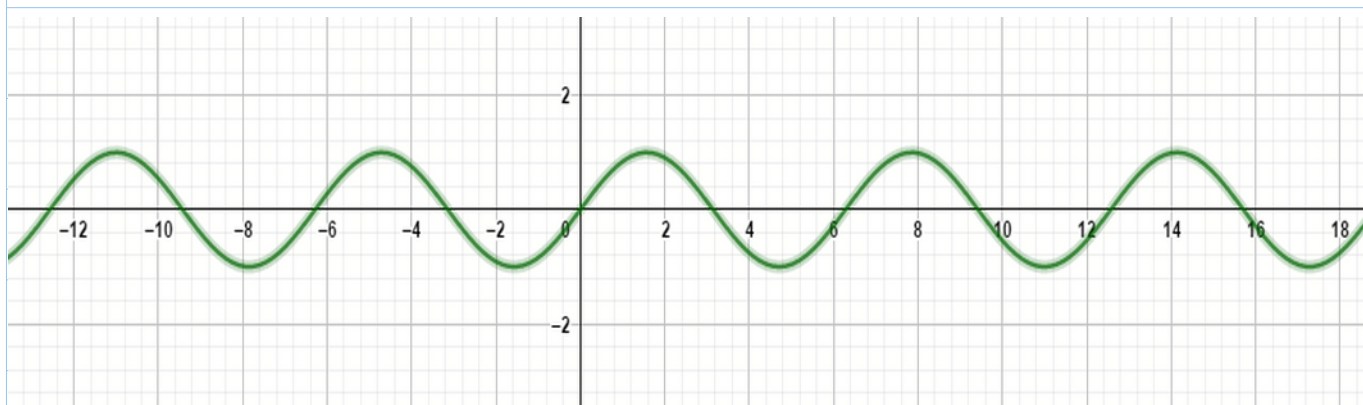


حال با داشتن چند زاویه دیگر به سینوس نمودار زیر را می توانیم رسم کنیم :



از نمودار $y = \sin x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

(۱) نمودار تابع سینوس در بازه‌هایی به طول 2π تکراری شود زیرا داریم: $\sin(x+2\pi) = \sin x$



(۲) $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [-1, 1]$

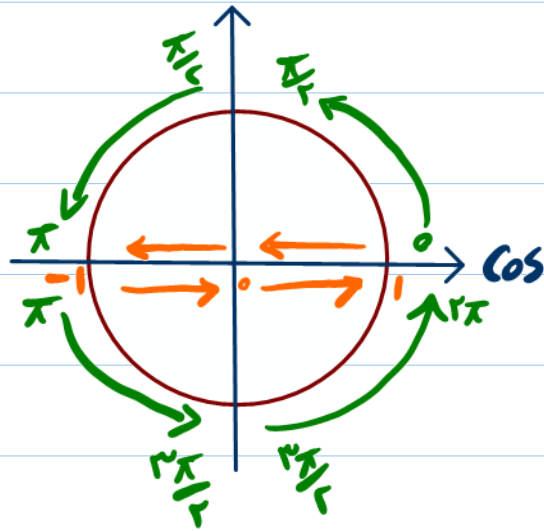
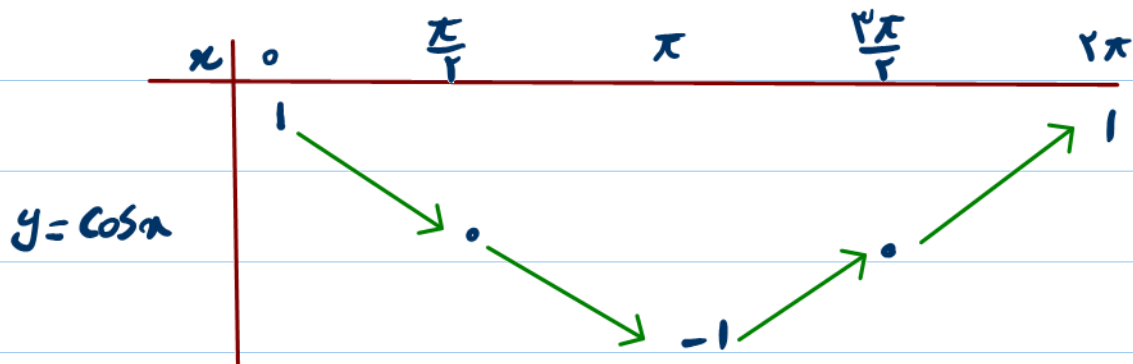
(۳) نمودار این تابع در $x = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ مقدار x را قطع می‌کند.

(۴) بیشترین مقدار تابع $y = \sin x$ برابر یک است که در $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهند.

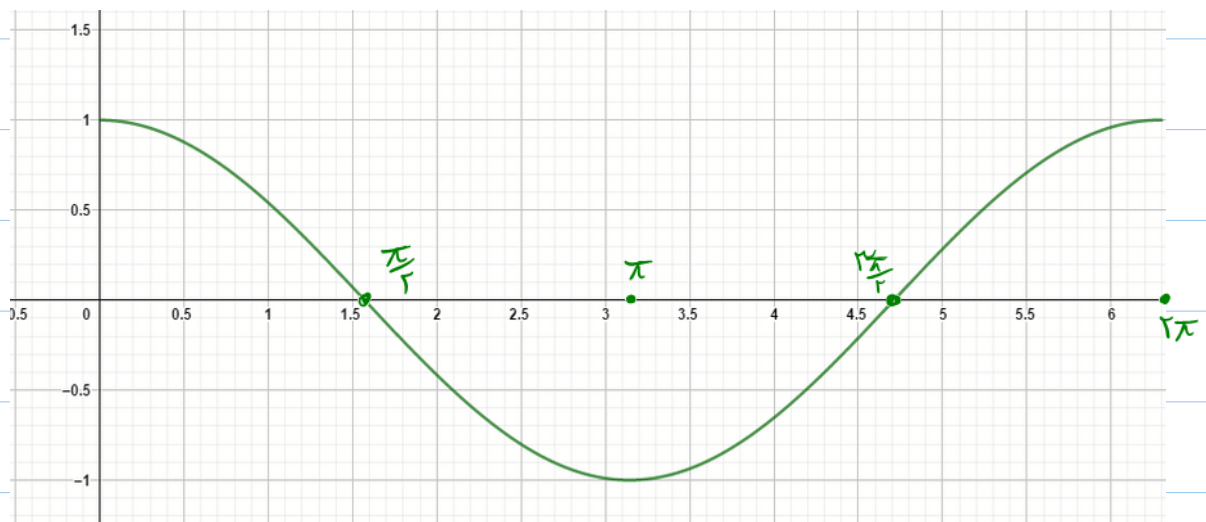
(۵) کمترین مقدار تابع $y = \sin x$ برابر -۱ است که در $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهند.

ب) رسم نمودار تابع $y = \cos x$

اگر x بر حسب درایان باشد از دوره مشتقات جدول زیر را نتیجه گیریم :

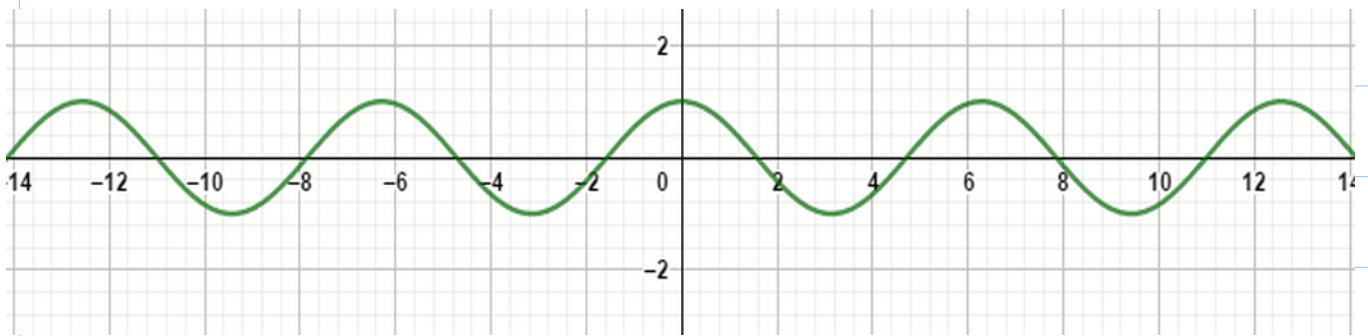


حال با داشتن چند زاویه دیگر به کسینوس نمودار زیر را می‌توانیم رسم کنیم :



از نمودار $y = \cos x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

(۱) نمودار تابع کسینوس در بازه‌هایی به طول 2π تکراری شود زیرا داریم: $\cos(x+2\pi) = \cos x$



(۲) $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [-1, 1]$

(۳) نمودار این تابع در $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ معبر x را قطع می‌کند.

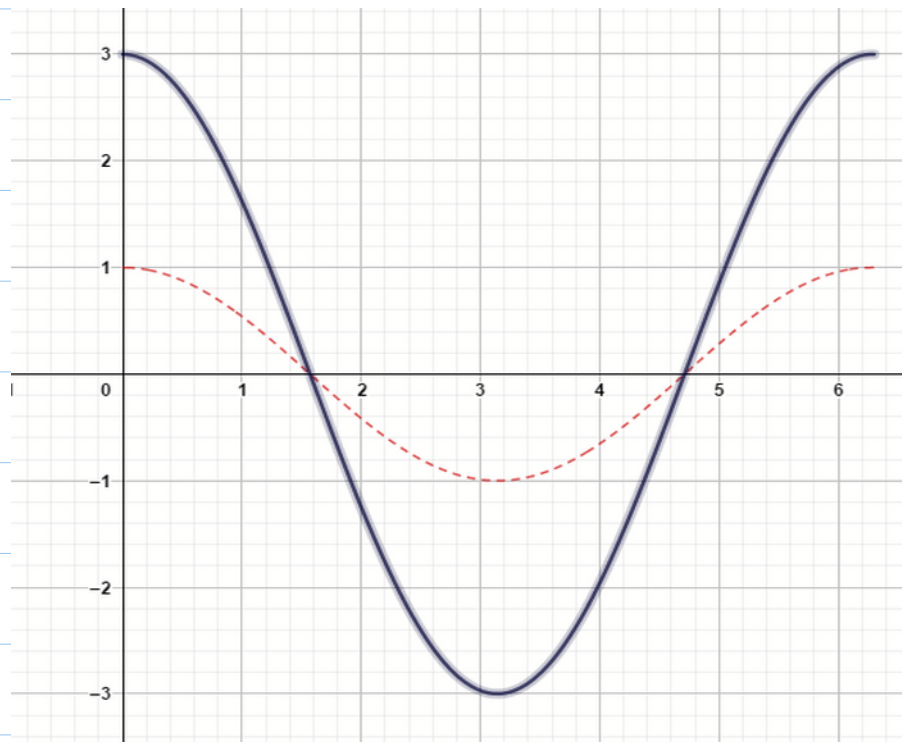
(۴) بیشترین مقدار تابع $y = \cos x$ برابر یک است که در $x = 2k\pi$ رخ می‌دهند.
 (مضرب زوج π)

(۵) کمترین مقدار تابع $y = \cos x$ برابر -۱ است که در $x = (2k+1)\pi$ رخ می‌دهند.
 (مضرب فرد π)

نکته: از قوانین انتقال برای رسم نمودار توابع مشتقاتی کمک می‌گیریم.

مثال: با توجه به نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

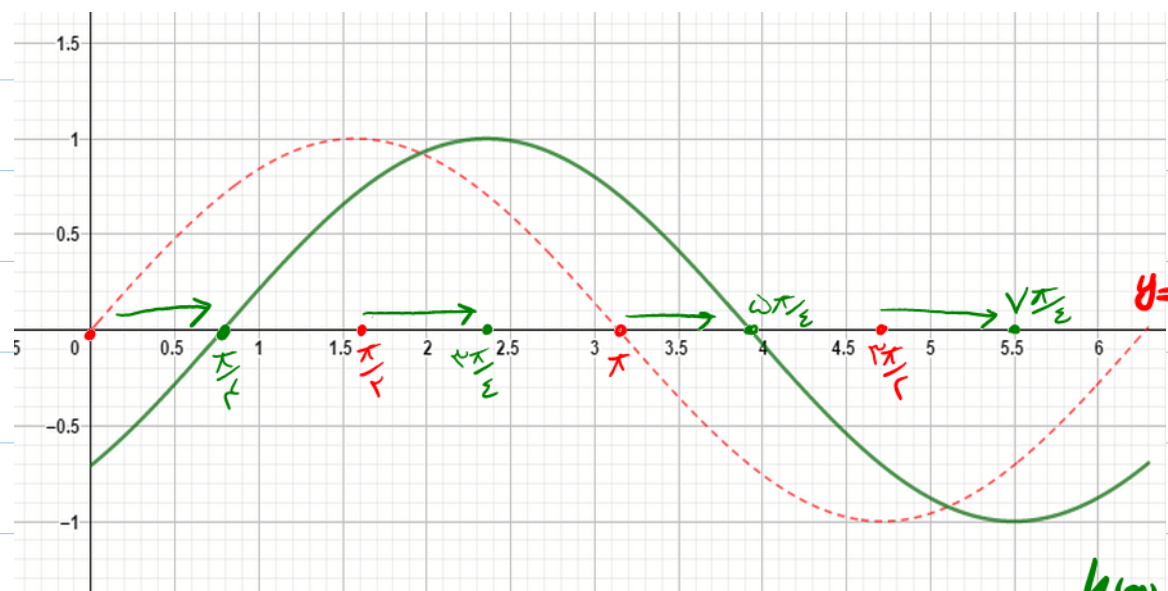
(الف) $f(x) = 3 \cos x$



$$f(u) = r \cos u$$

$$y = \cos u$$

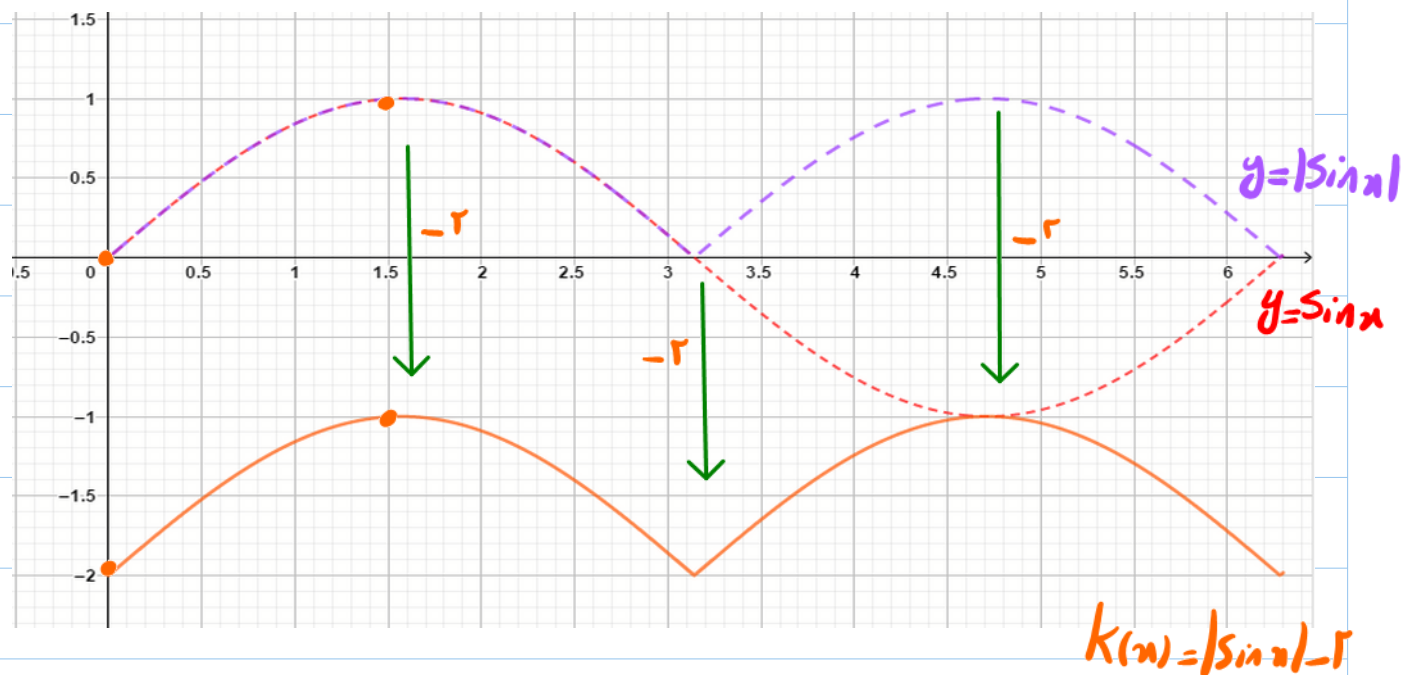
—) $h(u) = \sin(u - \frac{\pi}{\varepsilon})$



$$y = \sin u$$

$$h(u) = \sin(u - \frac{\pi}{\varepsilon})$$

۱) $k(x) = |\sin x| - 2$



سؤال:

آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق اند یا خیر؟

۱) $y = \sin x$, $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

۲) $y = \cos x$, $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

۳) $y = \cos x$, $y = \cos(2\pi - x)$

۴) $y = \sin x$, $y = \sin(5\pi - x)$

۱) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(-(\frac{\pi}{2} - x)) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ بله

۲) $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ بله

۳) $y = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$ بله

۴) $y = \sin(5\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$ بله

مثال:

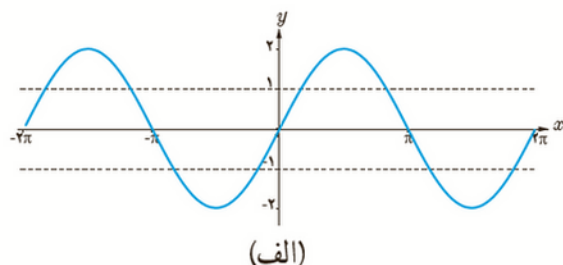
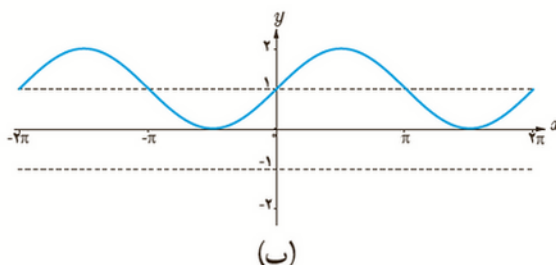
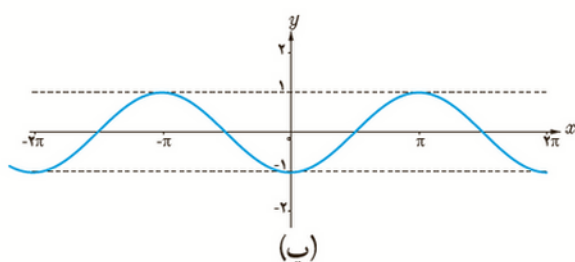
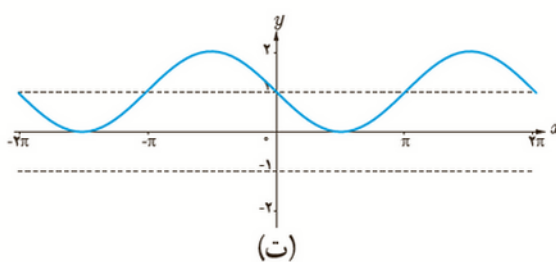
هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱) $y = 2 \sin x$

۲) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

۳) $y = \sin x + 1$

۴) $y = -\sin x + 1$



۱) $y = 2 \sin x$ نمودار (الف)

۲) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(-(\frac{\pi}{2} - x)) = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x$ نمودار (ب)

۳) $y = \sin x + 1$ نمودار (پ)

۴) $y = -\sin x + 1$ نمودار (ت)

مثال:

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد. **نادرست** $x \in \mathbb{R}$

ب) $\sin \sqrt{5}$ یک عدد حقیقی است. **درست**

پ) $\cos 3 = \cos 3^\circ$. **نادرست**

ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر ۲- باشد. **نادرست**

ت) اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ آنگاه $0 < \cos x < 1$ است. **نادرست**

ج) $x = \pi$ صفر تابع $f(x) = \cos x$ است. **نادرست**

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن

جلسه اول: صفحات ۹۶ تا ۱۰۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع نمایی :

تعریف : اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد، تابع $f(x) = a^x$ را تابع نمایی

می نامیم.

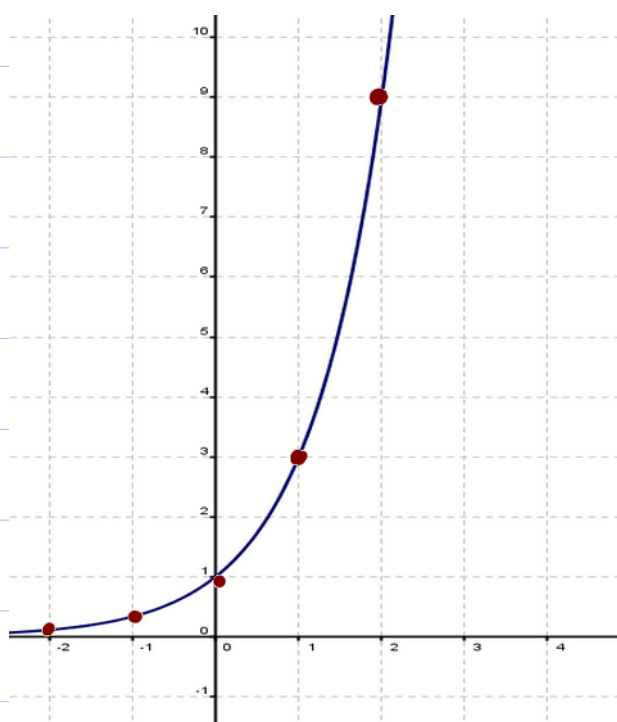
$y = 4^x$ و $y = (\frac{1}{4})^x$ ، $y = (\sqrt{3})^x$ تابع نمایی دی $y = 1^x$ و $y = (-2)^x$ نمایی نیستند.

برای انگیزه اطلاعات بیشتری از تابع نمایی بدست آوریم نیاز به رسم دانه داریم.

برای نمونه دو تابع $y = 3^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم می کنیم و نتیجه را تقسیم می دهیم.

