

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

سرمدی: سید ابوالفضل خاوند

به نام خدا

با شروع پاندمی کرونا که منجر به تعطیلی آموزش حضوری در مراکز آموزشی گردید و آموزش مجازی به اشکال مختلف به عنوان یک شیوه آموزش به طور جدی معرفی شد، بر آن شدم برای آن دسته از دانش آموزانی که به صورت صحیح آموزش مجازی دسترسی ندارند و همکارانی که بستر مناسبی برای تدریس مجازی در اختیار نداشتند، مجموعه‌ای شامل فیلم و جزوه برای درس ریاضی ۳ آماده کنم تا شاید در آن ایام سخت کمکی هر چند ناچیز به آموزش مفهومی ریاضیات و گسترش عدالت آموزشی شده باشد. آن دوران تمام شد ولی دیگر آموزش‌های تلفیقی و ترکیبی جای آموزش‌های سنتی را گرفت و فصلی جدید در امر آموزش گشوده شد.

با توجه به حجم بالای کار و تهیه همزمان فیلم و جزوه برای این درس و درس‌های دیگر قطعاً اشتباهاتی در جزوه وجود دارد که از علاقه‌مندان پوزش می‌طلبم و خوشحال می‌شوم با شناسه شاد بنده به آدرس @seyedfazelian در میان بگذارند تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح شود.

همانطور که خواهید دید جزوه به صورت جلسه‌ای و با قلم نوری تنظیم شده که فیلم هر جلسه در کانال آپارات

<https://www.aparat.com/s.a.fazelian> در دسترس می‌باشد.

در پایان یادآوری می‌شوم استفاده از این جزوه به هر صورت مجاز و هزینه آن فقط دعا برای عاقبت بخیری نگارنده است.

سیدابوالفضل فاضلیان

۱۴۰۲/۱/۱۱

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل اول: تابع

درس اول: توابع چند جمله‌ای - توابع

صعودی و نزولی

قسمت اول: (توابع چند جمله‌ای -

آشنایی با تابع درجه سوم)

جلسه اول: صفحات ۲ تا ۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه‌های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

توابع چندجمله‌ای :

توابعی که ضرایب آن‌ها به صورت $f(n) = a_n n^n + a_{n-1} n^{n-1} + \dots + a_1 n + a_0$ است و

آن a_n تا a_0 اعداد حقیقی و $a_n \neq 0$ است، تابع چندجمله‌ای درجه n نامیده می‌شود.

در مت‌کنید توان n ها باید اعداد حسابی باشند. بیشترین توان n ها درجه چندجمله‌ای است.

مثال: کدامیک از توابع زیر چندجمله‌ای است ؟

الف) $f(n) = \frac{1}{n}$ نیست

ب) $g(n) = 4n^2 + \sqrt{5}n - 1$ هست (تابع درجه دوم)

پ) $h(n) = \sqrt{n+2}$ نیست

ت) $q(n) = \sqrt{n} + \frac{1}{2}$ هست (تابع رنجی)

ث) $p(n) = 5$ هست (ثابت)

ج) $k(n) = n^{\frac{1}{2}} + 2n$ نیست

نکته: توابع خطی و هبانی، ثابت و درجه دوم، همگی تابع چندمجهدی هستند.

$$y = an^2 + bn + c \quad y = c \quad y = n \quad y = an + b$$

نکته: دامنه تمام توابع چندمجهدی $\mathbb{R}$ است. همچنین بردار تمام توابع چندمجهدی از درجه

فره هم $\mathbb{R}$ است.

تابع چندجمله‌ای درجه سوم:

هر تابع با ضابطه $f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ که در آن $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$

باشد را یک تابع چندمجهدی از درجه سوم می‌نامیم.

مانند:

$$f(n) = 2n^3 - \frac{1}{5}n^2 + \sqrt{5}n + \pi$$

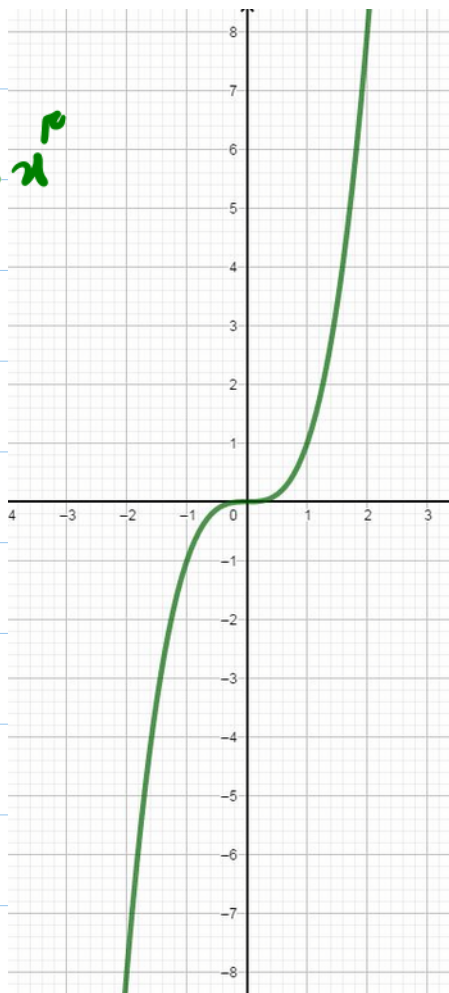
$$g(n) = 8n^3 + 1, \quad h(n) = 5n^3 - 7n^2$$

منو در توابع $y = n^3$ و $y = -n^3$

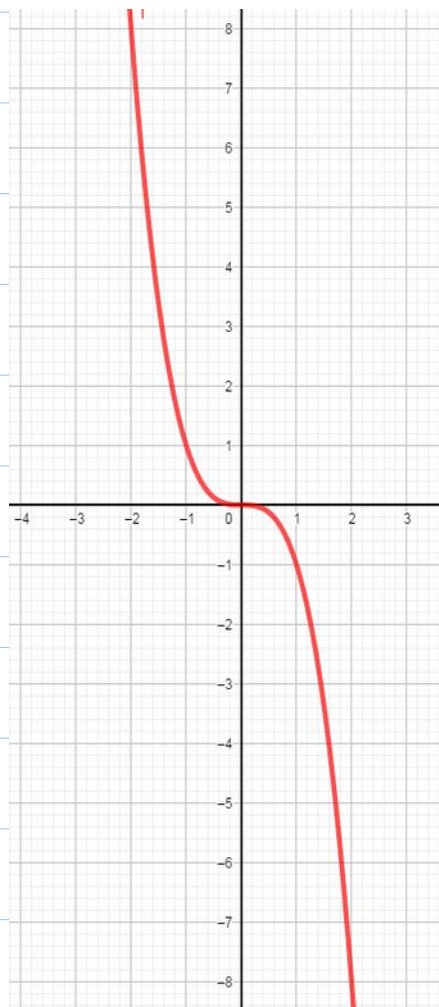
n	-1	0	1	2
$y = n^3$	-1	0	1	8

n	-1	0	1	2
$y = -n^3$	1	0	-1	-8

$$y = x^3$$



$$y = -x^3$$



هر دو مندرار نسبت به مبدأ مختصات متقارن اند

تذکر: برای رسم توابع درجه سوم از قوانین انتقال برای رسم مندرارها کمک می گیریم.

مثال: مندرار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ را رسم کنید.

باید تابع درجه سوم را به صورت $y = k(x-a)^3 + b$ در آوریم.

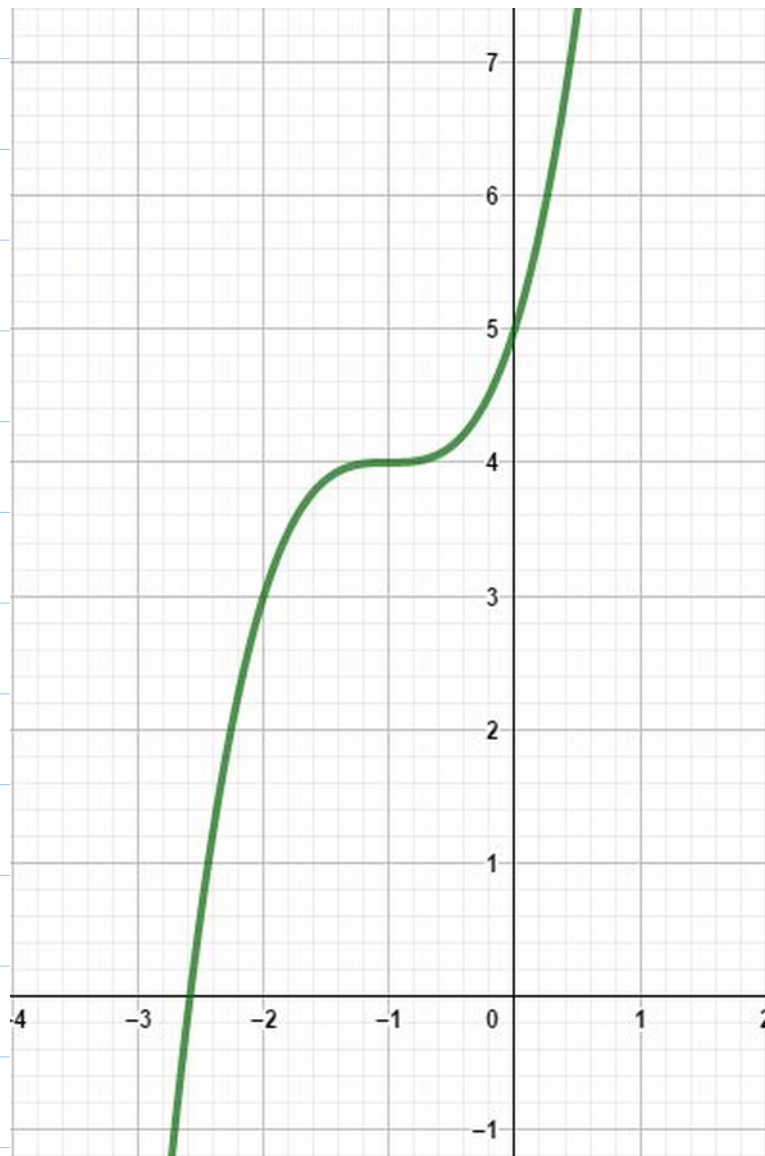
یادآوری: اتحاد ملب درجه ۳:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$f(n) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 4 = (n+1)^3 + 4$$

انتقال

نمودار $y = n^3$ را چهار واحد به سمت بالا و یک واحد به سمت چپ انتقال می دهیم.



به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y = (x-1)^3 + 2$ ۶

ب) $y = (x-2)^3$ ۹

پ) $y = -x^3 + 1$ ۸

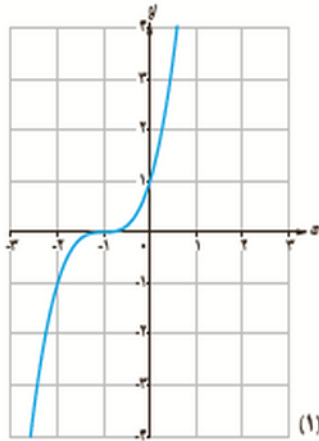
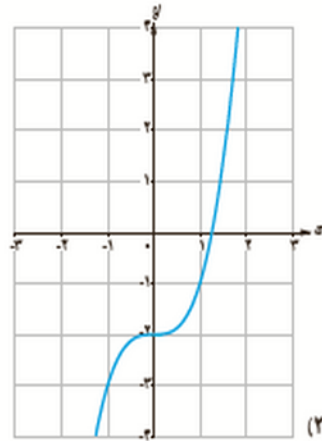
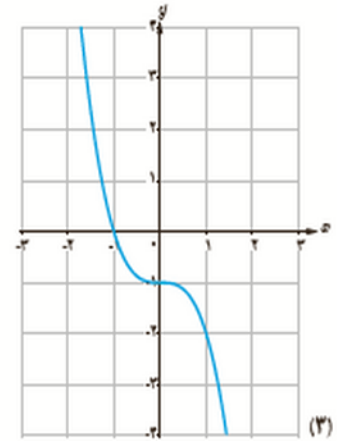
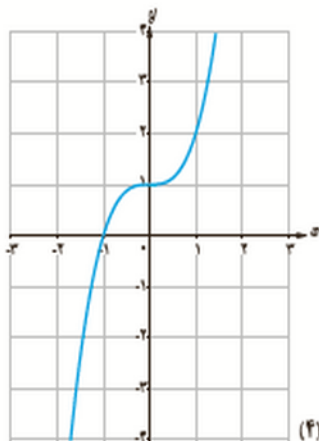
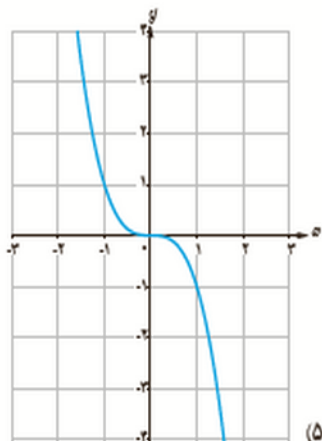
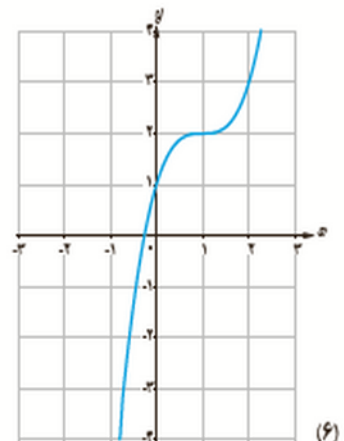
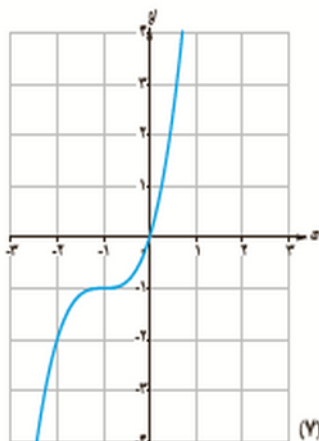
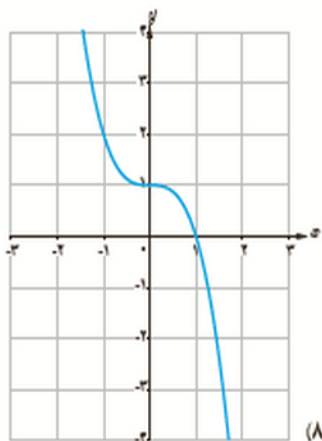
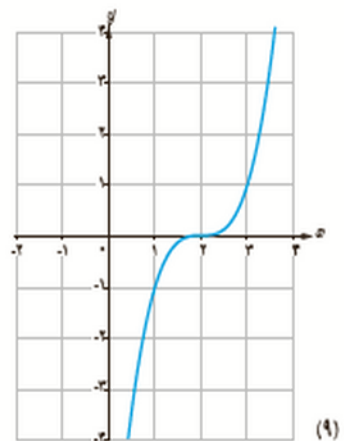
ت) $y = -x^3$ ۵

ث) $y = (x+1)^3$ ۱

ج) $y = x^3 + 1$ ۳

ح) $y = -x^3 - 1$ ۴

خ) $y = x^3 - 2$ ۲



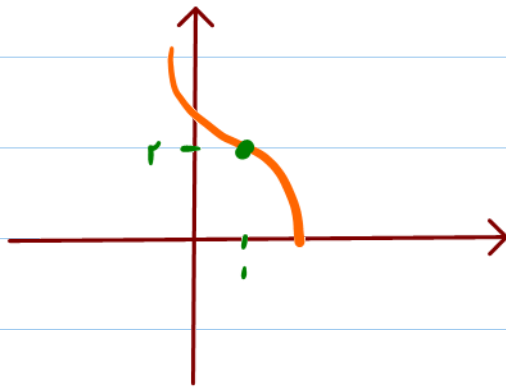
نکته: در توابع درجه سوم به صورت $y = k(x-a)^3 + b$ ، نقطه (a, b) مرکز تقارن

است. می توان از این نقطه در رسم سریع نمودار توابع درجه سوم کمک گرفت.

مثال: نمودار تابع $y = -(x-1)^3 + 2$ را رسم کنید.

پایه: $y = -x^3$

$(1, 2)$ مرکز تقارن



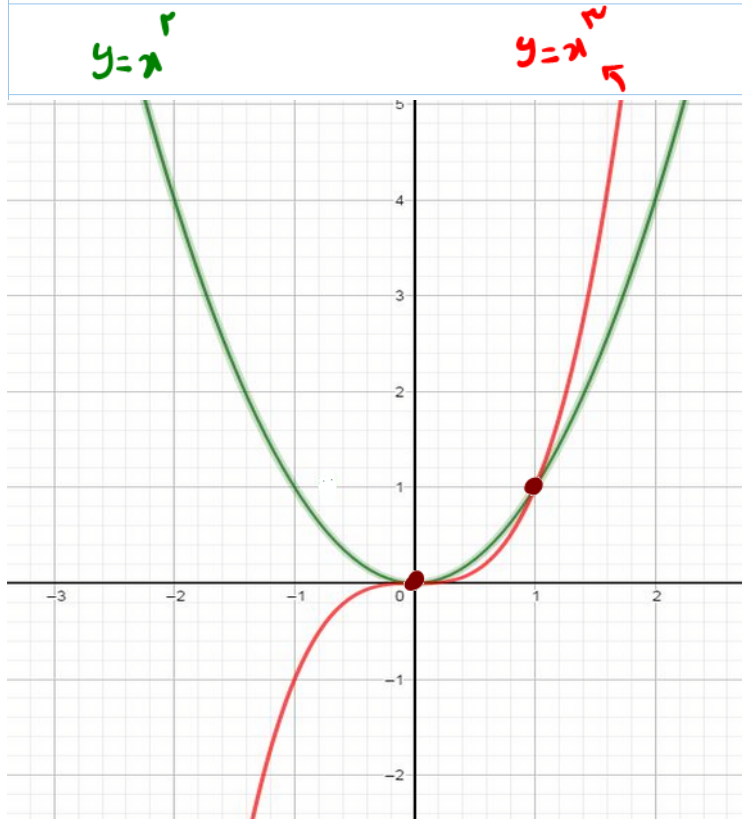
مقایسه نمودارهای $y = x^2$ و $y = x^3$:

۱- دو نمودار در نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ متقاطع اند.

۲- برای $x > 1$ ، $y = x^3$ بالای $y = x^2$ است.

۳- برای $0 < x < 1$ و $x < 0$ نمودار

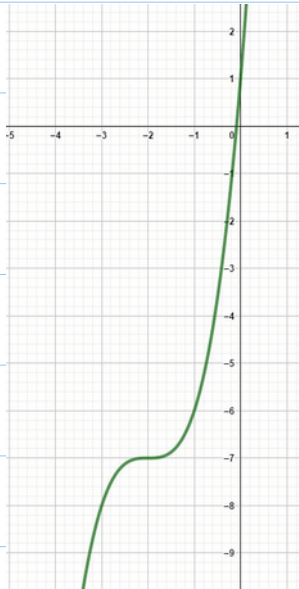
$y = x^2$ بالای $y = x^3$ است.



مثال: مقدار تابع $y = x^3 + 4x^2 + 12x + 1$ در کدام ناحیه محورها مختلف عبور نمی کند؟

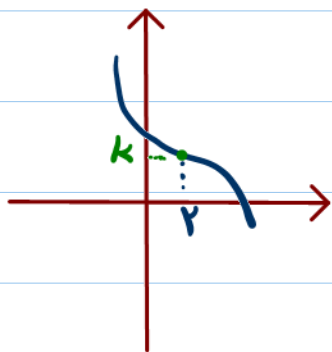
$$y = x^3 + 4x^2 + 12x + 1 = (x+2)^3 - 7$$

انتقال



از ناحیه چهارم عبور نمی کند.

مثال: مقدار تابع $g(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ به شکل زیر است. مقدار a, b را بیابید.



مکزقن (2, k)

ر برعس : فریب x منی

$$g(x) = -(x-2)^3 + k = -(x^3 + 3x^2(-2) + 3x(-2)^2 + (-2)^3) + k$$

$$g(x) = -x^3 + 4x^2 - 12x + 8 + k = -x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-12 \end{cases}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل اول: تابع

درس اول: توابع چند جمله‌ای - توابع

صعودی و نزولی

قسمت دوم: (توابع صعودی و نزولی)

جلسه دوم: صفحات ۶ تا ۱۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف تابع صعودی :

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

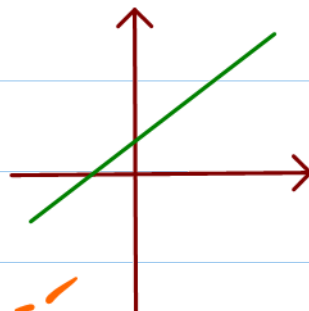
$$f(x_1) < f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع صعودی می نامیم.

به عبارت دیگر در تابع صعودی ، با افزایش x ، y افزایش می یابد یا ثابت می ماند.



با دقت از چپ به راست هیچگاه پائین نمی رویم →



مثال :

تعریف تابع ابتداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$$f(x_1) < f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع ابتداً صعودی می نامیم.

به عبارت دیگر در تابع ابتداً صعودی ، با افزایش x ، y هم افزایش می یابد.



مثال :

با دقت از چپ به راست همواره پائین نمی رویم →

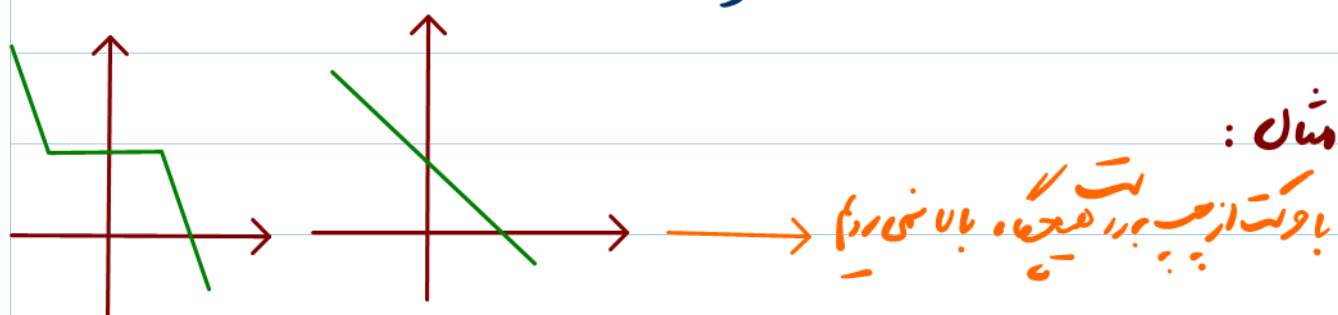
تعریف تابع نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع نزولی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع نزولی، با افزایش x یا کاهش y ثابت می‌ماند.



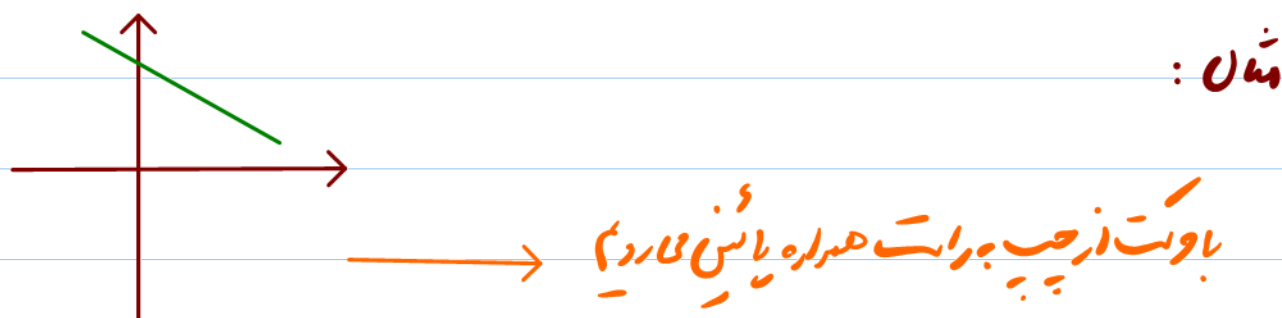
تعریف تابع اکیدا نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم

$$f(x_1) > f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع اکیدا نزولی می‌نامیم.

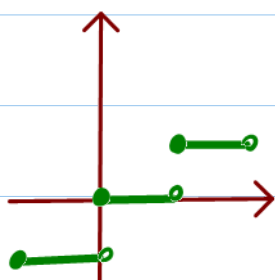
به عبارت دیگر در تابع اکیدا نزولی، با افزایش x ، y کاهش می‌یابد.



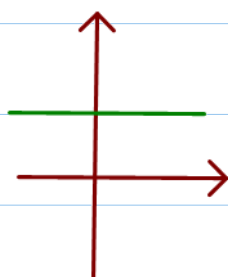
نکته: هر تابع اکسید صورتی، صورتی هم هست و هر تابع اکسید نزولی، نزولی هم هست.

ولی عکس این مطلب درست نیست.

مثال: تابع $y = [x]$ صورتی است ولی اکسید صورتی نیست.



نکته: اگر با افزایش x ، y ثابت بماند می‌گوئیم تابع ثابت است. تابع ثابت هم صورتی است.



مثال:

در هم نزولی.

تعریف تابع اکسید یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) اکسید صورتی یا اکسید نزولی

باشد، می‌گوئیم تابع f روی مجموعه A اکسید یکنوا است.

تعریف تابع یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) صورتی یا نزولی باشد، می‌گوئیم

تابع f روی مجموعه A یکنوا است.

نکته: اگر در تابع با افزایش x حرکت از چپ به راست روی نمودار، y گاهی اوقات

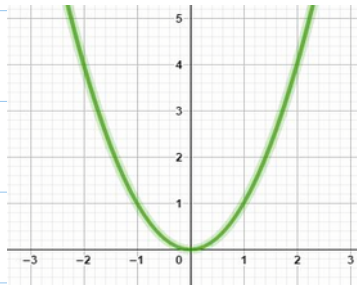
افزایش دهی اوقات کاهش یابد، این تابع را **فِرِیلِنْدِای** گوئیم.