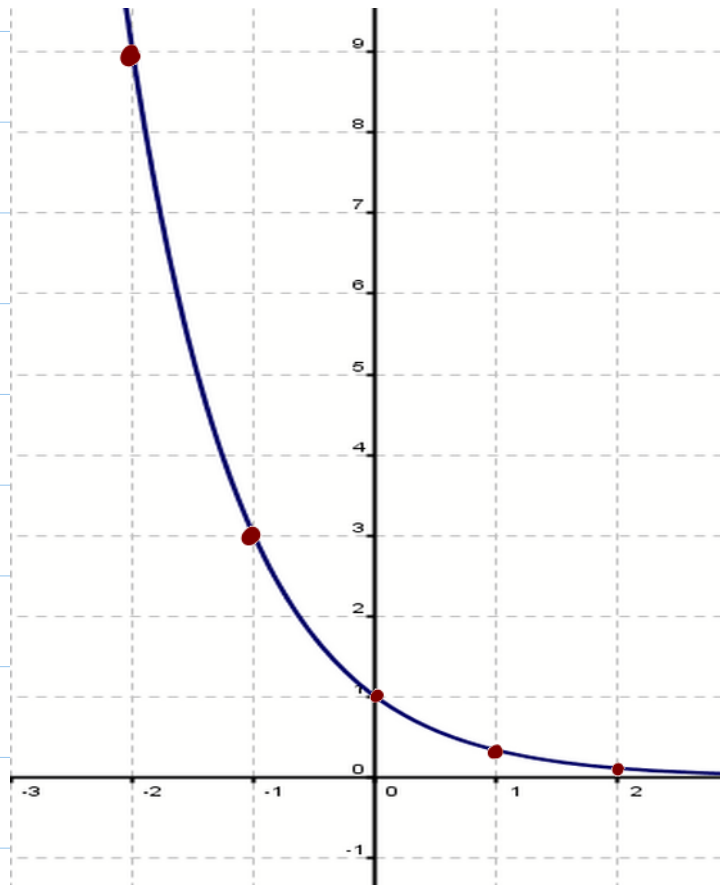
$y = 3^x$ (الف)

x	-2	-1	0	1	2
y	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$	1	3	9



۱- $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\left(\frac{1}{a}\right)^{-2} = a^2$	$\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$	1	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$

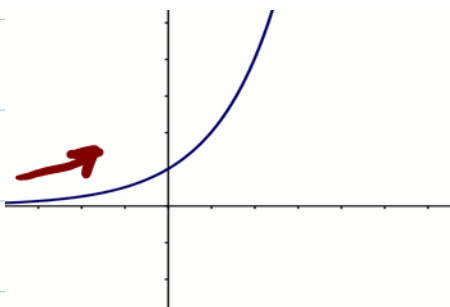


نتیجه: (الف) اگر $a > 1$ باشد نمودار تابع $f(x) = a^x$ به صورت زیر است:

$D = \mathbb{R}$, $R = (0, +\infty)$

تجربه یک به یک است

با افزایش متغیر x ، y ها هم افزایش می یابند.

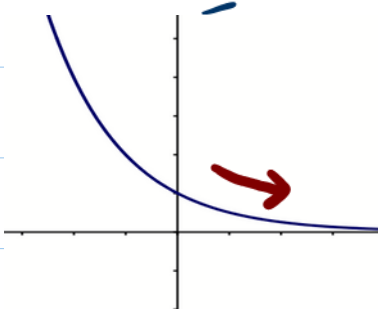


ب) اگر $0 < a < 1$ باشد نمودار تابع $f(x) = a^x$ به صورت زیر است:

$D = \mathbb{R}$, $R = (0, +\infty)$

تجربه یک به یک است

با افزایش متغیر x ، y ها کاهش می یابند.

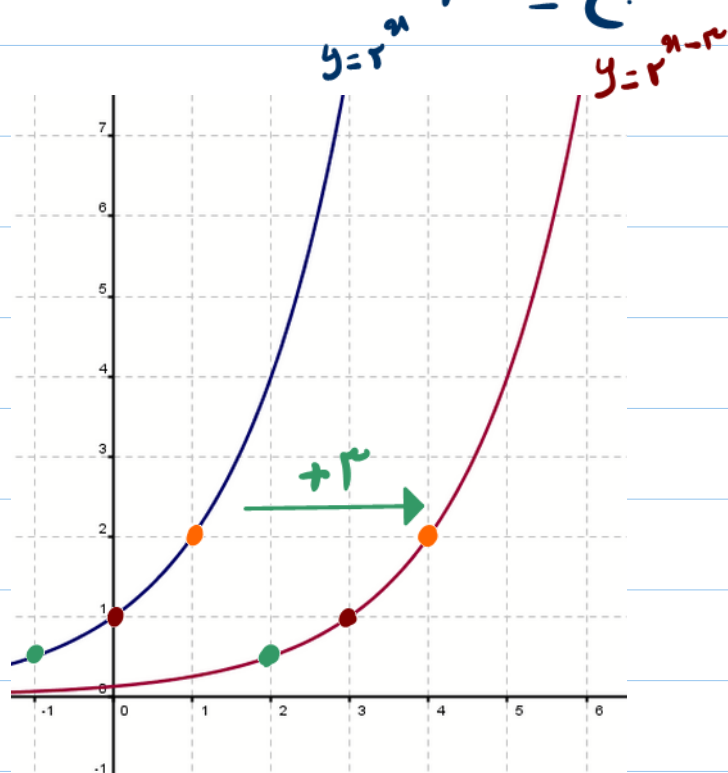


فرم کلی تابع نمایی: با شرطهای گفته شده برای a به صورت کلی $y = ba^{cx+d} + f$ می‌توانید به دست آورید که b, c, d, f اعداد حقیقی و $b, c \neq 0$ باشند.

نکته: از نقطه‌ها و قوانین انتقال برای رسم نمودار توابع نمایی کمک می‌گیریم.

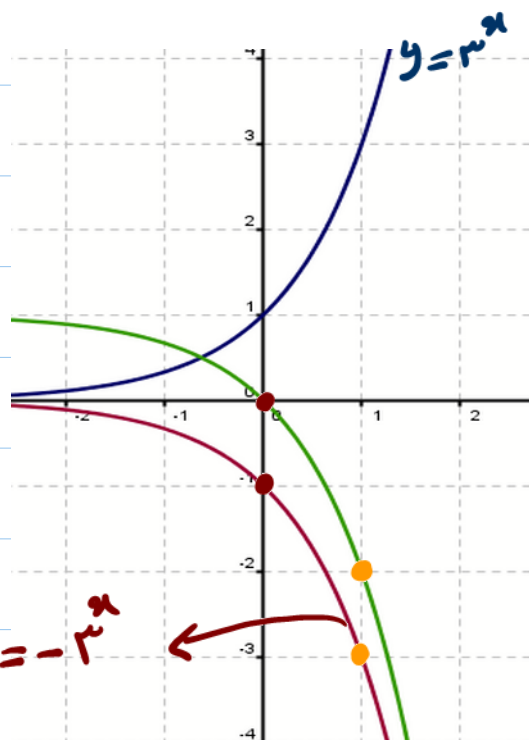
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x) = 2^{x-3}$



۲) $f(x) = 1 - 3^x$

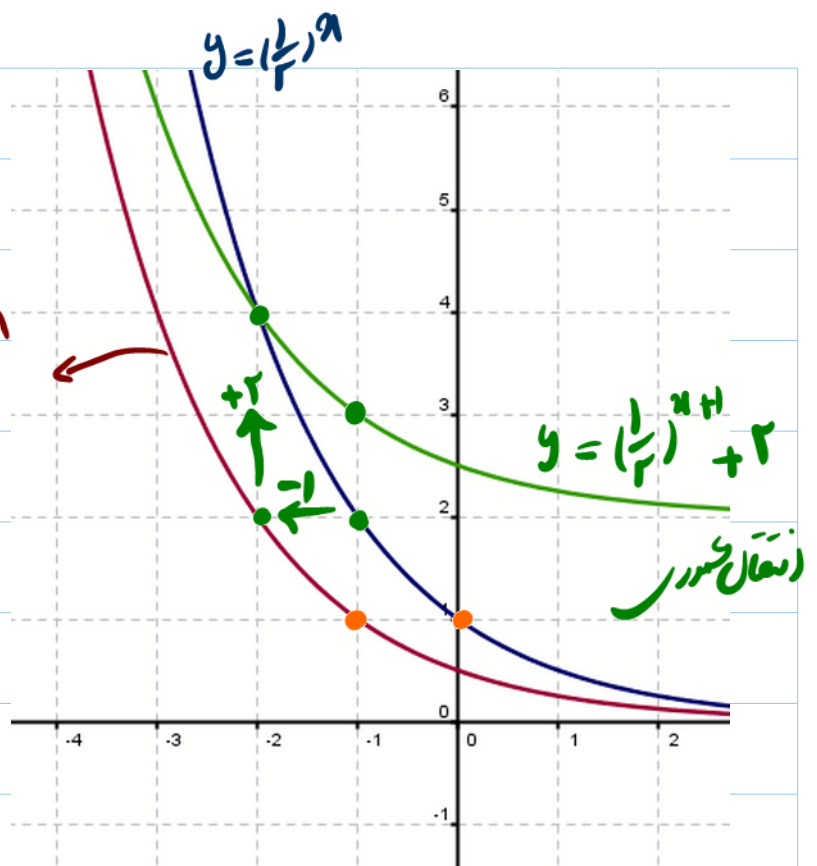
$y = 1 - 3^x$ انتقال شوری



$y = -3^x$ انعکاس نسبت به محور x ها

$$3) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 2$$

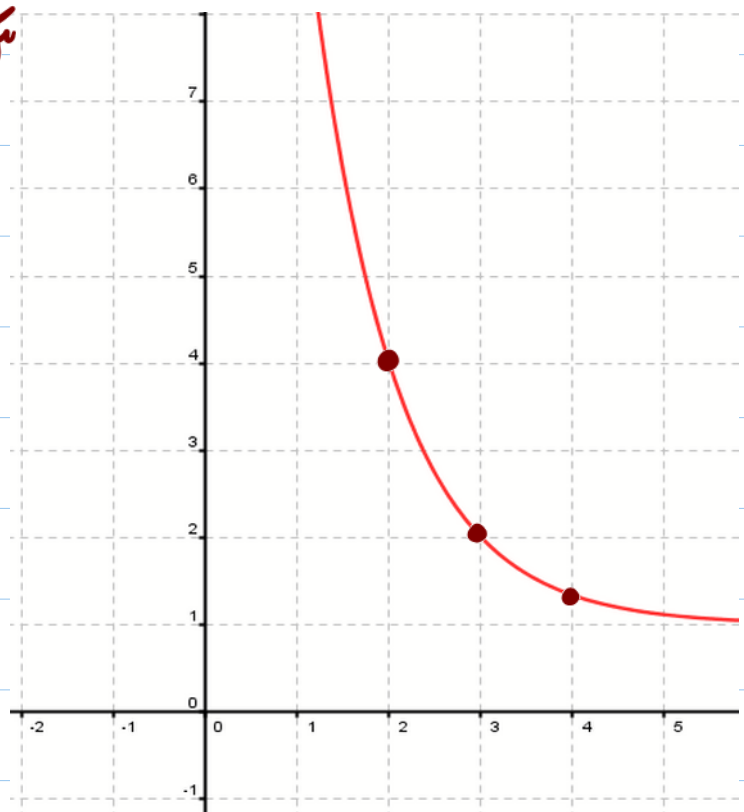
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$



$$4) f(x) = 3^{-x+2} + 1$$

نقطه یابی : $-x+2=0 \rightarrow x=2$

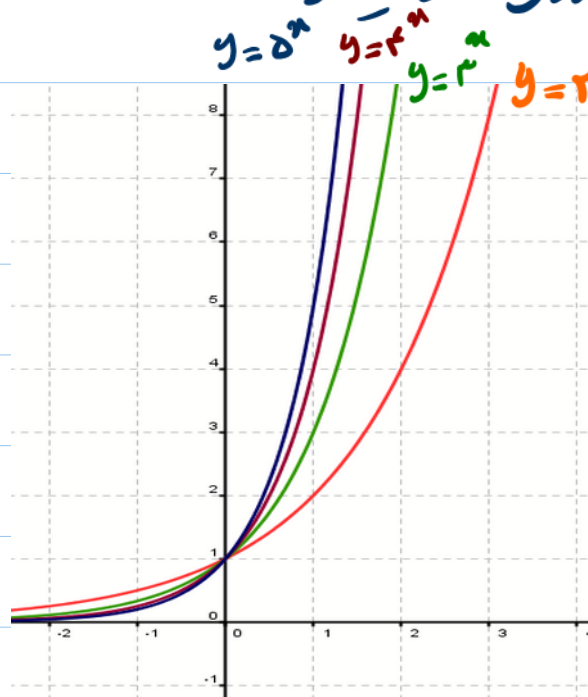
x	2	3	4
y	4	2	$3^{-1}+1 = \frac{4}{3}$



مقایسه توابع نمایی $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$, ...

الف) اگر پایه‌ها نزدیک به یک باشند هر چه پایه بزرگتر شود نمودار سریع‌تر در راستای افقی

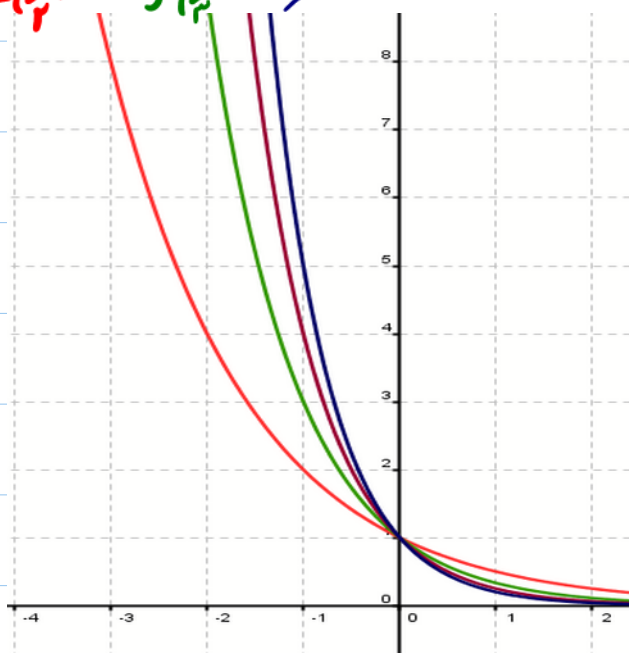
فشرده می‌شود و به محور y ها نزدیک می‌شود.



ب) اگر پایه‌ها بین صفر و یک باشند هر چه پایه بزرگتر باشد نمودار در راستای افقی کشیده‌تر

$y=(\frac{1}{5})^x$ $y=(\frac{1}{4})^x$ $y=(\frac{1}{3})^x$ $y=(\frac{1}{2})^x$

می‌شود و از محور y ها دور می‌شود.



فصل کتاب ریسی :

الف) نقطه $x = \sqrt{2}$ را روی محور x ها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $2^{\sqrt{2}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید.

$$2^{\sqrt{2}} \approx 2.6$$

ب) نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار

$$y = 2^x$$

$y = 2^x$ مقایسه کنید.

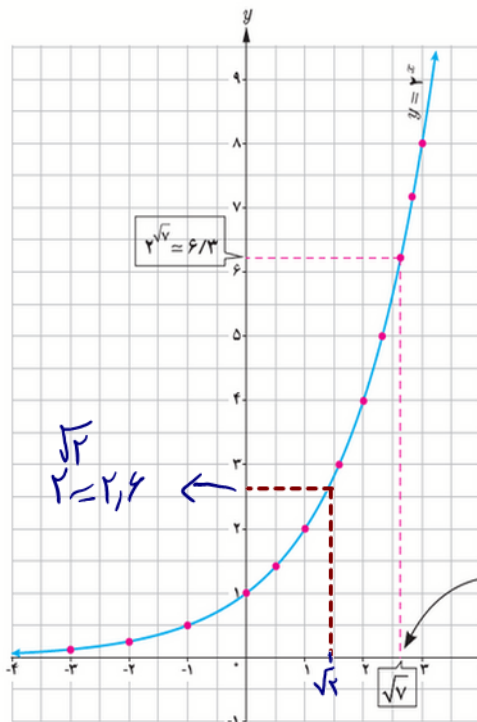
سندار $y = 2^x$ را نسبت به محور هماهنگ می کنیم.

پ) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$2^4, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 2^2, 2^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

باتوجه به سندار تابع های داریم :

$$2^4 < 2^3 < 2^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^4$$



توجه کنید دامنه $y = 2^x$ شامل اعداد اصم مثل $\sqrt{2}$ است.

نتیجه! در سال های گذشته با توان های گویا آشنا شدیم. با حرف های جابجایی، از توان های حقیقی

هم با هم درگیری های توان های گویا در شماره می کنیم.

درگیری های توان حقیقی :

$$1) a^0 = 1$$

$$2) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$3) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$4) (a \times b)^x = a^x \times b^x$$

$$5) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$6) a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$7) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

مثال: اگر $f(n) = 1^n$ و $g(n) = 2^{n+0}$ ، حاصل $f(\frac{n}{3})g(n-2)$ را بیابید.

$$f(\frac{n}{3}) = 1^{\frac{n}{3}} = (2^3)^{\frac{n}{3}} = 2^n$$

$$g(n-2) = 2^{2(n-2)+0} = 2^{2n-4+0} = 2^{2n+1}$$

$$f(\frac{n}{3})g(n-2) = 2^n \times 2^{2n+1} = 2^{n+2n+1} = 2^{3n+1}$$

مغایره‌های نهایی:

مغایره‌هایی که در آن‌ها مجهول در توان (نها) قرار گرفته است را مغایره نهایی می‌گویند.

چون تابع نهایی یک یک است و a حقیقی، ثبت و مخالف است، اگر $a^x = a^y$

کننده $x = y$. پس برای حل مغایرات نهایی در صورت نزدیک باید هارا یکی می‌کنیم و با

حذف پایه و مساوی قرار دادن توان هاد حل مغایره حاصل، مجهول بدست می‌آید.

مثال: مغایره $(\frac{2}{3})^{x+2} = (\frac{11}{16})^{x-1}$ را حل کنید.

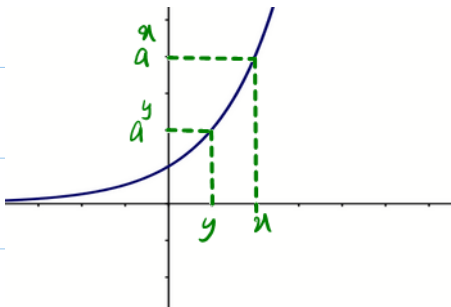
$$(\frac{11}{16})^{x-1} = (\frac{3^4}{2^4})^{x-1} = ((\frac{3}{2})^4)^{x-1} = ((\frac{2}{3})^{-4})^{x-1} = (\frac{2}{3})^{-4x+4}$$

$$\left(\frac{r}{s}\right)^{x+2} = \left(\frac{r}{s}\right)^{-2x+4}$$

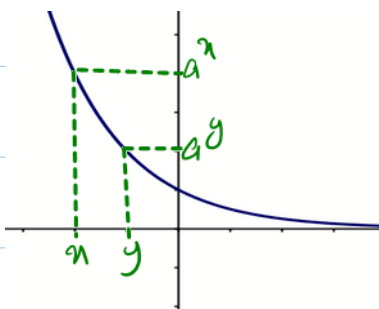
$$\rightarrow x+2 = -2x+4 \rightarrow 0x=2 \rightarrow x=\frac{2}{0}$$

نکاره های نهایی :

اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد داریم :



الف، اگر $a > 1$ و $a^y > a^x$ که نشانه $y > x$.



ب، اگر $0 < a < 1$ و $a^y > a^x$ که نشانه $x < y$.

یعنی در صورت لزوم پایه ها در طرف نام دی را می بینیم. اگر پایه بزرگتر از یک باشد

با حذف پایه حاجت نام دی حذف نمی شود و اگر پایه بین صفر و یک باشد با حذف پایه ها

جهت نامادری عوض می شود.

مثال: معبریم جواب نامعادله $۲^{۵-x} < ۲^{۳-x}$ را بیابید.

$$(۲^۲)^{۵-x} < (۲^۰)^{۵-x} \Rightarrow ۲^{۲(۵-x)} < ۲^{۰(۵-x)}$$

$$\xrightarrow{۲>۱} ۲(۵-x) < ۰(۵-x)$$

$$\rightarrow ۲۵-۲x < ۰-۰x \rightarrow ۲۵ < ۲x \rightarrow x < \frac{۲۵}{۲}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

قسمت اول

جلسه دوم: صفحات ۱۰۵ تا ۱۱۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مقدمه :

زنجیره اصلی برای ترفیع تابع گارتم یا همگد گارتم، ساده کردن عملیات پیچیده ضرب است. همچنین گارتم گری از اعداد، مقایسه ازنه را کوچکتری کند.

گارتم یک عدد در یک پایه، برابر با توانی از پایه است که آن عدد را می دهد. عنوان

مثال گارتم ۸ در پایه ۲ برابر ۳ است زیرا : $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

در واقع حاصل $\log_2 8$ جواب این سوال است که چه قدر از عدد ۲ را باید در هم

ضرب کنیم تا عدد ۸ بدست آید ؟ $\log_2 8 = 3$

از طرف دیگر می توان گارتم را واردن تابع نهایی در نظر گرفت .

عنوان مثال تابع $f(x) = 2^x$ را در نظر بگیرید. اگر ورودی x ، ۳ باشد خودی

خروجی برابر ۸ می شود : $f(3) = 8$. تابع واردن این تابع باید ۹ را برگرداند و باید به

مثلاً ۱ را برگرداند ۳ را به عدد : $f(1) = 2$. طبق آنچه در بالا گفتیم این تابع را

گزارش در پایه ۲ حرف می‌کنم :

$$y = 2^n \Rightarrow \log_2 y = n$$

پس n را بر حسب y حساب می‌کنیم. طبق رکن در فصل تابع برای یافتن وارون

تابع گفتیم باید n را به $f(n)$ و y را به n تبدیل کنیم حتی : $f^{-1}(n) = \log_2 n$

تعریف : اگر a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد تابع $f(n) = a^n$ یک یک در نتیجه

دارون پذیر است. دارون این تابع را تابع لگاریتم با پایه a می‌نامیم و آن را

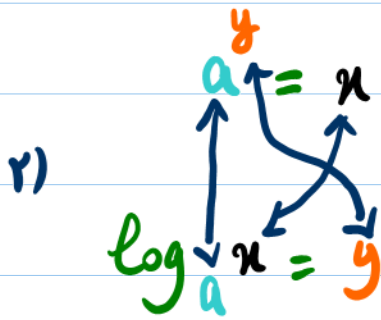
$$! \quad f^{-1}(n) = \log_a n \quad \text{نشان می‌دهیم.}$$

$$\text{همچنین } D_f = R_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad D_{f^{-1}} = R_f = (0, +\infty)$$

نتیجه : خود معادله گزارش را به یکی از دو شکل زیر به خاطر بسپارید :

۱) $y = \log_a n \Leftrightarrow a^y = n$

به توان



مثال: گرام های زیر را پیدا کنید.

۱) $\log_{10} 100 = 2$

بهترین

$10^2 = 100$

۲) $\log_3 1 = 0$

$3^0 = 1$

۳) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

۴) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$

مثال: معادله معادله دارون $f(x) = \log_2(x-2)$ را بدست آورید.

$y = \log_2(x-2)$ $\xrightarrow{\text{تعریف گرام}}$ $2^y = x-2$

بهترین

$\rightarrow 2^y + 2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = 2^x + 2$

مثال: اگر $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 3$ باشد. ضابطه تابع وارون f^{-1} را بیابید.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 3 \rightarrow y - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \rightarrow y - 3 = \frac{1}{2^{x-1}}$$

$$\xrightarrow[\text{معکوس}]{\text{دوطرف}} \frac{1}{y-3} = 2^{x-1} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \log_2 \frac{1}{y-3} = x-1$$

به توان

$$\log_2 \frac{1}{y-3} + 1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \log_2 \frac{1}{x-3}$$

تذکر: به یاد نگه دارید مبدا هم گفته می شود. هرگاه مبدا یا پایه گفته می شود به آن

نگاه داشته باشید. هرگاه مبدا یک گفته نوشته نشود آن را به ازای x می گیریم.

مثال: اگر $f(x) = 4 + \log(2x-4)$ ، مقدار $f^{-1}(4)$ را بیابید.

$$f^{-1}(4) = a \xrightarrow{\text{تغییر}} 4 = f(a) \Rightarrow 4 = 4 + \log(2a-4)$$

$$\rightarrow 0 = \log(2a-4) \xrightarrow{\text{تغییر}} 10^0 = 2a-4$$

به توان

$$100 = 2a-4 \rightarrow 2a = 104 \rightarrow a = 52 \Rightarrow f^{-1}(4) = 52$$

نکته: همواره در تعریف تابع گوییم دامنه تابع $y = \log_a x$ معبره

$(0, +\infty)$ است. در حالت کلی برای یافتن دامنه تابع $y = \log_a u$ باید $u > 0$ را در نظر بگیریم.

شرایط $u > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ را باید بسازیم.

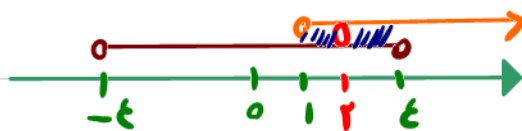
مثال: دامنه تابع $f(x) = \log_{(x-1)}(14-x^2)$ را بدست آوریم.

$$\textcircled{1} 14 - x^2 > 0 \rightarrow 14 > x^2 \rightarrow x^2 < 14 \rightarrow -\sqrt{14} < x < \sqrt{14}$$

$$\textcircled{2} x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$\textcircled{3} x - 1 \neq 1 \rightarrow x \neq 2$$

$$D_f = \textcircled{1} \cap \textcircled{2} \cap \textcircled{3} = (-\sqrt{14}, \sqrt{14}) - \{2\}$$



ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

قسمت دوم

جلسه سوم: صفحات ۱۰۵ تا ۱۱۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

ویژگی‌های لگاریتم :

برای محاسبه تکرار لگاریتم‌ها، از ویژگی‌های زیر که صحتی با استفاده از تعریف لگاریتم اثبات می‌شوند، استفاده می‌کنیم.

ویژگی ۱. لگاریتم یک در هر پایه‌ای عدد مثبت و مخالف یک، برابر صفر است یعنی:

$$\log_a 1 = 0$$

مثال: $\log_{10} 1 = 0$, $\log_2 1 = 0$, و $\log_{1/3} 1 = 0$

ویژگی ۲. لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک در مبنای خودش مساوی یک است یعنی:

$$\log_a a = 1$$

مثال: $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$, و $\log_4 4 = 1$

ویژگی ۳. اگر عددی عبارت جدوی لگاریتم توان در باشد، توان را ضرب لگاریتم قرار می‌دهیم یعنی:

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \times 1 = 3 \quad \text{مثال:}$$

$$\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3} \quad \text{یادآوری: } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\log \frac{1}{100} = \log \frac{1}{10^2} = \log 10^{-2} = -2 \log 10 = -2$$

دستی ۴. لگاریتم ضرب در عدد برابر است با جمع لگاریتم‌های آن یعنی:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_4 12 + \log_4 3 = \log_4 12 \times 3 = \log_4 36 = \log_4 6^2 = 2 \log_4 6 = 2 \quad \text{مثال:}$$

$$* \log 2 + \log 5 = \log 2 \times 5 = \log 10 = 1$$

دستی ۵. لگاریتم تقسیم در عدد برابر است با تفریق لگاریتم‌های آن یعنی:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2 \quad \text{مثال:}$$

$$\log_2 512 - \log_2 2 = \log_2 \frac{512}{2} = \log_2 256 = \log_2 2^8 = 8 \log_2 2 = 8$$

$$\log_a x^n = \frac{n}{m} \log_a x$$

دوری ۶.

$$\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

مثال:

$$\log_{\sqrt[4]{2}} 2 = \log_{2^{\frac{1}{4}}} 2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} \log_2 2 = 4$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

دوری ۷.

مثال: اگر $\log_2 3 = n$ ، مقدار $\log_{12} 18$ را بر حسب n بیابید.

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (2 \times 3^2)}{\log_2 (2^2 \times 3)} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3^2}{\log_2 2^2 + \log_2 3} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3} = \frac{1 + 2n}{2 + n}$$

نتیجه: اگر جای a ، x قرار دهیم داریم:

$$\log_a x = \frac{\log_x x}{\log_x a} \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{\log_x a} \quad \text{یا} \quad \log_a x \times \log_x a = 1$$

مثال:

$$\frac{1}{\log_4 2} + \frac{1}{\log_4 9} = \log_4 2 + \log_4 9 = \log_4 2 \times 9$$

$$= \log_4 2^2 = \log_4 4 = 1$$

$$\log_a^x b = x \log_a b$$

دستی ۸.

$$r^{\log_9^4} = 4^{\log_9^4} = 4^{\log_{9^{\frac{1}{4}}}^4} = 4^{\frac{1}{4} \log_9^4}$$

مثال:

$$= 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4}$$

نتیجه: اگر جای a و b قرار دهیم داریم:

$$\log_a^x a = x \log_a a \Rightarrow \log_a^x a = x$$

$$\sqrt{\log_{\sqrt{}}^2} = 2$$

مثال:

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

قسمت سوم

جلسه چهارم: صفحات ۱۰۵ تا ۱۱۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مثال‌های بیشتری از نگارتم :

۱) حاصل عبارت‌های گسسته زیر را بیابید .

$$\begin{aligned} \text{الف) } \log_2 \sqrt[5]{8} + \log_2 9 &= \log_2 8^{\frac{1}{5}} + \log_2 3^2 \\ &= \frac{1}{5} \log_2 2^3 + 2 \log_2 3 = \frac{3}{5} \log_2 2 + 2 = \frac{3}{5} + 2 = \frac{13}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } 5 \log_2 \sqrt[4]{11} - 2 \log_2 \frac{1}{49} + 3 \log_2 100 &= 5 \log_2 11^{\frac{1}{4}} - 2 \log_2 7^{-2} + 3 \log_2 10^2 \\ &= 5 \log_2 11^{\frac{1}{4}} - 2 \log_2 7^{-2} + 3 \log_2 10^2 \\ &= 5 \times \frac{1}{4} \log_2 11 - 2(-2) \log_2 7 + 3(2) \log_2 10 = \frac{5}{4} + 4 + 6 = 10\frac{5}{4} \end{aligned}$$

۲) اگر $\log 2 = \frac{1}{5}$ و $\log 3 = \frac{1}{4}$ باشند ، مقدار $\log \frac{1100}{\sqrt[5]{343}}$ را بیابید .

$$\begin{aligned} \log 1100 - \log \sqrt[5]{343} &= \log 2^4 \times 10^2 - \log \sqrt[5]{7^3} \\ &= \log 2^4 + \log 10^2 - \log 7^{\frac{3}{5}} = 4 \log 2 + 2 \log 10 - \frac{3}{5} \log 7 \\ &= 4 \times \frac{1}{5} + 2 - \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{5} + 2 - \frac{3}{20} = \frac{4}{5} + \frac{40}{20} - \frac{3}{20} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5} \end{aligned}$$

(۳) حاصل عبارت های گسسته زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt{r(\log r)^2 + (\log \frac{1}{r})^2}$

$$\log r = \log r^1 = r \log r$$

$$\log \frac{1}{r} = \log r^{-1} = -\log r$$

$$= \sqrt{r(r \log r)^2 + (-\log r)^2}$$

$$= \sqrt{r(r^2)(\log r)^2 + (\log r)^2} = \sqrt{r^3(\log r)^2 + (\log r)^2} = \sqrt{4(\log r)^2}$$

$$= 2 \log r$$

ب) $\log \frac{1}{\sqrt[4]{r^2}} = \log \frac{r^2}{r^4}$

$$= \log r^{-\frac{2}{2}} = \frac{-2}{2} \log r = -1$$

ج) $\log(\omega + r\sqrt{4}) + \log(\omega - r\sqrt{4}) = \log(\omega^2 - (r\sqrt{4})^2)$

$$= \log(\omega^2 - 4r^2) = \log(1 - 4) = \log(-3) = 0$$

د) $\log \frac{(\sqrt{5} + r)}{(\sqrt{5} - r)}$

$$(\sqrt{5} + r)(\sqrt{5} - r) = (\sqrt{5})^2 - r^2 = 5 - r^2 = 1$$

$$\sqrt{5} + r = \frac{1}{\sqrt{5} - r}$$

$$= \log \frac{1}{\sqrt{5} - r} = \log (\sqrt{5} - r)^{-1} = -\log \sqrt{5} - r = -1$$

$$\text{ث) } \frac{1}{1+\log_r^r} + \frac{1}{1+\log_r^r} = \frac{1}{1+\log_r^r} + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{\log_r^r}}$$

$$= \frac{1}{1+\log_r^r} + \frac{1}{\frac{\log_r^r + 1}{\log_r^r}} = \frac{1}{1+\log_r^r} + \frac{\log_r^r}{1+\log_r^r} = \frac{1+\log_r^r}{1+\log_r^r} = 1$$

$$\text{ج) } (a^{\log_r^r})^{\log_a^a} = a^{\log_r^r \times \log_a^a}$$

$$\text{نائبه توان : } \log_r^r \times \log_a^a = \frac{\log_r^r}{\log_r^r} \times \frac{\log_a^a}{\log_a^a} = \frac{\log_r^r}{\log_r^r} \times \frac{\log_r^r}{\log_a^a} = \frac{\log_r^r}{\cancel{r \log_r^r}} \times \frac{\cancel{r} \log_r^r}{\log_a^a} = \frac{r}{r} \frac{\log_r^r}{\log_a^a} = \frac{r}{r} \log_a^a$$

$$\text{نتیجه} = a^{\frac{r}{r} \log_a^a} = (a^{\log_a^a})^{\frac{r}{r}} = r^{\frac{r}{r}} = \sqrt{r^r} = r \sqrt{r}$$

$$\text{ج) } \log_{\sqrt{9}} \frac{1}{\sqrt{11}} + \log_{\sqrt{16}} \sqrt{11} + 1 \cdot \log_r^r$$

$$\log_{\sqrt{9}} \frac{1}{\sqrt{11}} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{11}} = \log_{\frac{3}{2}} r^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{r}{r}} \log_r^r = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\log_{\sqrt{16}} r^{\frac{r}{r}} = \frac{\frac{r}{r}}{\frac{r}{r}} \log_r^r = \frac{r}{r}$$

$$1. \quad \overset{2}{\log 2} = \overset{2}{\log 2^1} = \overset{2}{\log 2^{\frac{1}{2}}} = 1$$

$$\text{حاصل عبارت} = -4 + \frac{2}{8} + 9 = 4 + \frac{2}{8} = \frac{27}{8}$$

(۴) اگر $3^a = A$ ، مقدار $\log_9 A^2$ را بر حسب a بدست آورید.

$$\log_9 (3^a)^2 = \log_9 3^2 \times 3^{2a} = \log_9 3^{2+2a}$$

$$= (2+2a) \log_9 3 = 2+2a$$

(۵) اگر $\log 2 = a$ ، $\log 3 = b$ ، مقدار $\log \sqrt[4]{54}$ را بر حسب a ، b بیابید.

$$\log \sqrt[4]{54} = \log 54^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log 54 = \frac{1}{4} \log (27 \times 2)$$

$$= \frac{1}{4} (\log 27 + \log 2) = \frac{1}{4} (3 \log 3 + \log 2)$$

$$= \frac{1}{4} (3a + b)$$

(۶) اگر $\log_8 3 = \frac{5}{8}$ باشد، مقدار $\log_{12} 6$ ، کدام است؟

$$\frac{7}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{8}{11} \quad (۲)$$

$$\frac{13}{18} \quad (۱)$$

$$11 = \log_9 2 = \log_{9^{\frac{1}{2}}} 2 = \frac{1}{2} \log_9 2 \rightarrow \log_9 2 = 1, 4$$

$$\log_{12} 2 = \frac{\log_2 2^{\log_2 12}}{\log_2 12} = \frac{\log_2 2 + \log_2 12}{\log_2 2 + \log_2 12} = \frac{1 + 1}{2 + 1} = \frac{2}{3} = \frac{14}{21}$$

گزینہ ۱

(v) اگر $(\frac{5}{4})^{2x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^x$ باشد، $\log_8(9x+1)$ کددام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

$$\left(\frac{r}{0}\right)^{2n-1} = \left(\left(\frac{0}{r}\right)^r\right)^{2n} \rightarrow \left(\frac{r}{0}\right)^{2n-1} = \left(\left(\frac{r}{0}\right)^{-r}\right)^{2n}$$

$$\rightarrow \left(\frac{r}{0}\right)^{2n-1} = \left(\frac{r}{0}\right)^{-2n} \rightarrow 2n-1 = -2n$$

$$\rightarrow 2n + 2n - 1 = 0 \xrightarrow{2n-1=2} \begin{cases} n = -1 \\ n = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$n = -1 \rightarrow \log_8(-9+1) = \log_8^{-8} \quad \times$$

$$n = \frac{1}{2} \rightarrow \log_8\left(9 \times \frac{1}{2} + 1\right) = \log_8 2 = \log_{2^3} 2^1$$

$$= \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3}$$

گزینہ ۱

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

قسمت چهارم

جلسه پنجم: صفحات ۱۰۵ تا ۱۱۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

معادله لگاریتمی :

معادلاتی که در آنجا، مجهول در جلوی لگاریتم یا در پایه قرار دارد را معادلات لگاریتمی می‌گویند.

برای حل معادلات لگاریتمی در صورت لزوم از ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنیم تا به یکی

از دو صورت زیر در آوریم :

۱) هر دو طرف فقط یک عبارت لگاریتمی هم پایه باشد. در این حالت چون تابع لگاریتم

یک به یک است می‌توانیم لگاریتم‌ها را از دو طرف خط بزنیم و معادله حاصل را حل کنیم.

$$\text{غنی:} \quad \log_a u = \log_a v \Rightarrow u = v$$

۲) یک طرف لگاریتم و طرف دیگر عدد (یا عبارت) باشد. در این حالت از تعریف

لگاریتم استفاده می‌کنیم و معادله را به شکل توان می‌نویسیم غنی :

$$\log_a u = b \Rightarrow u = a^b$$

تذکره مهم : بعد از یافتن جواب یا جواب‌ها آن‌ها را در معادله لگاریتمی قرار می‌دهیم.

طبق آنچه در تویع نگارشی گفتیم باید جوابی نگارشم مثبت و منهای مثبت و منفی
یک باشد. جوابی که یکی از شروط را نقض کند مورد قبول نیست.

مثال: معادلات گسسته زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \log(2x-1) + \log(x+3) = \log 20 - \log 2$$

$$\log(2x-1)(x+3) = \log \frac{20}{2} \rightarrow \cancel{\log(2x^2 + 6x - 3)} = \cancel{\log 10}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 3 = 10 \rightarrow 2x^2 + 6x - 13 = 0$$

$$\Delta = 20 - 4(2)(-13) = 20 + 104 = 124 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{124}}{4} < \begin{cases} \frac{-6 + \sqrt{124}}{4} = 2 \checkmark \\ \frac{-6 - \sqrt{124}}{4} = -\frac{9}{2} \times \end{cases}$$

$$x = -\frac{9}{2} \rightarrow \log(2x(-\frac{9}{2}) - 1) = \log -10 \times, \log(-\frac{9}{2} + 3)x$$

$$\text{ب) } \log(x+1) = \frac{1}{3} \log(x^2 + x + 3)$$

$$\times^3 \rightarrow 3 \log(x+1) = \log(x^2 + x + 3)$$

$$\rightarrow \cancel{\log(x+1)^3} = \cancel{\log(x^2 + x + 3)}$$

$$\rightarrow x^2 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 + x + 3 \rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(r)(-r) = 9 + 14 = 20 \rightarrow n = \frac{-r \pm 0}{4} < \begin{matrix} \frac{1}{r} \checkmark \\ -r \times \end{matrix}$$

$$\therefore) \log_r(rn+1) - \log_r(n+r) = 1$$

$$\rightarrow \log_r \frac{rn+1}{n+r} = 1 \rightarrow \frac{rn+1}{n+r} = r^1 \rightarrow rn+1 = rn+r$$

تساوی

$$\rightarrow rn - rn - 0 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 4(r)(-0) = 9 + 0 = 9$$

$$n = \frac{r \pm 0}{4} < \begin{matrix} \frac{0}{r} \checkmark \\ -1 \checkmark \end{matrix}$$

$$=) \log_n(rn+1) = r - \log_n(n-r)$$

$$\rightarrow \log_n(rn+1) + \log_n(n-r) = r$$

$$\rightarrow \log_n(rn+1)(n-r) = r \rightarrow (rn+1)(n-r) = n^r$$

$$rn^r - 1 \cdot n + 1 \cdot n - r \cdot 1 = n^r \rightarrow rn^r - 1 \cdot n - r \cdot 1 = 0$$

$$\div r \rightarrow n^r - 0 \cdot n - r \cdot 1 = 0 \rightarrow (n-1)(n+r) = 0$$

$$< \begin{matrix} n = 1 \checkmark \\ n = -r \times \end{matrix}$$

$$\text{ب) } \log_r (r + \log_r n) = r$$

بهم توان

$$\rightarrow r + \log_r n = r^r \rightarrow \log_r n = r^r - r$$

$$\rightarrow \log_r n = r \rightarrow n = r^r = 9$$

بهم توان

$$\text{ج) } \log_\delta n + \log_{\frac{1}{\delta}} n - r \log_{r\delta} n = \log_r r\delta$$

$$\rightarrow \log_\delta n + \log_{\frac{1}{\delta}} n - r \log_{r\delta} n = \log_r r\delta$$

$$\rightarrow \log_\delta n + \frac{1}{\frac{1}{r}} \log_\delta n - r \times \frac{1}{r} \log_\delta n = r \log_r \delta$$

$$\rightarrow \log_\delta n + r \log_\delta n - \log_\delta n = r \log_r \delta$$

$$\rightarrow r \log_\delta n = r \log_r \delta \rightarrow \log_\delta n = \log_r \delta$$

بهم توان

$$\rightarrow n = \delta^{\log_r \delta}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم: نمودارها و کاربردهای

توابع نمایی و لگاریتمی

قسمت اول

جلسه ششم: صفحات ۱۱۵ تا ۱۱۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

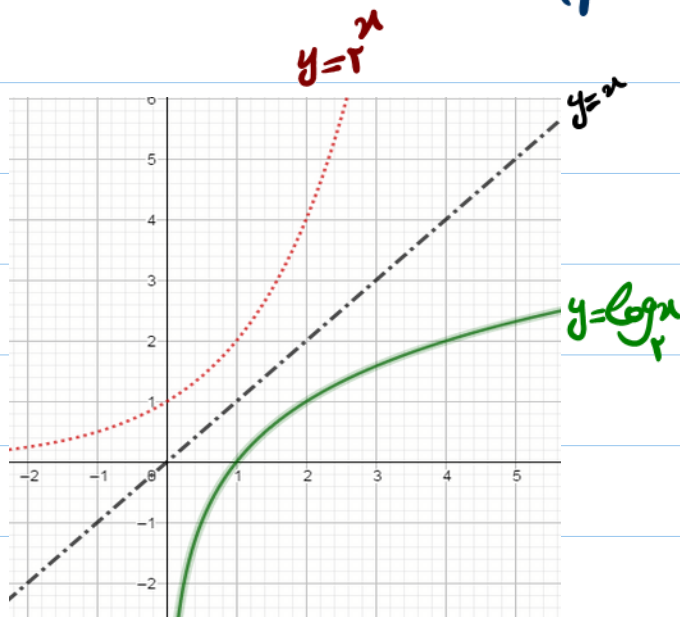
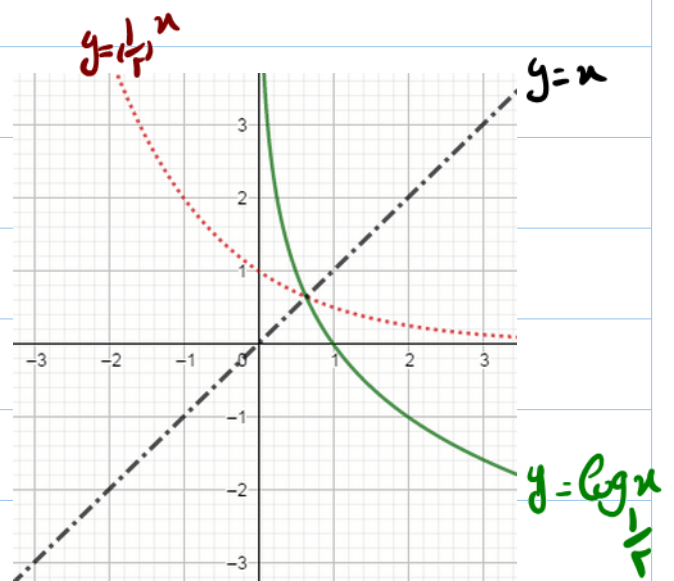
اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

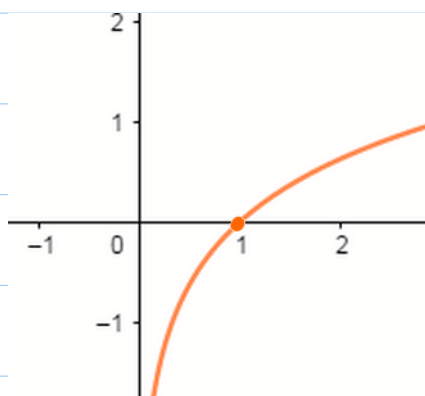
رسم نمودار تابع گسسته :

همانگونه که گفتیم تابع گسسته دارای تابع معکوس است. پس نمودار آن متوسعه نمودار تابع معکوس

نسبت به خط $y=x$ (نیم‌راشه اول و دوم) است.

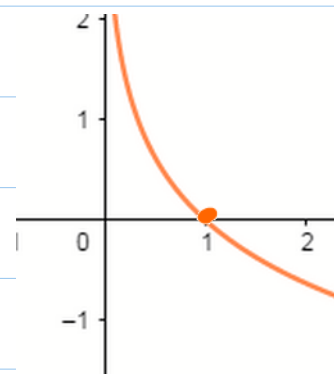


در حالت کلی نمودار تابع $y=\log_a x$ با توجه به مقدار a به یکی از دو صورت زیر است:



$a > 1$

افزاینده، $D=(0, +\infty)$, $R=\mathbb{R}$



$0 < a < 1$

کاهنده، $D=(0, +\infty)$, $R=\mathbb{R}$

برای رسم توابع لگاریتمی ساده مانند $y = \log_a x$ از روش نقطه‌ای استفاده می‌کنیم.

سه مقدار زیر را به x می‌دهیم :

۱) مبدا ۲) یک ۳) معکوس مبدا

مثال: مندرار سه تابع $y = \log_2 x$ ، $y = \log_3 x$ و $y = \log_5 x$ را رسم کنید و

با یکدیگر مقایسه کنید.

$$y = \log_2 x$$

x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-1	0	1

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

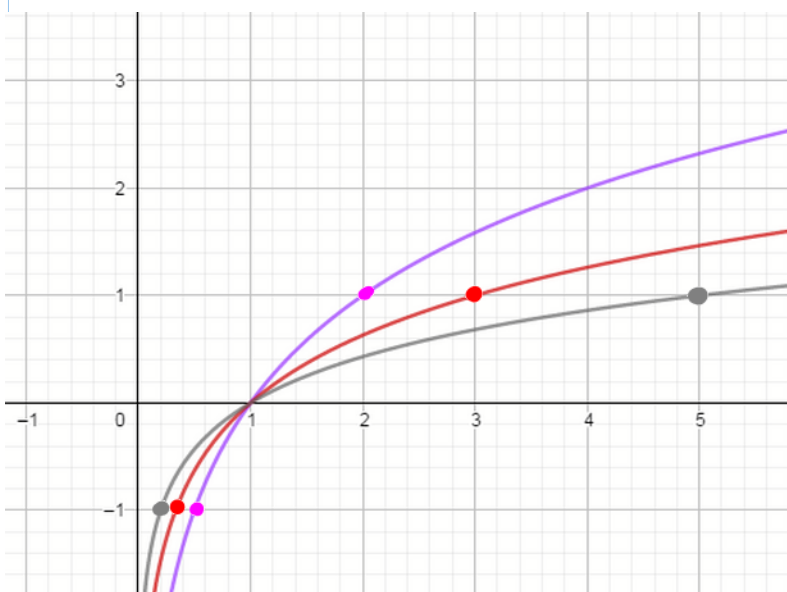
$$y = \log_3 x$$

x	$\frac{1}{3}$	1	3
y	-1	0	1

$$y = \log_5 x$$

x	$\frac{1}{5}$	1	5
y	-1	0	1

هر چه پایه بزرگتر شود مندرار



$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_3 x$$

$$y = \log_5 x$$

در دامنه‌ی مجزای هر یک

فشارده‌تر می‌شود و

به محدد x نزدیک‌تر می‌شود.