دقت کنید ممکن است تابعی روی دامنه اش فِرِیلِنْدِا باشد ولی روی زیرمجموعه های

از دامنه اش فِرِیلِنْدِا باشد.

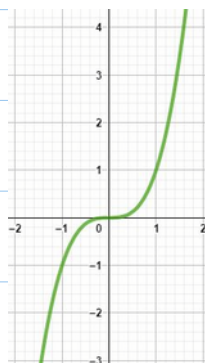
بررسی فِرِیلِنْدِای توابع معروف:

۱) $y = x^2$



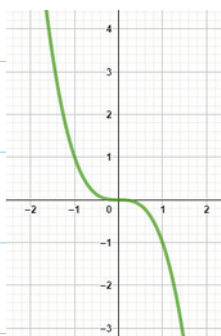
فِرِیلِنْدِا روی $[-\infty, +\infty)$ (اکثرتری)
و در $(-\infty, +\infty)$ (اکثره‌تری)

۲) $y = x^3$



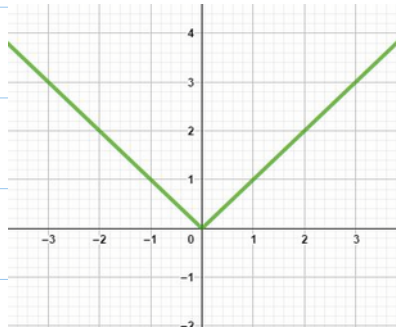
اکثرتری فِرِیلِنْدِا (اکثره‌تری)

۳) $y = -x^3$



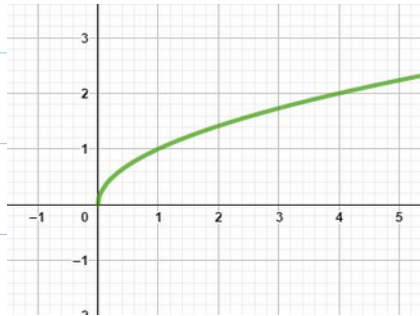
اکثرتری فِرِیلِنْدِا (اکثره‌تری)

$$۴) y = |x|$$



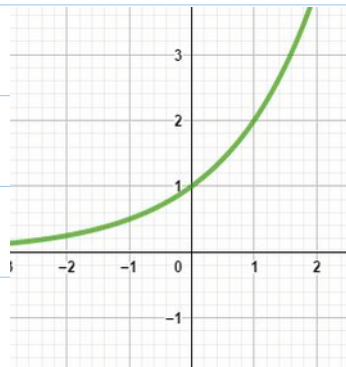
غیر منفرد
 در $[-\infty, 0]$ (کثیراً نزولی)
 و در $[0, +\infty]$ (کثیراً صعودی)

$$۵) y = \sqrt{x}$$



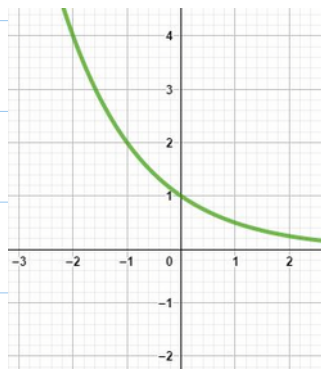
کثیراً منفرد (کثیراً صعودی)

$$۶) y = a^x \quad (a > 1)$$



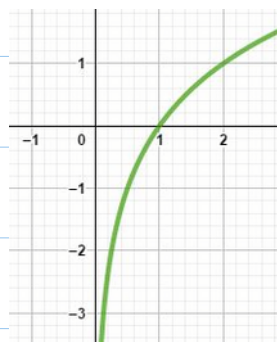
کثیراً منفرد (کثیراً صعودی)

$$۷) y = a^x \quad (0 < a < 1)$$



کثیراً منفرد (کثیراً نزولی)

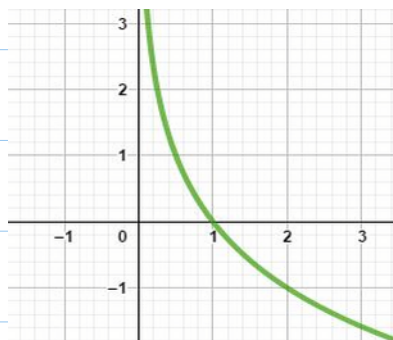
$$۸) y = \log_a x \quad (a > 1)$$



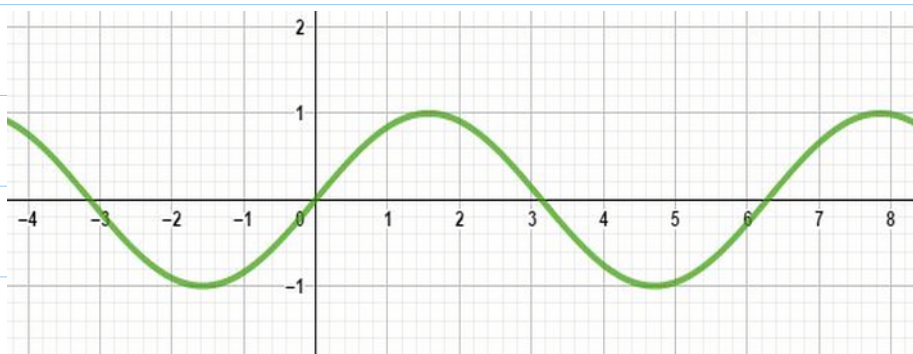
کثیراً منفرد (کثیراً صعودی)

۹) $y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$

اگر a بزرگتر از ۱ باشد (اگر a نزديک ۱ باشد)

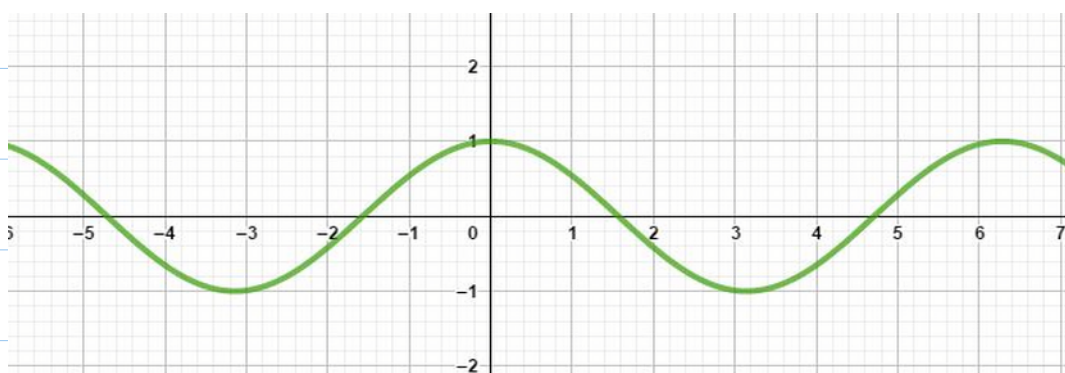


۱۰) $y = \sin x$



خیز بزرگتر از ۱ می باشد در $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ تابع اگر a نزديک ۱ باشد.

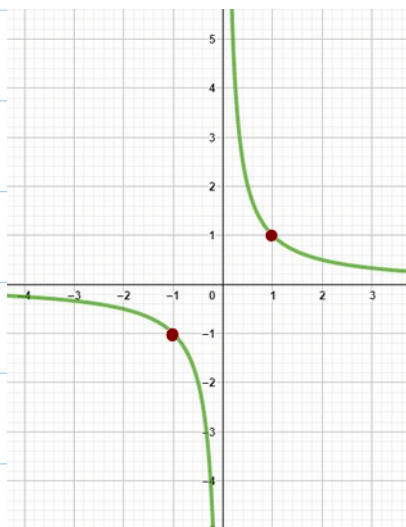
۱۱) $y = \cos x$



خیز بزرگتر از ۱ می باشد در $[\pi, 2\pi]$ تابع اگر a نزديک ۱ باشد.

۱۲) $y = \frac{1}{x}$

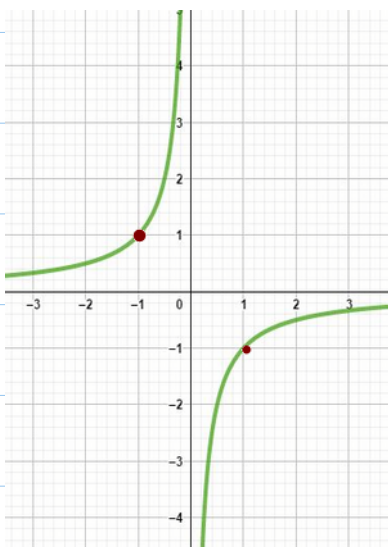
$f(1) < f(-1) \rightarrow 1 < -1$
 محوری



خیز یکنوا دی در $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$
 اکبراً نزدیکی است

۱۳) $y = -\frac{1}{x}$

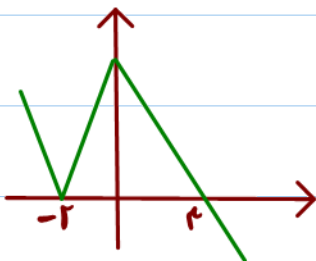
$f(1) > f(-1) \rightarrow 1 > -1$
 نزولی



خیز یکنوا دی در $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$
 اکبراً محوری است

مثال: با توجه به نمودار تابع f ، یکنوایی آن را بررسی کنید.

الف)



خیز یکنوا دی در $[-2, -\infty)$ و $(-\infty, +\infty]$

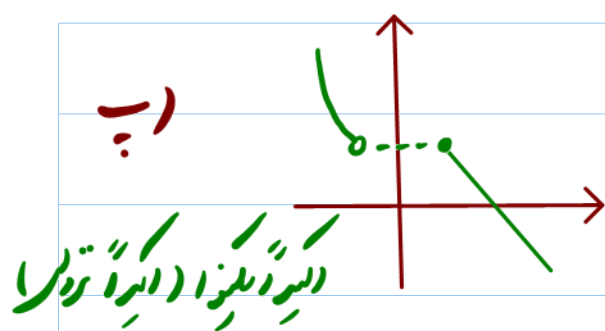
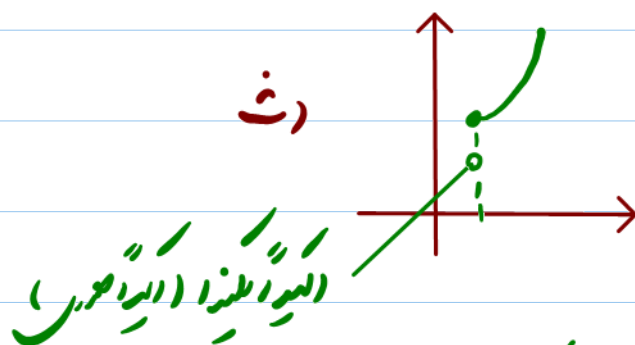
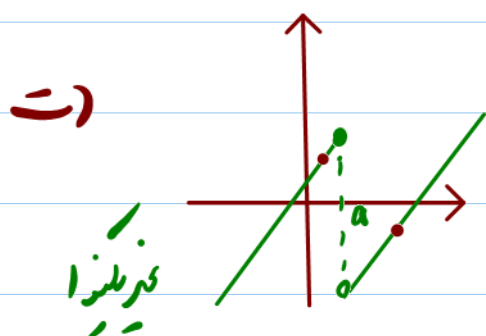
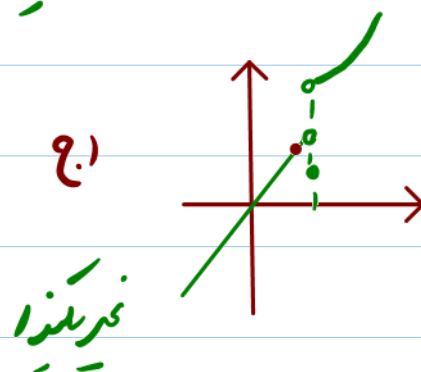
اکبراً نزدیکی و در $[0, 2]$ اکبراً محوری

ب)



و برای دانستن درجه

یکنوا (نزدیکی)



مثال: تابع $f = \{(1, 2), (2, m-1), (3, 7-m)\}$ صوری است. عدد m را بیابید.

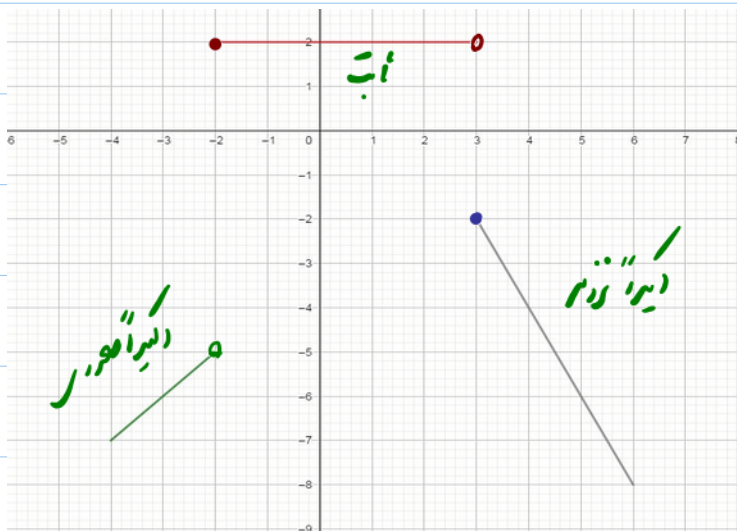
$$1 < 2 \rightarrow f(1) \leq f(2) \Rightarrow 2 \leq m-1 \Rightarrow m \geq 3 \quad (1)$$

$$2 < 3 \rightarrow f(2) \leq f(3) \Rightarrow m-1 \leq 7-m \Rightarrow 2m \leq 8 \rightarrow m \leq 4 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 3 \leq m \leq 4$$

مثال: تابع $y = \begin{cases} x-4 & x < -2 \\ 2 & -2 \leq x < 4 \\ -2x+4 & x \geq 4 \end{cases}$ روی بازه $(-\infty, a)$ صوری است.

بیشترین مقدار برای a را بیابید.

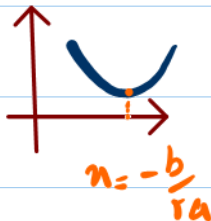


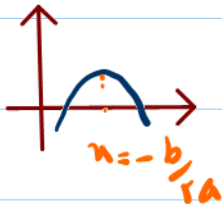
تابع صعودی: $(-\infty, 2)$

↓
a

$$\Rightarrow a = 4$$

نکته: طبق رفته دیدیم تابع $y = ax^2 + bx + c$ روی $\mathbb{R}$ غیر یکنواخت دی

a > 0 (اف)  $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ کاهنده و $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ (کاهش‌ناپذیر)

a < 0 (ب)  $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ (کاهش‌ناپذیر) و $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ کاهنده

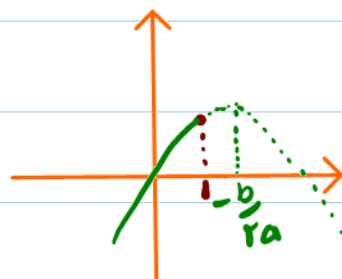
همچنین می‌توان گفت سعی در هر بازه‌ای که راس کلی درون آن بازه باشد غیر یکنواخت

مثال: تابع درجه دوم $f(x) = (k+2)x^2 + x$ با دامنه $(-\infty, 1]$ صعودی است.

عدد k را بیابید.

$$(1) \quad a < 0 \Rightarrow k+2 < 0 \Rightarrow k < -2$$

$$a = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(k+2)} \geq 1$$



$$\frac{-1}{2(k+2)} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2(k+2)} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+2k+2}{2(k+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2k+3}{2(k+2)} \leq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-2	$+\infty$
$2k+3$	$-$	0	$+$	$+$
$2(k+2)$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2k+3}{2(k+2)}$	$+$	0	$-$	$+$

$$-\frac{3}{2} \leq k < -2 \quad (2) \Rightarrow (1) \cap (2) = -\frac{3}{2} \leq k < -2$$

مثال: تابع $y = (k-1)^x$ را برای k را بدست آورید.

$$a > 1 \Rightarrow k-1 > 1 \Rightarrow k > 2 \Rightarrow k > \sqrt{2} \text{ یا } k < -\sqrt{2}$$

قضیه: (الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صوری باشد و a, b مقادیر باشند

باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a < b$.

(ب) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً نزولی باشد و a, b مقادیر باشند

باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a > b$.

اثبات: (الف) چون تابع f اکیدا صعودی است پس اگر $a > b$ آنگاه $f(a) > f(b)$.
 فرض کنیم

حال اگر یک نقطه این نوار به رسم داشته باشیم می‌پیرود:

$$\text{اگر } f(a) \leq f(b) \text{ آنگاه } a \leq b \quad \square$$

ب) به عنوان تمرین، حل شود.

تذکره: پس می‌توان گفت اگر تابع f (اکیدا) صعودی باشد و آن را از دو طرف نامیاری

حذف کنیم، جهت نامیاری تغییر نمی‌کند ولی اگر f (اکیدا) نزولی باشد، با حذف آن از

دو طرف، جهت نامیاری برعکس می‌شود.

مثال: اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد و $f(3a+2) > f(a^2-1)$ ، حد در a را بیابید.

$$f(a^2-1) > f(3a+2) \xrightarrow{f \text{ نزولی}} a^2-1 < 3a+2$$

$$a^2-3a-2 < 0 \Rightarrow (a+1)(a-4) < 0 \Rightarrow -1 < a < 4$$

مثال: بجزء جواب نامعادله زیر را بنویسید.

$$\text{رابطه} \quad 14^{2n-2} \geq 8^{2n-1}$$

$$(2^7)^{2n-2} \geq (2^3)^{2n-1} \Rightarrow \cancel{2^{14n-14}} \geq \cancel{2^{6n-6}} \xrightarrow{\text{اینها را حذف کن}} 14n-14 \geq 6n-6$$

$$14n-6n \geq -6+14 \Rightarrow -n \geq 8 \Rightarrow n \leq -8 \rightarrow \text{ج. ر.} = (-\infty, -8]$$

$$\text{ب) } \log_{\frac{1}{2}}(n+1) > 2 \quad (1) \quad (n+1) > 0 \Rightarrow n > -1 \text{ : داده}$$

$$\cancel{\log_{\frac{1}{2}}(n+1)} > \cancel{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2} \xrightarrow{\text{اینها را حذف کن}} n+1 < \frac{1}{\frac{1}{2}} \rightarrow n < \frac{1}{2} - 1$$

$$n < -\frac{1}{2} \quad (2) \quad (1) \cap (2) \quad -1 < n < -\frac{1}{2} \rightarrow \text{ج. ر.} = (-1, -\frac{1}{2})$$

$$\text{پ) } (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{n+1} > (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{n+2}$$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{n+1} > ((\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1})^{n+2} \Rightarrow \cancel{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{n+1}} > \cancel{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-n-2}}$$

$$\xrightarrow{\text{اینها را حذف کن}} \overset{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\cdot} < -n-2 \Rightarrow 1 < -n-2 \Rightarrow 1+n < -2-1 \Rightarrow 1+n < -3$$

$$\Rightarrow n < -4 \rightarrow \text{ج. ر.} = (-\infty, -4)$$

نکته:

۱) اگر توابع f و g صوری باشند آنگاه $f+g$ هم صوری است.

۲) اگر توابع f و g نزدی باشند آنگاه $f+g$ هم نزدی است.

۳) اگر توابع f و g صوری باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $f \times g$ هم صوری است.

۴) اگر توابع f و g نزدی باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $f \times g$ هم نزدی است.

۵) اگر f صوری باشد آنگاه $f(x) - g$ نزدی است.

۶) اگر f نزدی باشد آنگاه $f(x) - g$ صوری است.

۷) اگر f صوری باشد و مقادیر f همگی مثبت و همگی منفی باشد آنگاه $f \pm g$ نزدی است.

۸) اگر f نزدی باشد و مقادیر f همگی مثبت و همگی منفی باشد آنگاه $f \pm g$ صوری است.

۹) اگر f صوری و g نزدی باشد و f صوری و g نزدی است.

مثال: اگر f تابعی نزولی با مقدار منفی باشد، کدام تابع نزودی است؟

✓ (۱) $y = 2^n f(n)$ (۲) $y = \frac{f(n)}{2^n}$ (۳) $y = 2^n + f(n)$ (۴) $y = 2^n - f(n)$

تابع f تابعی نزولی با مقدار منفی است. پس تابع f - تابعی صعودی با مقدار مثبت است.

همچنین تابع $2^n = y$ تابعی صعودی با مقدار مثبت است. پس ضرب این دو تابع منفی

$y = 2^n \times (-f) = -2^n f$ تابعی صعودی است. پس $y = 2^n f$ تابعی نزولی است.

مثال: اگر f و g توابعی نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشند، کدام تابع صعودی است؟

(۱) f (۲) g (۳) $-f$ (۴) $-g$ ✓

صعودی نزولی منفی نزولی نزولی نزولی
 $h = (f+g) + (g-f) = 2g \Rightarrow k = -\frac{1}{4}(2g) = -g$

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل اول: تابع

درس دوم: ترکیب توابع

صفحه: ۱۱ تا ۱۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

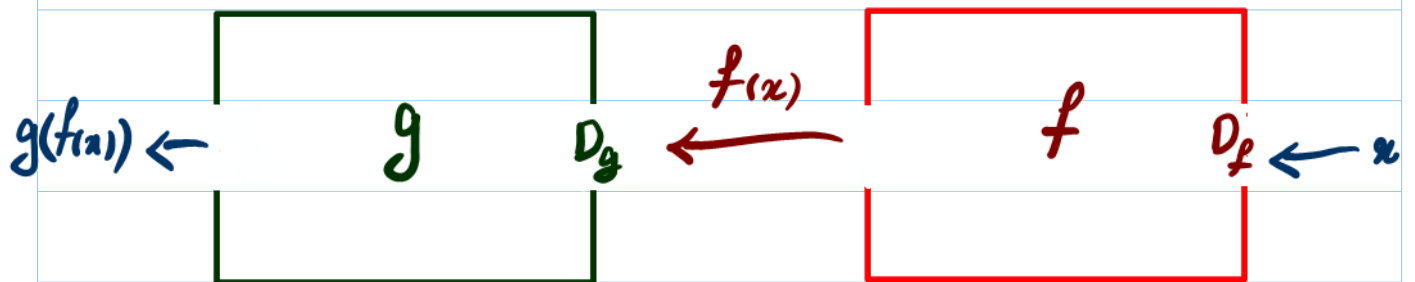
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

ترکیب توابع :

اگر f و g در تابع باشند، داشتن این توابع را به صورت های زیر در نظر بگیرید :

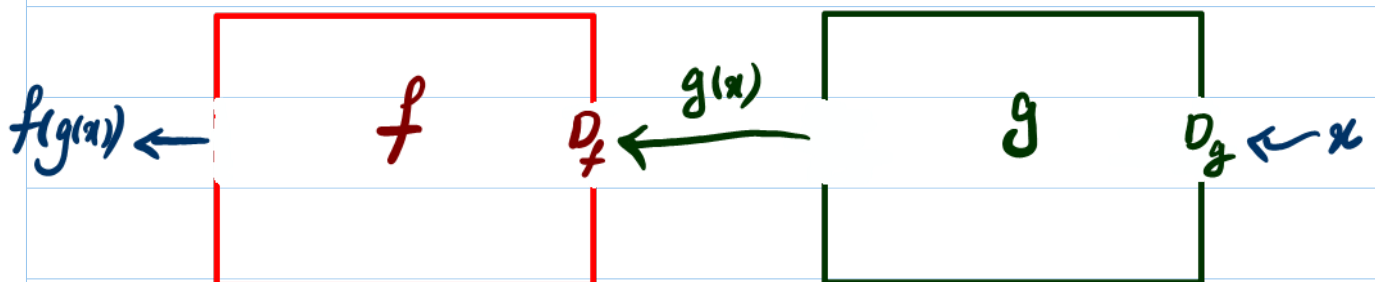


مجموعه های که حق ورود به f را دارند حتماً در D_f هستند و در تابع f می شوند و می

توری می آیند می پذیرد و $(f(x))$ قبول داده می شود. اگر $f(x)$ ها اجازه

ورود به g را داشته باشند حتماً در D_g باشند، داشتن g روی $f(x)$ اگر کرده

و $g(f(x))$ را به عنوان خروجی تحویل می دهد.



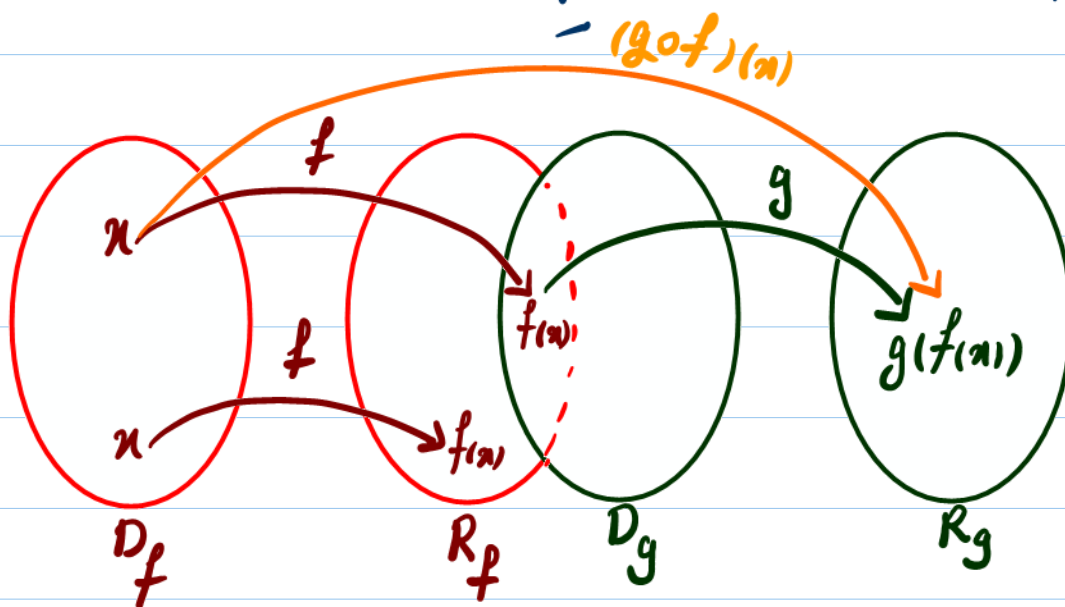
در شکل دوم، g ‌هایی که تحقق‌پذیرند و g را دارند یعنی در دامنه g هستند و در f نیستند

تأیید می‌شوند و خودی $g(f(x))$ قابل‌داده می‌شود. اگر $g(x)$ اجازه ورود به f را

داشته باشد یعنی در دامنه f باشند، داشتن f روی $g(x)$ امکان‌پذیر است و $f(g(x))$

را تحول می‌دهد.

همین مفهوم را در نمودار دین هم ببینیم.



تذکره: نموداری مشابه، نمودار با g برای $f(g(x))$ رسم کنید.

تعریف: ترکیب g با f را با $f \circ g$ نشان می‌دهیم و تأیید می‌کنیم که دامنه آن:

$$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

است و برای هر x در دامنه این تابع داریم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

تذکر: به همین ترتیب و در f با دامنه $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ نیز تعریف می‌شود که

برای هر x در این دامنه خواهیم داشت: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \cos x$ باشند، $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$

را بدست آورید.

معنی در تابع f به جای x ، $g(x)$ بگذاریم: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$$

معنی در تابع g به جای x ، $f(x)$ بگذاریم: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

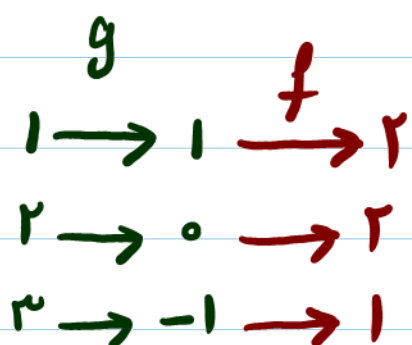
$$= \cos \sqrt{1-x^2}$$

مثال: اگر $f = \{(1,2), (2,-1), (-1,1), (0,2)\}$ و $g = \{(1,1), (2,0), (3,-1)\}$

باشند، تابع $g \circ f$ را تشکیل دهید.

ست چپ g های و رای نویم و به چهار درجی بنویسیم: $g \circ f$

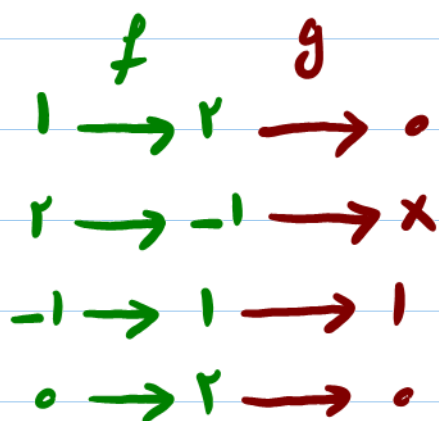
بعد f را درجی هم.



$$f \circ g = \{(1,2), (2,2), (3,1)\}$$

ست چپ g های f را بنویسیم و به چهار درجی بنویسیم: $g \circ f$

بعد g را درجی هم.



$$g \circ f = \{(1,0), (-1,1), (0,0)\}$$

سؤال: اگر $f = \{(1, 5), (2, 3), (4, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (1, 2)\}$ باشند $f \circ g$

تشکیل می‌دهد؟ چرا؟

$$\begin{array}{lcl} f & g & \\ 1 \rightarrow 5 & \rightarrow x & \\ 2 \rightarrow 3 & \rightarrow x & \\ 4 \rightarrow 7 & \rightarrow x & \end{array}$$

چون $R_f \cap D_g = \emptyset$

نتیجه: برای تشکیل $f \circ g$ باید $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ باشد.

برای تشکیل $g \circ f$ باید $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ باشد.

سؤال: اگر $f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ باشند، رابطه $f \circ g$

را بدست آورید.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\frac{2x-2}{x+1} + 2}{\frac{2x-2}{x+1} - 1} = \frac{\frac{2x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x-2-x-1}{x+1}}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{4x+1}{x-3}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \underbrace{\mathbb{R} - \{-1\}}_I \mid \underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_r \in \mathbb{R} - \{1\}\}$$

$$r: \frac{x-1}{x+1} \neq 1 \rightarrow x-1 \neq x+1 \rightarrow x \neq 1 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{r} \\ D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

مثال: اگر $g(x) = x^2 - 4$ باشد، $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، $f \circ g$ و $g \circ f$ را بیابید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4 - 2} = \sqrt{x^2 - 6}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad D_g = \mathbb{R} \quad D_f = [2, +\infty)$$

$$= \{x \in \underbrace{\mathbb{R}}_I \mid \underbrace{x^2 - 4}_{r} \in [2, +\infty)\}$$

$$r: x^2 - 4 \geq 2 \rightarrow x^2 \geq 6 \rightarrow x \geq \sqrt{6} \text{ یا } x \leq -\sqrt{6}$$

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{r}: D_{f \circ g} = (-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, +\infty)$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{r-x}$, $g(x) = \frac{1}{r-x}$, $D_{f \circ g}$, $f \circ g$ و $D_{f \circ g}$ را بیاب.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{r - r \times \frac{1}{r-x}} = \sqrt{r - \frac{r^2}{r-x}}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_g: r-x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{r}{r} \quad D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{r}{r}\right\}$$

$$D_f: r-rx \geq 0 \rightarrow -rx \geq -r \xrightarrow{\div (-r)} x \leq \frac{r}{r} \rightarrow D_f = (-\infty, \frac{r}{r}]$$

$$D_{f \circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{r}{r}\right\} \mid \frac{1}{r-x} \in (-\infty, \frac{r}{r}] \right\}$$

$$r: \frac{1}{r-x} \leq \frac{r}{r} \xrightarrow{\div r} \frac{1}{r-x} \leq \frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{r-x} - \frac{1}{r} \leq 0$$

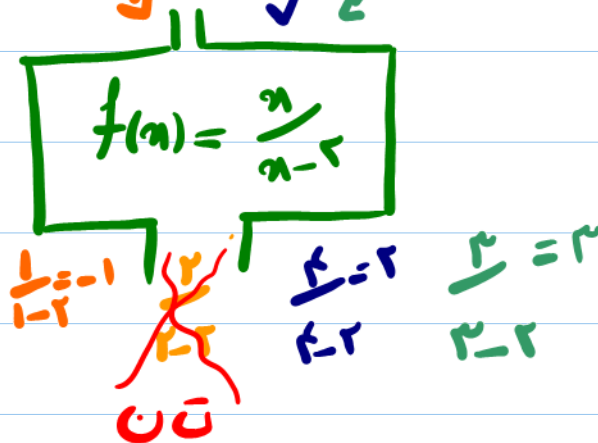
$$\frac{r-rx+0}{r(r-x)} \leq 0 \rightarrow \frac{r-rx}{r(r-x)} \leq 0$$

$$r \cdot r = (-\infty, \frac{0}{r}) \cup [r, +\infty)$$

x	$\frac{0}{r}$	r
$r-rx$	+	+
$r-x$	-	+
	-	+

$$\textcircled{1} \cap \textcircled{2} = D_{f \circ g} = (-\infty, \frac{0}{r}) \cup [r, +\infty)$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{x-2}$ و $g = \{(0,1), (1,2), (3,4), (5,3)\}$ باشد، $f \circ g$ را بسازید.



$$f \circ g = \{(0, -1), (1, 2), (5, 3)\}$$

نکته: اگر f و g وارده باشند و خودهم واری سبکیم. چون f وارده،

تابع $f \circ g$ را تشکیل می دهیم و با g وارده شده بسیاری ترکیبی می دهیم.

معادله حاصل را حل می کنیم تا $g(x)$ بدست آید.

مثال: اگر $(f \circ g)(x) = \frac{2x}{x-1}$ و $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ باشد، ضابطه $g(x)$ را بسازید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-2} = \frac{2x}{x-1}$$

$$2x(g(x)-2) = (x-1)(g(x)+1)$$

$$2ng(n) - 5n = ng(n) + n - g(n) - 1$$

$$\underline{2ng(n)} - \underline{ng(n)} + g(n) = 5n + n - 1$$

$$ng(n) + g(n) = 6n - 1 \Rightarrow g(n)(n+1) = 6n - 1 \rightarrow g(n) = \frac{6n-1}{n+1}$$

نکته: اگر f و g را در رشته با هم ذخیره کنیم، رابطه f را بدست آوریم، ابتدا g را مساوی t

میگیریم، n را بر حسب t بدست میآوریم و در f قرار می دهیم تا $f(t)$

بدست آید. $f(t)$ همان $f(n)$ است که جای n ، t میگذارد.

مثال: اگر $f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{2n}{n-1}$ باشد، $f(n)$ را بیابید.

$$g(n) = \frac{n+1}{n} = t \rightarrow nt = n+1 \rightarrow nt - n = 1$$

$$\rightarrow n(t-1) = 1 \rightarrow n = \frac{1}{t-1}$$

$$f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{2n}{n-1} \rightarrow f(t) = \frac{2 \times \frac{1}{t-1}}{\frac{1}{t-1} - 1} = \frac{\frac{2}{t-1}}{\frac{1-t+1}{t-1}}$$

$$f(t) = \frac{2}{-t+2} \xrightarrow{t \rightarrow n} f(n) = \frac{2}{2-n}$$

نکته: ترکیب تابعی مانند f با خودش، در صورت $f \circ f$ می نویسد.

مثال: اگر $f = \{(2,1), (3,5), (7,2), (5,9), (4,3)\}$ ، $f \circ f$ را بیابید.

$$\begin{array}{l} f \quad f \\ 2 \rightarrow 1 \rightarrow x \\ 2 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \\ 7 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\ 5 \rightarrow 9 \rightarrow x \\ 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \end{array}$$

$$f \circ f = \{(3,9), (7,1), (4,5)\}$$

مثال: اگر $f = \{(1,2), (3,-1), (4,5)\}$ باشد، $f \circ f^{-1}$ ، $f \circ f^{-1}$ را بیابید.

$$f^{-1} = \{(2,1), (-1,3), (5,4)\}$$

$f \circ f^{-1}$:

$$\begin{array}{l} f^{-1} \quad f \\ 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \\ -1 \rightarrow 3 \rightarrow -1 \\ 5 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \end{array}$$

$$f \circ f^{-1} = \{(2,2), (-1,-1), (5,5)\}$$

$f^{-1} \circ f$:

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f^{-1}} 1$$

$$2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{f^{-1}} 2$$

$$4 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f^{-1}} 4$$

$$f^{-1} \circ f = \{(1,1), (2,2), (4,4)\}$$

نکته: اگر f تابعی وارون پذیر باشد گنگاه:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

توجه کنید گنگاه گزاره با هم درست است حتی اگر در تابع در دوسای به هم صدق کنند

گنگاه f تابعی وارون پذیر است که وارون آن f^{-1} خواص دارد.

مثال: ثابت کنید $f(x) = \frac{7}{4}x - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$ وارون یکدیگرند.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -\frac{7}{4} \times \left(-\frac{2x+6}{7}\right) - 3$$

$$= \frac{x(x+3)}{4} - 3$$

$$= x + 3 - 3 = x$$

به عنوان عکس ثابت کنید: $(g \circ f)(x) = x$

مثال*: در تابع $f = \{(2,0), (7,3), (3,7), (4,1), (1,9)\}$ ، $g(x) = \frac{x}{x-1}$

داریم $f^{-1}(g(2a)) = 7$ ، a را بدست آورید.

$$f^{-1}(g(2a)) = 7 \longrightarrow g(2a) = f(7) = 3$$

$$3 = \frac{2a}{2a-1} \longrightarrow 7a-3 = 2a \longrightarrow 5a = 3$$

$$\longrightarrow a = \frac{3}{5}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل اول: تابع

درس دوم: ترکیب تابع

قسمت دوم: تبدیل نمودار تابع

صفحات: ۱۵ تا ۲۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در این درس می‌خواهیم عددی مانند a را در دامنه و بر تاج f اثر دهیم و تغییرات f را بررسی کنیم.

الف) انتقال افقی و عمودی:

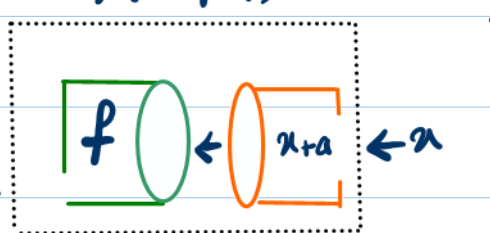
۱- $f(x \pm a)$: برای رسم نمودار $y = f(x+a)$ نمودار f را روی محور x ها

a واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $y = f(x-a)$ نمودار

f را روی محور x ها a واحد به سمت راست منتقل کنیم. (انتقال افقی)

همچنین نقطه $(x_0 - a, y_0)$ از نمودار تاج $y = f(x+a)$ مشابه با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y = f(x)$ است.

دامنه تاج $f(x+a)$ ، x های هشتاد و نه به سمت چپ می‌شوند.
عبارت $(x+a)$ اجازه ورود به f را پیدا کند.



$$h(x) = f(x+a) \Rightarrow h(x_0 - a) = f(x_0 - a + a) = f(x_0) = y_0$$

۲- $f(x) \pm a$: برای رسم نمودار $y = f(x) + a$ نمودار f را روی محور y ها

a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $y = f(x) - a$ نمودار

f را روی محور y ها a واحد به سمت راست منتقل کنیم. (انتقال عمودی)

همچنین نقطه $(x_0 + a, y + a)$ از نمودار تابع $y = f(x) + a$ مشاطر با نقطه (x_0, y) از نمودار $y = f(x)$ است.

ب) انقباض و انبساط (متی و عمودی):

۱- $f(ax)$: اگر $0 < a < 1$. باشد نمودار f را در راستای محور x ها با

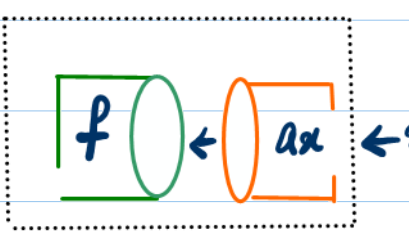
ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می کنیم. (رابطه افقی)

اگر $a > 1$ باشد نمودار f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض

می کنیم. (انقباض افقی)

همچنین نقطه $(\frac{x_0}{a}, y)$ از نمودار تابع $y = f(ax)$ مشاطر با نقطه (x_0, y) از نمودار $y = f(x)$ است.

رابطه تابع $f(ax)$ ، x ها هستند که باعث می شوند عبارت $f(ax)$

اجازه ورود به f را بدهد.


$$h(x) = f(ax) \Rightarrow h(\frac{x_0}{a}) = f(a \times \frac{x_0}{a}) = f(x_0) = y.$$

نکته: در حالت انقباض و انقباض افقی x با طول نقاط f بر a تقسیم می شوند.

۲- $a f(x)$: اگر $a < 1$ باشد مقدار f را در راستای محور y ها با

ضرب a منقبض می‌کنیم. (انقباض عمودی)

اگر $a > 1$ باشد مقدار f را در راستای محور y ها با ضرب a منبسط

می‌کنیم. (انبساط عمودی)

همچنین نقطه (a, y) از نمودار تابع $y = a f(x)$ و مشاغل نقطه (x, y) از نمودار $y = f(x)$ است.

نکته: در حالت انبساط و انقباض عمودی y یا عرض نقاط f در a ضرب می‌شوند.

پایان بخش:

۱- $-f(x)$: مقدار f را نسبت به محور x ها قعینه می‌کنیم.

۲- $f(-x)$: مقدار f را نسبت به محور x ها قعینه می‌کنیم.

نکته: در انبساط و انقباض ها اگر a منفی باشد ابتدا a را مثبت می‌گیریم و انبساط یا انقباض

لازم را در پی می‌دهیم، پس انقباض را اخیال می‌کنیم.

ت، ترکیبی:

اگر خود هم معذور ناجی به صورت $y = af(bx+c)+d$ را رسم کنیم،
اولویت تأثیرها را به صورت زیر رعایت می‌کنیم:

$c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d$

یعنی اول داخل پذیر تغییرات روی x را اعمال می‌کنیم بعد بیرون پذیر
تغییرات روی y . وقت کنید باز هم داخل پذیر اعمال عکس حال کاری داریم
می‌شوند یعنی اول انتقال افقی (c) و بعد انبساط یا انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{b}$.

در حالتی که در بیرون پذیر اول انبساط یا انقباض با ضریب a و بعد انتقال عمودی (d)

اعمال می‌شود (به یاد دارید در اولویت اعمال اولویت ضرب و تقسیم از جمع و تفریق)

بالاتر بود)

ث) تأثیر قدر مطلق:

۱- $|f|$: مقدار f را رسم می‌کنیم، قسمتی از نمودار که زیر محور x ها قرار دارد را مثبت به محور x ها قدرتی می‌کنیم.

۲- $f(|x|)$: قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قدرتی قسمتی را که سمت راست محور y است مثبت به محور x رسم می‌کنیم.

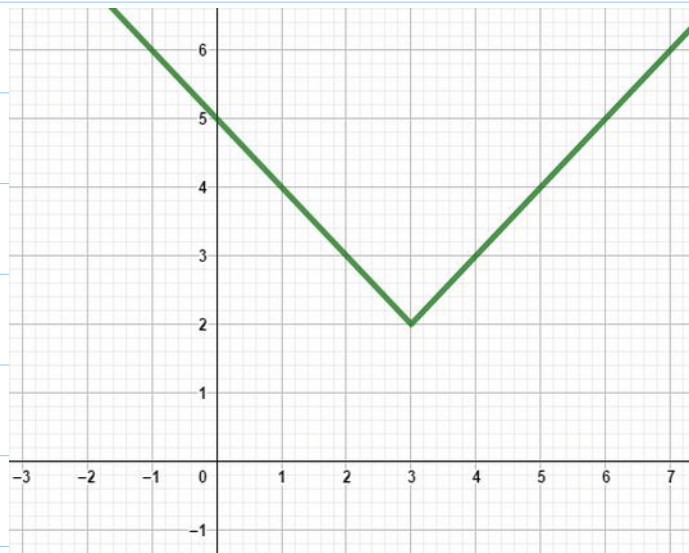
نکته: برای رسم نمودارهای تبدیل یافته کانی است تأثیرات را در دو چند نقطه (نقاط شکستگی یا نقاط استبداد آنها یا تغییرات یا محل برضرب با محورها) اجمال کنید و با هم چند نقطه نمودار را رسم کنید.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$|A| = 1 - A \quad \text{یا در دردی} \quad f(x) = |4 - x| + 2 \quad \text{دایف}$$

$$f(x) = |-(4 - x)| + 2 = |x - 4| + 2$$

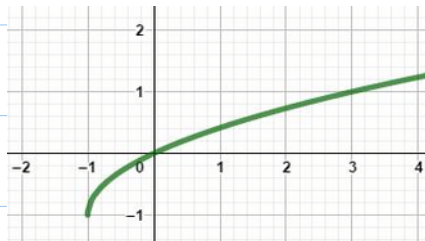
انتقال انتی ۴ واحد به سمت راست
انتقال خبری ۲ واحد به سمت بالا



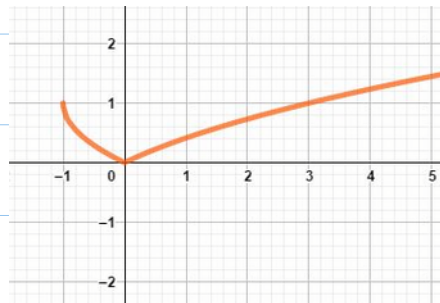
$$y = -|\sqrt{x+1} - 1|$$

انتقال از یک واحد به چپ و انتقال عمودی یک واحد به پایین

$$y = \sqrt{x+1} - 1$$

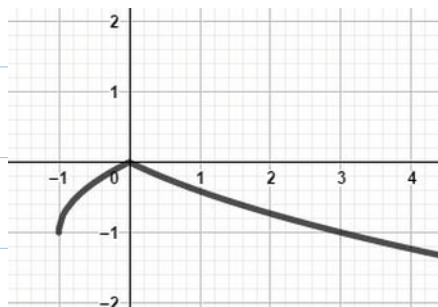


$$y = |\sqrt{x+1} - 1|$$



تا اثر قدر مطلق :
قسمتی که زیر محور است
باز به محور قدر می کشیم

$$y = -|\sqrt{x+1} - 1|$$

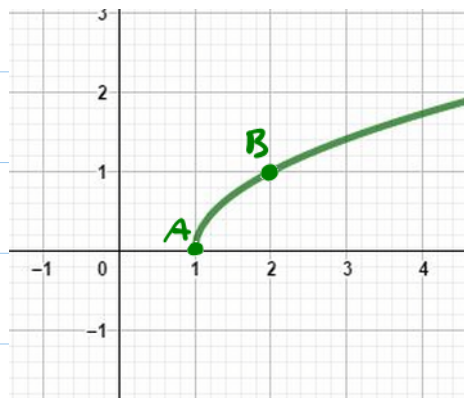


انعکاس :
بازدار را نسبت به محور
قدر می کشیم.

$$پ) y = \sqrt{2x-1} + 1$$

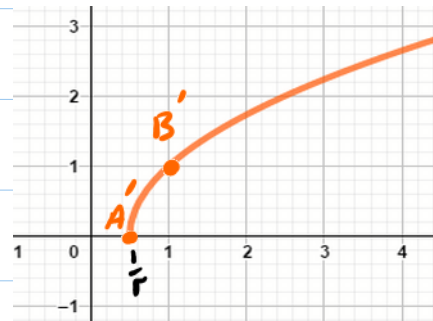
انتقال از منحنی یک واحد به راست

$$y = \sqrt{2x-1}$$



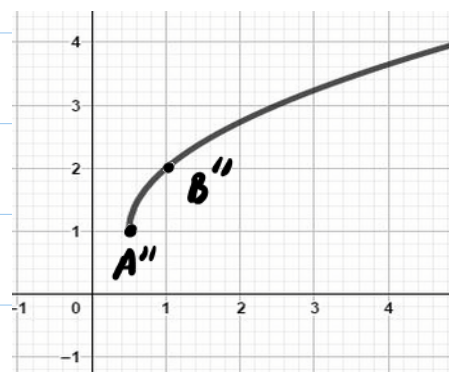
$$y = \sqrt{2x-1}$$

انتقال از منحنی با ضرب $\frac{1}{2}$



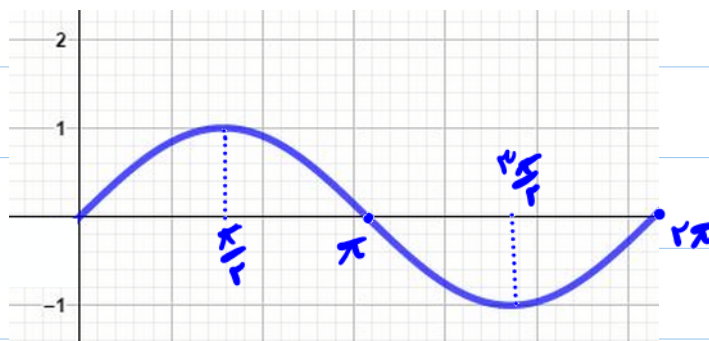
انتقال عمودی یک واحد به بالا

$$y = \sqrt{2x-1} + 1$$

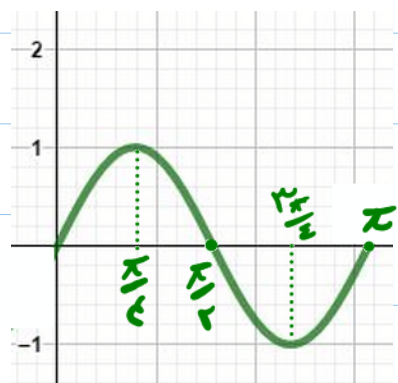


$$ث) y = |2\sin 2x - 1| \quad [0, \pi]$$

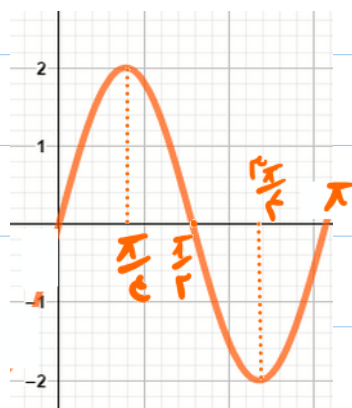
$$y = \sin x$$



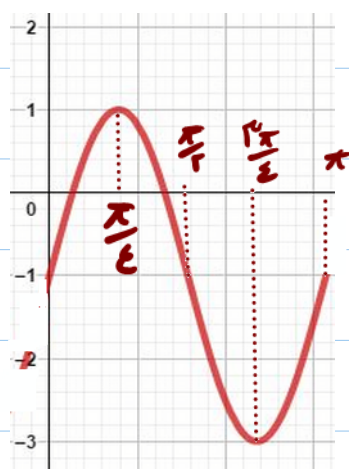
انقباض انتی با فز $\frac{1}{2}$ $y = \sin 2x$