نکته: توابع $y = \log_a x$ ، $y = \log_a x$ و $y = \log_a x$ را رسم کنید و با یکدیگر مقایسه کنید.

تذکره: از قدرش انتقال برای رسم توابع لگاریتمی به صورت $y = k \log_a (x \pm b) \pm c$ استفاده کنیم.

نکته: حتماً از نقطه‌های هم برای رسم اسکونه توابع استفاده کرد. وقت کنید همیشه اعدادی

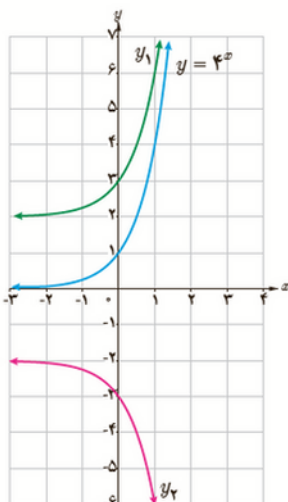
به جای a قرار دهید تا به $\log_a a$ ، $\log_a a^m$ یا $\log_a \frac{m}{n}$ برسیم.

نکته: برای یافتن محل برخورد نمودار تابع لگاریتمی با محورهای مختصات کافی است y را با یکا صفر قرار داده و محاسبه نگارشی حاصل را حل کنیم.

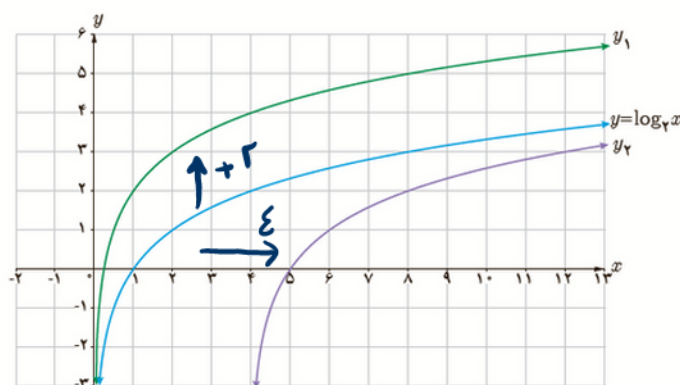
نکته: برای یافتن خط‌های که تابع لگاریتمی به آن نزدیک می‌شود (میانگین قائم) دامنه تابع را بیابید.

مثال

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطه توابع انتقال یافته را بنویسید.



الف



ب

$$\text{الف) } y_1 = 4^x + 2 \quad \text{و} \quad y_2 = -4^x - 2$$

$$\text{ب) } y_1 = \log_2 x + 2 \quad \text{و} \quad y_2 = \log_2 (x - 4) \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=4 \rightarrow y=1 \end{cases}$$

مثال:

کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۱) $y = \log_7 (x - 1)$

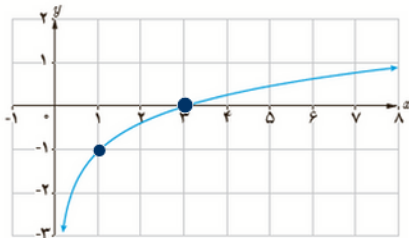
۲) $y = 3^x + 1$

۳) $y = 1 - 3^x$

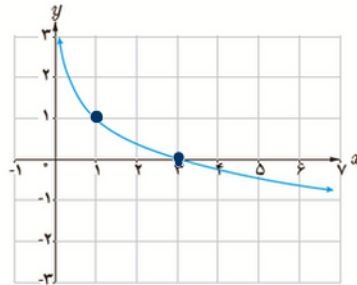
۴) $y = \log_7 x - 1$

۵) $y = 1 - \log_7 x$

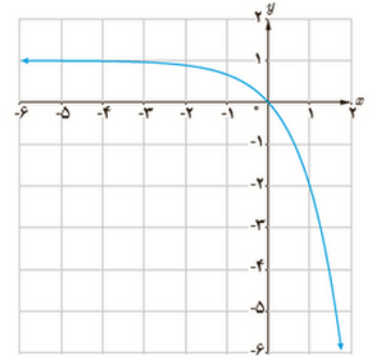
۶) $y = 3^{(x-2)}$



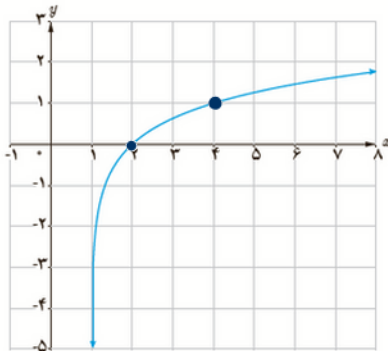
(الف)



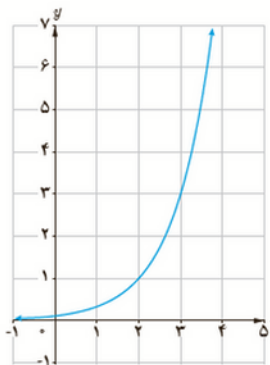
(ب)



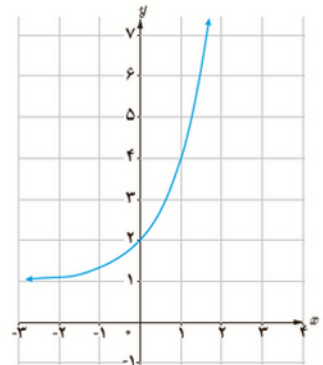
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

الف) ۴) $y = \log_7 x - 1$

$$\begin{cases} x=7 \rightarrow y=1-1=0 \\ x=1 \rightarrow y=0-1=-1 \end{cases}$$

ب) ۵) $y = 1 - \log_7 x$

$$\begin{cases} x=7 \rightarrow y=1-1=0 \\ x=1 \rightarrow y=1-0=1 \end{cases}$$

پ) ۲) $y = 1 - 3^x$

$$x=0 \rightarrow y=1-1=0$$

ث) ۱) $y = \log_7(x-1)$

$$\begin{cases} x=2 \rightarrow y=0 \\ x=8 \rightarrow y=\log_7(8-1)=\log_7 7=1 \end{cases}$$

ج) ۶) $y = 3^{(x-2)}$

۳) ۲) $y = 3^x + 1$

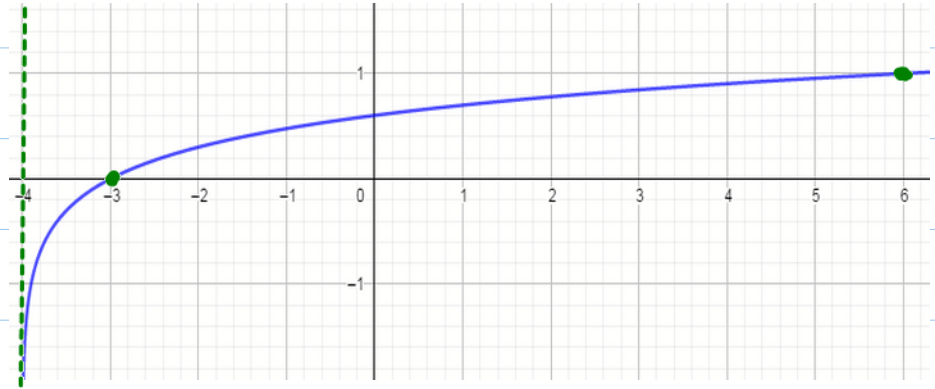
مثال: نمودار تابع لگاریتمی زیر را رسم کنید.

الف) $y = \log_{10}(x+4)$

x	-4	4
y	0	1

$\log_{10}$: $\log_{10}$
 $\log_{10}$: $\log_{10}$

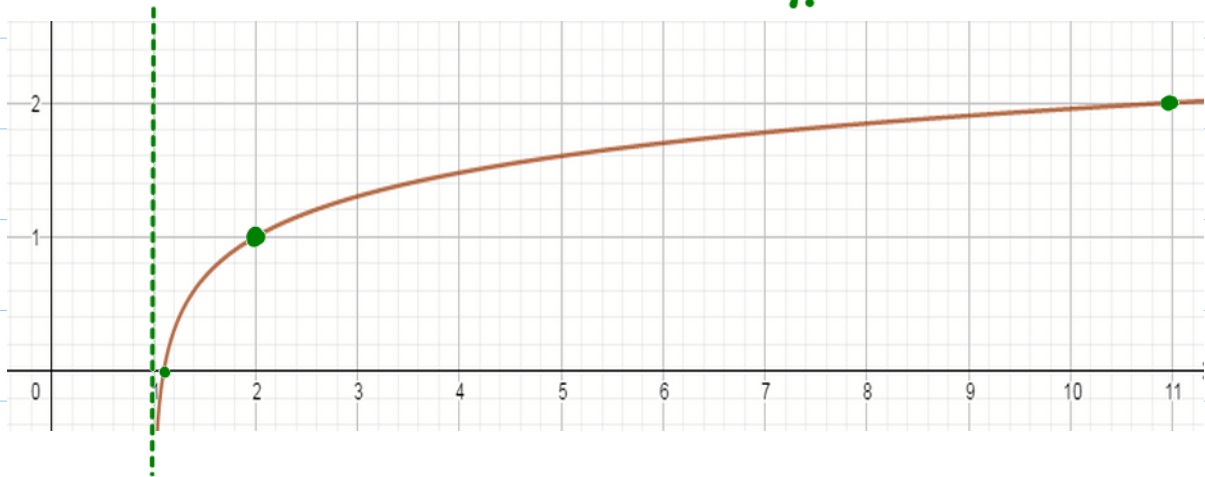
D: $x+4 > 0$
 $x > -4$



ب) $y = 1 + \log_{10}(x-1)$

x	1	11
y	0	1

$1 + \log_{10}$: $1 + \log_{10}$
 $1 + \log_{10}$: $1 + \log_{10}$



محور برش را به کار ببریم : $0 = 1 + \log_{10}(x-1) \rightarrow -1 = \log_{10}(x-1)$

$\rightarrow x-1 = 10^{-1} = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{1}{10} + 1 = \frac{11}{10}$

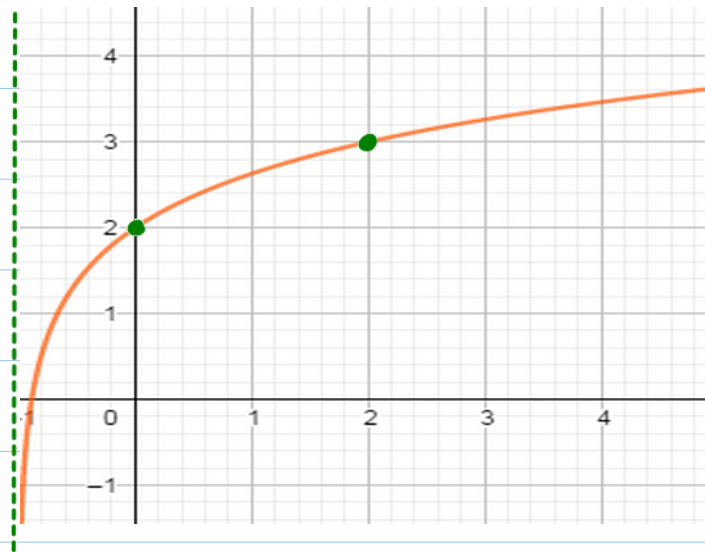
D: $x-1 > 0 \rightarrow x > 1$

$$\text{۲-)} y = 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$$

x	۰	۲
y	۲	۳

$$x=2 \quad \leftarrow \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{2^{-1}} 2 = -1$$

تمرین: محل ریشه‌ها را با هم در x ها مشخص کنید.



$$D: x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم: نمودارها و کاربردهای

توابع نمایی و لگاریتمی

قسمت دوم

جلسه هفتم: صفحات ۱۱۵ تا ۱۱۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

کاربرد توابع نمایی

به صورت کلی یک تابع با ضابطه $f(x) = k a^x$ که $k \in \mathbb{R}$ ، a عدد حقیقی،

مثبت و مخالف یک است، رفتار نمایی دارد که کاربرد زیادی در مسائل زیستی،

اقتصادی، مهندسی و... دارد.

مفهوم رشد نمایی

مثال های زیر را در نظر بگیرید :

- باتری ها می توانند هر ۲۴ ساعت یک بار دوباره پر شوند.

- اگر نرخ سود سالانه ۱۰۰ درصدی سرمایه خود داشته باشید، هر سال سرمایه شما دو

برابر خواهد شد.

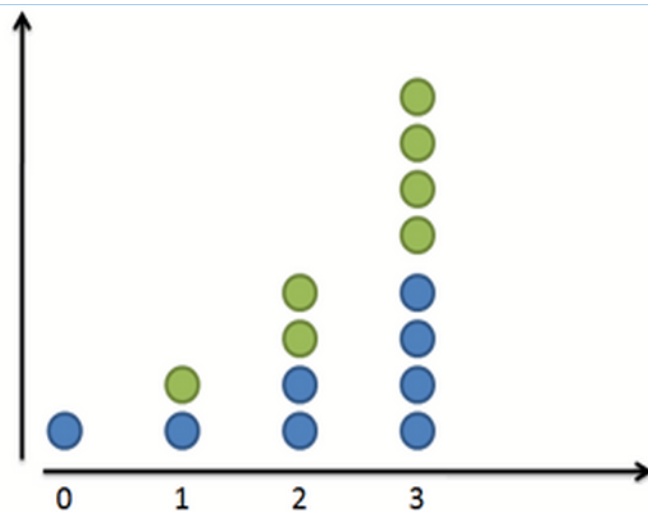
برای این مسائل می توانیم رفتار نمایی را به صورت $f(x) = 2^x$ بنویسیم. از طرفی چون

دوبار کردن، همان رشد ۱۰۰٪ است رابطه بالا را می توان به صورت زیر هم نوشت:

$$f(x) = (1 + 100\%)^x$$

این همان معادله قبل است. نقطه ۲ را به آن چیزی که واقعاً هست تغییر دادیم.

حقیقتاً مقدار اولیه به علاوه ۱۰۰٪.



می‌توانیم هر عددی را به جای ۱۰۰٪ بنویسیم مثلاً ۵٪، ۲۵٪، ۲۰۰٪ و...

و نمودار رشد را برای آن ترسیم کردیم.

معادله کلی رشد نهایی به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است که در آن $f(t)$

مقدار نهایی، c مقدار اولیه و r بیانگر میزان رشد یا نرخ رشد است.

تذکره: تابع $f(t) = c(1-r)^t$ را زوال نهایی می‌گویند.

مثال ۱): مقدار گرم باتری در هر ساعت، ۱.۵ برابر می شود. اگر بعد از دو ساعت

مقدار باتری ۴.۵ گرم باشد، در پایان ساعت سوم مقدار باتری چقدر گرم

خواهد شد؟

$$f(t) = k(1.5)^t$$

$$f(2) = 4.5 \xrightarrow{\text{رابطه}} f(2) = 4.5 = k(1.5)^2$$

$$k(1.5)^2 = 4.5 \rightarrow k = \frac{4.5}{(1.5)^2} = \frac{4.5}{2.25} = 2$$

$$f(3) = 2(1.5)^3 = 2 \times 3.375 = 6.75 \text{ گرم}$$

مثال ۲) قیمت یک کام ۴۰۰۰ تومان است، بی - طرحی بازخ نکوم ۳ درصد

در حال افزایش است. قیمت آن دو سال دیگر چقدر خواهد بود؟

$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow f(2) = 4000 \cdot \left(1 + \frac{30}{100}\right)^2$$

$$f(2) = 4000 \times (1.3)^2 = 4000 \times 1.69 = 6760 \quad \text{تومان}$$

مثال ۳) اگر جمعیت یک کشور به طارنی و با ضرب ثابت ۰.۲ در سال کاهش یابد

چند درصد سال، جمعیت این کشور ۱۸ برابر جمعیت اولیه می شود؟

$$(\quad) \quad \frac{1}{8} = (\frac{1}{98})^2 \quad , \quad \frac{1}{9} \approx (\frac{1}{98})^5$$

$$f(t) = c(1-r)^t$$

$$\begin{cases} r = 0.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t) = 0.18c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0.18c = c(1-0.2)^t$$

$$\stackrel{\div c}{\Rightarrow} 0.18 = (\frac{1}{98})^t$$

$$\frac{1}{8} \approx (\frac{1}{98})^2 \rightarrow (\frac{1}{98})^2 = (\frac{1}{98})^t \quad \frac{1}{9} \approx (\frac{1}{98})^5 \rightarrow ((\frac{1}{98})^5)^2 = (\frac{1}{98})^t$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{98})^{10} = (\frac{1}{98})^t \Rightarrow t = 10$$

مفهوم نیمه عمر:

منظور از نیمه عمر یک ماده، مدت زمانی است که نیمی از مقدار اولیه آن از بین می رود.

اگر A_0 مقدار اولیه و A مقدار ماده بعد از n نیمه عمر باشد خواهیم داشت:

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

برای یافتن مقدار نیمه عمر از رابطه مقابل کسب می‌گیریم: $n = \frac{t}{T}$ $\frac{\text{کل مدت زمان}}{\text{طول نیمه عمر}}$

مثال ۴) نیمه عمر یک ماده ۴ سال است. اگر در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم از این ماده

موجود باشد، بعد از ۸۰ سال چند میلی‌گرم از این ماده از بین می‌رود؟

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 4. \\ A_0 = 100 \\ t = 80. \\ A = \text{مقدار ماده بعد از ۸۰ سال} \end{array} \right.$$

$$n = \frac{t}{T} = \frac{80}{4} = 20$$

$$A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow A = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 100 \times \frac{1}{4} = 25$$

مقدار ماده ای که بعد از ۸۰ سال از بین می‌رود = $100 - 25$

۷۵ میلی‌گرم

کاربرد گارتم:

۱) مسائل زلزله: اگر مدت زلزله (زمان لرزه) M ریشتر و انرژی آزاد شده

از آن E (با واحد اِرت) باشد داریم:

$$\log E = 11,8 + 1,5 M$$

مثال: در یک زلزله ۵ ریشتری مقدار انرژی آزاد شده چقدر است؟

$$\log E = 11,8 + 1,5 \times 5 = 11,8 + 7,5 = 19,3 \rightarrow \log E = 19,3 \rightarrow E = 10^{19,3}$$

۲) مثل نینه عمر، رشد و زوال:

هرگاه در این مثل بهر دو در توان باشد (عقب زدن) با گرفتن گارتم از دو طرف سری

و استفاده از ویژگی $\log_a^n = n \log_a$ و مقایسه گارتم راده شده، مقدار مجهول را می یابیم.

مثال:

مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر مورد نظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی مانده را از دست

بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می ماند؟ ($\log 3 = 0,48$)

۲۴۰ (۴)

۲۷۰ (۳)

۳۰۰ (۲)

۳۶۰ (۱)



ما با دوره ۳ روزه

$$1 = 25(1 - 1/10)^t \xrightarrow{\div 25} \frac{1}{25} = (1/10)^t \xrightarrow{\log} \log \frac{1}{25} = \log 10^{-2}$$

$$\log 10^{-2} = t \log \frac{1}{10} \rightarrow -\log 2 = t(\log 10 - \log 1)$$

$$\rightarrow -1/48 = t(2 \times 1/48 - 1) \rightarrow t = \frac{-1/48}{-1/24} = 12 \text{ روز}$$

$$\text{روز} = 12 \times 2 = 24$$

مثال: یک قاتی کاملاً باری روزانه ۵ درصد بادش را از دست می‌دهد. با این قاتی پس

از چند روز به نصف بار روز اول می‌رسد؟ ($\log 2 = 1/2.1$, $\log 19 = 1.287$)

$$\frac{1}{2}A = A(1 - 1/5)^t \rightarrow \frac{1}{2} = 1/40^t$$

$$\xrightarrow{\log} \log \frac{1}{2} = \log 1/40^t \rightarrow \log 2^{-1} = t \log 1/40$$

$$\rightarrow -\log 2 = t \log \frac{19}{2} \rightarrow -\log 2 = t(\log 19 - \log 2 \times 1)$$

$$\rightarrow -\log 2 = t(\log 19 - \log 2 - \log 1)$$

$$\rightarrow -1/2.1 = t(1.287 - 1/2.1 - 1) \rightarrow -1/2.1 = t(-1.12)$$

$$t = \frac{-1/2.1}{-1.12} = 21.5$$

مثال: نیمه عمر یک ماده رادیو اکتیو ۱۰ سال است. پس از چند سال از ۱۰۰ میلی گرم کربن

۴ میلی گرم باقی می ماند؟ ($\log 2 = 1/3$, $\log 1/4 = -1.39$)

$$t_0 = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{10}} \rightarrow 1/4 = 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$\log \rightarrow \log 1/4 = \log 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$\rightarrow -1.39 = -\frac{t}{10} \times 1/3 \rightarrow t = \frac{-1.39}{-1/3} = 13 \text{ سال}$$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل ششم: حد و پیوستگی

درس اول: فرایندهای حدی

جلسه اول: صفحات ۱۲۰ تا ۱۲۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

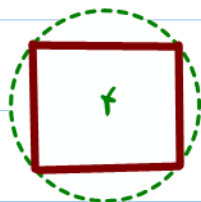
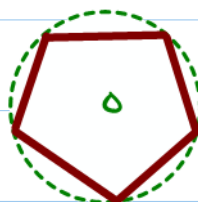
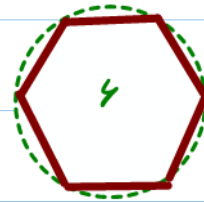
گروه ریاضی
استان همدان

قبل از آنکه تعریف دقیق حد یک تابع را بگیریم، لازم است با مفاهیم زیر آشنا شویم.

(۱) فزاینده‌ی:

- در شکل‌های زیر در هر مرحله یک ضلعی منتظم درون دایره قرار داریم. اگر n را زیاد کنیم

مساحت n ضلعی به مساحت دایره نزدیک می‌شود.



...

پس می‌توانیم بگوییم مساحت چند ضلعی‌های داخلی را به همان اندازه که خود هم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه مقدار اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

- دنباله $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ را در نظر بگیرید. اگر n خیلی بزرگ را بزرگ

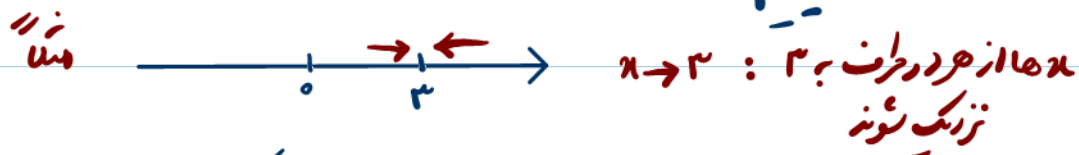
دیده‌تر کنیم، عبارت دنباله کوچکتر شده و به صفر نزدیک می‌شود.

مثال‌ها را بالا بنویسید ای از فزاینده‌های حدی هستند.

۱۲) میل کردن :

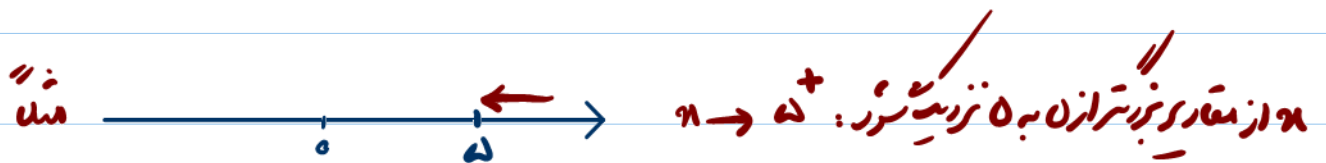
وقتی می‌گوئیم a به a میل می‌کند یعنی x بسیار به عدد a نزدیک می‌شود ولی هرگز

برابر عدد a نمی‌شود و می‌نویسیم $a \rightarrow x$.



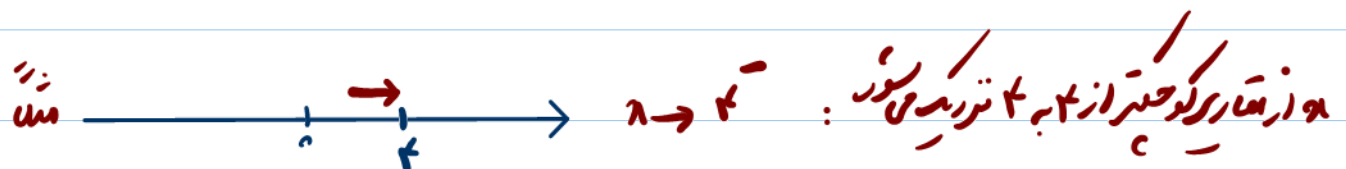
وقتی می‌نویسیم $a^+ \rightarrow x$ یعنی x از مقادیر بزرگتر از a ، به a بسیار نزدیک می‌شود. در این

حالت می‌گوئیم x از سمت راست به a میل می‌کند.



وقتی می‌نویسیم $a^- \rightarrow x$ یعنی x از مقادیر کوچکتر از a ، به a بسیار نزدیک می‌شود. در این

حالت می‌گوئیم x از سمت چپ به a میل می‌کند.

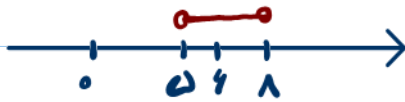


۱۳) همسانگی :

فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل a را یک همسانگی می‌گوئیم.



یک‌هنگامی x_0 (a, b)



مثال: بازه $(5, 8)$ یک‌هنگامی عدد ۶ است.

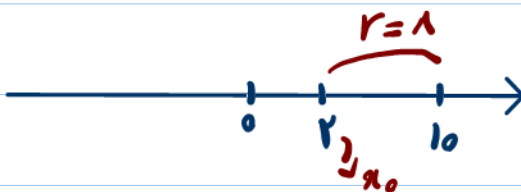
اگر عدد x_0 از همسایگی (a, b) حذف کنیم یعنی $(a, b) - \{x_0\}$ به مجموعه بدلت رسیده



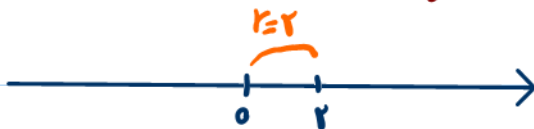
یک‌هنگامی معذوف x_0 می‌گیریم.

اگر $r > 0$ باشد بازه باز $(x_0 - r, x_0 + r)$ را یک‌هنگامی راست عدد x_0 و بازه باز

$(x_0 - r, x_0)$ را یک‌هنگامی چپ x_0 می‌گیریم.



مثال: $(1, 10)$ یک‌هنگامی راست ۲



$(0, 2)$ یک‌هنگامی چپ ۲

حال می‌توانیم تعریف حد را بیان کنیم.

تعریف حد تابع:

فرض کنید تابع $y = f(x)$ در یک‌هنگامی معذوف a تعریف شده باشد (یعنی در حوزه a تعریف شود)

یا نشود (مربع ندارد). می‌گوئیم حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ برابر عدد L است هرگاه

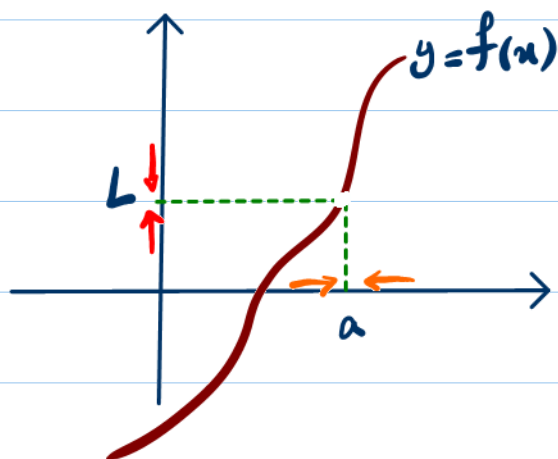
با نزدیک شدن x به a مقادیر تابع f (هنگامها) به L نزدیک شوند و این را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

تعریف بالا را به این صورت هم می‌توان گفت:

حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ برابر L است هرگاه مقادیر تابع f (هنگامها) را به هر اندازه

را بخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود.



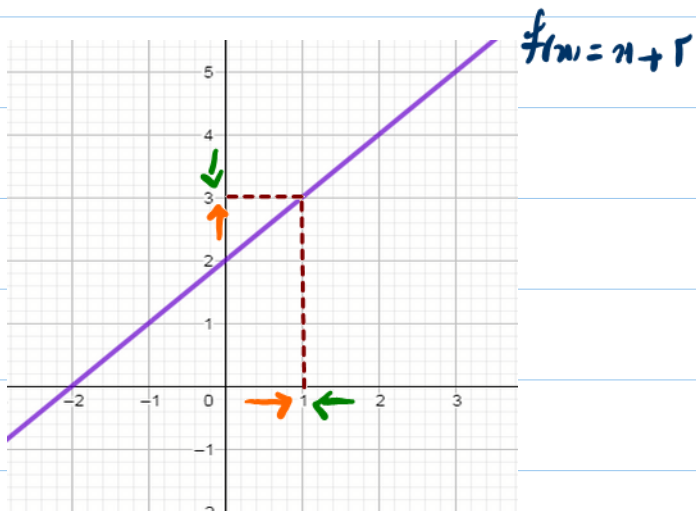
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

مثال: تابع $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول و نمودار، حد تابع را وقتی $x \rightarrow 1$

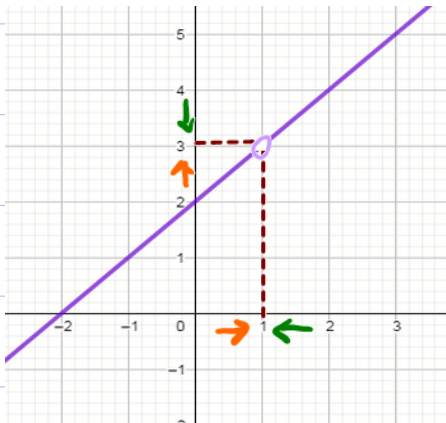
می‌توانیم پیدا کنیم.

x	0	.0	.9	.99	$\rightarrow 1$	$\leftarrow 1.1$	1.1	1.0	1
$y = x + 2$	2	2.0	2.9	2.99	$\rightarrow 3$	$\leftarrow 3.1$	3.1	3.0	3

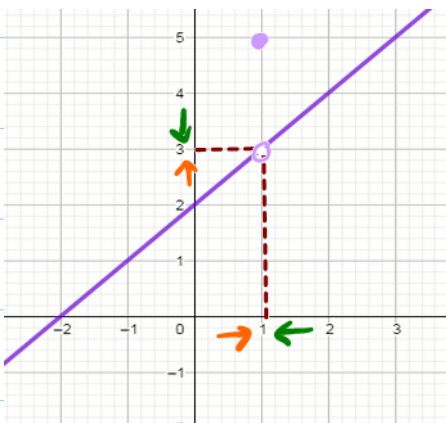
$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$



در دو حالت زیر هم حد تابع در $x=1$ برابر 3 است.



$$g(x) = x + 2, \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$



$$h(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$$

تعریف حد راست:

اگر تابع f در یک همگرایی راست a تعریف شده باشد و گوئیم حد راست تابع f در نقطه $a = x_0$

برابر L است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد،

به شرط آنکه x درست راست به قدر کافی به a نزدیک شود و می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

تعریف حد چپ:

اگر تابع f در یک همگرایی چپ a تعریف شده باشد و گوئیم حد چپ تابع f در نقطه $a = x_0$

برابر L است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد،

به شرط آنکه x درست چپ به قدر کافی به a نزدیک شود و می نویسیم:

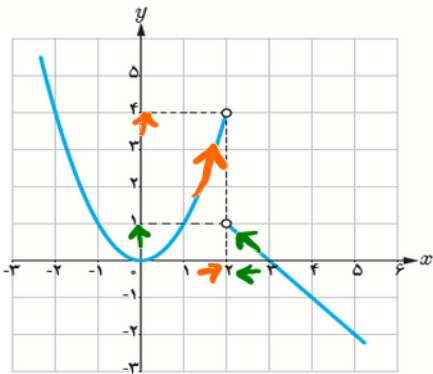
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

نکته: حد تابع f در $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد راست و چپ تابع در $x=a$

موجود و برابر باشند یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x > 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت روبه رو است :



آیا تابع f در نقطه $x=2$ حد دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$$

تابع در $x=2$ حد ندارد زیرا $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

مثال: با توجه به نمودار f ، حدهای خواسته شده را، در صورت وجود، به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 3$$

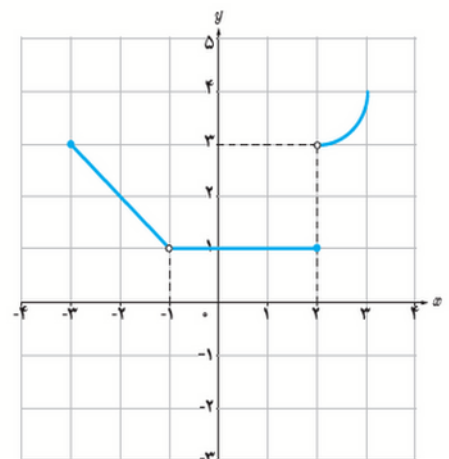
$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

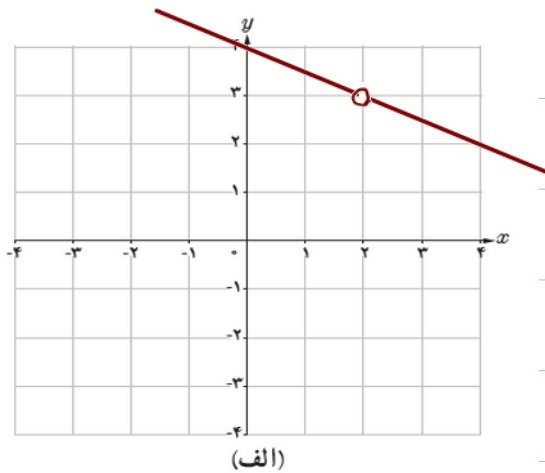
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$



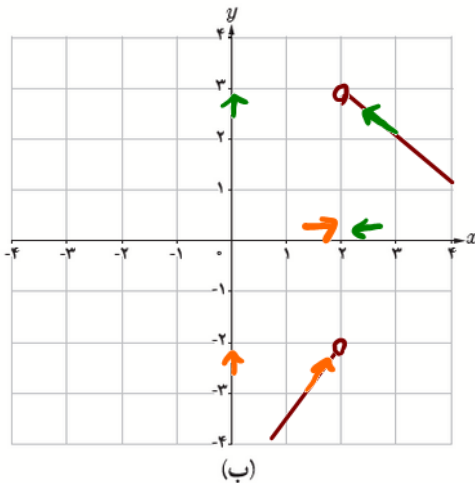
مثال: نموداری از یک تابع رسم کنید که:

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

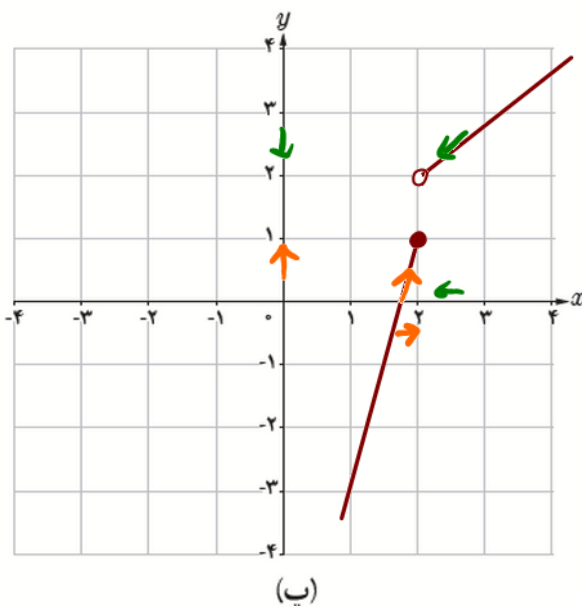
$$x \rightarrow 2^+$$

در $x=2$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2$$

$$x \rightarrow 2^-$$

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

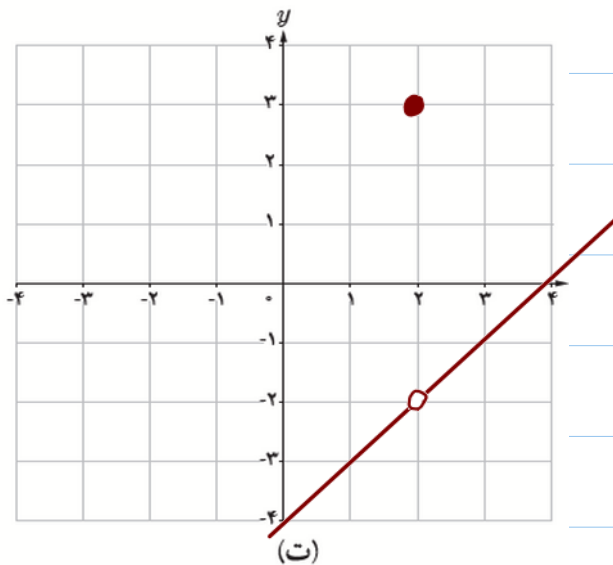
$$x \rightarrow 2^+$$

در $x=2$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$x \rightarrow 2^-$$

(ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



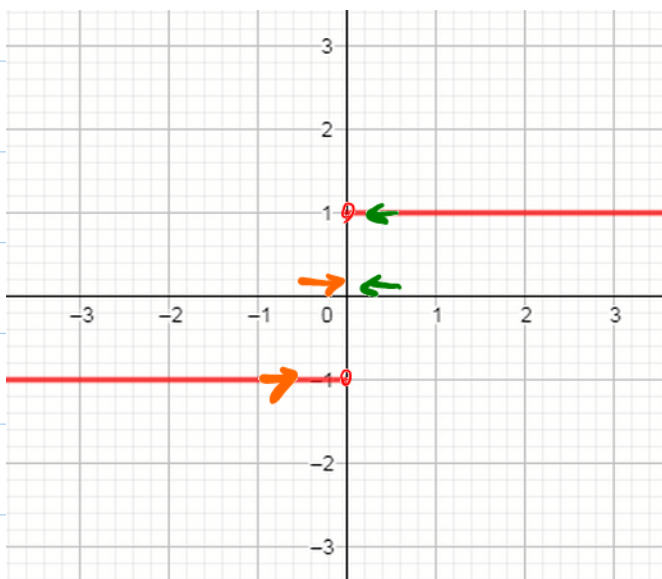
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$$

$$f(2) = 3$$

مثال: عددهای زیر را با اشاره از رسم نموداری بسنجید.

الف $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ -\frac{x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

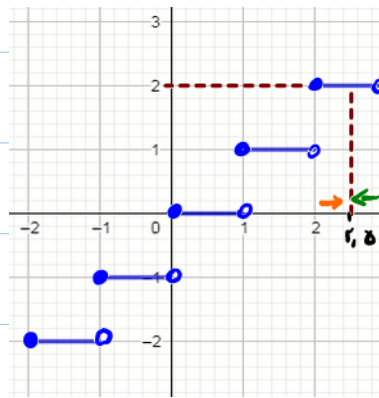


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

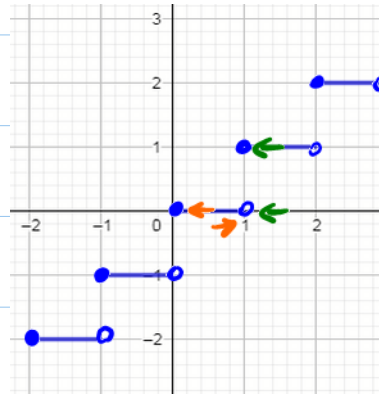
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

تابع در $x=0$ حد ندارد.

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} [x] = 2$



ب) $\lim_{x \rightarrow 1} [x] = \text{حد ندارد}$

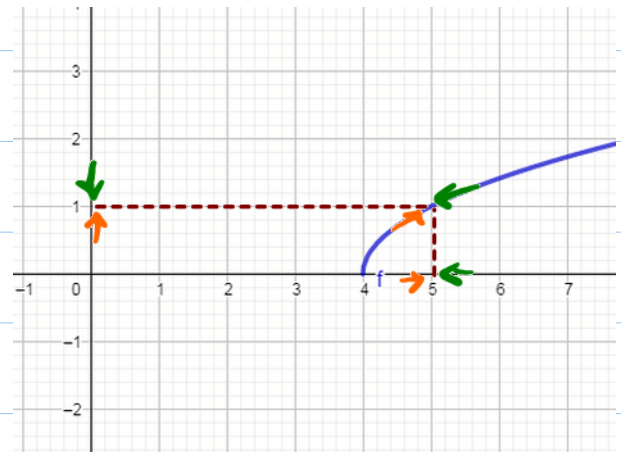


$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$

$x \rightarrow 1^-$

ث) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-4} = 1$



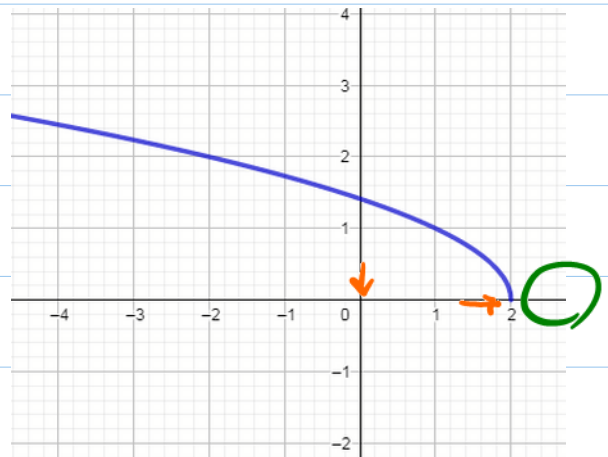
ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2-x} = \text{حد ندارد}$

تابع در همگی رادیکال ۲ تعریف نشده است پس:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2-x} = \text{محدود نیست}$

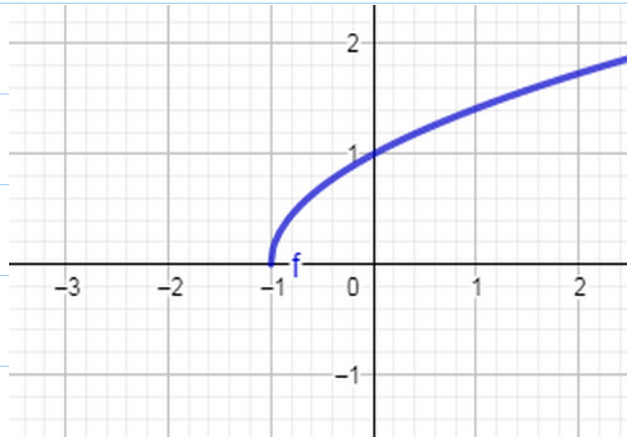
$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} = 0$

$x \rightarrow 2^-$



ج. $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x+1} =$ حد ندارد

زیرا تابع در $x = -1$ تعریف نشده است.

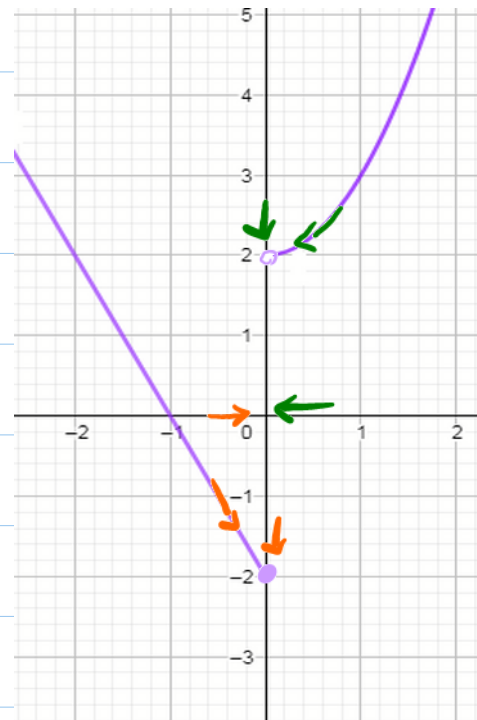


مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ -2x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$

تابع در $x = 0$ حد ندارد.



ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل ششم: حد و پیوستگی

درس دوم: محاسبه حد توابع

قسمت اول

جلسه دوم: صفحات ۱۲۸ تا ۱۳۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

برای محاسبه حد توابع از قنیه‌های زیر کمک می‌گیریم:

قنیه ۱) حد تابع ثابت $f(x) = c$ در هر عدد دلخواه a ، همان مقدار ثابت c است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

مثال $\lim_{x \rightarrow 5} 3 = 3$

قنیه ۲) حد تابع همانی $f(x) = x$ در هر عدد دلخواه a ، برابر a می‌شود یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

مثال $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

قنیه ۳) فرض کنید توابع f و g در نقطه $x = a$ حد داشته باشند و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

آنگاه

(الف) مجموع و تفاضل حاصل ضرب این دو تابع در $x = a$ حد دارند و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm \frac{1}{x} g(x)) = L_1 \pm \frac{1}{x} L_2$$

ب) اگر $L_2 \neq 0$ باشد، آنگاه $\frac{f}{g}$ تابع $\frac{f}{g}$ در $x = a$ حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۲) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $c \in \mathbb{R}$ باشد آنگاه

مثال $\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 2 \times 2 = 4$

الف) $\lim_{x \rightarrow a} (c f(x)) = cL$

مثال $\lim_{x \rightarrow 2} (x)^3 = 2^3 = 8$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = L^n$

قضیه ۵) اگر $f(x)$ یک تابع چند جمله‌ای باشد حد تابع در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر است:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

قضیه ۶) اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$:

الف) اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همگرایی نقطه a تعریف شده باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \sin(f(x)) = \sin L$, $\lim_{x \rightarrow a} \cos(f(x)) = \cos L$

نتیجه: اگر تابع f در همگرایی a تعریف شده باشد و با جایگذاری a به جای x در تابع به یک

عدد مشخص برسیم، مقدار حد همین عدد خواهد شد، جز مواردی که به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$ ، آنگاه حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (7g(x) - \frac{1}{2}f(x)) = 7 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 7 - 1 = 6$$

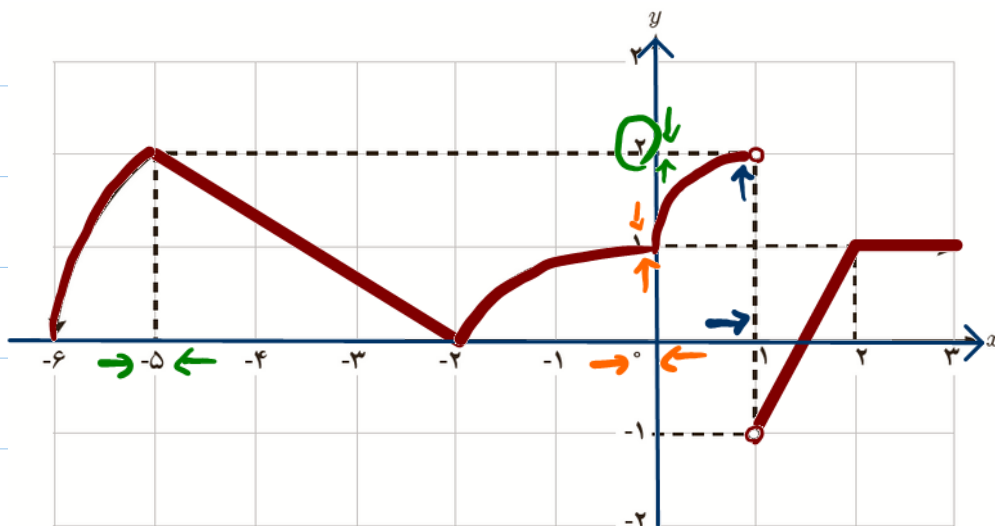
$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1 + f(x))g(x)}{g(x) + 2} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} 1 + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)) \lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow 2} 2}$$

$$= \frac{(1 + 2) \times 1}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} (g(x) + \frac{2}{f(x)})^3 = (1 + \frac{2}{1})^3 = (1 + 1)^3 = 2^3 = 8$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{5x-1} + \frac{f(x)}{g(x)}) = \sqrt{5 \times 2 - 1} + \frac{2}{1} = \sqrt{9} + 2 = 3 + 2 = 5$$

مثال: نمودار تابع f داده شده است. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید:



$$1) \lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{x}{5} - 1\right)^2 \times f(x) = \left(-\frac{5}{5} - 1\right)^2 \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = (-2)^2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x}}{x^2 + f(x)} = \frac{\sqrt{4-0}}{0^2 + \lim_{x \rightarrow 0} f(x)} = \frac{2}{0+1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x - (f(x))^2) = 1^2 + 1 - (\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x))^2 = 1 + 1 - (2)^2 = 2 - 4 = -2$$

مثال: حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (2x^4 - x^3 - 5x^2 + 4) = 2(-1)^4 - (-1)^3 - 5(-1)^2 + 4$$

$$= 2 - (-1) - 5 + 4 = 2 + 1 - 5 + 4 = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 (x^2 - 6x) = \left(1 + \frac{4}{2}\right)^2 (4^2 - 6 \times 4) = 3^2 (16 - 24)$$

$$= 9(-8) = -72$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^0} (5x^3 - 6|x| + 1) = 5(1^3) - 6 \times 1 + 1 = 5 - 6 + 1 = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{\lambda x^r + r x^r + r x}{r x + 1} = \frac{\lambda \left(\frac{1}{r}\right)^r + r \left(\frac{1}{r}\right)^r + r \times \frac{1}{r}}{r \times \frac{1}{r} + 1} = \frac{\lambda \times \frac{1}{\lambda} + r \times \frac{1}{r} + 1}{r + 1}$$

$$= \frac{1 + 1 + 1}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{r}}{1 - \cos \frac{\pi}{r}} = \frac{1 + 1}{1 - 0} = \frac{r}{1} = r$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{r}} (r \sin x + \cos^r x) = r \sin\left(-\frac{\pi}{r}\right) + \cos^r\left(-\frac{\pi}{r}\right)$$

$$= -r \sin \frac{\pi}{r} + \cos^r \frac{\pi}{r} = -r \times \frac{1}{r} + \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^r$$

$$= -r + \frac{r}{r} = \frac{-r + r}{r} = \frac{-0}{r}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{0x - 9} = \sqrt{0 \times 0 - 9} = \sqrt{0 - 9} = \sqrt{-9} = r$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\pi \cos x}{x} = \frac{\pi \cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{\pi \cos \pi}{-\pi} = \frac{\pi \times (-1)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

موارد خاص :

۱) توابع چندضابطه‌ای : اگر حد تابع در نقطه‌ای که ضابطه تابع تغییری کند (نقطه‌ای)

خواسته شده باشد باید حد چپ و حد راست از ضابطه‌ها مربوط به آن می‌شوند.

مثال: حد تابع f را در نقطه a (در صورت وجود) بیابید

$$۱) f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ x - 2 & x < 0 \end{cases}, \quad a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

$0 \neq 0$ پس تابع در $x=0$ حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 2) = 0 - 2 = -2$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} 5 & x < 3 \\ x + 2 & x > 3 \end{cases}, \quad a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 2) = 3 + 2 = 5$$

$5 = 5$ پس تابع در $x=3$ حد دارد

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$$

$$۳) f(x) = \begin{cases} ۳-x & x < ۲ \\ -۱ & x = ۲ \\ x^۲ - ۴ & x > ۲ \end{cases}, \quad a = ۲$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^+} (x^۲ - ۴) = ۲^۲ - ۴ = ۴ - ۴ = ۰$$

۱. $\neq ۰$ پس تابع در $x=۲$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow ۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^-} (۳ - x) = ۳ - ۲ = ۱$$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} (a+۱)x + ۳ & x > -۲ \\ -۲x^۲ + ۱ & x < -۲ \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع f در نقطه $x = -۲$ حد داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^+} (a+۱)x + ۳ = \widehat{(a+۱)(-۲)} + ۳ = -۲a - ۲ + ۳ = -۲a + ۱$$

$$\lim_{x \rightarrow -۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^-} -۲x^۲ + ۱ = (-۲)(-۲)^۲ + ۱ = -۸ + ۱ = -۷$$

$$\lim_{x \rightarrow -۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^-} f(x) \Rightarrow -۲a + ۱ = -۷ \Rightarrow -۲a = -۸ \Rightarrow a = ۴$$

۱۲ حد توابع شامل رادیکال با فرض زوج :

در این توابع باید بررسی شود عبارت رادیکالی در همگی نقطه تعریف شده است یا خیر.

اگر تعریف شود مقدار تابع حد توابع خواهد بود اگر نه حد موجود نیست.

در این توابع هم برای نتایجی که رسم داخل رادیکال هستند حد چپ و راست را می‌نویسیم.

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{2x+4}$$

x	-2
$2x+4$	$- \quad 0 \quad +$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{2x+4} = \sqrt{2(2)+4} = \sqrt{8} = 2.828$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{2x+4} = \text{حد ندارد}$$

تابع در همگی چپ
-2 تعریف نمی‌شود

پس این حد موجود نیست.

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2+3x}$$

x	-0	0	$+0$
x^2+3x	$+$	0	$- \quad +$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2+3x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2+3x} = \text{حد ندارد}$$

پس این حد موجود نیست.

$$۳) \lim_{n \rightarrow ۵} \sqrt{۴-n}$$

$$D: ۴-n \geq 0 \Rightarrow -n \geq -۴ \Rightarrow n \leq ۴$$

$$D = (-\infty, ۴]$$

تابع در مسائلی که در ۵ طرف نمی شود پس در این نقطه حد ندارد.

۳) حد توابع شامل جزء صحیح :

بی رانیم اگر $a^+ \rightarrow n$ یعنی $n > a$ و اگر $a^- \rightarrow n$ یعنی $n < a$ است. در محاسبه حد

توابع شامل جزء صحیح از این نکته استفاده کرده حدت داخل جزء صحیح را می سازیم و

مقدار عبارت جزء صحیح را در مسائلی a می بینیم تا ببینیم با کدام تابع ثابت برابر

می شود. پس با جی گذاری این مقدار در تابع، حد را بدست می آوریم.

مثال: حدهای زیر را می بینید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow ۰} (x + ۳) [x]$$

$$\lim_{n \rightarrow ۰^+} (n + ۳) [n] = (۰ + ۳) \times ۰ = ۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+3) [x] = (0+3) \times (-1) = -3$$

۳-۵ این حد موجود نیست

$$۲) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x}{[x] + 1} = \frac{2^2 + 3 \times 2}{[2] + 1} = \frac{10}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$$

$\swarrow$
 $1 < x < 2$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1^-} [-2x] : x < 1 \xrightarrow{x(-2)} -2x > -2$$

در نتیجه جابجاست $-2x$ - بزرگتر از -2 - و نزدیک آن است پس $-2 < -2x < -4$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [-2x] = -4$$

باید دقت کرد هم به همین نتیجه می رسیم.

$$۴) \lim_{x \rightarrow 2} x + \left[\frac{x}{2} \right]$$

پس $\frac{x}{2}$ بزرگتر از یک و نزدیک آن است. $x \rightarrow 2^+ : x > 2 \Rightarrow \frac{x}{2} > 1$

$$1 < \frac{x}{2} < 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} x + \left[\frac{x}{2} \right] = 2 + 1 = 3$$

پس $\frac{n}{m}$ از یک نزدیک تر می شود به ۱ : $\frac{n}{m} < 1 \xrightarrow{n \rightarrow m^-} \frac{n}{m} < 1$: $n \rightarrow m^-$

$$0 < \frac{n}{m} < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow m^-} n + \left[\frac{n}{m} \right] = m + 0 = m$$

۳ ≠ ۴ پس این صورت درست نیست.

$$۵) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\sqrt{2-2}}{[2^+]+2} = \frac{0}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$۶) \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} n[n] = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$\frac{1}{2} < n < 1$

$$۷) \lim_{n \rightarrow \frac{0}{2}} r[n] = 2 \times 2 = 4$$

$2 < n < 2$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل ششم: حد و پیوستگی

درس دوم: محاسبه حد توابع

قسمت دوم

جلسه سوم: صفحات ۱۲۸ تا ۱۳۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

اگر $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n)}{g(n)}$ خدسته نده باشد و عدد از قرار دار a به چپ a ، صدمت و مخرج

نزدیک صفر

هر دو صفر شوند با توجه به نوع صفر $\pm$ حالت خوار هم را بک

صفرها در دست اند : ۱- صفر مطلق (خرد صفر) ۲- صفر نسبی یا جدی ($\pm$)

نوع اول : $\frac{\pm}{\pm}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد و حد ندارد

نوع دوم : $\frac{\pm}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد و حد ندارد

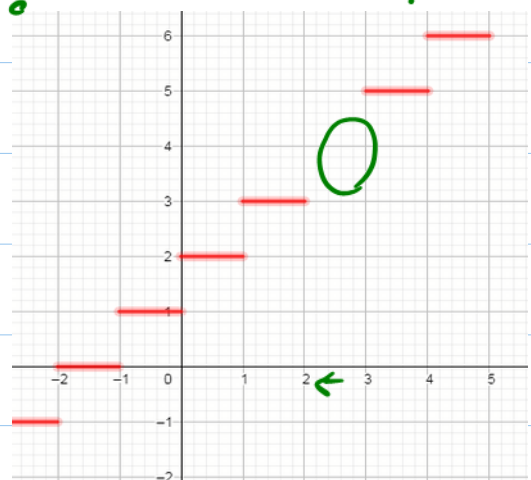
نوع سوم : $\frac{0}{\pm}$ صدمت صفر مطلق و مخرج خرد صفر (مفردی) پس حد کسر صفر و کسر

نوع چهارم : $\frac{0}{0}$ به این حالت ، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ و باید رفع ابهام شود

مثال : حدهای زیر را محاسبه کنید

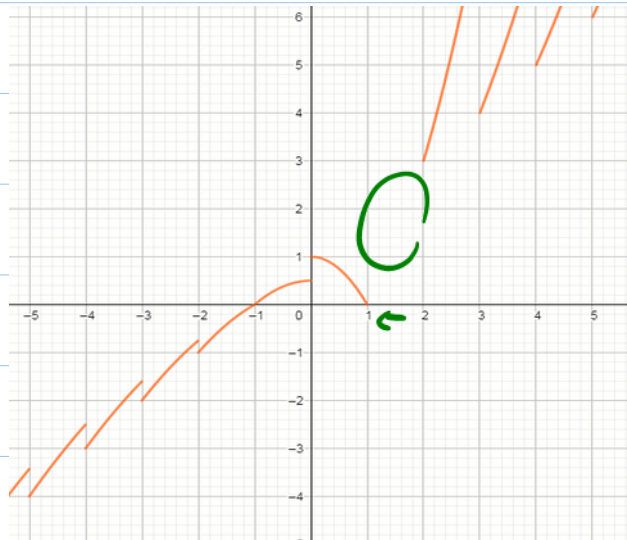
حد و حد ندارد

$$\lim_{n \rightarrow 2^+} \frac{[n]^2 - 4}{[n] - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

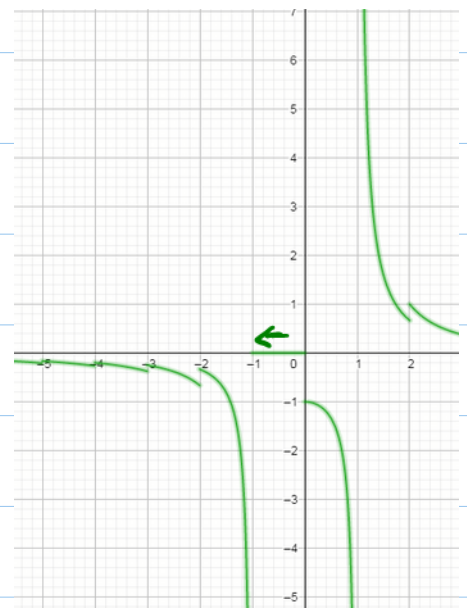


$$ب) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{[x] - 1} = \frac{1^+ - 1}{1 - 1} = \frac{0^+}{0}$$

حد موجود نیست



$$پ) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{[x] + 1}{x^2 - 1} = \frac{-1 + 1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$



سؤال: کشور تجربی ۹۹

حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ ، کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) -1 (۳) صفر (۴) ۱

(۴) ۱

✓ (۳) صفر

$$\frac{-1 + 3}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$

گزینه ۳

رنج اهام $\frac{0}{\pm}$

چون $n \rightarrow a$ و صورت و مخرج هر دو صفر شده اند پس هم صورت و هم مخرج

صل $(n-a)$ را دارا هستند. به $(n-a)$ صل اهام یا صفر نشده می نویسم

رنج اهام $\div$ وقتی صورت و مخرج هر دو صفر شده ای باشند.

با استفاده از روش های تجزیه (فاکتورگیری در کدها) صل اهام را در صورت و مخرج

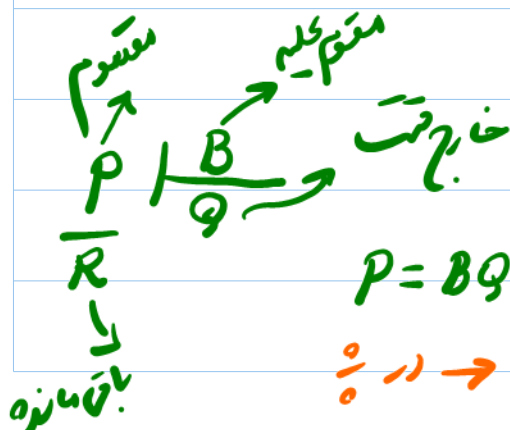
ایجاد و با یکدیگر حذف می کنیم تا حد قابل محاسبه باشد.

توجه: هرگاه نتوانیم باریک ها یا فاکتورگیری صل اهام را بکنیم، چاره ای

جز به تقسیم آن عبارت بر صل اهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت

حاصل ضرب $(n-a)$ (ها) مستقیم کنیم در خارج قسمت را می نویسم.

یادآوری



$$P = BQ + R$$

صل اهام

$$R = 0 \rightarrow P = BQ$$

۱۱ رابطه تقسیم:

۱۲) تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad \frac{x+1}{2x^2 - x + 1} \\
 \underline{-(2x^3 + 2x^2)} \\
 -x^2 + 1 \\
 \underline{-(-x^2 - x)} \\
 x + 1 \\
 \underline{-(x + 1)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$$

روش اول:

$$\frac{-x^2}{x} = -x$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

روش دوم (روش هورنر): برای تقسیم درجه n بر درجه یک

ضرایب مقوم

2	1	0	1
2	-1	-1	-1
	2	0	0
		1	1

ریشه مقسوم علیه $\rightarrow -1$

باقی مانده $\rightarrow$

محاسبات:

- $-1 \times 2 + 1 = -1$
- $-1 \times (-1) + 0 = 1$
- $-1 \times 1 + 1 = 0$

خارج قسمة: $2x^2 - x + 1 \rightarrow 2x^2 - 1x + 1$

سؤال: حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \frac{0}{0}$ $\text{فاکتورگیری: } (x - (-3)) : (x + 3)$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{x} = \frac{-3-3}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

۲) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6} = \frac{0}{0}$ $\text{فاکتورگیری: } (x-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+6} = \frac{1+1}{1+6} = \frac{2}{7}$$

۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{7}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} = \frac{0}{0}$ $\text{فاکتورگیری: } (x - \frac{1}{7})$

$$8x^3 - 1 = 8(x^3 - \frac{1}{8}) = 8(x - \frac{1}{7})(x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{49})$$

رویش هوریز	$\frac{1}{7}$	-5	1
	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}x^2 - 5 = -5$	$\frac{1}{7}x(-5) + 1 = 0 \rightarrow \text{ریشه!}$

باقی: $4x - 2$

$$8x^3 - 5x + 1 = (x - \frac{1}{7})(4x - 2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{1(n - \frac{1}{r})(n^r + \frac{1}{r}n + \frac{1}{r})}{(n - \frac{1}{r})(7n - r)} = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{1(n^r + \frac{1}{r}n + \frac{1}{r})}{r(7n - 1)}$$

$$= r \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}}{\frac{r}{r} - 1} = \frac{r}{\frac{1}{r}} = r$$

$$\star) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4} = \frac{0}{0} \quad \text{فصل اول (ن + 4)}$$

$$x^2 + 4x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

درج اول	-4	1	4	1	4
	1	$-4x + 4 = 0$	$-4x + 1 = 1$	$-4x + 4 = 0$	

$$x^2 + 4x + 1 = x^2 + 1$$

درج اول

$$x^2 + 4x^2 + x + 4 = (x + 2)(x^2 + 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow -4} \frac{(n+4)(n-1)}{(n+4)(n^2+1)} = \lim_{n \rightarrow -4} \frac{n-1}{n^2+1} = \frac{-4-1}{16+1} = \frac{-5}{17}$$

$$0) \lim_{x \rightarrow -r} \frac{|x^r - r|}{x + r} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & \xrightarrow{\text{orange}} r & \xleftarrow{\text{green}} r \\ \hline x^r - r & & + & - & + \\ & & | & | & | \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -r^+} \frac{-(x^r - r)}{x + r} = \lim_{x \rightarrow -r^+} \frac{-(x - r)(x + r)}{x + r} = -(-r - r) = r$$

$$\lim_{x \rightarrow -r^-} \frac{x^r - r}{x + r} = \lim_{x \rightarrow -r^-} \frac{(x - r)(x + r)}{x + r} = -r - r = -r$$

∴ $\lim_{x \rightarrow -r} \frac{x^r - r}{x + r} \neq -r$

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل ششم: حد و پیوستگی

درس سوم: پیوستگی

جلسه چهارم: صفحات ۱۳۷ تا ۱۴۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع f در $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

پس برای اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد باید سه شرط زیر را داشته باشد:

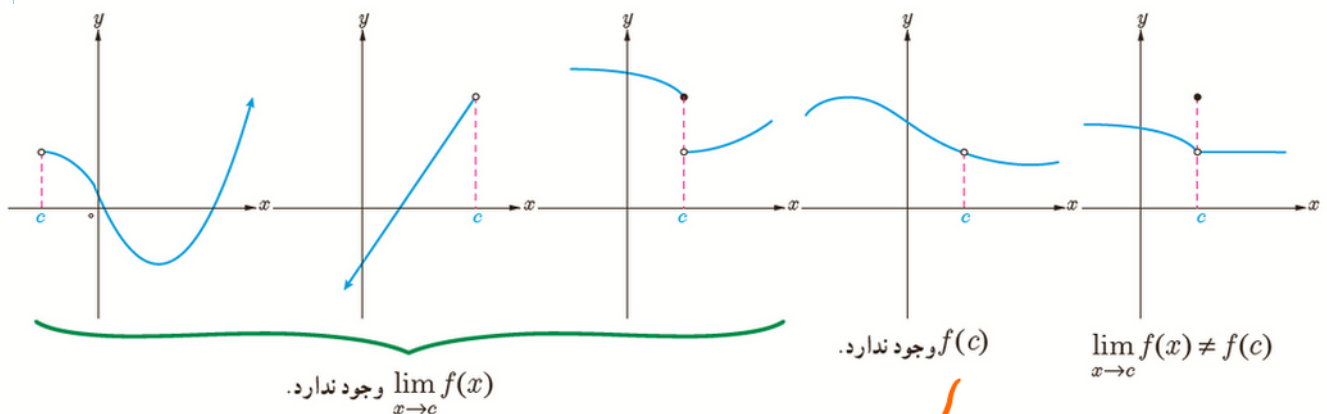
(۱) تابع f در a تعریف شده باشد یعنی $a \in D_f$.

(۲) حد تابع f در $x=a$ موجود باشد یعنی تابع در همگی a تعریف شده باشد و

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

(۳) حد تابع f در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر باشد یعنی: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

تذکر: وقتی f در $x=c$ پیوسته نباشد می‌گوییم در این نقطه ناپیوسته است.



$f \notin D_f$

مثال: پیوستگی هر تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-2) & x \leq 2 \\ 4-2x & x > 2 \end{cases} \quad x=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 4-2x = 4-4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2(x-2) = 4(2-2) = 0$$

$$f(2) = 2^2(2-2) = 0$$

تابع در $x=2$ پیوسته است. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} [x] & x < -1 \\ -x & x = -1 \\ \frac{x^2-1}{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad x=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1) = -1-1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} [x] = [-1] = -1$$

$$f(-1) = -1$$

تابع در $x=-1$ پیوسته نیست زیرا: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2 \neq f(-1) = -1$

$$\text{پ) } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

$$f(0) = -1$$

تابع در $x=0$ پیوسته نیست زیرا در این نقطه حد ندارد ولی در ادامه خواهیم دید

چون $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 = f(0)$ و در نیم تابع در $x=0$ پیوستگی چپ دارد.

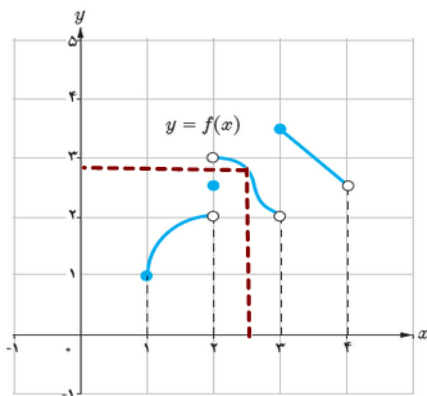
پیوستگی راست و پیوستگی چپ :

تابع f در $x=a$ پیوستگی راست دارد هرگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

تابع f در $x=a$ پیوستگی چپ دارد هرگاه $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

پس می‌توان گفت f در یک همبستگی a تفریق شده باشد:

f در $a = 2$ پیوسته است اگر و تنها اگر f در a پیوسته راست و چپ داشته باشد.



مثال: نمودار تابع f به صورت روبه‌رو رسم شده است.

(۱) تابع f در کدام یک از نقاط مجموعه $\{1, 2, 2/5, 3, 4\}$ ناپیوسته است.

در $a = 1$ ناپیوسته است زیرا حد چپ ندارد.

در $a = 2$ ناپیوسته است زیرا: $\lim_{n \rightarrow 2^+} f(n) = 3$, $\lim_{n \rightarrow 2^-} f(n) = 2$, $f(2) = 2.5$

در $a = 2.5$ پیوسته است.