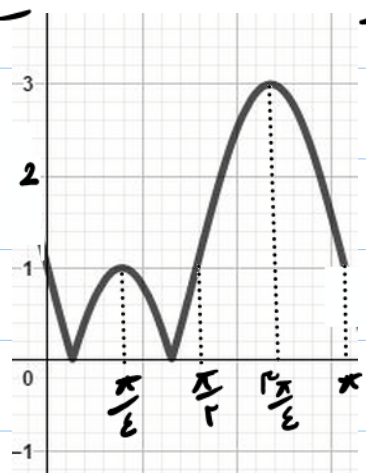
انساط عمودی با فز 2 $y = 2 \sin 2x$



انتقال عمودی با واحد پائین 1 $y = 2 \sin 2x - 1$

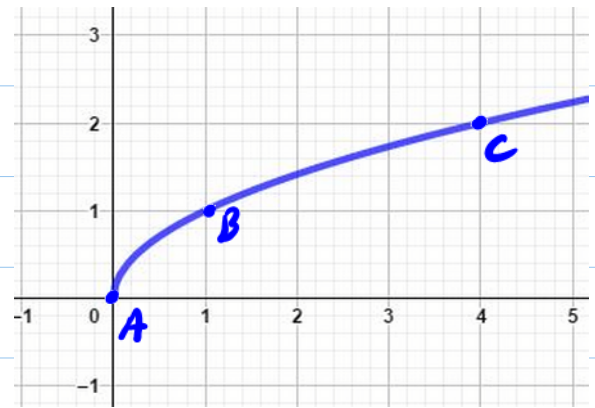


تأثیر مقدار سطح: قسمتی که زیر محور است قدرش می‌لیم. $y = |2 \sin 2x - 1|$



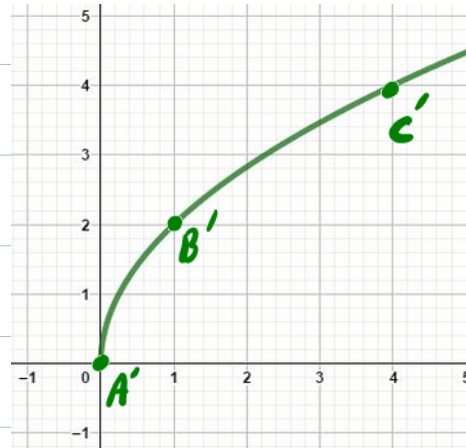
ث) $f(x) = -2\sqrt{x} + 1$

$y = \sqrt{x}$



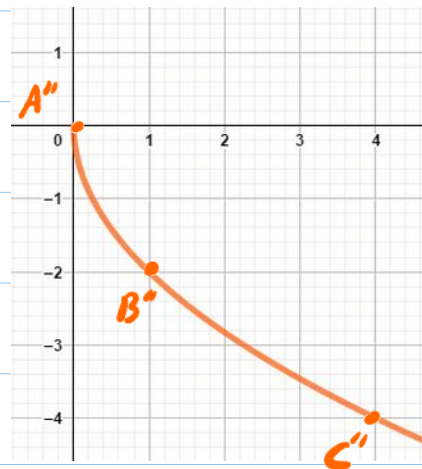
انبات صوری با ضرب ۲

$y = 2\sqrt{x}$



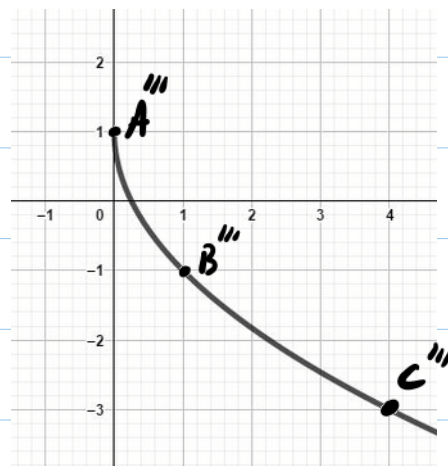
انعکاس نسبت به محور x ها

$y = -2\sqrt{x}$

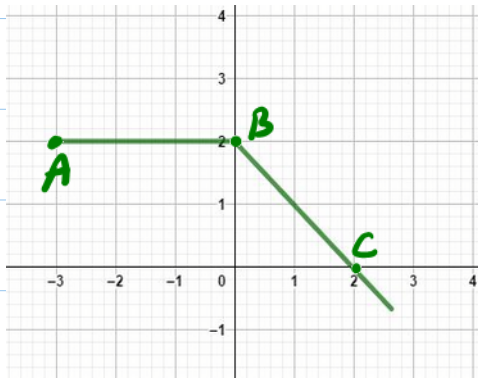


انتقال عمودی یک واحد به بالا

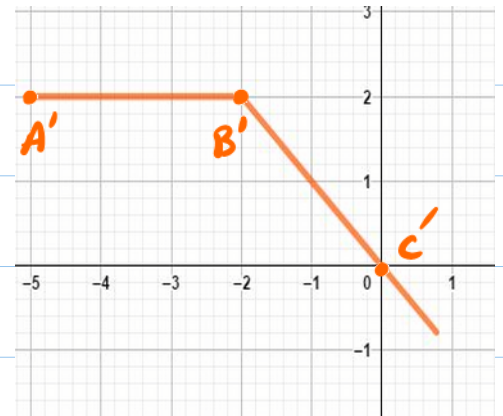
$f(x) = -2\sqrt{x} + 1$



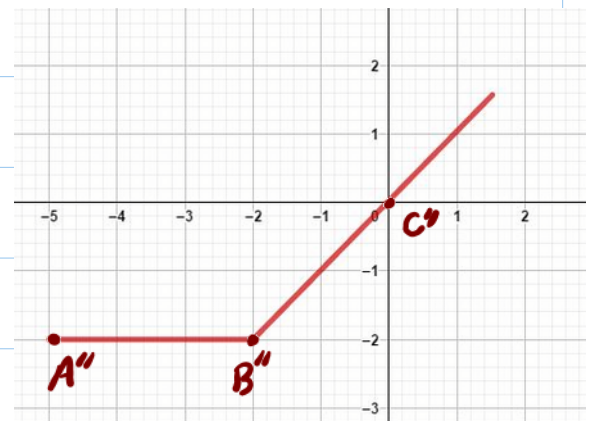
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = 1 - f(x+2)$ را رسم کنید.



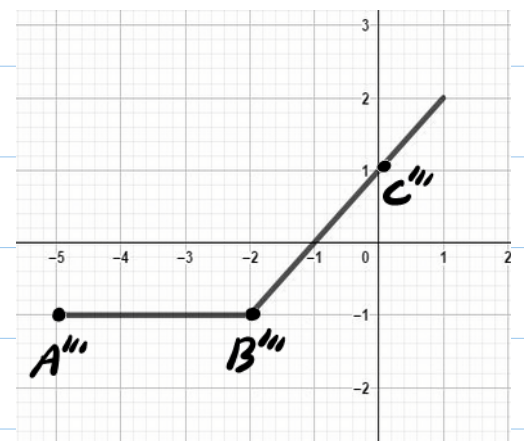
انتقال افقی ۲ واحد چپ $y = f(x+2)$



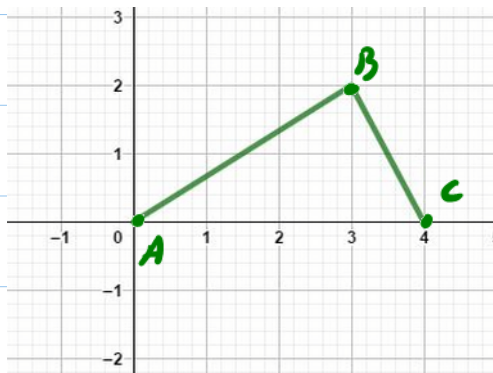
انعکاس نسبت به محور x ها $y = -f(x+2)$



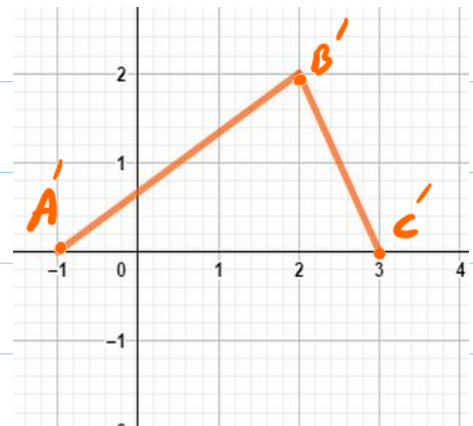
انتقال عمودی یک واحد به بالا $y = 1 - f(x+2)$



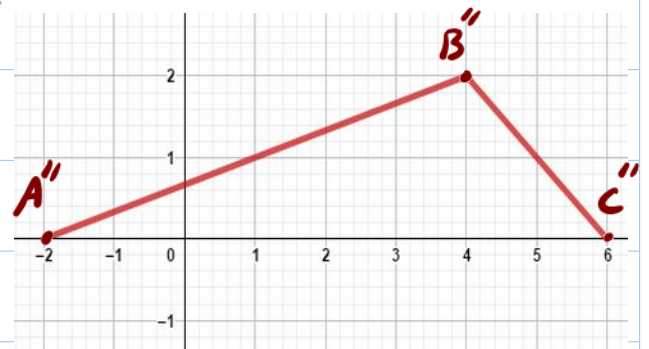
مثال: نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر است. نمودار $y = f(\frac{1}{2}x + 1)$ را رسم کنید.



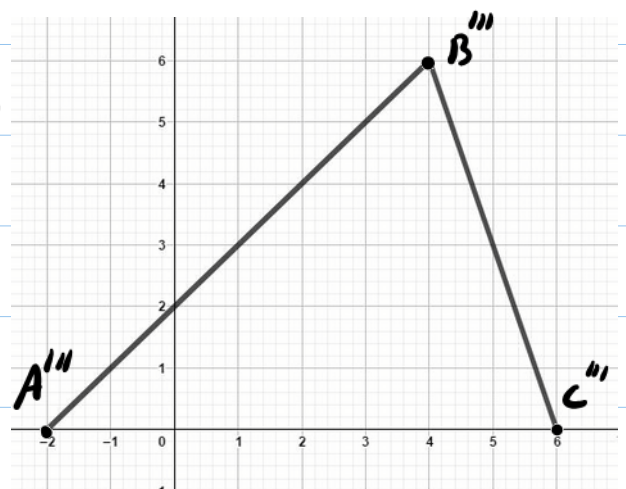
انتقال انحنای یک واحد به چپ
 $y = f(\frac{1}{2}x + 1)$



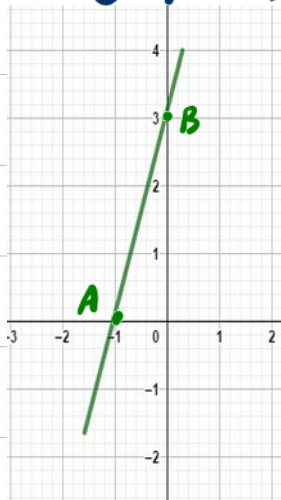
انبساط انحنای با ضریب $\frac{1}{2} = 2$
 $y = f(\frac{1}{2}x + 1)$



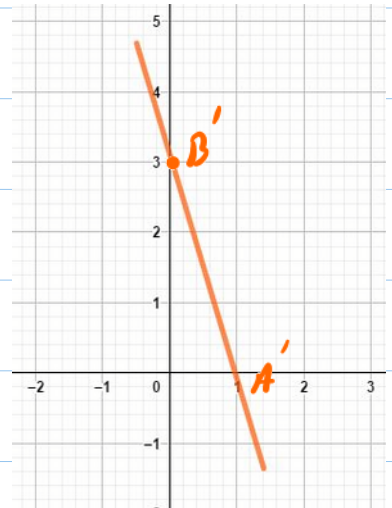
انبساط عمودی با ضریب ۳
 $y = 3f(\frac{1}{2}x + 1)$



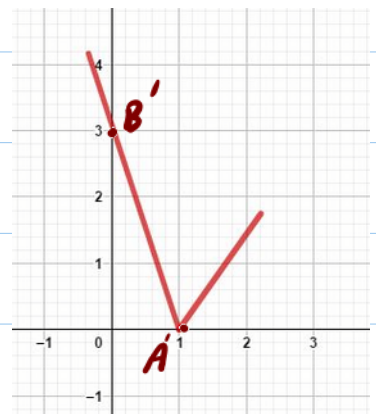
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = |f(-x)| - 2$ را رسم کنید.



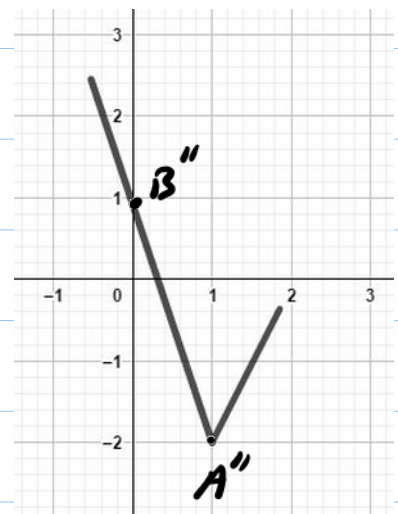
انعکاس: قدرینبت به محورها
 $y = f(-x)$



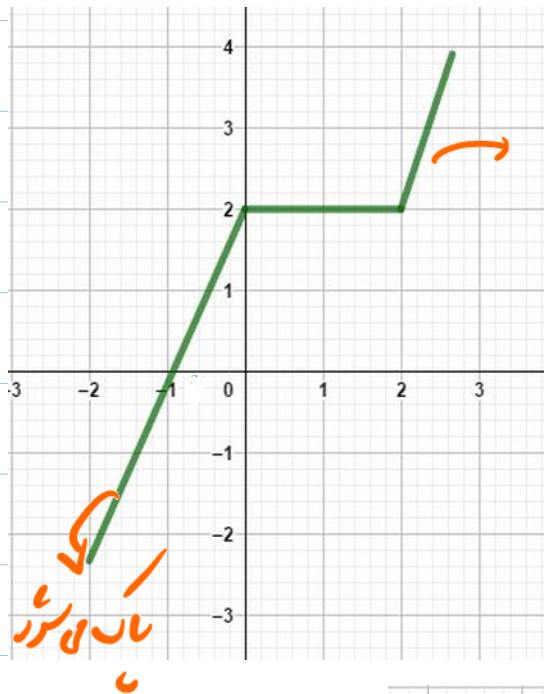
تأثیر قدر مطلق: قسمت‌های که زیر محور است
 است قدرینبت می‌شود.
 $y = |f(-x)|$



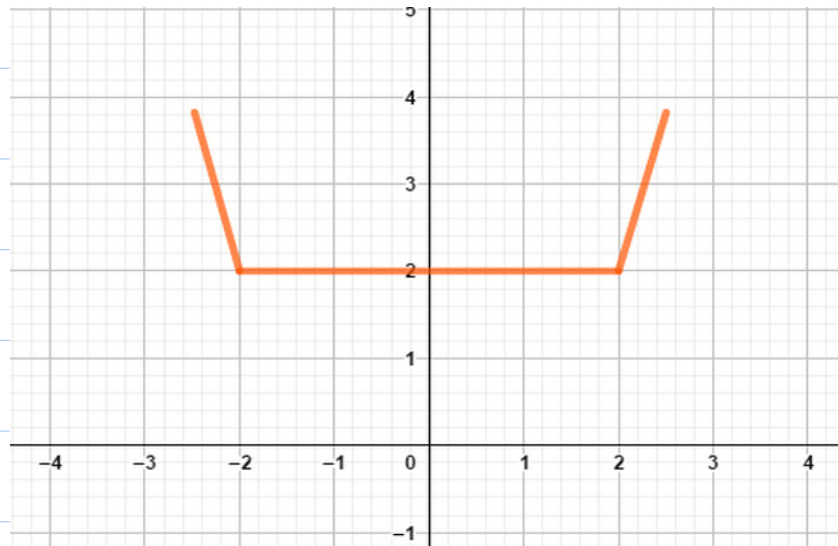
انتقال عمود بر محور و واحد پائین
 $y = |f(-x)| - 2$



مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = f(|x|)$ را رسم کنید.



$$y = f(|x|)$$



مثال: بدون نقاط نمودار تابع f را در دایره بری کنید. پس نمودار بدست آمده را یک واحد به چپ منتقل کنید.

ی کنید. منطبقه تابعی که نمودار آن رسم شده را بنویسید.

$$f\left(\frac{x}{4}\right) \rightarrow f\left(\frac{x+1}{4}\right) \Rightarrow y = f\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

مثال: مزد دار تابع $g(x) = 2f(3x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می کنیم.

پس طول عرض نقاط این مزد دار را نصف می کنیم. ضابطه تابعی که مزد دار آن بدست

آورده است را بنویسید.

$$2f(3(x-1)) = 2f(3x-3)$$

$$\rightarrow 2f(3x-3) + 2$$

$$\rightarrow \overset{\text{عرضها}}{\uparrow} \frac{1}{2} (\overset{\text{طولها}}{\uparrow} 2f(3(x-1)) + 2) = f(3x-3) + 1$$

$$\Rightarrow h(x) = f(3x-3) + 1$$

مثال: منحنی تابع $y = |x-2|$ را سه واحد به چپ انتقال داده و قدرش ثقل حاصل را ثبت

به کرد و حاصلش می کنیم و با ضرب ۲ انبساط عمودی می رهم پس قدرش آن را ثبت

به کرد و حاصلش می کنیم، حاصل منحنی جدید را بدست آوریم.

$$f(x+3) : y = |x+3-2| = |x+1|$$

$$f(1-x+2) : y = |1-x+1|$$

$$2f(1-x+3) : y = 2|1-x+1|$$

$$-2f(1-x+4) : y = -2|1-x+1| = -2|1-x|$$

سؤال: با احتمال مدار کدام گزینیم، نمودار $y = f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y = -\frac{1}{4}(1-x)$ شود؟

۱) انتقال یک واحد به راست، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای y (منفی)

۲) انتقال یک واحد به چپ، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای y (مثبت)

۳) انتقال یک واحد به چپ، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای y (منفی)

۴) انتقال یک واحد به راست، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای y (مثبت)

گزینه ۲

$$y = -\frac{1}{4}(1-x)$$

انقباض y (مثبت) $\frac{1}{4}$ واحد

قدریم ثبت به محور x ها

انتقال x (منفی) یک واحد چپ

مثال: گستره ریاضی ۹۹

قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

$$x = 2.5 \quad (۴)$$

$$x = 2 \quad (۳) \checkmark$$

$$x = 1.5 \quad (۲)$$

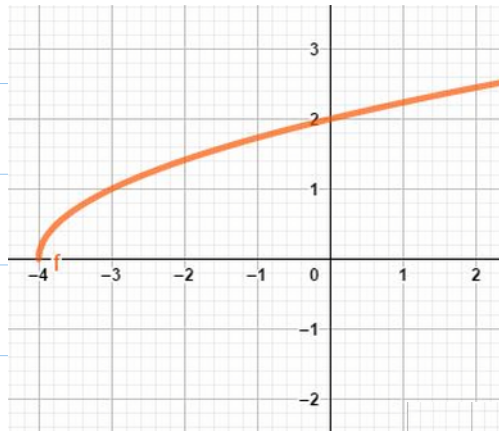
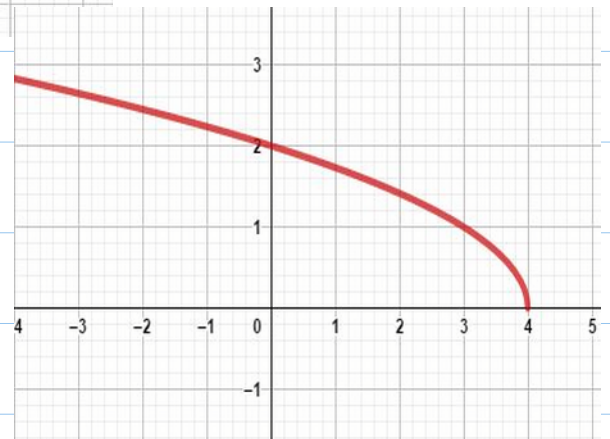
$$x = 1 \quad (۱)$$

$$f(-x) : y = \sqrt{-x}$$

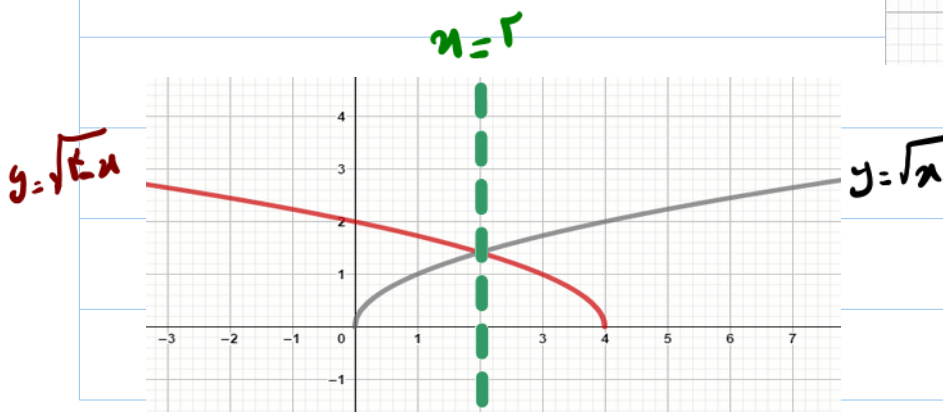
$$f(-(x-4)) : y = \sqrt{-(x-4)} = \sqrt{-x+4} = \sqrt{4-x}$$

$$y = \sqrt{4-x}$$

۴ واحد به چپ



نکته: قرینه نسبت به محور y ها $y = \sqrt{4-x}$



قرینه ۴

مثال: کثرت ریاضی ۹۹ (خارج)

ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

$$-2, 1 \quad (4)$$

$$-1, 2 \quad (3)$$

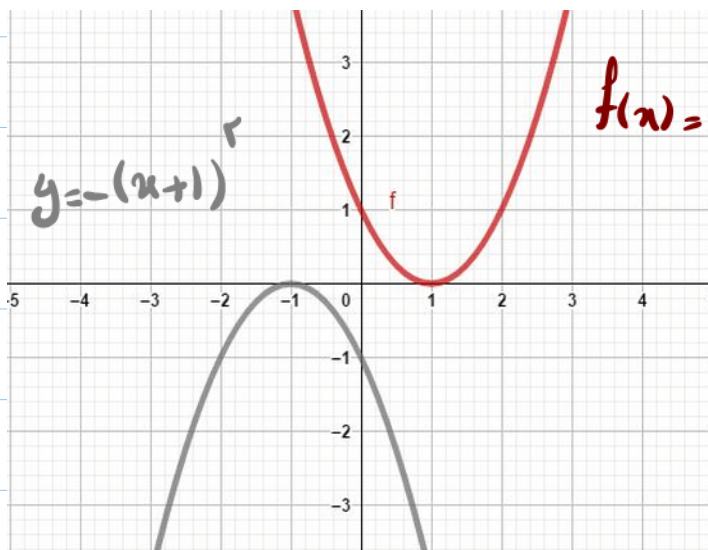
$$-1, 1 \quad (2)$$

$$0, 2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$$

$$-y = (-x-1)^2 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow y = -(x+1)^2 + \epsilon \quad g(x) = -(x+1)^2 + \epsilon$$



$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 = -(x+1)^2 + \epsilon \rightarrow (x-1)^2 + (x+1)^2 = \epsilon$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = \epsilon \rightarrow 2x^2 + 2 = \epsilon \rightarrow 2x^2 = \epsilon$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

گزین ۲: طول نقاط تلاقی

مثال: کسر تجوی ۹۹

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۶√۱۰ (۴)

۴√۱۷ (۳)

۶√۷ (۲)

۴√۱۵ (۱)

$$g(x) = \sqrt{x-12} + 2$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2 \xrightarrow{\text{ترک}} \cancel{x} = (\cancel{x-12}) + 4\sqrt{x-12} + 4$$

$$1 = 4\sqrt{x-12} \xrightarrow{\div 4} \frac{1}{4} = \sqrt{x-12} \xrightarrow{\text{ترک}} \frac{1}{4} = x-12 \rightarrow x = 16$$

$$f(16) = \sqrt{16} = 4 \quad \text{نقطه برخورد } A(16, 4)$$

$$OA = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{256 + 16} = \sqrt{272} = \sqrt{16 \times 17} = 4\sqrt{17}$$

گزینۀ ۴

مثال: کسر تجوی ۹۹ (خارج)

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x$ ($x > 1$)، مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور x ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۲√۵ (۴)

۵√۲ (۳)

۶√۲ (۲)

۴√۵ (۱)

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1 = (x-1)^2 - 1$$

فردینث به محور x ها : $-f(x) = -(x-1)^2 + 1$

اشغال محور y را حد y ها : $g(x) = -(x-1)^2 + 1 + 16 = -(x-1)^2 + 17$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 - 1 = -(x-1)^2 + 17$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \stackrel{\div 2}{\Rightarrow} (x-1)^2 = 9$$

$$\sqrt{\quad} \Rightarrow x-1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \rightarrow x=4 \\ x-1=-3 \rightarrow x=-2 \end{cases} \text{ غنقن}$$

$f(4) = (4-1)^2 - 1 = 8$ $A(4, 8)$ نقطه بر خور

گنرنج $\perp$: $OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$

نکته: گاهی اوقات مقدمات نقطه ای روی $f(x)$ داده شود و مقدمات نقطه مشاط با آن

در $a f(bx+c)+d$ خواسته می شود. در این حالت تمام مواردی که برای رسم بنویسد.