در $a = 3$ پیوسته نیست زیرا: $\lim_{n \rightarrow 3^+} f(n) = 2.5$, $\lim_{n \rightarrow 3^-} f(n) = 2$, $f(3) = 2.5$

در $a = 4$ پیوسته نیست زیرا حد راست ندارد.

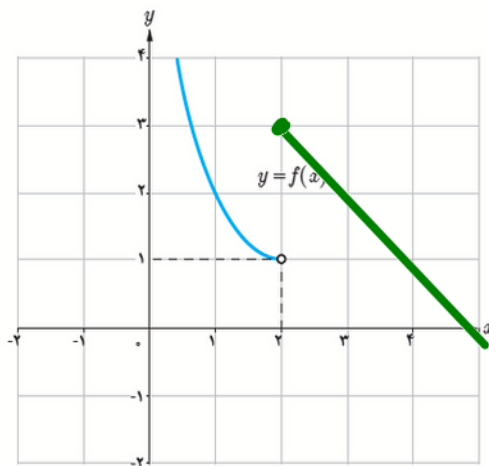
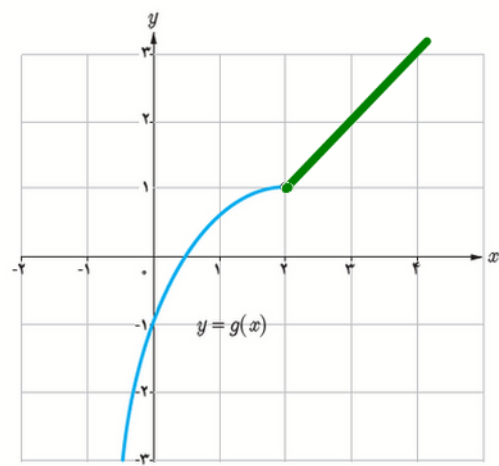
۲ در کدام نقطه a از مجموعه $\{1, 2, 2/5, 3, 4\}$ تساوی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ برقرار است؟

در $n=2$ پیوستگی راست دارد.

سؤال: در شکل‌های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده‌اند. در نقطه $x=2$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که:

۱ تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲ تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.



سؤال: پیوستگی تابع $f(n) = \begin{cases} n^2 - 1 & n > 1 \\ 2 & n = 1 \\ n + 1 & n < 1 \end{cases}$ را در $n=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{n \rightarrow 1^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 1^+} n^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow 1^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 1^-} n + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$f(1) = 2$$

تابع در $n=1$ پیوسته نیست و پیوستگی چپ دارد.

موتسز توابع معروف :

(۱) توابع چند جمله‌ای درجه n R پیوسته‌اند.

(۲) توابع گویا فقط در رشته‌های موج‌شان نا پیوسته‌اند.

(۳) توابع رادیکالی با فرض فرض $\sqrt[n]{f(x)}$ درجه n نقای که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند.

(۴) تابع $f(x)$ درجه n نقای که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند.

(۵) تابع رادیکالی با فرض $\sqrt[n]{f(x)}$ (پیوسته) در نقطه از دامنه‌اش نیز

از نقطه انتهای دامنه پیوسته است. مثلاً تابع $y = \sqrt[n]{x-2}$ درجه n $x > 2$

پیوسته است در $x=2$ پیوسته نیست زیرا در همگرایی $x=2$ حرف نمی‌نهد.

(۶) توابع $\sin f$ ، $\cos f$ در نقطه‌ای که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند.

(۷) تابع $y = [u]$ در نقاط صحیح نشده u نا پیوسته‌اند.

(۸) تابع $f(x) = g(n(x))$ (و تابع پیوسته) $n = a \in \mathbb{Z}$ پیوسته است هرگاه تابع $g(a) = 0$.

سؤال: تابع $y = [2n]$ روی بازه $(1, 2)$ در چه نقطه ناپیوسته است.

$2n$ روی بازه $(1, 2)$ برای نقاط زیر صحیح و کسری:

$$n = \frac{1}{2} : 2n = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \in \mathbb{Z}$$

$$n = 1 : 2n = 2 \times 1 = 2 \in \mathbb{Z}$$

$$n = \frac{0}{2} : 2n = 2 \times \frac{0}{2} = 0 \in \mathbb{Z}$$

در سه نقطه ناپیوسته است.

سؤال: تابع $f(n) = (-1)^{[n]} \sin \frac{\pi n}{2}$ در نقاط $n \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

تابع $y = (-1)^{[n]}$ در اعداد صحیح ناپیوسته است مثلاً:

$$\lim_{n \rightarrow 2^+} (-1)^{[n]} = (-1)^2 = 1 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow 2^-} (-1)^{[n]} = (-1)^1 = -1$$

در $\sin \frac{\pi n}{2}$ در n های زوج برابر صفر است ($\sin 0, \sin \pi, \sin 2\pi, \dots$)

و در n های فرد برابر یک یا منفی یک است ($\sin \frac{\pi}{2} = 1, \sin \frac{3\pi}{2} = -1, \dots$)

پس $\sin \frac{\pi n}{2}$ در n های زوج صفر شونده است در نتیجه تابع f در اعداد زوج صحیح پیوسته است.

مثال: کسری تجوی ۹۹ (خارج)

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{5}$

درجه ۲ که مجموع ضرایب: $2-1-1=0$
 $\sin x = 1, \sin x = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(n) = \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 n - \sin n - 1}{\cos^2 n} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin n - 1)(2\sin n + 1)}{1 - \sin^2 n} = \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin n - 1)(2\sin n + 1)}{(1 - \sin n)(1 + \sin n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(1 - \sin n)(2\sin n + 1)}{(1 - \sin n)(1 + \sin n)} = \frac{-(2\sin \frac{\pi}{2} + 1)}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{-(2 \times 1 + 1)}{1 + 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(n) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{3}{2} = a$$

گزینه ۴

سؤال: شکر ریاضی ۹۹

فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a ، کدام است؟

$$\frac{5}{2} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$|x-1| < 1 \rightarrow -1 < x-1 < 1 \xrightarrow{+1} 0 < x < 2$$

$$|x-1| \geq 1 \rightarrow x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

در ضابطه اول با توجه به رانده $[x]$ در $x=1$ ناپیوسته است در چپ $(x-1)$ در

$x=1$ مغز چپ در $[x]$ در $x=1$ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + ax + b = 4 + 2a + b = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x] = (2-1) \times 1 = 1$$

$$4 + 2a + b = 1 \rightarrow 2a + b = -3 : \text{شرط پیوستگی}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} (n-1)(n) = (0-1) \times 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0} n^2 + an + b = b = f(0)$$

$$b = 0$$

شرط پیوستگی: $x = 0$

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a + 0 = -2 \rightarrow a = -\frac{2}{2} = -1$$

مثال: شکر بجوی ۹۹:

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^3}{|x+2|}; & x \neq -2 \\ a; & x = -2 \end{cases}$ در نقطه $x = -2$ ، فقط از چپ پیوسته است؟

(۱) -۱۲ (۲) -۶ (۳) ۶ (۴) ۱۲

$$\lim_{n \rightarrow -2^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow -2^-} \frac{1+n^3}{|n+2|} = \lim_{n \rightarrow -2^-} \frac{1+n^3}{-(n+2)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{n \rightarrow -2} \frac{(1+n)(1-2n+n^2)}{-(n+2)} = \frac{1-2(-2)+(-2)^2}{-1} = \frac{12}{-1} = -12$$

$$\lim_{n \rightarrow -2} f(n) = f(-2) \Rightarrow -12 = a$$

گزینه ۱

مسئله ۹۸ : محدودیت

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} ; & x > 2 \\ ax-1 ; & x \leq 2 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{x-\sqrt{x+2}} \cdot \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(\cancel{x-2})(x+\sqrt{x+2})}{(\cancel{x-2})(x+1)} = \frac{3(2+\sqrt{4})}{2+1} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax-1 = 2a-1 = f(2)$$

گزینه ۲ : شرط پیوستگی $x=2$: $2a-1=4 \rightarrow 2a=5 \rightarrow a=\frac{5}{2}=2,5$

پیوستگی روی بازه :

- یگانه‌ترین تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است هرگاه f در نقطه بازه پیوسته باشد.

- یگانه‌ترین تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه f روی بازه (a, b) پیوسته باشد

و a از راست و b از چپ پیوسته باشد.

برای بازه‌های (a, b) و $[a, b]$ هم تعریف مشابهی ارائه می‌دهیم.

مثال: تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$$

(۱) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-1, 1]$ و $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

$$\lim_{n \rightarrow -1^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow -1} n^2 - 1 = 1 - 1 = 0 = f(-1)$$

$$\lim_{n \rightarrow -1^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow -1} 2n + 4 = -2 + 4 = 2$$

تابع در $n = -1$ پیوسته نیست و پیوسته نیست.

چون f در $n = 2$ پیوسته نیست.

ناپیوسته: $[-1, 1]$ پیوسته: $(2, 5)$ پیوسته: $[1, 2]$
ناپیوسته: $[-2, 0]$

۲) درباره تابع f کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) f روی بازه $(-\infty, -1]$ پیوسته است. ب) f روی بازه $(-\infty, -1)$ پیوسته است.

ت) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$

پ) f روی بازه $[2, 5]$ پیوسته است.

ج) f روی بازه $(-2, 0)$ پیوسته است.

ث) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 0$

این نادرست زیرا تابع در $x=1$ برش چپ ندارد.

ب، درست

پ، نادرست $f \notin D_f$

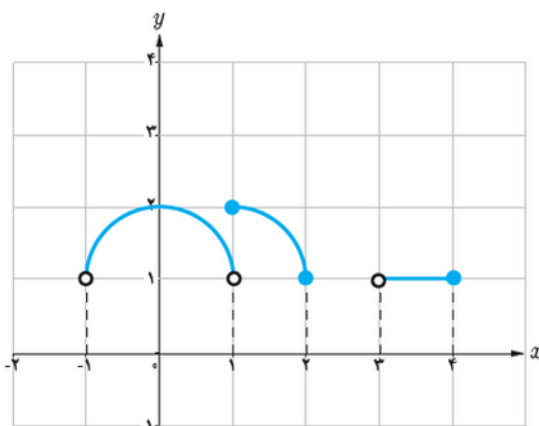
ت) $\lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) =$ تعریف نشده

نادرست زیرا

ث) $\lim_{n \rightarrow 0^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0} -n + 0 = -0 + 0 = 0$

درست زیرا

ج، نادرست زیرا تابع در $x=1$ پیوسته نیست.



مثال: در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام یک از

عبارات زیر درست و کدام یک نادرست هستند؟

الف) تابع f بر بازه $[1, 2]$ پیوسته است. ✓

ب) تابع f بر بازه $[3, 4]$ پیوسته است. ✗ $f \notin D_f$

پ) تابع f بر بازه $[0, 2]$ پیوسته است. ✗

ل، تابع در $x=1$ پیوسته نیست

ریاضی ۲

پایه یازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه یازدهم تجربی

فصل هفتم: آمار و احتمال

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

درس اول: احتمال شش و شش هشتاد و شش
 یادآوری نکات و مفاهیم پایه در شمارش:

۱- اصل ضرب: فرض کنید رینام کاری k مرحله دارد. اگر مرحله اول را بتوان به m_1 طریق

تکثیر به «و» رینام دوم، مرحله دوم را به m_2 طریق و... مرحله k ام را به m_k طریق

رینام دارد، کن کار مرور نظر را می توان به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق رینام دارد.

۲- اصل جمع: فرض کنید بتوان کاری را از k روش رینام دارد. اگر روش اول به m_1 طریق،

روش دوم به m_2 طریق و... روش k ام به m_k طریق ممکن باشد در مجموع

نقطه ای از این k روش را انتخاب کنیم، برای رینام کار مرور نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$
 یا از روش اول یا از روش دوم یا...

طریق و صورت دارد.

مثال کنکور ریاضی ۹۹:

تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش پذیر بر ۵، با ارقام غیر تکراری، کدام است؟

۹۷۲ (۴)

۹۶۸ (۳)

۹۵۲ (۲) ✓

۹۴۸ (۱)

$$\boxed{9} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{0} = 504$$

$$\Rightarrow 504 + 448 = 952$$

$$\boxed{8} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{0} = 448$$

گزین ۲

غیر صفر

۳- جایگشت:

فرض کنید n شیء متمايز داریم. به صورت از قرار گرفتن این اشیاء در کنار هم یک جایگشت می‌گیریم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمايز $n!$ است.

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad 0! = 1$$

مثال: a, b, c	abc	bca
	acb	cab
	bac	cba

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

۴- تبدیل (ترتیب):

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمايز یا جابجایی دیگر تعداد انتخاب‌های r شیء

از بین n شیء متمايز را که در کنارها ترتیب قرار گرفتن اهمیت داشته باشد را با $P(n, r)$

نشان می‌دهیم و به آن تبدیل r شیء از n شیء متمايز گفته می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: a, b, c	$\xrightarrow{\text{جایگشت‌های ۲ تایی}}$	ab, ba, ac, ca	$P(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$
		bc, cb	

۵- ترکیب:

بعد از انتخاب r شی از n شی متبقی که در آن ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، یک

ترکیب r تایی از n شی می‌گیریم و تعداد آن‌ها را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که از رابطه زیر می‌توانیم بدست آوریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3 \quad \text{ترکیب‌های } \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \text{ مثلاً } a, b, c$$

حالت‌های خاص در رابطه ترکیب:

$$۱) \binom{n}{0} = 1 \quad \text{مثلاً } \binom{1}{0} = 1$$

$$۲) \binom{n}{n} = 1 \quad \text{مثلاً } \binom{0}{0} = 1$$

$$۳) \binom{n}{1} = n \quad \text{مثلاً } \binom{7}{1} = 7$$

$$۴) \binom{n}{n-1} = n \quad \text{مثلاً } \binom{6}{5} = 6$$

$$۵) \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{مثلاً } \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

$$۶) \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad \text{مثلاً } \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$$

$$۷) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \text{مثال} \quad \binom{۷}{۳} = \binom{۷}{۴} \quad \underline{۱} \quad \binom{۱}{۱} = \binom{۱}{۰}$$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌ها ۲ⁿ خفزی از یک مجموعه n خفزی برابر $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \dots + \binom{n}{n}$ است و تعداد زیرمجموعه‌ها

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \dots + \binom{n}{n} = ۲^n \quad \text{یک مجموعه n خفزی برابر ۲^n است پس:}$$

مثال کنکور تجربی ۹۹:

به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

۹۵ (۴)

۹۱ (۳) ✓

۸۷ (۲)

۸۴ (۱)

$$\binom{۷}{۵} = \binom{۷}{۲} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱ \quad \text{دو نفر را کنار نگذاریم}$$

$$\binom{۲}{۱} \binom{۷}{۴} = ۲ \times \binom{۷}{۴} = ۲ \times \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۳!} = ۲ \times ۳۵ = ۷۰ \quad \text{یکی از دو نفر را کنار نگذاریم}$$

$$۲۱ + ۷۰ = ۹۱ \quad \text{گزینه ۳}$$

مثال کنکور تجربی ۹۸:

گل فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱۶۸ (۴)

۱۵۴ (۳) ✓

۱۴۰ (۲)

۱۲۶ (۱)

$$\binom{۸}{۴} + \binom{۸}{۵} + \binom{۸}{۶} = ۷۰ + \binom{۸}{۴} + \binom{۸}{۲} = ۷۰ + \frac{۸ \times ۷ \times ۶}{۴} + \frac{۸ \times ۷}{۲}$$

$$\frac{۸!}{۴! \times ۴!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۴!} = ۷۰$$

$$= ۷۰ + ۵۶ + ۲۸ = ۱۵۴ \quad \text{گزینه ۳}$$

یا در درستی نتایج و نتایج ما به در احتمال :

۱- پدیده یا آزمائش تصادفی: پدیده ای است که نتیجه آن را نتوان قبل از رخداد، به طور قطعی

پیش بینی کرد.

۲- فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک آزمائش تصادفی را فضای نمونه ای می نامیم

و آن را با S نمایش می دهیم. به هر عضو فضای نمونه یک **بررسی** می گوئیم.

۳- شمار تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک شمار تصادفی در آن فضای نمونه می گویند.

و آن را $A, B, C, \dots$ نشان می دهیم.

۴- احتمال روی شمارها: اگر A و B شمارهای تصادفی در فضای نمونه ای S باشند :

الف) اجتماع A و B : شمار $A \cup B$ را می گویند که حداقل یکی از دو شمار A یا B رخ دهد:

$$A \cup B = \{ \omega \in S \mid \omega \in A \vee \omega \in B \}$$

ب) اشتراک A و B : شمار $A \cap B$ را می گویند که هر دو شمار A و B رخ دهند:

$$A \cap B = \{u \in S \mid u \in A \wedge u \in B\}$$

پ، حاصل A ، B : پیام $A-B$ ز غای A دهده ولی B دهده :

$$A-B = \{u \in S \mid u \in A \wedge u \notin B\}$$

(از A اترک A ، B را حذف می کنیم.)

ت، متمم A : پیام A' ز غای A دهده که پیام A دهده :

$$A' = \{u \in S \mid u \notin A\}$$

($A' = S - A$)

۵- احتمال رخ دادن یک پیام : احتمال وقوع پیام A از فضای نمونه ای S را با $P(A)$

نمایش می دهیم و از رابطه زیر می سببی کنیم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیام}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه ای}}$$

دقت کنید برای یافتن $n(A)$ و $n(S)$ در صورت امکان با نوشتن پیامدهای فضای نمونه ای،

تعداد اعضا را محاسبه کنیم و در فرآیند محاسبه از اصل قیاس جمع، جایگزینی و ترکیب استفاده می کنیم.

۶- چندپایه خاص :

- الف) اگر A تهی باشد آنگاه $p(A) = 0$ است و به پیامد A نمی‌رسند.
ب) اگر $A = S$ باشد آنگاه $p(A) = 1$ است و به پیامد A حتماً می‌گویند.
ج) اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه A و B رویدادهای ناهم‌پایه می‌گویند.

۷- اصول احتمال

- ۱) احتمال همیشه عددی بین ۰ و ۱ است یعنی $0 \leq p(A) \leq 1$.
۲) $p(S) = 1$
۳) اگر A و B ناهم‌پایه باشند: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
تذکر: اصل سوم قابل تعمیم بر هر تعداد رویداد است.

۸- چند قانون در احتمال :

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) \quad (1)$$

$\swarrow$
 $A \cap B'$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (2)$$

$$p(A') = 1 - p(A) \quad (3)$$

$$p(\emptyset) = 0 \quad (4)$$

مثال: اگر $B \subseteq A$ ثابت کنید: (الف) $P(A-B) = P(A) - P(B)$ (ب) $P(B) \leq P(A)$

(الف) $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \xrightarrow{\text{مساوی}} P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$

(ب) $P(A) = \overbrace{P(A-B)}^{70^\circ} + P(B) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$

مثال کنکور ۹۹:

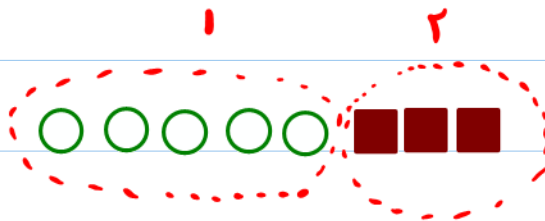
پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

$\frac{1}{56}$ (۴)

$\frac{1}{28}$ (۳) ✓

$\frac{1}{21}$ (۲)

$\frac{1}{14}$ (۱)



گزینه ۳: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \times 3! \times 2!}{1!} = \frac{5! \times 6 \times 2}{8 \times 7 \times 6 \times 5!} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹:

یک تاس سالم را سه بار به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم، احتمال روشن شدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

$\frac{31}{72}$ (۴)

$\frac{91}{216}$ (۳)

$\frac{41}{108}$ (۲)

$\frac{13}{36}$ (۱)

A : آمدن حداقل یک بار ۶

A' : آمدن ۶ ظاهر نشود $n(A') = 5 \times 5 \times 5 = 125$

$P(A') = \frac{125}{6^3} = \frac{125}{216} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{216-125}{216} = \frac{91}{216}$
گزینه ۳

مسئله تئوری (خارج) ۹۹:

۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد مورد نظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

$$\frac{9}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۳) \checkmark$$

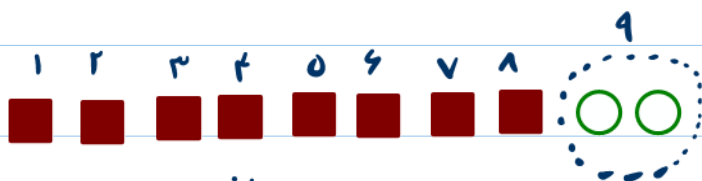
$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

روش اول: (شماره زیر شماره قسم)

A : در روز مورد نظر ناهار هم نهند

A' : در روز مورد نظر ناهار هم نهند

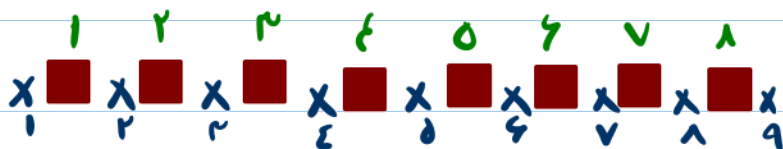


جای دو نفر ۹

$$P(A') = \frac{9! \times 2!}{1.1} = \frac{9! \times 2}{1 \times 9!} = \frac{2}{1} = \frac{1}{5} \rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

گزینه ۳

روش دوم: معادله مستقیم



$$P(A) = \frac{P(9,2) \times 1!}{1.1} = \frac{\frac{9!}{(9-2)!} \times 1!}{1.1} = \frac{\frac{9!}{7!} \times 1!}{1.1}$$

$$= \frac{9! \times 1!}{7! \times 1.1} = \frac{\cancel{9!} \times 1 \times \cancel{7!}}{7! \times 1 \times \cancel{7!}} = \frac{1}{1} = \frac{4}{5}$$

گزینه ۳

دسته بندی شرطی

احتمال وقوع پیشامد A به شرطی که قبلاً B اتفاق افتاده باشد را به صورت $p(A|B)$ نشان می‌دهیم.

چون احتمال برابر با حاصل تقسیم حالت‌های مطلوب بر کل حالت‌ها است، پس در $p(A|B)$ با توجه

به اینکه B قبلاً رخ داده است، فضای نمونه‌ای که B رخ داده بود و تکرار فضای فضای نمونه از Ω

به $\Omega(B)$ کاهش می‌یابد. شاید مطلوب شامل فضای از پیشامد B است که خاصیت A را هم دارند پس

پیشامد مطلوب شامل فضای است که خاصیت $A \cap B$ را دارند پس داریم: $p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$

و با تقسیم صورت و مخرج بر $n(\Omega)$ هر دو به احتمال تبدیل می‌شوند:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad p(B) \neq 0$$

مثال: اگر در اینجای دریا آب تاس، عددی در ظاهر شده است احتمال اینکه عدد در دیده اول باشد چقدر است؟

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 5\} \quad A = \{2, 4, 5\} \quad : \quad A \cap B = \{2, 5\} \quad \text{درش اول}$$

$$p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{3}$$

$$p(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{درش دوم}$$

مثال: در پرتاب دو تاس می توانیم جمع در هر در شده کمتر از ۶ است. احتمال آن را بیابید که عدد

عدد رو شده برابر باشند. فضای نمونه ها می باشد

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

$$A \cap B = \{(1,1), (2,2)\} \quad P(A|B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

مثال: در خانواده ۴ فرزند می توانیم حدس بزنیم که از فرزند پسر است. احتمال آنست که این خانواده دقیقاً ۲ پسر داشته باشد چقدر است؟

$$n(B) = 2^4 - 1 = 15$$

$$n(A \cap B) = \binom{4}{2} = 6 \quad P(A|B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

مثال: یک تیر خاکی ۵ سوه سفید، ۶ سوه سیاه است. یک سوه به تصادف خارج می کنیم و سوهی که بیرون می آید

احتمال آنست که سوه دوم که خارج می کنیم نیز سفید باشد چقدر است؟

$$B: \text{سوه اول سفید} \quad P(B) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{11}{1}} = \frac{5}{11}$$

A : سوه دوم سفید

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1}}{\binom{11}{1} \binom{10}{1}} = \frac{1 \times 4}{11 \times 10} = \frac{2}{11}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{5}{11}} = \frac{2}{5}$$

درخت دوم: چون سوء خرمی اول سفید است پس فضای جدید شانس سوء سفید ۶ می باشد.