رینم می راریم روی نقطه راره شده اعمال می کنیم. همچنین برای تأثیر داری می توانیم، نموداری

$$y = bn + c \text{ را بدست کردیم.}$$

مثال: نقطه $A(-1, 2)$ روی منحنی $y = f(x)$ است. نقطه مشاطه با آن روی منحنی

$$y = 2f(2x - 5) - 7 \text{ ، } A'(a, b) \text{ است. } a - b \text{ کدام است؟}$$

$$(1) -2 \quad (2) \checkmark \quad (3) 2 \quad (4) 4$$

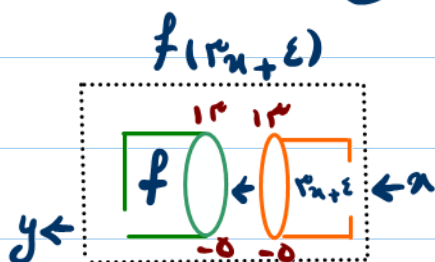
$$t = 2x - 5 \Rightarrow t + 5 = 2x \xrightarrow{\div 2} x = \frac{t+5}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2 = a$$

$$b = 2 \times 2 - 7 = -1 \Rightarrow A'(2, -1) \rightarrow a - b = 2 - (-1) = 3$$

گزینه ۳

نکته: در تابع $y = a f(bx + c) + d$ ، a ، d روی بر f ، b ، c روی دامنه f تأثیری ندارند.

مثال: اگر دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $(-5, 14)$ باشد دامنه تابع $y = f(3x + 4)$ را بیابید.



$$-5 < 3n + 2 < 12 \xrightarrow{-2} -7 < 3n < 10$$

$$\xrightarrow{\div 3} -2 < n < 3$$

$$D_{f(3n+2)} = (-2, 3)$$

نشان: اگر در بازه f بازه $(-2, 3)$ باشد، در بازه $g(n) = 3f(n+1) - 1$ باشد.

$$-2 < f(n) < 3 \xrightarrow{\times 3} -6 < 3f(n+1) < 9$$

$$\xrightarrow{-1} -7 < 3f(n+1) - 1 < 8 \Rightarrow -7 < g(n) < 8$$

$$R_{g(n)} = (-7, 8)$$

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل اول: تابع

درس سوم: تابع وارون

صفحه: ۲۴ تا ۲۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

وارون تابع :

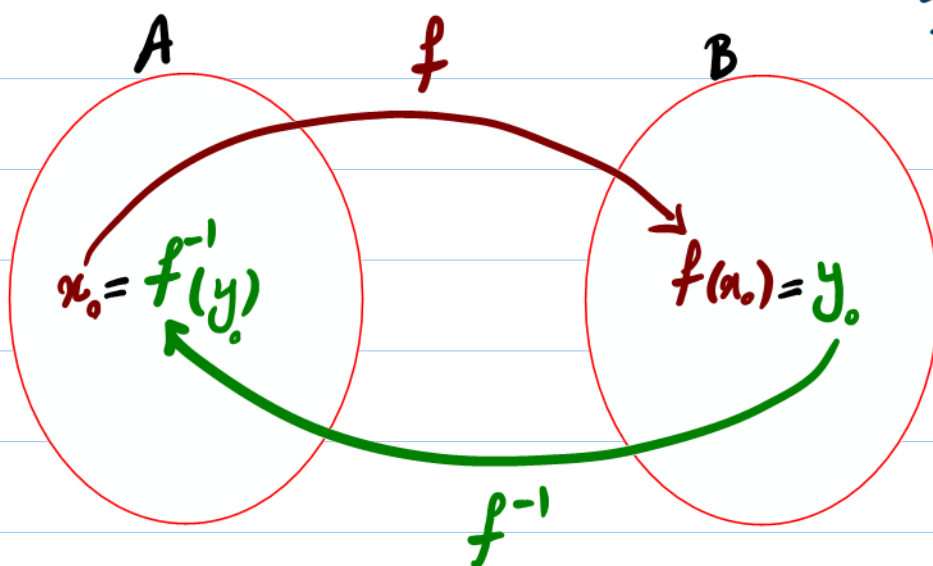
برای بدی تابع ، تابعی دیگر وجود دارد که عکس تابع اصلی مثل کرده و خودی را به ورودی تبدیل می کند . به چنین تابعی ، تابع معکوس یا تابع وارون می گویند .

تعریف : وارون تابع f را عباری است که در آن به ازای هر x در A ، به ورودی

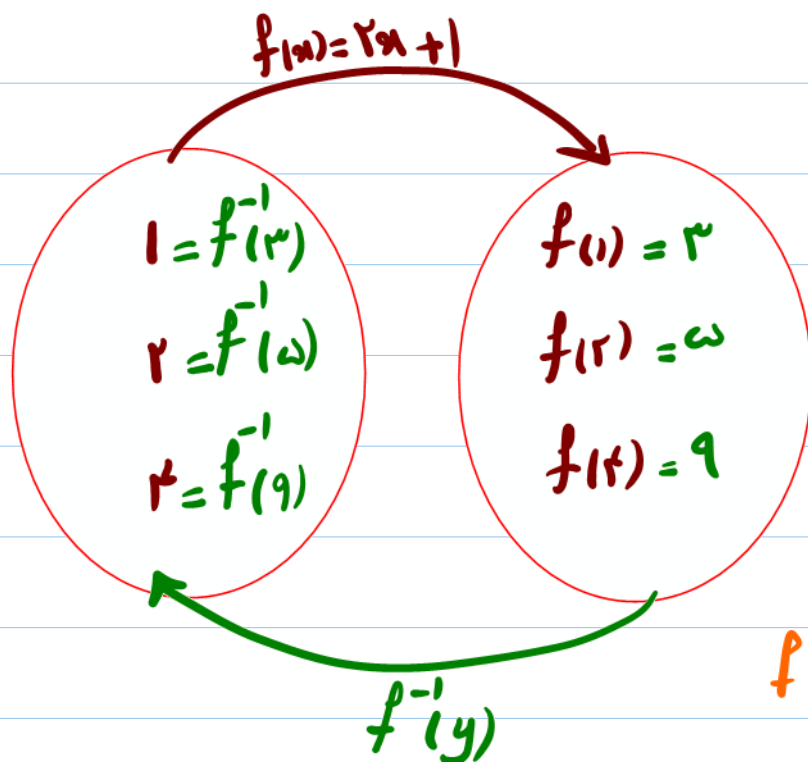
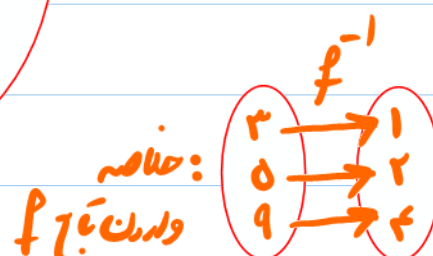
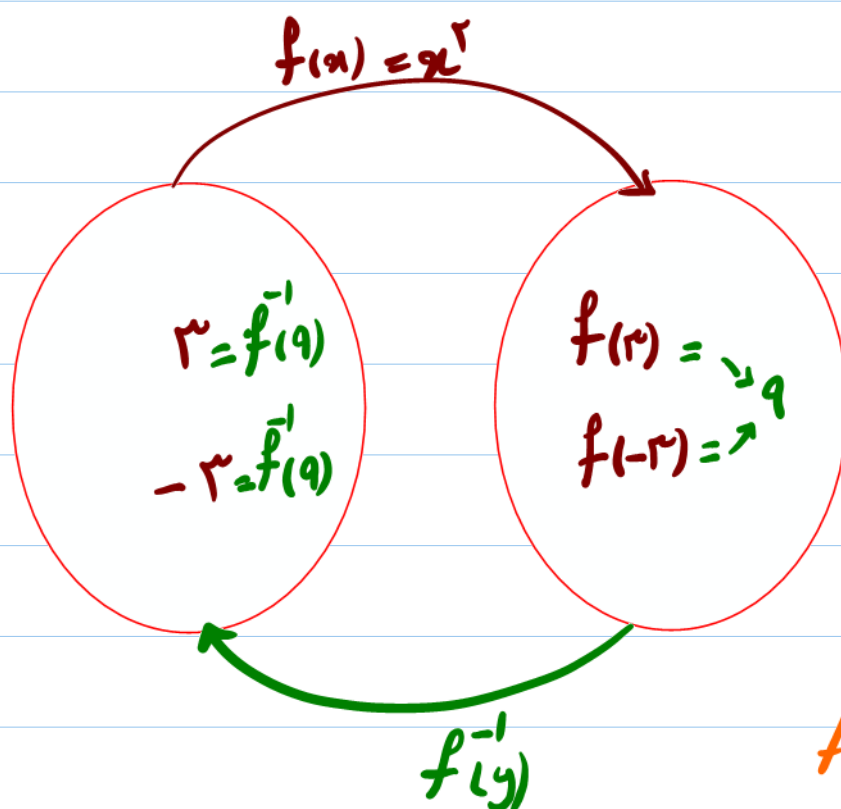
مربوطه می رسم . مثلاً اگر تابع f از دامنه A به B از بر ببرد ، وارون تابع f

که آن را با f^{-1} نشان می دهند عنصر y را به عنوان عکس از دامنه B می برد .

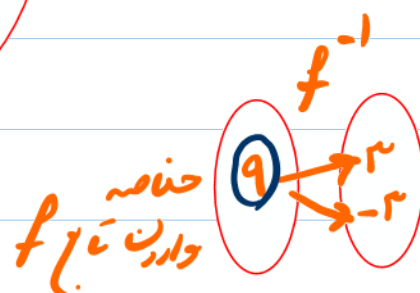
x_0 از معبره بر می برد .



مثال :



داردن تابع هرز تابع نیست :



تابع واردين پذير : اگر واردين تابع f ، تابع باشد ، f را واردين پذيرى گوييم .

نکته : تابع f واردين پذير است اگر و فقط اگر يك به يك باشد

۱) محاسبه وارون تابع از روی نمایش زوج مرتبی :

کافی است جای مولفه اول و دوم را عوض کنیم : $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$

مثال: وارون پذیر است $f = \{(1, 4), (-1, 5), (2, 4)\}$ (الف)

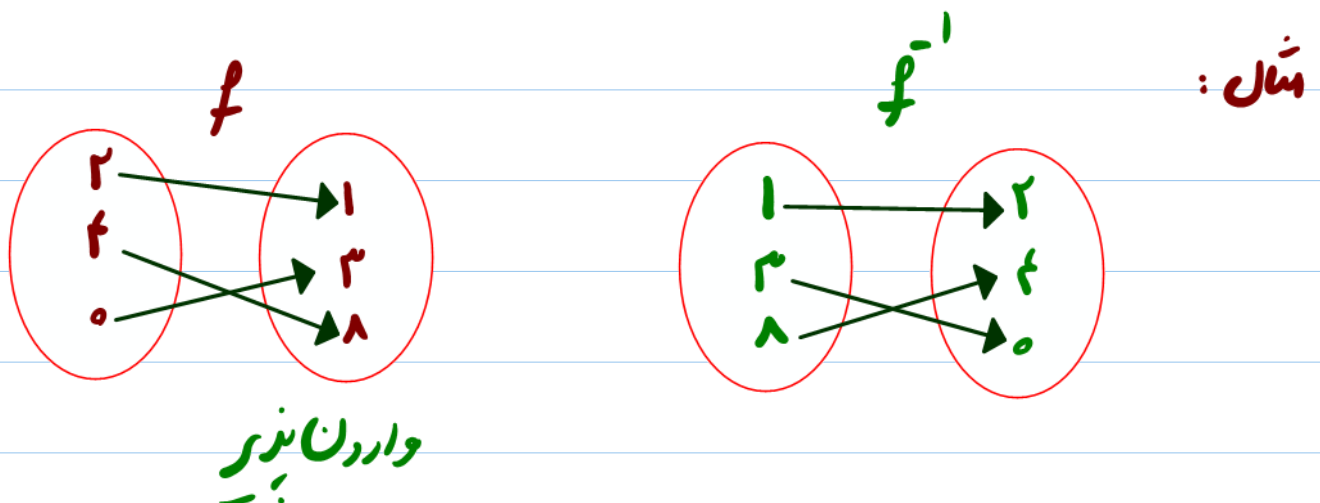
$$f^{-1} = \{(4, 1), (5, -1), (4, 2)\}$$

وارون پذیر نیست $g = \{(2, 3), (4, -1), (5, 2), (7, 3)\}$ (ب)

تابع نیست : $h = \{(3, 2), (-1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ (ج)

۲) محاسبه وارون تابع از روی نمایش نمودار دین :

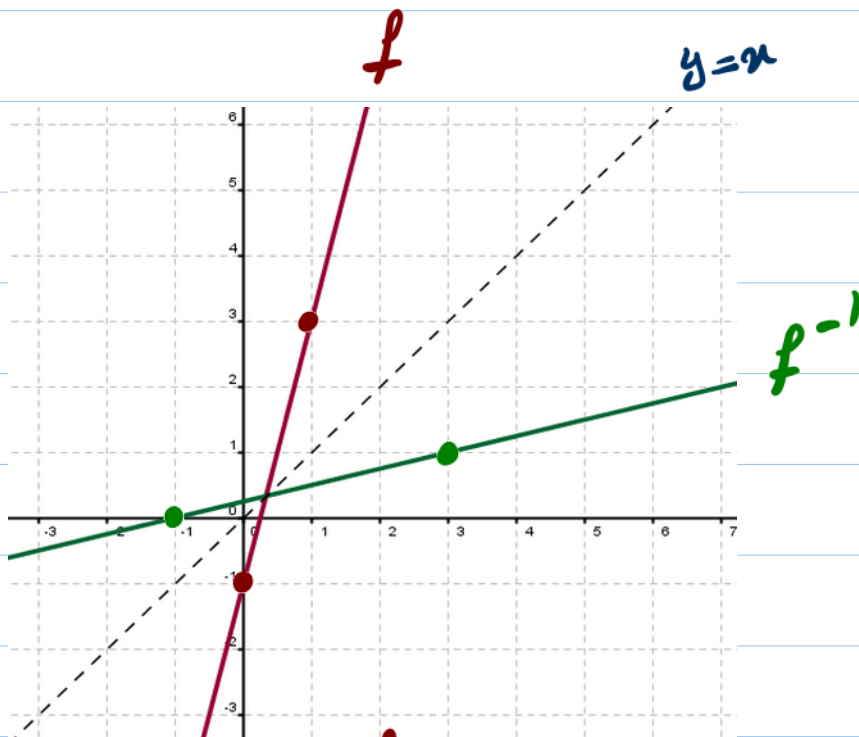
کافی است جهت فلش‌ها یا جای درایره‌ها را عوض کنیم .



۱۳ محاسبه واردين تابع از روی نمایش دستگاه مختصات :

کافی است قرينه سزدار تابع f را بابت خط $y=x$ (نیم‌مازناصیه اول و سوم) بنویسیم

زیر دو نقطه (y, x) و (x, y) بابت خط $y=x$ قرينه اند.



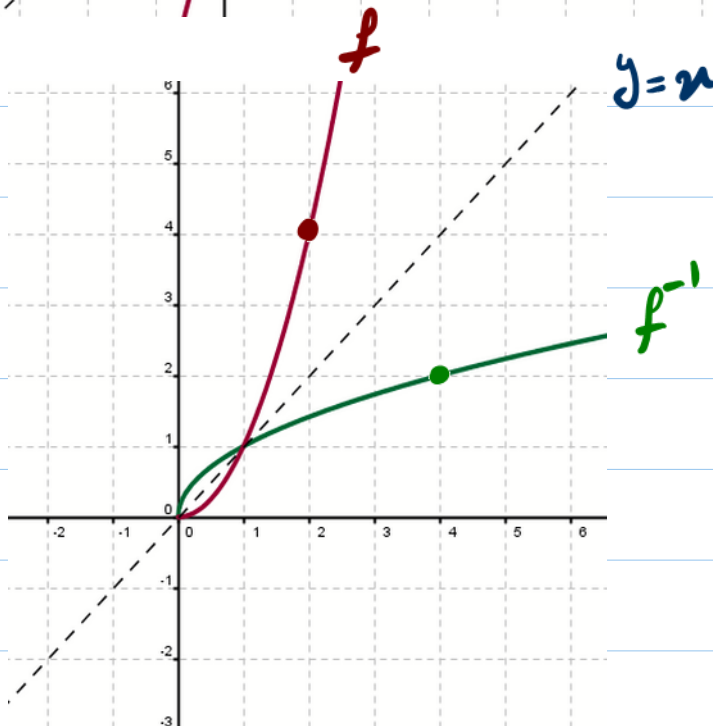
تذکره: بهتر است برای دقتی‌تر

شدن سزدار f چه نقطه

روی f پیدا کنیم و جای x, y

را عوض کنیم تا نقطه روی f^{-1}

به دست آید.



چند نکته: اگر f وارون پذیر باشد آنگاه

۱- اگر $f(a)=b$ آنگاه $f^{-1}(b)=a$. به عبارت دیگر اگر نقطه (a,b)

روی منحنی تابع f باشد آنگاه نقطه (b,a) روی منحنی f^{-1} است.

$$۲- (f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$$

$$۳- D_{f^{-1}} = R_f \quad , \quad D_f = R_{f^{-1}}$$

۴- اگر f و f^{-1} در نقطه (a,b) مماس باشند آنگاه $f(a)=b$, $f^{-1}(b)=a$.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-9} + \sqrt{x+9}$ باشد مقدار $f(9) + f^{-1}(4)$ را بیابید.

$$f(9) = \sqrt{9-9} + \sqrt{9+9} = 0 + 3 = 3$$

$$f^{-1}(4) = 9$$

$$f(9) + f^{-1}(4) = 3 + 9 = 12$$

مثال: اگر $g = \{(1, 4), (2, 2), (1, 5), (0, -1)\}$, $f = \{(2, 2), (1, 3), (4, -1), (0, 6)\}$

، $f^{-1}(a) + \underline{g^{-1}(r)} = 4$ ، مقدار $g(a)$ ، ایدت دورید.

$$g(3) = 2 \rightarrow \underline{g^{-1}(2)} = 3$$

$$f^{-1}(a) + 3 = 4 \rightarrow f^{-1}(a) = 1 \rightarrow f(1) = a = 2$$

$$g(a) = g(2) = 4$$

مثال: سزدار تابع $f(x) = -x^2 + mx + n$ در نقطه $(-1, \frac{1}{3})$ سزدار تابع وارون را قطع کند.

مقدار m, n را بیابید.

$$f(-1) = \frac{1}{3} \rightarrow -\underbrace{(-1)^2}_{+1} - m + n = \frac{1}{3} \rightarrow -m + n = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}m + n = -1 \rightarrow \frac{1}{3}m + n = -1 + \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{3}m + n = \frac{-28}{9} \xrightarrow{\times 3} m + 3n = -\frac{28}{3} \quad (2)$$

$$\begin{cases} -m + n = -\frac{2}{3} \\ m + 3n = -\frac{28}{3} \end{cases} \rightarrow n = -\frac{22}{9} = -\frac{1}{9} \rightarrow -m - \frac{1}{9} = -\frac{2}{3} \rightarrow m = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

۴) یافتن معکوس تابع داشتن :

اگر تابع به صورت معکوس نمایش داده شده باشد، مراحل زیر را انجام دهیم :

۱- به جای $f(x)$ ، y قرار دهیم .

۲- مانند یک معادله به آن نگاه می کنیم که می خردیم x را بیابیم حتی x را بر حسب

y بیابیم .

۳- به جای x ، $f^{-1}(x)$ در جای y ، x قرار دهیم .

مثال: داشتن توابع زیر را ببایید .

$$1) f(x) = 4x - 7$$

$$y = 4x - 7 \rightarrow y + 7 = 4x \xrightarrow{\div 4} \frac{y+7}{4} = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$$

$$2) f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

$$y = \frac{3x+2}{x-1} \rightarrow yx - y = 3x + 2 \rightarrow yx - 3x = 2 + y$$

$$x(y-2)=2+y \rightarrow x = \frac{2+y}{y-2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

$$3) y = 3 - \sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1} = 3-y \xrightarrow{\text{بهر توان ۲}} x+1 = (3-y)^2 \rightarrow x = (3-y)^2 - 1$$

$$f^{-1}(x) = (3-x)^2 - 1$$

$$x+1 = 9-6y+y^2 \rightarrow x = y^2-6y+8$$

مرت دوم

$$f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 8$$

تذکر: اگر تابعی یک به یک نباشد پس وارون پذیر نیست ولی می توانیم با محدود کردن دامنه

تابع دکن را یک به یک کنیم و وارونش را به دست آوریم.

مثال: با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 + 4x + 4$ ، ضابطه تابع وارون را بیابید.

$$D = (-\infty, -\frac{b}{2a}] = (-\infty, -\frac{4}{1}] = (-\infty, -2]$$

با این دامنه تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می شود.

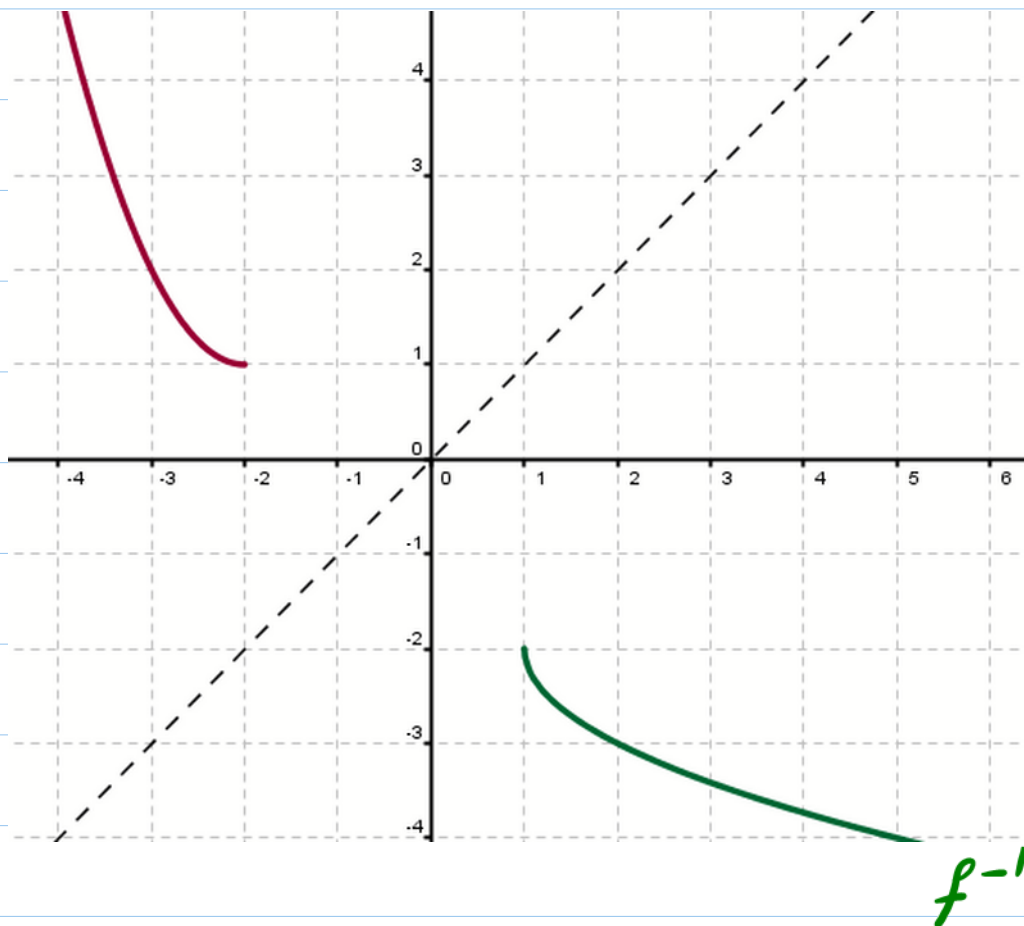
$$f(x) = \underbrace{x^r + r x + r + 1}_{x+r+1-\frac{r}{x}+1} = (x+r)^r + 1$$

$$y = (x+r)^r + 1 \rightarrow y-1 = (x+r)^r \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{y-1} = |x+r|$$

$$\sqrt{y-1} = -(x+r) \rightarrow \sqrt{y-1} = -x-r$$

$$x = -r - \sqrt{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = -r - \sqrt{x-1}$$

$f: x \leq -r$



مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x < 1 \\ 0x+1 & x \geq 1 \end{cases}$ داریم، f را بسازید.

دامنه f^{-1} : $D_{f^{-1}} = R_f$

$$x < 1 \xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{x} < \sqrt{1} \xrightarrow{+1} \sqrt{x+1} < 1$$

$$x \geq 1 \xrightarrow{x \geq 0} 0x \geq 0 \xrightarrow{+1} 0x+1 \geq 1$$

پس f^{-1} می باشد:

$$y = \sqrt{x+1} \rightarrow y-1 = \sqrt{x} \rightarrow x = \frac{y-1}{1} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{1}$$

$$y = 0x+1 \rightarrow y-1 = 0x \rightarrow x = \frac{y-1}{0} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{0}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1} & x < 1 \\ \frac{x-1}{0} & x \geq 1 \end{cases}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

مطالب تکمیلی

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع متناوب :

اگر در تابعی برای هر مقدار از دامنه تابع، تساوی $f(x+\tau) = f(x)$ برقرار باشد،

حقی اضافه کردن τ ، اثری روی مقدار تابع نداشته باشد، می‌گوییم f متناوب است.

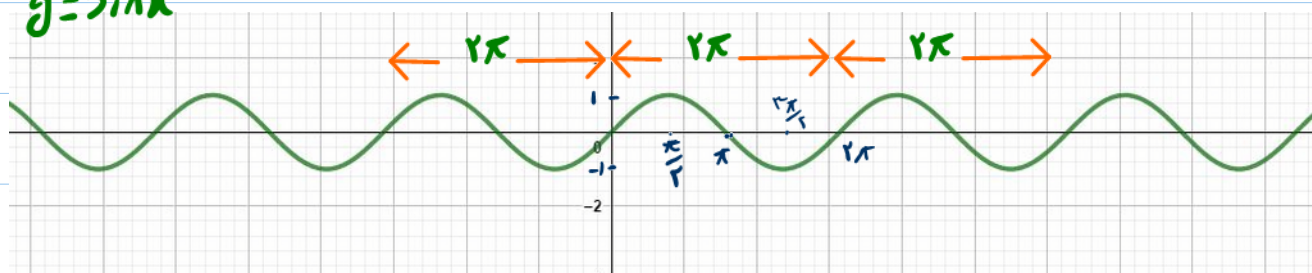
به کوچک‌ترین مقدار مثبت τ دوره متناوب می‌گوئیم.

به عبارت دیگر در توابع متناوب، قسمتی از نمودار در حال تکرار شدن است. به کوچک‌ترین

اندازه انفع این قسمت تکرار شونده دوره متناوب می‌گوئیم.

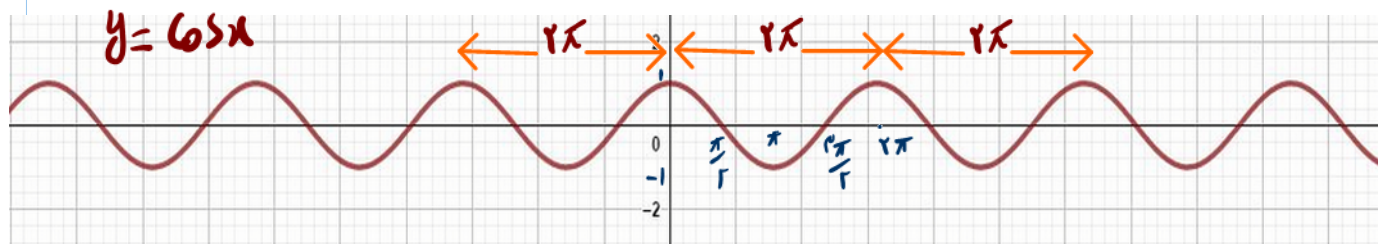
مثال: دوره متناوب توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را بیابید.

$$y = \sin x$$



$$\tau = 2\pi$$

$$y = \cos x$$



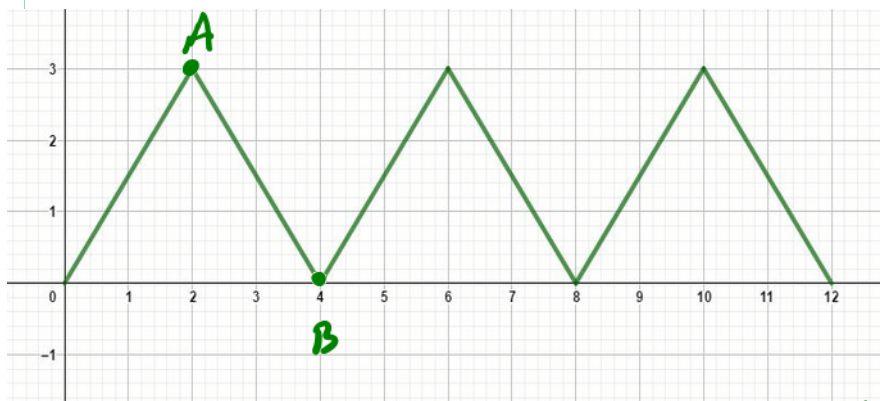
$$\tau = 2\pi$$

نکته: اگر f تابع متناوب با دوره تناوب T باشد، اضافه یا کم کردن مقدار صحیح

$$f(n+kT) = f(n) \quad T, \text{ مقدار تابع را تغییر نمی دهد}$$

مثال: اگر قسمتی از نمودار تابع f به شکل زیر باشد، $f(1399)$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{3}{4} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) \frac{5}{4}$$



$$T = 4$$

باید مغربی از ۴ را به ۱۳۹۹ اضافه یا کم کنیم تا قدر بین ۰ تا ۴ بدست آید.

$$f(1399) = f(1399 + (-349)4) = f(1399 - 1396) = f(3)$$

$$\text{خط } AB : A(2,3), B(4,0) \quad m = \frac{0-3}{4-2} = -\frac{3}{2}$$

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$f(3) = -\frac{3}{2}(3) + 6 = -\frac{9}{2} + 6 = \frac{3}{2} \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال: ضابطه تابع مشابه f در بازه (a, b) به صورت $f(x) = k$ است. اگر دوره مشابه

تابع برابر k باشد، $f(-5, 4) = k$ کدام است؟

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$

گزینه ۱ $f(-5, 4) = f(-5, 4 + 4(1)) = f(1, 4) = \sqrt{16} = 4$

نکته: اگر دوره مشابه $f(x)$ برابر T باشد، دوره مشابه $af(bx+c)+d$

برابر $\frac{T}{|b|}$ است. یعنی برای y به دوره مشابه فقط به ضرب x توسط $|b|$ می‌پردازیم.

سایر ضرایب و انتقال‌ها اثری روی دوره مشابه ندارند.

مثال: دوره مشابه $y = 2f(4x-1)+4$ برابر ۲ است. دوره مشابه $g(x) = -f(2x)-1$

را بیابیم. $y: 2 = \frac{T_f}{4} \Rightarrow T_f = 8$

$g: T_g = \frac{T_f}{2} = \frac{8}{2} = 4$

نتیجه: دوره شادب توابع $y = a \cos(bx+c) + d$, $y = a \sin(bx+c) + d$

برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال: اگر دوره شادب تابع $f(x) = k \cos(kx) + 3$ برابر π باشد، مقدار $f(0)$

چندم است؟ ۱۱ ۱۲ ۵ ۱۳ ۴ ۱۴

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{1} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k\pi = 2\pi \rightarrow k = 2$$

گزینه ۱ $f(x) = 2 \cos 2x + 3 \Rightarrow f(0) = 2 \cos 2 \times 0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$

نکته: گاهی اوقات لازم است با استفاده از روابط بین این‌ها مشتق، تابع را ساده

آحاد امکان ساده کنیم، پس دوره شادب را می‌سپاریم.

مثال: دوره شادب تابع $f(x) = \cos^2 x - \cos^4 x$ چندم است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) 2π

$$f(x) = \cos^2 x - \cos^4 x = \cos^2 x (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cos x \quad \text{یادآوری:}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{یادآوری:}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$T = \frac{2\pi}{|1|} = \frac{\pi}{1} \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال: اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \sqrt{2} \cos^2(mx - \frac{\pi}{2})$ برابر $\frac{3\pi}{2}$ باشد، مقدار m کدام

می‌تواند باشد؟

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{3}$$

$$f(x) = \sqrt{2} \times \frac{1 + \cos 2(mx - \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \cos(2mx - \pi))$$

گزینه ۱

$$T = \frac{2\pi}{1} = \frac{2\pi}{|2m|} \Rightarrow 2\pi |m| = 2\pi \Rightarrow |m| = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

نکته: دوره تناوب توابع $y = \tan x$, $y = \cot x$ برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ است.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ را بیابید!

$$\frac{\pi}{2} \quad \pi \quad 2\pi \quad 3\pi$$

$$f(x) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \quad \text{پس دوره تناوب برابر } 2\pi \text{ است.}$$

بررسی توابع مشتقات به صورت $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$

پارامتر a بهشت انبساط یا انقباض عمودی تابع سینوس و کسینوس می شود و پارامتر c یک انتقال عمودی

را نشانه می دهد. پس مقادیر ماکزیمم و مینیمم این گونه توابع عبارتند از:

$$y_{\max} = |a| + c$$

$$y_{\min} = -|a| + c$$

در درس قبلی هم دیدیم پارامتر a که بهشت انبساط یا انقباض افقی می شود در دوره شادب

$$\text{مژترات} \quad T = \frac{2\pi}{|b|}$$

مثال: مقادیر $\max$, $\min$ و دوره شادب توابع زیر را بیابید.

الف) $y = 4 - \cos(\frac{1}{8}x)$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{8}} = 16\pi$$

$$y_{\max} = 1 - 1 + 4 = 1 + 4 = 5$$

$$y_{\min} = -1 - 1 + 4 = -1 + 4 = 3$$

ب) $y = -2 \sin(\pi x) + \sqrt{3}$

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$y_{\max} = 1 - 2 + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$$

$$y_{\min} = -1 - 2 + \sqrt{3} = -3 + \sqrt{3}$$

نکته: اگر نمودار تابعی به صورت $y = a \sin bn + c$ یا $y = a \cos bn + c$

باشد، برای بدست آوردن ضابطه تابع غنی یا فاش یا دامنه ها a, b, c و تشخیص

سنویدی و کسنویدی بودن تابع به صورت زیر عمل می کنیم:

(۱) اگر معده y از $\max$ یا $\min$ نمودار عبور کند تابع کسنویدی است در غیر این صورت سنویدی است.

(۲) با جمع و کم کردن روابط گفته شده برای مقادیر $\max$ و $\min$ داریم ..

$$y_{\max} = |a| + c \quad \Rightarrow \quad y_{\max} + y_{\min} = 2c \Rightarrow c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$$

$$y_{\min} = -|a| + c$$

$$\Rightarrow y_{\max} - y_{\min} = 2|a| \Rightarrow |a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$$

(۳) برای یافتن b از دوره شتاب یک می گیریم $(T = \frac{2\pi}{|b|})$

(۴) برای تشخیص علامت a و b این گونه عمل می کنیم:

الف- در توابع سنویدی اگر نمودار بعد $x=0$ روند صعودی داشته باشد، a و b هم علامت

هستند غنی: $a \times b > 0$

و اگر نمودار عبور $n=0$ روند نزولی داشته باشد، a و b هر دو هم علامت اند غنی: $a \times b < 0$

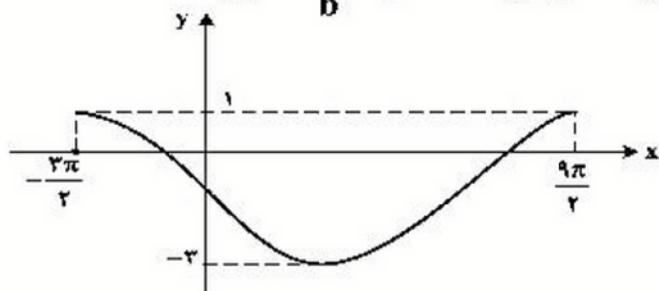
ب. در توابع گسسته اگر نمودار، ردی دارد و ها، ماکزیمم داشته باشد $a > 0$ است

و اگر مینیمم داشته باشد $a < 0$ است.

با توجه به رابطه $\cos(-x) = \cos x$ ، b می تواند مثبت یا منفی باشد.

مثال: گسسته سازی ۹۹ بفرمایید.

شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟



(۱) -۲

(۲) -۳

(۳) -۴

(۴) -۶

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{12\pi}{2} = 6\pi \Rightarrow 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

$$|a| = \frac{1 - (-3)}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

چون عبور $n=0$ بهنج نزول است پس $a < 0$ و در حالت داریم:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} : \frac{a}{b} = \frac{-2}{\frac{1}{3}} = -6$$

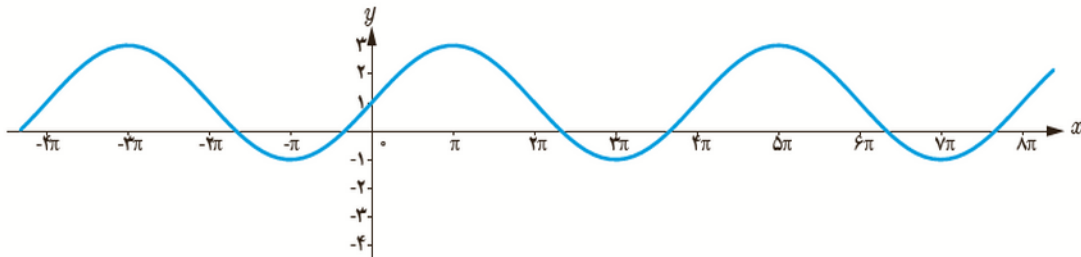
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} : \frac{a}{b} = \frac{2}{-\frac{1}{3}} = -6$$

گزینه ۴

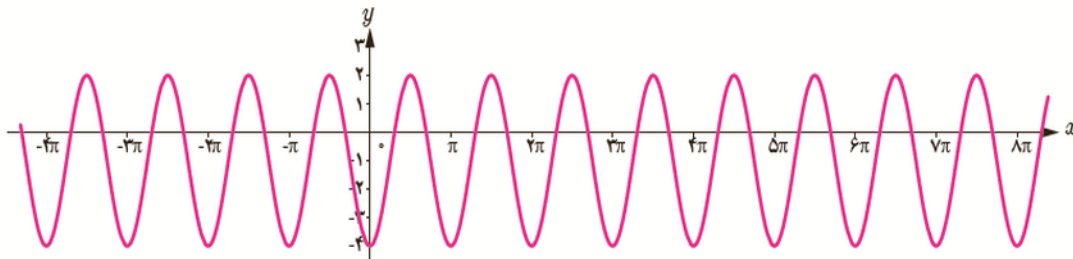
مثال: ضابطه تویج زیر به صورت $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ است.

ضابطه آینه را مشخص کنید.

الف)



ب)



تویج سینوسی است $T = 2\pi \Rightarrow 2\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$

$$|a| = \frac{2 - (-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad c = \frac{2 + (-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

بعد $x=0$ تویج در نقطه صوری دارد پس $a > 0$.

ضابطه تویج: $y = 2 \sin \frac{1}{2}x + 0$ و $y = -2 \sin(-\frac{1}{2}x) + 0$

ب) $T = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$

تویج کسینوس

$$|a| = \frac{2 - (-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad c = \frac{2 + (-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

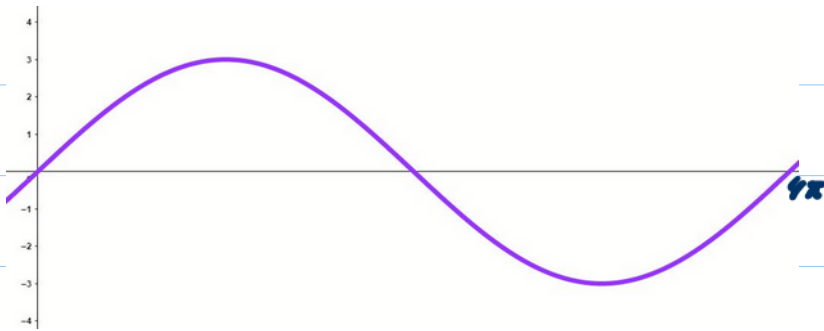
چون معرر و هاز $\min$ ندریس $a < 0$ یعنی ۳- است:

$$y = -3 \cos(2x) - 1 \quad \text{یا} \quad y = -3 \cos(-2x) - 1$$

ضبطه تابع

مثال: شکل زیر سوار تابع $f(x) = a \sin bx$ است. مقدار ab کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



$$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi |b| = 2\pi \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$|a| = \frac{3 - (-3)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

هراز $x=0$ رنده تابع معرر است $a > 0$ است:

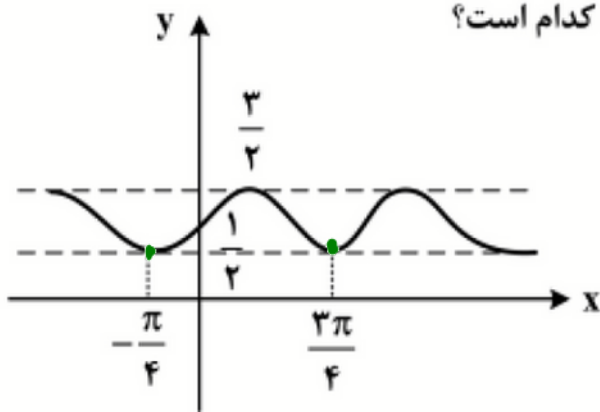
$$a = 3, b = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = 3 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$a = -3, b = -\frac{1}{2} \Rightarrow ab = -3 \times (-\frac{1}{2}) = 1$$

گزینه ۱

مثال: کنکور سراسری ۹۸ ریاضی:

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. کدام $a + b$ است؟



(۱) ۱

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۲

(۴) ۳

معرف دوره تناوب $\sin$ مزدی

$$y = 1 + a \sin bx \cos bx = 1 + \frac{1}{2} a \sin 2bx$$

$$T = \frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{4\pi}{4} = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow \pi |b| = \pi \Rightarrow |b| = 1$$

$$|\frac{1}{2}a| = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

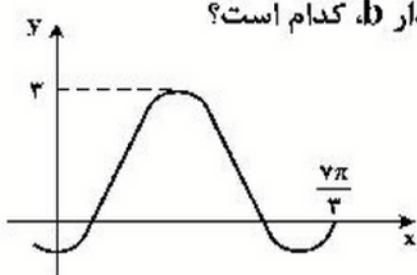
ه‌ذاً $a = 0$ و $b = 1$ یا $a = 1$ و $b = -1$ است:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \quad a+b=2, \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \quad a+b=-2$$

گزین ۴

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجرب

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(\frac{\pi}{4} + x)$ است. مقدار b ، کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۲

$$y = a + b \sin\left(\frac{x}{r} + \alpha\right) = a + b \cos x$$

$$y_{\max} = 3 = |b| + a$$

حرفه‌ها از $\min$ خبر برده است پس $b < 0$: (۱) $a - b = 3$

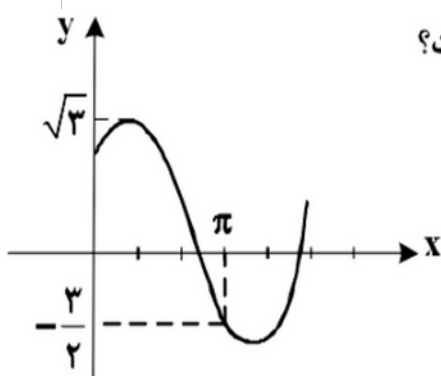
$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{r}}, 0\right) \xrightarrow{\text{ریشه}} 0 = a + b \cos \sqrt{\frac{\pi}{r}} \Rightarrow 0 = a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{r}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{r} \Rightarrow 0 = a + b \times \frac{1}{r} \Rightarrow a + \frac{b}{r} = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ a + \frac{b}{r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{r} = -3 \xrightarrow{\times \frac{r}{r}} b = -3r$$

$$\Rightarrow b = -2 \quad \text{نیز}$$

مثال: نمودار سری ۹۸ تری:



شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. b کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$y_{\max} = |b| + a \Rightarrow |b| + a = \sqrt{3}$$

چون تابع معبار $n=0$ در نزد محور داریم b با یک (ضرب n) هم‌علامت و مثبت است:

$$a+b=\sqrt{3} \quad (1)$$

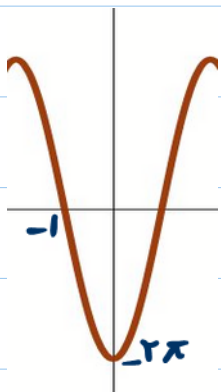
$$\left(\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \xrightarrow{\text{نقطه}} -\frac{\sqrt{3}}{2} = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=\sqrt{3} \\ a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow b + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3} \quad \text{گزینه ۳}$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = a \cos x$ به صورت زیر است. $f\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟



$$(1) \sqrt{2}\pi \quad (2) -\sqrt{2}\pi \quad (3) \sqrt{\frac{2}{2}}\pi \quad (4) -\sqrt{\frac{2}{2}}\pi$$

$$y_{\min} = -|a| + 0 = -2\pi \Rightarrow |a| = 2\pi$$

چون محور y ها از $\min$ عبور کرده پس $a < 0$ است:

$$\Rightarrow -a = 2\pi \Rightarrow a = -2\pi$$

چون $f(-1) = 0$ پس :

$$a = -2\pi \cos(-b) \Rightarrow \cos(-b) = 0 \Rightarrow -b = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$$

ادرس نقطه‌ای که تابع $\cos$ صفر از $n=0$ برابر $\frac{\pi}{2}$ شود است.

$$f(x) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} = -2\pi \times \sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}\pi$$

گزینه ۲

تأثیرات در دایره مثلثاتی :

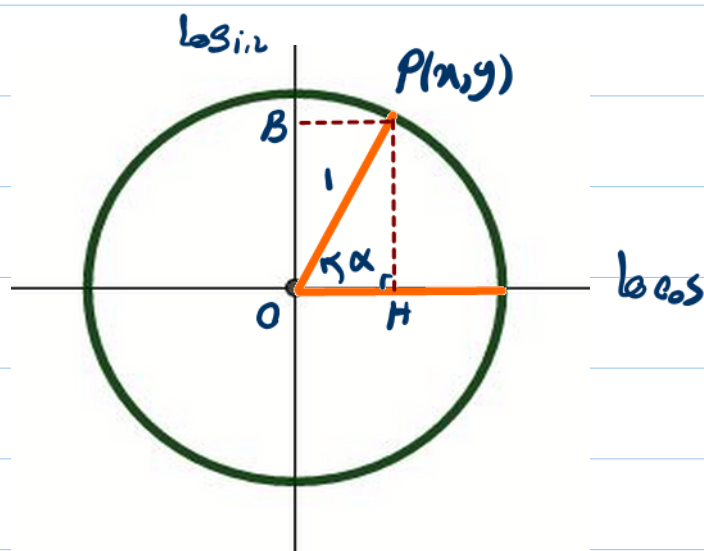
یادآوری : دایره مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدأ مختصات است.

ضلع ابتدای هر زاویه در دایره مثلثاتی، بر قسمت مثبت محور x ها واقع است.

اگر اندازه زاویه $\alpha > 0$ باشد به اندازه α در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

دوران می‌کنیم و اگر $\alpha < 0$ باشد به اندازه α در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخیم.

اگر ضلع انتهایی زاویه محیط دایره را در نقطه $P(x, y)$ قطع کند داریم :



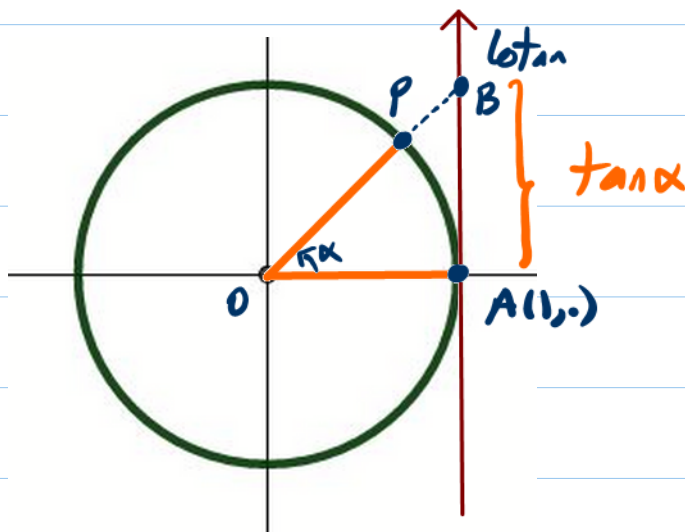
$$\triangle OHP : \sin \alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{PH}{1} \Rightarrow \sin \alpha = PH = BO \Rightarrow y_p = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{OH}{1} \Rightarrow \cos \alpha = OH \Rightarrow x_p = \cos \alpha$$

معدرات تارانت ها را مولزی معدر سینوس ها و کسینوس ها بر دایره ارتفاع $A(1,0)$

در نظریه گریم. بدین معر $A(1,0)$ است و عبت مثبت آن مانند کوسینوس است.

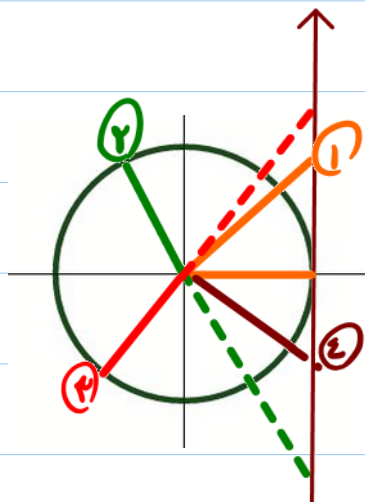
عنی بالای A تارانت مثبت و پائین A تارانت منی است.



اگر فاع OP را امدر هم، کوسینوس ها در دایره کسینوس است.

$$\triangle OAB : \tan \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} \Rightarrow \tan \alpha = AB$$

نوم: کسینوس تارانت در نواحی چهارگانه به صورت زیر است:

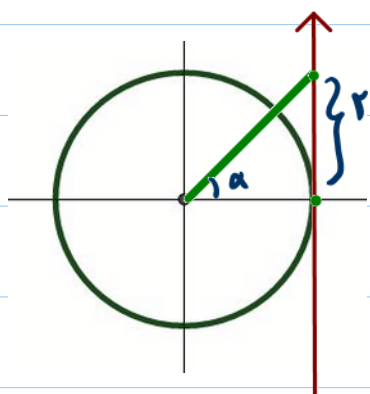


	sin	cos	tan	cot
1	+	+	+	+
2	+	-	-	+
3	-	-	+	-
4	-	+	-	-

نکته: در زاویه های $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و بجز یکی در مقابل و در $\frac{\pi}{4}$ ، هر دو مقدار را مقدار

دهم بعد از آن است هارا قطع نمی کند. در این زاویه ها تاثرات تعریف نشده است.