احتمال اینکه سوء خرمی دوم سفید باشد $\frac{2}{5} = \frac{6}{10}$ است.

مثال: سه دسته ۱۰ کارت بازی، ۵ قرمز و ۵ سبز را به هم مخلوط کرده ایم که ردی کارت های از هر دو

نمونه های ۱۰۰۰ گرفته شده است. ۵۰ کارت به تصادف برداشته می شوند. اگر حداقل ۲۰ کارت از این دسته ها

قرمز باشد به چه احتمالی دو کارت در دست است؟

B: قرمز در دست

A: ۲۰ سبز در دست

$$p(B) = \frac{\binom{5}{2} \binom{10}{3}}{\binom{15}{5}}$$

$$p(A \cap B) = \frac{\binom{1}{2} \binom{10}{2}}{\binom{15}{5}}$$

$$p(A|B) = \frac{\binom{1}{2} \binom{10}{2}}{\binom{15}{5}}$$

برای $p(B)$ سه حالت داریم ۲، ۳ و ۵ کارت قرمز باشند پس:

$$p(A|B) = \frac{\binom{1}{2} \binom{10}{2}}{\binom{1}{5} + \binom{1}{4} \binom{10}{1} + \binom{1}{3} \binom{10}{2}}$$

نکته:

$$1) p(A'|C) = 1 - p(A|C)$$

$$2) p(A \cup B|C) = p(A|C) + p(B|C) - p(A \cap B|C)$$

$$3) p(A - B|C) = p(A|C) - p(A \cap B|C)$$

مثال کنتر ریاضی ۹۹:

A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A) = 0.4$ ، $P(B|A) = 0.25$ و $P(B) = 0.3$ باشد، $P(B|A')$ کدام است؟

$$\frac{1}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A')}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow 0.25 = \frac{P(A \cap B)}{0.4} \rightarrow P(A \cap B) = 0.4 \times 0.25 = 0.1$$

$$\Rightarrow P(B|A') = \frac{0.3 - 0.1}{0.6} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3} \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال کنتر تجربی ۹۸:

احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول 0.7 و در آزمون دوم 0.6 است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم 0.8 است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

$$0.84 \quad (۴)$$

$$0.82 \quad (۳)$$

$$0.76 \quad (۲)$$

$$0.74 \quad (۱)$$

$$\begin{cases} P(A) = 0.7 & P(B|A) = 0.8 \\ P(B) = 0.6 & P(A \cup B) = ? \end{cases}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow 0.8 = \frac{P(A \cap B)}{0.7} \rightarrow P(A \cap B) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.56 = 1.3 - 0.56 = 0.74 \quad \text{گزینه ۱}$$

مثال: تکراری ۱۲.۱

پیشامدهای ناسازگار A و B از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $P(B' | A')$

کدام است؟

۰.۷۵ (۴)

۰.۵۵ (۳)

۰.۵ (۲)

۰.۷ (۱)

$$P(B' | A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} \quad P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} A' \cap B' &= (A \cup B)' \Rightarrow P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 2 - 3}{12} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$P(B' | A') = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{7 \times 2}{12 \times 5} = \frac{7}{10} = 0.7$$

مثال: تکراری ۱۲.۱

در یک کیسه ۱۶ گوی به شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. دو گوی به‌طور متوالی و بدون جایگذاری، به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم شماره گوی دوم از شماره گوی اول کمتر است، با کدام احتمال شماره گوی اول ۱۶ است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{8}$ (۳) ✓

$\frac{1}{12}$ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

$$B = \{ \underbrace{(1,1)}_1, \underbrace{(1,2), (2,1)}_2, \underbrace{(1,3), (2,2), (3,1)}_3, \dots, \underbrace{(15,1), (14,2), \dots, (1,15)}_{15} \}$$

$$n(B) = \frac{10 \times 12}{2} = 12, \quad A \cap B = \{(1,1), \dots, (1,15)\} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{12} = \frac{1}{8}$$

پیشامدها مستقل و وابسته

بی‌گرمیم دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، به شرطی که وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند نگاه :

$$P(A|B) = P(A) \quad , \quad P(B|A) = P(B)$$

در نتیجه : دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند اگر و فقط اگر $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

وقت داشته باشید اگر A و B مستقل باشند نگاه $A, B, A', B', A \cap B, A \cap B'$ هم مستقل اند

نکته مهم : اگر A و B دو پیشامد ناهمبسته و نامازگار باشند نگاه A و B مستقل نیستند.

مثال : در ظرف ۴ سیاه بونه، ۵ سیاه بیه و ۱ سیاه بزمهر است و در ظرف دیگر ۶ سیاه بونه و ۲ سیاه بزمهر

دارد. به تعادف از هر ظرف یک سیاه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال زیر این دو سیاه متفاوت است؟

$$P = \frac{4}{10} \times \frac{2}{8} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{8} = \frac{56}{80} = \frac{7}{10}$$

سیاه بونه اولی سیاه بونه دومی سیاه بزمهر اولی سیاه بزمهر دومی

مثال تکرار ریاضی (ضایع) ۹۹:

در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = 0.1$ ، $P(A \cup B) = 0.6$ و با فرض $P(B') > P(B)$ ، احتمال وقوع پیشامد B، کدام است؟

۰.۲۵ (۴)

۰.۲ (۳)

۰.۳ (۲)

۰.۴ (۱)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\xrightarrow{\text{مستقل}} P(A) \times P(B)$

$$0.4 = P(A) + P(B) - 0.1 \rightarrow P(A) + P(B) = 0.5$$

$\xrightarrow{\text{مجموع رشته‌ها}}$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.1$$

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

$\xrightarrow{\text{ضرب در ۱۰}} (10x - 5)^2 = 0$

$$x^2 - 0.5x + 0.1 = 0 \rightarrow (x - 0.2)(x - 0.5) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0.2 \\ x = 0.5 \end{cases} \xrightarrow{P(B') > P(B)} P(B) = 0.2, P(A) = 0.5$$

مثال تکرار ریاضی ضایع ۱۴.۱

فرض کنید علی و حسن دو کماندار باشند که با احتمال‌های 0.6 و 0.4 به هدف می‌زنند. اگر هر کدام از آنها یک بار تیراندازی کنند و بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است، با کدام احتمال علی به هدف زده است؟

$\frac{17}{25}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

$\frac{5}{6}$ (۲)

$\frac{15}{19}$ (۱) ✓

$$P(A \cup B) = 0.4 + 0.6 - (0.4 \times 0.6) = 1 - 0.24 = 0.76$$

$$P(A | A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.4}{0.76} = \frac{10}{19}$$

نکته: سه پیشامد A, B, C را مستقل بدانیم:

$$1) P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$2) P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

$$3) P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

$$4) P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

نکته: انتخاب‌های با جای‌نماری مستقل و بیش‌ترین جای‌نماری داشته‌اند.

مثال: اگر کدام عدد A و B مستقل از هم هستند؟

الف) اگر دو سوهو به‌توای در یک جای‌نماری از جعبه‌ای شامل ۶ سوهو سفید و ۳ سوهو سیاه خارج کنیم.
 P_A : سفید برداری
 P_B : سیاه برداری

ب) اگر دو سوهو به‌توای در یک جای‌نماری از جعبه‌ای شامل ۶ سوهو سفید و ۳ سوهو سیاه خارج کنیم.
 P_A : سفید برداری
 P_B : سیاه برداری

$$\text{الف) } P(A) = \frac{4 \times 9}{1 \times 9} = \frac{4}{1} \quad P(B) = \frac{2 \times 9}{1 \times 9} = \frac{2}{1} \quad P(A \cap B) = \frac{4 \times 2}{1 \times 9} = \frac{24}{9}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{4}{1} \times \frac{2}{1} \neq \frac{24}{9} \quad \text{مستقل نیستند}$$

$$\text{ب) } P(A) = \frac{4 \times 1}{1 \times 1} = \frac{4}{1} \quad P(B) = \frac{1 \times 2}{1 \times 1} = \frac{2}{1} \quad P(A \cap B) = \frac{4 \times 2}{1 \times 1} = \frac{24}{1}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{4}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{24}{1} \quad \text{مستقل اند}$$

درس دوم: آمار توصیفی

یادآوری:

آمار: مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه روش‌هایی است شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر

داده‌ها و در آخر نتیجه‌گیری، مقایسه و پیش‌بینی، در مورد داده‌ها و تعدادی است.

جامعه آماری: مجموعه تمام افراد یا اشیا که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد.

نمونه: بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند.

به‌تواتر اعضای جامعه، اندازه جامعه یا حجم جامعه و به‌تواتر اعضای نمونه، اندازه نمونه یا حجم نمونه می‌گویند.

متغیر: هر ویژگی از جامعه آماری که در اعضای جامعه یکسان نیست و از اعضای جامعه دیگر متغیر می‌گردد.

را متغیری گوئیم و به خود یا عبارتی که به متغیر نسبت داده می‌شود مقدار متغیری گوئیم.

انواع متغیر: دو نوع متغیر داریم: الف) کیفی ب) کمی

الف) متغیر کیفی: متغیرهایی که قاعده اندازه‌گیری بوده و مقدار عددی به خودی می‌دهند. مانند قد، وزن، تواتر و ...

مغیرهای گنی به دو نوع پوسته دانه تقسیم می شوند:

۱۱. مغیر گنی پوسته: اگر دو مغیر a و b را بگیرد هر مقدار بین آنها را هم می تواند اختیار کند. مانند تان، سن، وزن...

۱۲. مغیر گنی لسته: مغیر گنی ای که پوسته نباشد مانند مقدار غرض نزل، مقدار مکات، تلفن در شرکت و...

ب. ۱. مغیر گنی: مغیرهای که تابعی اندازه گیری نیستند و صرفاً برای دسته بندی افراد یا اشیا در گروه ها

به کار می روند و لزوماً مقدار عددی نمی گیرند مانند: جنسیت، گروه خونی و رنگ خرد و...

مغیرهای گنی به دو نوع ترتیبی و راسی تقسیم می شوند:

۱۱. مغیر گنی ترتیبی: مغیرهای که نوعی ترتیب طبیعی در آن وجود دارد مانند سطح تحصیلات، کیفیت بدیهه

(درجه ۱، درجه ۲، ...) و مراحل زندگی (کودکی، جوانی، ...)

۱۲. مغیر گنی راسی: مغیرهای که ترتیبی نیستند مانند گروه خونی، جنسیت افراد و...

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + 19 + 10}{12} = \frac{242 + 29}{12} = \frac{271}{12} = 22,58$$

نکته: اگر میانگین n داده $\bar{x}$ و میانگین m داده $\bar{y}$ باشد میانگین همه داده‌ها به هم $\frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}$ می‌شود.

نکته: فرض کنید a داده در حد حقیقی باشد و میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد و داده‌های

جدید y_i به صورت $y_i = ax_i + b$ تعریف شوند. در این صورت میانگین y برابر $a\bar{x} + b$ می‌شود.

نکته: اگر داده‌ای بیشتر از میانگین باشد داده‌ها افزایش می‌دهند و اگر کمتر از میانگین باشند کاهش می‌دهند.

کمتر از میانگین و اگر داده‌ای کمتر از میانگین باشد کاهش می‌دهند.

انحراف از میانگین: $(x_i - \bar{x})$ را انحراف داده x_i از میانگین می‌گویند. می‌توان ثابت کرد

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

تذکر: اگر داده‌ها شکل دایره‌ای به هم می‌زنند $\frac{افزایش + ادی}{2}$ می‌شود.

مثال: میانگین n داده $\bar{x}$ برابر 12 و میانگین 12 داده دیگر برابر 10 است. دو سرده را به هم می‌زنیم

میانگین n داده $11,5$ می‌شود. n را باید بداند.

$$\frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m} = 11,0 \Rightarrow \frac{12n + 12 \times 11}{n+12} = 11,0 \Rightarrow 110n + 132 = 12n + 132$$

$$\Rightarrow 10n = 12 \Rightarrow n = \frac{12}{10} = 1,2$$

مثال: اگر میانگین داده‌های $2x_1 + 5, 2x_2 + 5, \dots, 2x_n + 5$ برابر ۲۰ باشد میانگین $\frac{x_1}{2} + 1, \frac{x_2}{2} + 1, \dots, \frac{x_n}{2} + 1$ را بیابید.

$$2x_i + 5 \xrightarrow{-5} 2x_i \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} x_i \xrightarrow{+1} \frac{x_i}{2} + 1$$

$$\bar{x} = 20 \xrightarrow{-5} \bar{x} = 15 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \bar{x} = \frac{15}{2} = 7,5 \xrightarrow{+1} \bar{x} = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2} = 4,5$$

نکته: برای ی بس سرج میانگین اعداد بزرگ، از همه اعداد یک عدد کوچکتر بکسر است به میانگین داده‌ها نزدیک باشد، کم می‌کنیم. میانگین اعداد جدید را می‌یابیم و در آن عددی را که کم کردیم به میانگین اضافه می‌کنیم.

مثال: میانگین اعداد ۹، ۹۲، ۹۷، ۱۰۰، ۱۱۰، ۱۰۵، ۱۲۰ را بیابید.

۹، ۹۲، ۹۷، ۱۰۰، ۱۰۵، ۱۱۰، ۱۲۰.

۱۰۵ را از همه کم می‌کنیم:

۱۵، ۵، ۰، ۵، ۸، ۱۲، ۱۵-

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{-15 + \dots + 15}{7} = -4 \rightarrow \bar{x}_{\text{قدیم}} = -4 + 105 = 101$$

(۲) **میان:** عددی که بعد از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ در وسط قرار می‌گیرد.

اگر n داده داشته باشیم دو حالت رخ می‌دهد:

(الف) n زوج باشد: فقط یک عدد در وسط قرار می‌گیرد که میانه خواهد بود. شماره این داده $\frac{n+1}{2}$ است.

(ب) n زوج نباشد: دو داده در وسط قرار می‌گیرند که میانگین این دو داده میانه است. شماره این دو داده $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$ است.

مثال: میان داده‌های زیر را بیابید.

۱) ۱۹, ۲, ۱۷, ۴, ۱۰, ۱۲, ۶, ۱۵, ۸, ۱, ۴

$n = 11$: داده ۷ام $\frac{11+1}{2} = 6$ یعنی ۶ میانه است.

۲) ۱۲, ۵, ۱۵, ۴, ۶, ۹, ۱۴, ۲.

۳, ۵, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۴, ۲.

$\frac{8+1}{2} = 4.5$ میانه.

$n = 8$: میانگین دو داده وسط یعنی داده چهارم و پنجم میانه است.

مثال: برای کدام تعداد ۵ میانه داده‌های ۳, ۱۵, ۴, ۵, ۱۱, ۲ برابر ۱۰.۵ است؟

۵۱۱ ✓ ۶۱۲ ۷۱۳ ۸۱۴

چون مقدار داده‌ها ۶ تا است پس میانگین داده ۵ام و ۶ام میانه خواهد بود.

۳, ۴, ۵, ۱۱, ۱۵, ۲۱

$$\frac{a+11}{2} = 10.5 \rightarrow a+11 = 21 \rightarrow a = 10$$

چاب اول رسوم: میانه داده‌های قبل از میانه را چاب اول Q_1 و میانه داده‌های بعد از میانه را چاب سوم Q_3

میانه Q_2 می‌گوئیم. به عبارت دیگر به میانه $[Q_1]$ داده‌های قبل از چاب اول و به میانه $[Q_3]$ داده‌های بعد از چاب سوم می‌گویند.

مثال: چاب اول رسوم را برای داده‌های زیر بسازید.

$$Q_1 = \frac{2+4}{2} = 3, \quad Q_3 = \frac{7+9}{2} = 8, \quad Q_2 = 5$$

1) 1, 2, ..., 9, 9 : $n=9$

$\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}_{Q_2 = 5}$

$$Q_1 = 4, \quad Q_3 = 10, \quad Q_2 = 6.5$$

2) 5, 6, 4, 2, 7, 8, 10, 9 : $n=8$

$\underbrace{3, 4, 5, 6}_{Q_1 = 4} \quad \underbrace{7, 8, 9, 10}_{Q_3 = 10}$
 $Q_2 = 6.5$

ب) معیارهای پراشندگی:

معیارهایی که دوری یا نزدیکی داده‌ها از میانگین را بررسی می‌کنند. به معیار محکم برای انتخاب میزان پراشندگی

از میانگین عبارتند از: **انحراف معیار - واریانس - ضریب تغییرات**

1) **انحراف معیار و واریانس:**

اگر مربع درجات انحراف از میانگین را بر تعداد داده‌ها تقسیم کنیم **واریانس** بدست می‌آید که آن را با σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

نسبت می‌دهیم یعنی:

حذر! واریانس را **انحراف معیار** می‌نامیم و با σ نشان می‌دهیم.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

نکته: اگر واریانس و انحراف معیار داده‌ها کوچک باشد به این معناست که پراکندگی حول میانگین کم و در نتیجه

داده‌ها به هم نزدیک‌ترند و اگر واریانس و انحراف معیار داده‌ها بزرگ باشد یعنی پراکندگی داده‌ها حول

میانگین شل‌تر و در نتیجه داده‌ها از هم دورترند.

مثال: واریانس و انحراف معیار داده‌ها را بدست آورید.

۱۰، ۱۵، ۱۸، ۱۴، ۱۴، ۲۰.

$$\bar{x} = \frac{10 + 15 + 18 + 14 + 14 + 20}{6} = \frac{91}{6} = 15.1667$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(10 - 15.1667)^2 + (15 - 15.1667)^2 + (18 - 15.1667)^2 + (14 - 15.1667)^2 + (14 - 15.1667)^2 + (20 - 15.1667)^2}{6}$$

$$= \frac{25.7 + 0.03 + 8.1 + 1.4 + 1.4 + 23.5}{6} = \frac{59.73}{6} = 9.955$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{59.73}{6}} = \frac{\sqrt{59.73}}{\sqrt{6}} = \frac{7.72}{2.45} = 3.15$$

چند نکته:

۱) اگر داده‌ها شکل دایره‌جایی با قدر نسبت k بدهند واریانس دهنده $\sigma^2 = \frac{n-1}{12} k^2$ است.

۲) اگر همه داده‌ها عدد ثابتی اضافه یا کم کنیم واریانس، انحراف معیار تغییر نمی‌کند. از این نکته وقتی داده‌ها

بزرگ شوند می‌توان استفاده کرد.

۳) اگر واریانس یا انحراف معیار باشد k و همه داده‌ها k بار با هم ضرب شود واریانس (و در نتیجه معیار هم) k^2 بار بزرگ‌تر می‌شود.

۴) اگر داده‌ها را در k ضرب کنیم انحراف معیار k برابر و واریانس k^2 برابر می‌شود.

۵) فرمول واریانس را می‌توان به صورت: $(\bar{x})^2 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \sigma^2$ هم نوشت.

۶) واحد اندازه‌گیری واریانس، مربع واحد داده‌ها است و واحد اندازه‌گیری انحراف معیارها، واحد اندازه‌گیری

داده‌ها است.

مثال: مجموع مربعات ده داده برابر ۲۲۵۰ و میانگین دهنده ۱۰۴۲ است. انحراف معیار کرام است.

۴ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

$$\sigma = 5 \Rightarrow \sigma^2 = 25 = 2250 - 2000 = 2250 - (1042)^2 = \frac{2250}{10} - \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \bar{x}^2$$

۲) ضریب تغییرات (cv)

ی فزودیم بعدی برای منعش براندگی داده ها قوت کم که در آن هم براندگی داده ها هم میانگین منعش را
باشد. مثلاً در یک تیم والیبال هر حدی میانگین قد بازیکنان کمتر و براندگی قد ریزه کمتر باشد، از نظر طول قد مطلوبتر است.

این ضریب تغییرات نامیده می شود که میزان براندگی داده ها را به ازای یک واحد از میانگین نشان می دهد.

تعریف: تقسیم انحراف معیار بر میانگین را ضریب تغییرات می گویند. $cv = \frac{s}{\bar{x}}$

چند نکته:

۱) ضریب تغییرات به واحد اندازه گیری بستگی ندارد. (مثلاً اگر داده ها به cm اندازه گیری شده باشند و به

متری که که دانه را به m تبدیل دیم cv را می بینیم.) بنابراین برای مقایسه براندگی داده های که واحدین

ندارند بهترین شاخص براندگی cv است که بدون واحد است. (مثلاً مقایسه براندگی قد با وزن دانش آموزان)

۲) هر چه ضریب تغییرات داده ها کمتر باشد، میزان براندگی داده ها کمتر است.

۳) اگر داده ها را k برابر کنیم، cv تغییر نمی کند.

۴) اگر به همه داده ها k را اضافه کنیم، ضریب تغییرات به صورت $\frac{k}{\bar{x}+k}$ cv تغییر می کند.
مقدار cv کم می شود.

مثال: اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های $n_1, n_2, \dots, n_k$ به ترتیب ۱۰، ۱۲۵ و ۱۴ باشد، ضریب تغییرات داده‌ها

$n_1 + 2, \dots, n_k + 2$ کدام است؟

$$(CV)_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8} = 12.5\%$$

مثال: اگر انحراف معیار داده‌های $n_1, \dots, n_k$ برابر ۲ و ضریب تغییرات آن‌ها برابر ۰.۵ باشد، ضریب

تغییرات داده‌های $5n_1 + 2, \dots, 5n_k + 2$ کدام است؟

$$(1) \quad \frac{\sigma_c}{\sigma+c} \quad (2) \quad \frac{\sigma+c}{\sigma_c} \quad (3) \quad \frac{\sigma_c}{\sigma+2c} \quad (4) \quad \frac{\sigma+2c}{\sigma_c}$$

$$(CV)_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sigma_x}{(CV)_x} = \frac{2}{0.5} \quad \bar{y} = 5 \times \frac{2}{0.5} + 2 = \frac{10+2c}{c}$$

$$\sigma_y = 2 \times 0.5 = 1 \Rightarrow (CV)_y = \frac{1}{\frac{10+2c}{c}} = \frac{1 \cdot c}{10+2c} \stackrel{=0}{=} (CV)_y = \frac{\sigma_c}{\sigma+c}$$

مثال: اگر میانگین و CV اندازه اشیاء مربع‌های به ترتیب ۱۵، ۱۲ باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

$$(1) \quad 232 \quad (2) \quad 229 \quad (3) \quad 227 \quad (4) \quad 234$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 12 = \frac{\sigma}{15} \Rightarrow \sigma = 18 \Rightarrow \sigma^2 = 324$$

اگر ضلع n باشد مساحت n^2 می‌شود. میانگین مساحت‌ها ضریب میانگین مربعات داده‌ها، از فرمول درم واریانس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum u_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 324 = \frac{\sum u_i^2}{n} - (15)^2 \Rightarrow \frac{\sum u_i^2}{n} = 234$$