مثال: در شکل زیر $\cos \alpha$ کدام است؟

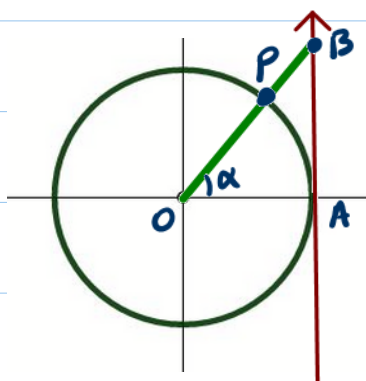


۱۱ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۱۲ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۱۳ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ۱۴ $\frac{\sqrt{5}}{10}$

$$\tan \alpha = 2, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{مثبت}} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال: با توجه به دایره شش ضلعی منتظم، اگر $P(2a-1, a)$ باشد، مساحت مثلث AOB چقدر است؟



۱۱ $\frac{2}{3}$ ۱۲ $\frac{5}{4}$ ۱۳ $\frac{2}{8}$ ۱۴ $\frac{1}{2}$

$$x_P = 2a - 1 = \cos \alpha$$

$$y_P = a = \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow a^2 + (2a-1)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 4a^2 - 4a + 1 - 1 = 0$$

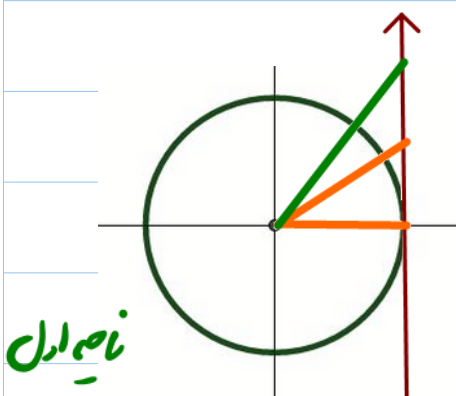
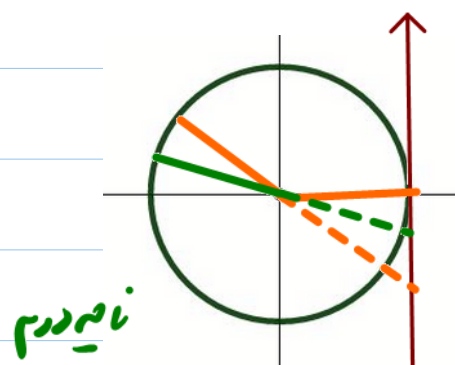
$$5a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(5a-4) = 0 \begin{cases} a=0 & \text{غیرممکن} \\ 5a-4=0 \rightarrow a = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3} = AB$$

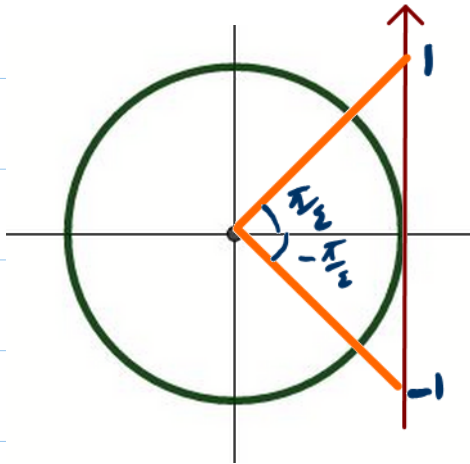
$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times AB = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{گزینه ۲}$$

نکته: در تمامی نواحی چهارگانه با افزایش زاویه، مقدار آنژانت هم افزایش می‌یابد.



برای نواحی سوم و چهارم به صورت مشابه عمل کنید.

مثال: اگر $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ و $\tan \alpha = \frac{r_m - r}{\delta}$ باشد، محدوده m را بیابید.



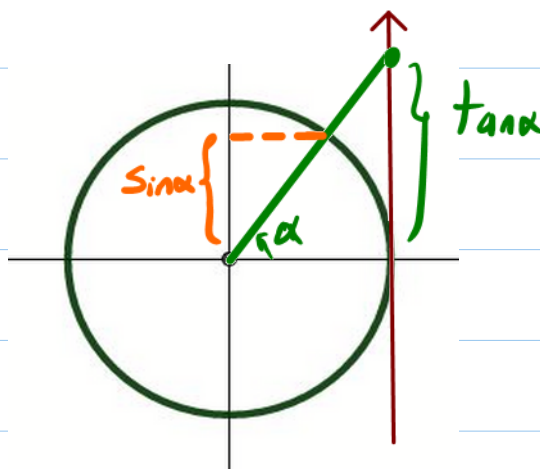
$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-1 \leq \tan \alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{r_m - r}{\delta} \leq 1 \quad \times \delta \Rightarrow -\delta \leq r_m - r \leq \delta$$

$$\overset{+r}{\Rightarrow} -1 \leq r_m \leq 1 \quad \div \delta \Rightarrow -1 \leq m \leq 1$$

نکته: بارشماره از دایره بیشتر می‌توان گفت: $|\sin \alpha| < |\tan \alpha|$



تابع تانژانت

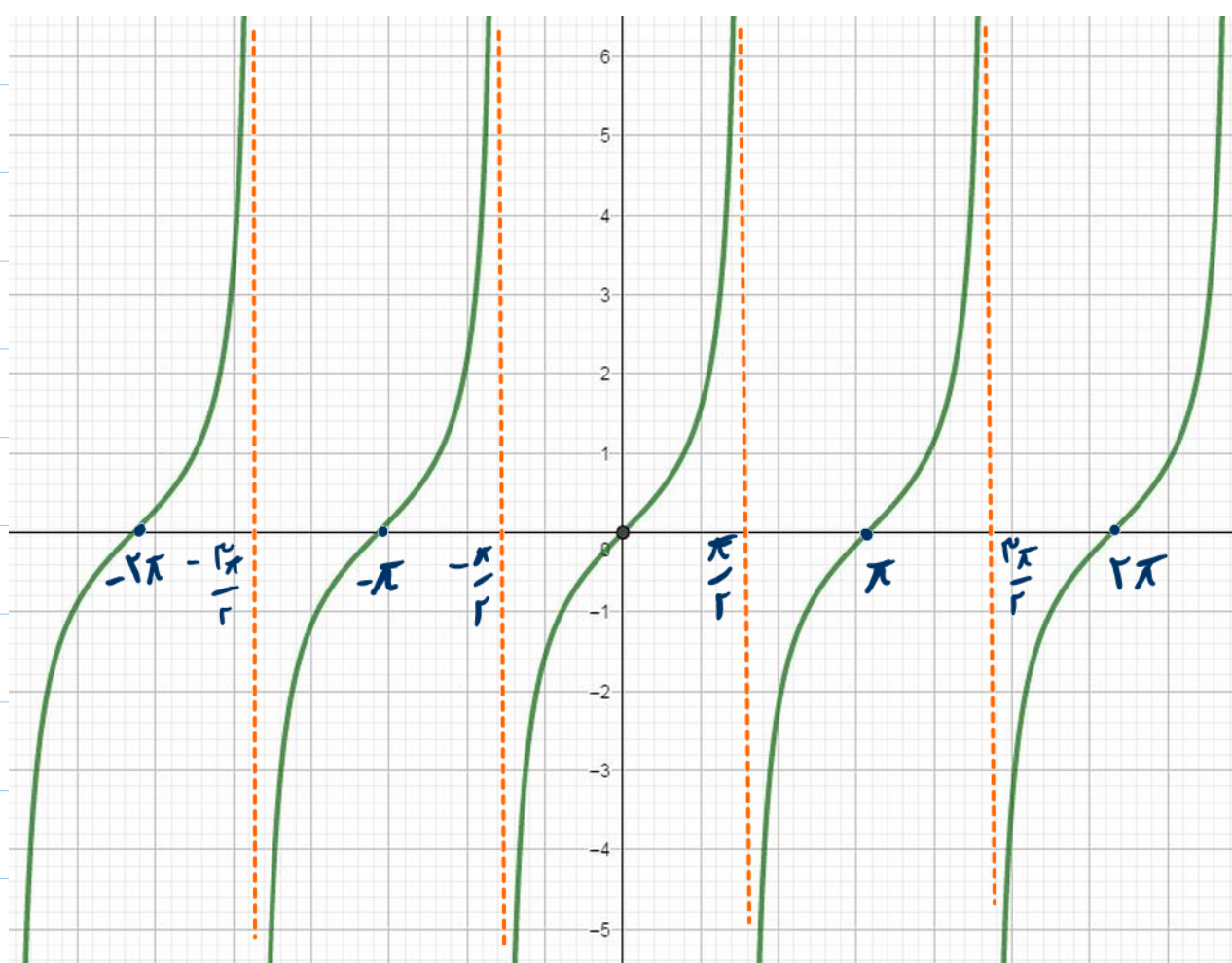
اگر x عددی حقیقی باشد و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، تابعی که به عدد x تانژانت x را نسبت

$$x \neq (k+1)\frac{\pi}{2}$$



ی دهد تابع تانژانت نامیده می شود.

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \tan x$ با دنبال کردن روی داده مشخصات زیر به نمودار زیر رسم:



پس درباره تابع $f(x) = \tan x$ می‌توان گفت:

۱- $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

۲- $R_f = \mathbb{R}$

۳- تابع تناظر است، تابع مشابه است و $T = \pi$

۴- تابع تناظر است زیرا است ولی درباره‌های که در آن ترف می‌شود یعنی بازه‌ها

که شامل $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ها نیستند، اکیداً ممنوع است.

تذکر: دوره مشابه تابع $y = a \tan(bx + c) + d$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2})$ می‌باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} \quad (1) \quad x \neq k \quad (2) \quad x \neq 2k+1 \quad (3) \quad x \neq 2k$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi$$

$$\times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq k\pi \times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq 2k$$

گزینه ۲

مثال: اگر $f(x) = \tan x - \frac{1}{\tan x}$ ، دوره شادب-تج $\frac{1}{f}$ ، را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x}$$

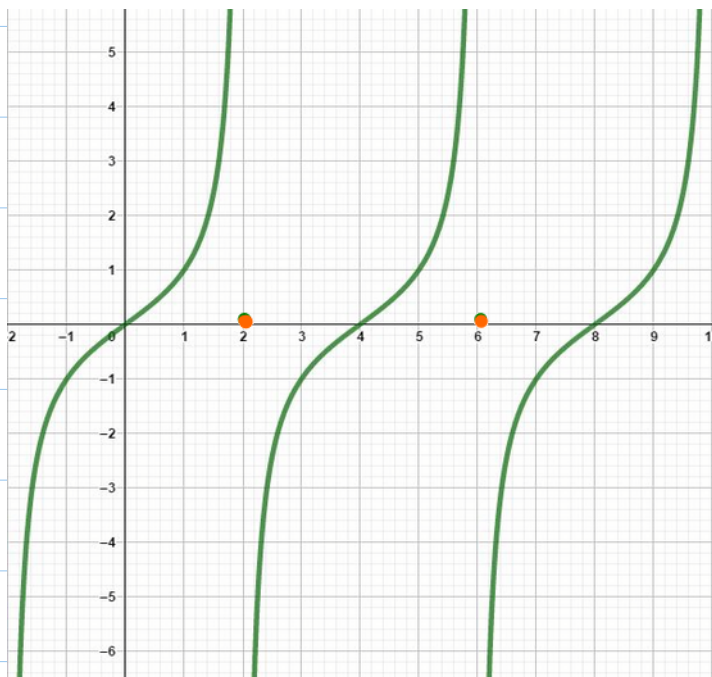
$$= -2 \cot 2x = -\frac{2}{\tan 2x}$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{2} \tan 2x \Rightarrow T_{\frac{1}{f}} = \frac{\pi}{2}$$

مثال: تج f با ضابطه $f(x) = \tan(\frac{\pi}{4}x)$ و دامنه $(2, 8)$ روی دایره اشکب-تجی است.

حد اکثر مقدار a کدام است؟ 11 12 13 14

باید طول تمام نقاط بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم یا در $\frac{\pi}{8}$ ضرب شود:



حد اکثر مقدار برای a به جابج

تج در دایره $(2, 8)$ اشکب-تجی

بسته 4 است پس گزینه 13 درست است.

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل دوم : مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان

جلسه سوم: صفحات ۴۲ و ۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

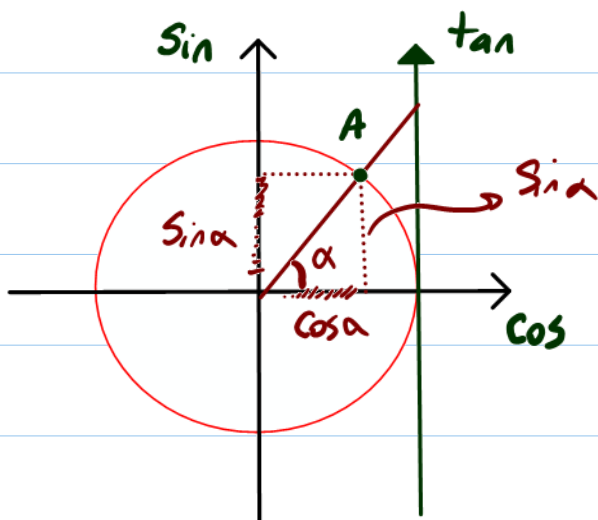
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

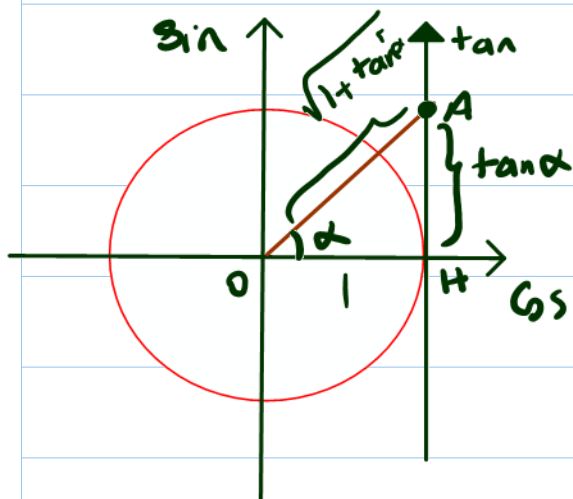
یادآوری روابط سال های گذشته :



$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\text{نیمه}} \begin{cases} \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \end{cases}$$

$$2) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$3) \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \xrightarrow{\text{نیمه}} \tan \alpha \cot \alpha = 1$$



$$\triangle OAH: AO^2 = AH^2 + OH^2$$

$$AO^2 = \tan^2 \alpha + 1$$

$$AO = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$f) \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\checkmark \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\text{مقلوس}} \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$d) \checkmark \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} \xrightarrow{\text{مقلوس}} \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$$

نسبت های مثلثاتی دو برابر همان

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{رابطه دابل}$$

$$\cdot \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \text{مثال: نسبت تانگن}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \alpha = 2 \tan \alpha \times \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\checkmark \text{مقلوس} \sin 0 = 2 \sin 0 \cos 0$$

$$2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \text{رابطه دابل}$$

مثال: ثابت کنید:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \quad (\text{الف})$$

$$\text{اثبات:} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\text{ب) } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\text{اثبات:} \quad \cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\text{ج) } \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\text{اثبات:} \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 0 = \begin{cases} \cos^2 0 - \sin^2 0 \\ 2\cos^2 0 - 1 \\ 1 - 2\sin^2 0 \\ \frac{1 - \tan^2 0}{1 + \tan^2 0} \end{cases}$$

جمع بندی:

۱ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.
 الف) $\cos^2 \alpha$ ب) $\sin^2 \alpha$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{12}{13} \xrightarrow{\text{حاده}} \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\text{الف) } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = \frac{-119}{169}$$

$$\text{ب) } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

مثال: ثابت کنید:

$$\text{الف) } \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{اثبت: } \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha \rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \\ &\rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{اثبت: } \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 \rightarrow 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \\ &\rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $۲۲/۵^\circ$ به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{r} (1 - \cos 2\alpha) \Rightarrow \sin^2 22,5 = \frac{1}{r} (1 - \cos 45)$$

$$\Rightarrow \sin^2 22,5 = \frac{1}{r} (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{r} (\frac{2 - \sqrt{2}}{2}) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2r}$$

$$\rightarrow \sin 22,5 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{r} (1 + \cos 2\alpha) \rightarrow \cos 22,5 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

مثال: ثابت کنید $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

اثبات: $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} *$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

* $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل دوم : مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

قسمت دوم: حل معادلات مثلثاتی

جلسه چهارم: صفحات ۴۳ تا ۴۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

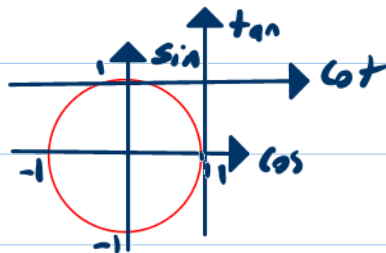
اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری:

۱۱ جدول ششای ششای زوای معروف:

	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$	∞	۰	∞	۰
cot	∞	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰	∞	۰	∞



۱۲ جدول علامت ششای ششای:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

۱۳ ششای ششای زاویه (-α)

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

۴) دوزادیه متمم : α, β متمم اند $\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{90^\circ}$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \sin \beta = \cos \alpha$$

$$\tan \alpha = \cot \beta, \quad \tan \beta = \cot \alpha$$

مثال: $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵) نسبت های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha) \xrightarrow{\infty \mathbb{Z}}$

الف) اگر ضرب π طوری زوج باشد آنگاه از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می کنیم.

$$\sin(2k\pi \pm \alpha) = \sin(\pm \alpha)$$

$$\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos(\pm \alpha)$$

ب) اگر ضرب π طوری فرد باشد آنگاه از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می کنیم اما نسبت مثلثاتی را قوی می کنیم.

$$\sin((2k+1)\pi \pm \alpha) = -\sin(\pm \alpha)$$

$$\cos((2k+1)\pi \pm \alpha) = -\cos(\pm \alpha)$$

ج) ضرب π چه زوج و چه فرد باشد آنگاه از کمان های $\tan$ و $\cot$ حذف می کنیم.

$$\tan(k\pi \pm \alpha) = \tan(\pm \alpha)$$

$$\cot(k\pi \pm \alpha) = \cot(\pm \alpha)$$

۶) نسبت های مثلثاتی $(\frac{\pi}{r}(2k+1) \pm \alpha)$ ^{مغرب وز $\frac{\pi}{r}$}

همیشه فرض می کنیم α حاده است و ناهمبازی که زاویه $(\frac{\pi}{r}(2k+1) \pm \alpha)$ در آن

است را مشخص می کنیم و علامت نسبت را مشخص می دهیم. حال مغرب وز

$\frac{\pi}{r}$ را حذف کرده و اسم نسبت را به صورت زیر بخیر می دهیم

$\sin \rightsquigarrow \cos$, $\cos \rightsquigarrow \sin$, $\tan \rightsquigarrow \cot$, $\cot \rightsquigarrow \tan$

$$\sin(\frac{\pi}{r}(2k+1) \pm \alpha) = \sin \text{us} \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{r}(2k+1) \pm \alpha) = \cos \text{us} \sin \alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{r}(2k+1) \pm \alpha) = \tan \text{us} \cot \alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{r}(2k+1) \pm \alpha) = \cot \text{us} \tan \alpha$$

مثال: بسترهای مثلثاتی زیر را بر حسب α بنویسید.

$$1) \sin(\frac{\pi}{r}(2k+1) - \alpha) = \overbrace{-\sin}^{-\sin \alpha}(-\alpha) = \sin \alpha$$

$$2) \cos(\frac{\pi}{r}(2k+1) + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$3) \cos(\frac{\pi}{r}(2k+1) - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

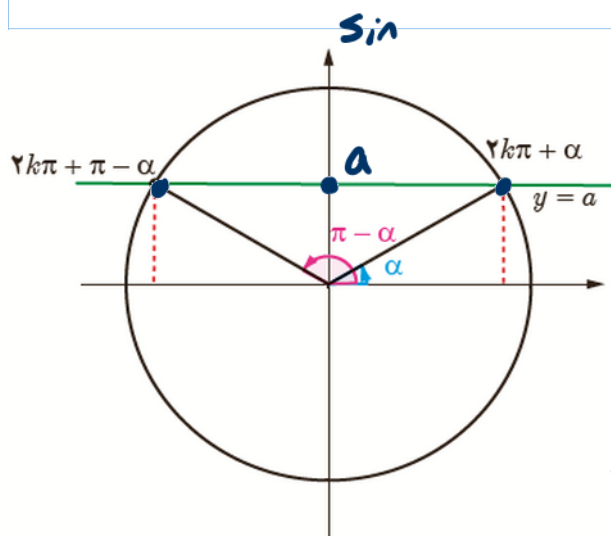
$$4) \sin(\frac{\pi}{r}(2k+1) + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{r}(2k+1) + \frac{\pi}{r} + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{r}(2k+2) + \alpha) = \sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

معادله سینوسی

به معادلاتی که مجهول در کنار سینوس قرار گیرد، معادله سینوسی می‌گویند.

روش شعوری حل معادله $\sin \alpha = a$:

مکمل $\alpha + \beta = \pi \rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$



روی دایره $\sin$ مقدار a را مشخص و از این

نقطه خطی بر دایره $\sin$ عمودی کنیم تا دایره

سینوسی را قطع کند. نقطه برخورد همان جواب

مورد نظر است. البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی α ، جواب کلی معادله است.

نتیجه :

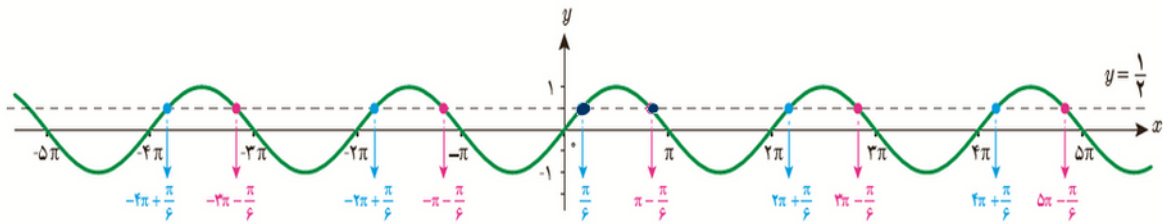
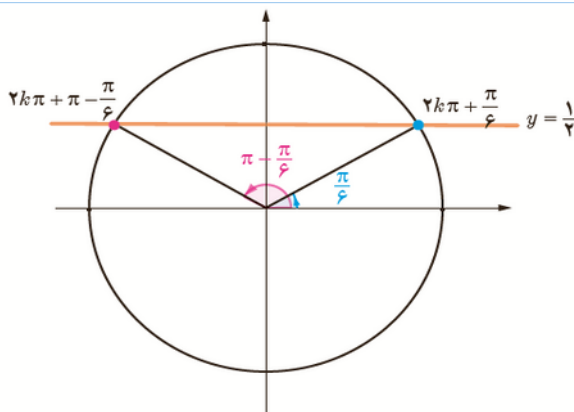
$$\sin \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \alpha \\ \alpha = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

قسمت $\rightarrow \sin \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \alpha \\ \alpha = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$

نکته مهم : اگر معادله به صورت استاندارد گفته شده بود، باید از روابط این سه تایی سینوسی و جیبی

عبارة و در صورت لزوم تغییر متغیر استفاده کرده و به شکل $\sin \alpha = \sin \alpha$ یا $\cos \alpha = \cos \alpha$ برسیم.

مثال: چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است مثال بزنید.



$$\sin x = \frac{1}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

ب) $4 \sin x + \sqrt{11} = 0$

الف) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

الف) $2 \sin x = \sqrt{3} \xrightarrow{\div 2} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

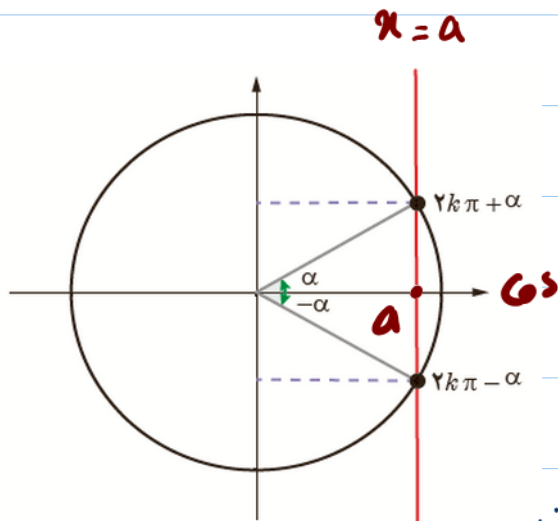
ب) $4 \sin x = -\sqrt{11} \xrightarrow{\div 4} \sin x = -\frac{\sqrt{11}}{4} = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

روش شعری حل معادله $\cos x = a$:



روی محور $\cos$ مقدار a را انتخاب و از این نقطه

خطی بر محور $\cos$ عمودی کنیم تا دایره مشتق

را قطع کند. نقطه برخورد a با جواب مدرج خواهد بود.

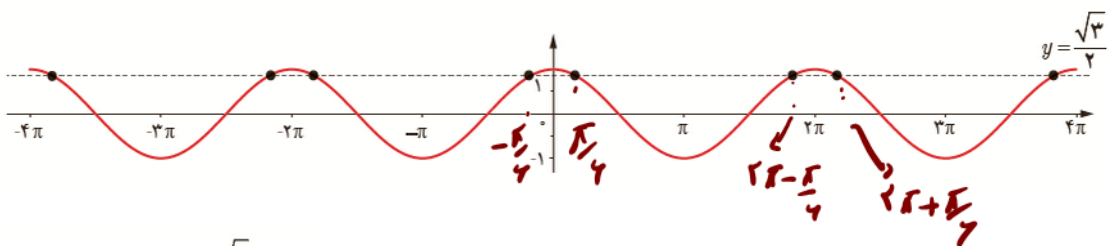
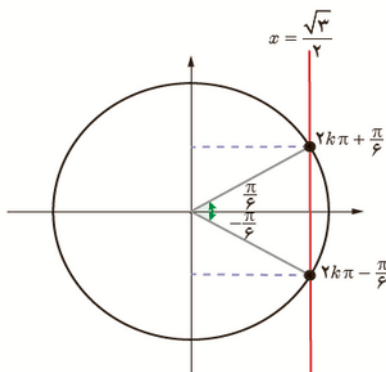
نتیجه:

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

مثلاً

$$\cos 0 = \cos \square \Rightarrow 0 = 2k\pi \pm \square$$

مثال: چند زاویه که مقدار کسینوس آنها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است مثال بزنید.



$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{جواب عمومی (مکمل)}$$

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{3}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

$$\cos x = \frac{1}{3} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

k	-1	0
x	$-2\pi \pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{3}$

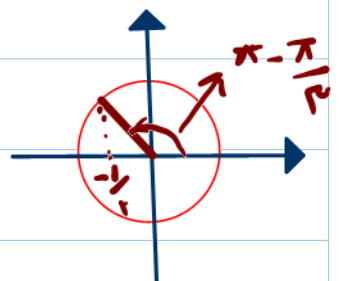
مثال: معادله مثلثاتی $2\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید

$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$$

$$\Delta = 81 - (4 \times 2 \times (-5)) = 81 + 40 = 121$$

$$\cos x = \frac{9 \pm 11}{4} \begin{cases} \frac{9+11}{4} = 5 \quad \times \\ \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2} \quad \checkmark \end{cases} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

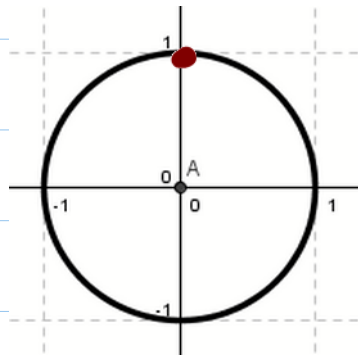
$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$



$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

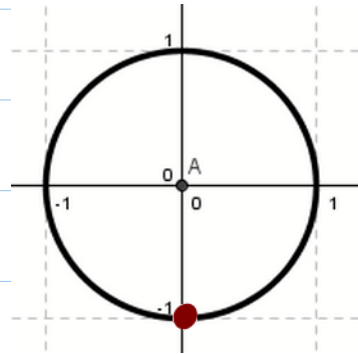
مقادیر خاص :

$$\sin \alpha = 1$$



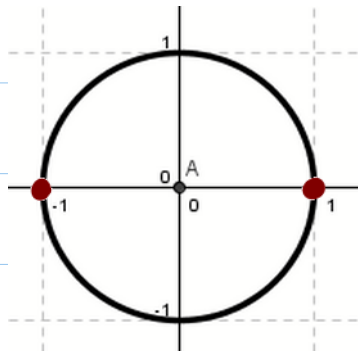
$$\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha = -1$$



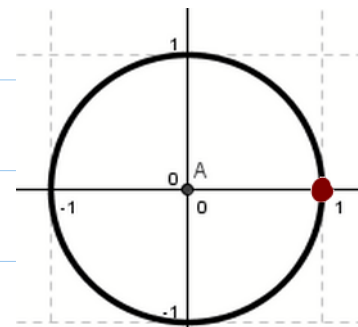
$$\alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha = 0$$



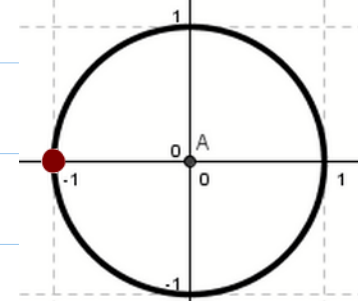
$$\alpha = k\pi$$

$$\cos \alpha = 1$$



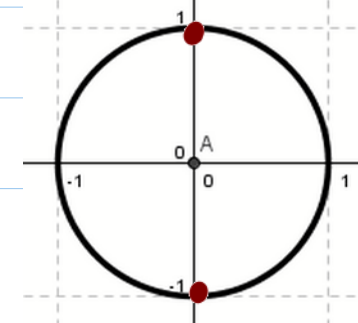
$$\alpha = 2k\pi$$

$$\cos \alpha = -1$$



$$\alpha = (2k+1)\pi$$

$$\cos \alpha = 0$$



$$\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

الف) $\sin \frac{\pi}{3} = \sin 3x \rightarrow 1 = \sin 3x$ **حالت خاص**

$$3x = 3k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 3} x = \frac{3k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (2\cos x - 1) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2\cos x = 1 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

پ) $\cos x = \cos 3x$

$$3x = 2k\pi \pm x$$

$$3x = 2k\pi + x \rightarrow x = k\pi$$

$$3x = 2k\pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{ت) } \cos^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \rightarrow 1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$-2 \sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0 \quad \Delta = 9 - (4 \times (-2)(2)) = 9 + 16 = 25$$

$$\sin x = \frac{2 \pm 5}{-2} \begin{cases} \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \times -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -\frac{7}{-2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \quad \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{ث) } \cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{4} = 0$$

$$-\sin^2 x - \sin x + \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - (4 \times (-1)(\frac{3}{4})) = 1 + 3 = 4$$

$$\sin x = \frac{1 \pm 2}{-2} \begin{cases} \frac{3}{-2} \times -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{ج) } \sin x - \cos^2 x = 0$$

$$\sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - (4 \times 2 \times (-1)) = 1 + 8 = 9$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \\ -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

مثال: معادله ی مثلثاتی $2\sin x + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ را حل کنید.

$$2\sin x = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \xrightarrow{:\sqrt{2}} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال: جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

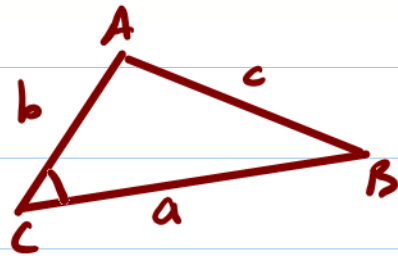
$$2\sin x \cos x = 2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin 2x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{:\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \xrightarrow{:\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۲ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

$$S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin \hat{C}$$



$$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \hat{C} \rightarrow 3 = 6 \sin \hat{C}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{\pi}{6} \checkmark \\ \hat{C} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{5\pi}{6} \checkmark \end{cases}$$

دو مثلث

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل سوم: حد بی نهایت و حد در بی نهایت

درس اول: حد بی نهایت

یادآوری مفهوم حد

جلسه اول: صفحات ۵۰ و ۵۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری:

۱) مفهوم میل کردن: اگر x به عدد a نزدیک و نزدیک تر شود ولی هیچگاه برابر

a نشود می‌گوئیم x به a میل می‌کند و می‌نویسیم: $x \rightarrow a$



$x \rightarrow a^+$: هرگاه x از مقادیر بزرگتر از a به a نزدیک شود. در این حالت

می‌گوئیم x از طرف راست به a میل می‌کند.

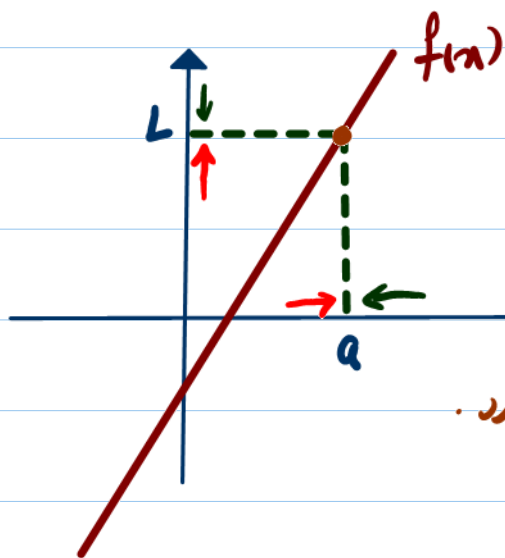
$x \rightarrow a^-$: هرگاه x از مقادیر کوچکتر از a به a نزدیک شود. در این حالت می‌گوئیم

x از طرف چپ به a میل می‌کند.

۲) مفهوم حد: وقتی می‌گوئیم می‌خواهیم حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند

را حساب کنیم یعنی می‌خواهیم بدانیم وقتی x به عدد a نزدیک می‌شود

مقدار تابع یا همان y به چه عددی نزدیک می شود.



نحوه نوشتن حد: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

وی خوانیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می کند برابر L می شود.

(۳) چند نکته:

(الف) برای معاینه حد تابع در نقطه a ، تابع باید اطراف این نقطه تعریف شده باشد وی

ندوی ندارد در خود a تعریف شده باشد.

(ب) هرگاه a از سمت راست به a میل کند و مقدار تابع به L_1 نزدیک شوند می نویسیم:

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$ وی خوانیم حد راست تابع f در a برابر L_1 است.

(پ) هرگاه a از سمت چپ به a میل کند و مقدار تابع به L_2 نزدیک شوند می نویسیم:

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$ وی خوانیم حد چپ تابع f در a برابر L_2 است.

ت) زمانی که f در a حد دارد به مقدار حدی و ثابت موجود و برابر باشند.

ث) به طور کلی اگر $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = L$. آنگاه در باره $f(a)$ می توانیم از حالت های زیر

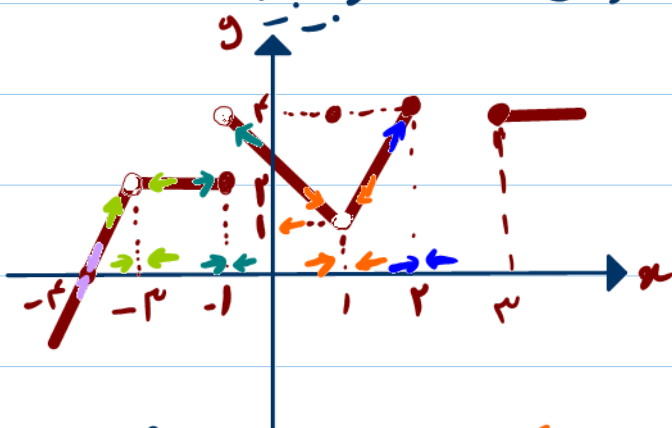
را داریم:

الف) $f(a)$ موجود نیست.

ب) $f(a)$ موجود است ولی با مقدار حدی برابر نیست ($f(a) \neq L$)

پ) $f(a)$ موجود و برابر مقدار حدی است ($f(a) = L$)

مثال: نمودار f به صورت زیر است. حدهای خود را مشخص کرده و برابر کنید.



$$1) \lim_{n \rightarrow 1} f(n) = 1$$

ولی مقادیر f $\neq$

$$5) \lim_{n \rightarrow -4} f(n) = 0$$

$$n \rightarrow -4$$

$$2) \lim_{n \rightarrow -3} f(n) = 2$$

مقادیر f $\neq$ $\lim$

$$3) \lim_{n \rightarrow -1} f(n) =$$

$$\lim_{n \rightarrow -1^-} f(n) = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow -1^+} f(n) = 4$$

حد ندارد

$$4) \lim_{n \rightarrow 2} f(n) =$$

$$\lim_{n \rightarrow 2^-} f(n) = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow 2^+} f(n) = \text{وجود ندارد}$$

حد ندارد

۱۴) محاسبه حد :

برای محاسبه حد یک تابع وقتی $a \rightarrow x$ کافی است به جای x ، a بگذاریم.

اگر حاصل حد مشخصی به دست آید، همان مقدار حد تابع است. در محاسبه تابع

به نکات زیر توجه کنید.

۱) در توابع چند ضابطه‌ای زمانی که محاسبه حد در نقطه‌ای که ضابطه تابع عوض می‌شود

مد نظر باشد باید حد را با دو حد جداگانه و سپس را از ضابطه‌ها مربوط به آن محاسبه کنیم.

۲) در توابع رادیکالی با فرجه زوج اگر a ریشه کسری از a باشد باید

حد جداگانه را از a حساب کنیم.

۳) در توابع قدر مطلق اگر a ریشه کسری از a باشد در صورت لزوم (حالت مهم)

باقی‌مانده حذف قدر مطلق‌ها در تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم.

۴) در توابع شامل جزء صحیح، اگر کسری از a جزء صحیح مقدار صحیح نمی‌شود، مقدار جزء صحیح

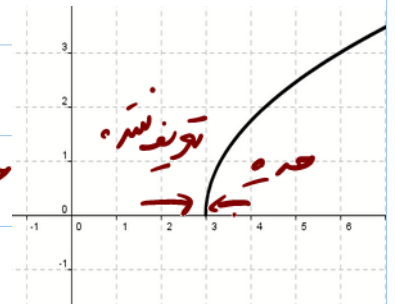
راحب جی کیم وی اگر مقدار صغیر شد باید حد چپ و راست محاسب شود.

مثال: حد های زیر را محاسب کنید.

$$\text{الف) } \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+n} - (n+2)^2}{\sin n + 2 \cos n} = \frac{\sqrt{4+0} - (0+2)^2}{\sin 0 + 2 \cos 0} = \frac{2-4}{0+2 \times 1} = -\frac{2}{2}$$

$$\text{ب) } \lim_{n \rightarrow 3} \sqrt{3n-9} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow 3^+} \sqrt{3n-9} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow 3^-} \sqrt{3n-9} = \text{حد ندارد} \end{array} \right.$$

n	3
$3n-9$	$-9+9$



$$\text{ج) } \lim_{n \rightarrow 1} \begin{cases} n+2 & n < 1 \\ n^2+2 & n \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow 1^+} (n^2+2) = 1^2+2=3 \\ \lim_{n \rightarrow 1^-} (n+2) = 1+2=3 \end{cases} \quad \text{حد ندارد}$$

$$\text{د) } \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1+n[n]}{[n]+2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{1+n[n]}{[n]+2} = \frac{1+1 \times 1}{1+2} = \frac{2}{3} = \frac{1}{1.5} \\ \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{1+n[n]}{[n]+2} = \frac{1+1 \times 0}{0+2} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{حد ندارد}$$

حد توابع کسری وقتی به صورت $\frac{0}{0}$ می‌رسد :

صفرها دورسته اند : ۱- صفر مطلق (خرد صفر)

۲- صفر نسبی یا جدی ($\neq 0$)

باتوجه به دورسته بودن صفرها، پس ۴ نوع $\frac{0}{0}$ داریم :

نوع اول : $\frac{0}{0}$ مخدج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

نوع دوم : $\frac{0^+}{0^+}$ مخدج کسر صفر مطلق پس حد وجود ندارد.

نوع سوم : $\frac{0}{0^+}$ صورت صفر مطلق و مخدج غیر صفر (صفر جدی) پس حد کسر صفری است.

نوع چهارم : $\frac{0^+}{0^+}$ به این حالت، حالت مبهم می‌گوئیم و باید رفع ابهام شود.

مثال: حد های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]^2 - 4}{[x] - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} \quad \text{حد ندارد}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{[x] - 1} = \frac{1^+ - 1}{1 - 1} = \frac{0^+}{0} \quad \text{حد ندارد}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{[x] + 1}{x^2 - 1} = \frac{-1 + 1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$

$$\begin{array}{r} \frac{0^+}{-1} \\ \hline \frac{-1}{-1} \end{array}$$

چگونه رنج اهام $\pm \frac{a}{n}$ را بنام رهم :

چون $a \rightarrow n$ و صورت و مخرج هر دو صفر شده اند پس هم صورت و هم مخرج

صفر ($n-a$) را دارا هستند . به ($n-a$) عمل اهام یا صفر شده می نویسیم

الف) رنج اهام $\div$ وقتی صورت و مخرج هر دو چند مجهولی باشند .

با استفاده از روش های تجزیه (فاکتورگیری در کاهها) عمل اهام را در صورت و مخرج

ایجاد و با یکدیگر حذف می کنیم تا حد قابل محاسبه باشد .

بصره : هرگاه نتوانیم باری کاهها یا فاکتورگیری عمل اهام را ای کنیم ، چاره ای

جز به تقسیم آن عبارت بر عمل اهام نداریم . در این صورت به جای آن عبارت

حاصل ضرب ($n-a$) (ها) مستعمل می شود در خارج قسمت را می نویسیم .

یادآوری و تکمیل :

$$\frac{P}{R} \overline{\frac{B}{Q}} \quad P = BQ + R$$

رابطه تقسیم

هرگاه R صفر شدی بنویسیم P بر B بخش پذیری است .

قضیه: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $(x-a)$ ، باقی مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.
نتیجه: اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر است.

$$\frac{f(x)}{x-a} = Q + \frac{R}{x-a}$$

$$f(x) = (x-a)Q + R$$

اثبات:

$$\rightarrow x=a \rightarrow f(a) = (a-a)Q + R \rightarrow f(a) = R$$

کار در کلاس

۱ در چندجمله‌ای $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ ، مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$f(2) = 3 \times 2^2 - 5 \times 2 - 2 = 12 - 10 - 2 = 0$$

$f(x)$ بر $(x-2)$ بخش پذیر است.

تقسیم چندجمله‌ای $3x^2 - 5x - 2$ بر $x-2$:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 5x - 2 & x-2 \\ \hline (3x^2 - 6x) & 3x+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 2 \\ -(3x^2 - 6x) \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{3x^2}{x} = 3x$$

$$\frac{-5x}{x} = -5$$

$$\frac{-2}{x} = -\frac{2}{x}$$

۲ چند جمله‌ای $g(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+1)$ بخش پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید :

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

الف) $x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow g(-1)=R$

$$g(-1) = 2 \times (-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -2 + 1 + 1 = 0$$

بنده زیر باقی مانده صفر شود.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 + 1 & x+1 \\ \underline{-(2x^3 + 2x^2)} & \\ -x^2 + 1 & \\ \underline{-(-x^2 - x)} & \\ x + 1 & \\ \underline{-(x + 1)} & \\ 0 & \end{array}$$

ب) $\frac{2x^3}{x} = 2x^2$

$\frac{-x^2}{x} = -x$

$\frac{x}{x} = 1$

ج) $2x^3 + x^2 + 1 = (x+1)(2x^2 - x + 1)$

تجزیه

۳ نشان دهید چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دو جمله‌ای $x + 2$ بخش پذیر است.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = R \Rightarrow f(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 3(-2) - 10$$

$$= -16 + 20 + 6 - 10 = -26 + 26 = 0$$

کار در کلاس

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$

الف) $\frac{9-9}{9-9} = \frac{0}{0}$

$$x - (-3) = x + 3$$

عزل ابع

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)} = \frac{-3-3}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

ب) $\frac{4x \cdot \frac{1}{2} - 4x \cdot \frac{1}{2} + 1}{2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - 2 + 1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1} = \frac{0}{0}$

عزل ابع $(x - \frac{1}{2})$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{r n^r - r n + 1}{r n^r + n - 1}$$

$$n \rightarrow \frac{1}{r}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{(n - \frac{1}{r})(r n - r)}{(n - \frac{1}{r})(r n + r)}$$

$$= \frac{r \times \frac{1}{r} - r}{r \times \frac{1}{r} + r} = \frac{r - r}{1 + r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\begin{array}{l} r n^r - r n + 1 \\ -(r n^r - r n) \\ \hline -r n + 1 \\ -(-r n + 1) \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} n - \frac{1}{r} \\ r n - r \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} r n^r + n - 1 \\ -(r n^r - n) \\ \hline r n - 1 \\ -(r n - 1) \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} n - \frac{1}{r} \\ r n + r \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{r n^r - 1}{r n^r - 1 r n^r + r r n - 9} = \frac{0}{0}$$

$$\text{L'Hôpital's Rule } (n - \frac{1}{r})$$

$$=, \text{ also } r n^r - 1 = r(n^r - \frac{1}{r}) = r(n - \frac{1}{r})(n + \frac{1}{r})$$

$$\begin{array}{l} r n^r - 1 r n^r + r r n - 9 \\ -(r n^r - n^r) \\ \hline -1 r n^r + r r n - 9 \\ -(-1 r n^r + 2 n) \\ \hline 1 n n - 9 \\ -(1 n n - 9) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} n - \frac{1}{r} \\ r n^r - 1 r n + 1 n \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{r(n - \frac{1}{r})(n + \frac{1}{r})}{(n - \frac{1}{r})(rn^2 - rn + 1)} &= \frac{r(\frac{1}{r} + \frac{1}{r})}{r \times \frac{1}{r} - r \times \frac{1}{r} + 1} \\
 &= \frac{r}{\frac{1}{r} - 1 + 1} = \frac{r}{\frac{1}{r}} \\
 &= \frac{1}{r^2}
 \end{aligned}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل سوم: حد بی نهایت و حد در بی نهایت

درس اول: حد بی نهایت

رفع ابهام صفر صفرم در توابع

کسری رادیکالی

جلسه دوم: صفحات ۵۲ و ۵۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

با رنج ابرام به دقت صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات راکشی هستند:

در این حالت از مفهومی که یاد کردیم و اتحادهای مزدوج و چاق دلاغر استفاده می‌کنیم. به این صورت که

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت راکشی (برای فرض‌های ۱) یا عبارت چاق عبارت راکشی

(برای فرض‌های ۲)، حاصل ابرام را ایجاد می‌کنیم.

کار در کلاس

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}} = \frac{0}{0} \quad (x+1) \text{ عامل ابرام}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

↑
مزدوج همگون

$$x + \sqrt{2x+3} \xrightarrow{\text{مزدوج}} x - \sqrt{2x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1) \times (x - \sqrt{2x+3})}{(x + \sqrt{2x+3}) \times (x - \sqrt{2x+3})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x - \sqrt{2x+3})}{x^2 - (\sqrt{2x+3})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x - \sqrt{2x+3})}{x^2 - (2x+3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x - \sqrt{2x+3})}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-1)} = \frac{(-1-1)(-1-\sqrt{2(-1)+3})}{-1-1}$$

$$= \frac{-2 \times (-1-1)}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2} = \frac{0}{0}$ $\frac{0}{0}$ (x-1)

$(x - \sqrt{x}) \xrightarrow{\text{مضروب}} (x + \sqrt{x})$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x}) \times (x + \sqrt{x})}{(x-1)(x+2) \times (x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x-1)(x+2)(x + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x + \sqrt{x})} = \frac{1}{(1+2)(1+1)} = \frac{1}{6}$$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + 3x + 2} = \frac{0}{0}$ (x+1) $\frac{0}{0}$

با روشی دیگر می‌توانیم حل کنیم:

$$(a-b)(a^r + ab + b^r) = a^r - b^r$$

$$(a+b)(a^r - ab + b^r) = a^r + b^r$$

نحوه ساختن عبارت چاق از روی عبارت لاغر :

۱- محب اول چاق : مبرج (توان دوم) محب اول لاغر

۲- محب دوم چاق : حاصل ضرب محب اول در دوم لاغر با علامت قعنه

۳- محب سوم چاق : مبرج محب دوم لاغر چاق لاغر

$$\lim_{n \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[3]{n} + 1) \times (\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n} + 1)}{(n+1)(n+2) \times (\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n} + 1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[3]{n})^3 + 1^3}{(n+1)(n+2)(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n} + 1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow -1} \frac{\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n} + 1)} = \frac{1}{(-1+2)(1+1+1)} = \frac{1}{3}$$

سوال: حدود زیر را بیابید :

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

چ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 6x + 5}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sqrt{3x+4} - 2}$

الف - ب - ث و ج بنزدیک ۰

پ)

ص ۱/۴ : (x - 1/4)

تغییر صورت : $8(x^3 - \frac{1}{8}) = 8(x - \frac{1}{4})(x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4})$

تغییر مخرج : $(x - \frac{1}{4})(7x - 2)$

$$\begin{array}{r} 7x^2 - 5x + 1 \quad | \quad x - \frac{1}{4} \\ -(7x^2 - 2x) \\ \hline -2x + 1 \\ -(-2x + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{8 \cancel{(x - \frac{1}{4})} (x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4})}{\cancel{(x - \frac{1}{4})} (7x - 2)} = \frac{8 (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})}{7 - 2} = \frac{8 \times \frac{3}{4}}{5} = \frac{6}{5}$$

$$1) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^n - 1}{n^n - n^r + n - 1}$$

(n-1) فاکتور

$$\text{مخرج: } (n-1)(n^r + n + 1)$$

$$\text{مخرج: } (n-1)(n^r + 1)$$

$$\frac{n^n - n^r + n - 1}{-(n^n - n^r)} \div \frac{n-1}{n^r + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{(n-1)(n^r + n + 1)}{(n-1)(n^r + 1)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1}$$

(n-1) فاکتور

$$n \rightarrow 1$$

مخرج مضروب
مخرج مضروب

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{(n - \sqrt{n}) \times (n + \sqrt{n}) \times (\sqrt{n} + 1)}{(\sqrt{n} - 1) \times (n + \sqrt{n}) \times (\sqrt{n} + 1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(n^r - n)(\sqrt{n} + 1)}{(n-1)(n + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n(n-1)(\sqrt{n} + 1)}{(n-1)(n + \sqrt{n})} = \frac{1(1+1)}{1+1}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{r_{n+1}} - 1}{\sqrt{r_{n+1}} - r}$$

طال ایچ : ۲

مربوطه
مربوطه
مربوطه

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{r_{n+1}} - 1) \times (\sqrt{r_{n+1}} + 1) \times (\sqrt{r_{n+1}} + r)}{(\sqrt{r_{n+1}} - r) \times (\sqrt{r_{n+1}} + 1) \times (\sqrt{r_{n+1}} + r)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(r_{n+1} - 1)(\sqrt{r_{n+1}} + r)}{(r_{n+1} - r)(\sqrt{r_{n+1}} + 1)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{r / (\sqrt{r_{n+1}} + r)}{r / (\sqrt{r_{n+1}} + 1)}$$

$$= \frac{r(r+r)}{r(1+1)} = \frac{r}{r}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

درس اول: حد بی‌نهایت

تعریف حد بی‌نهایت

جلسه سوم: صفحات ۵۴ تا ۵۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

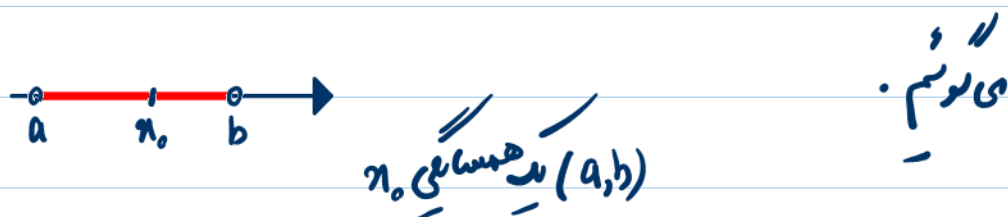
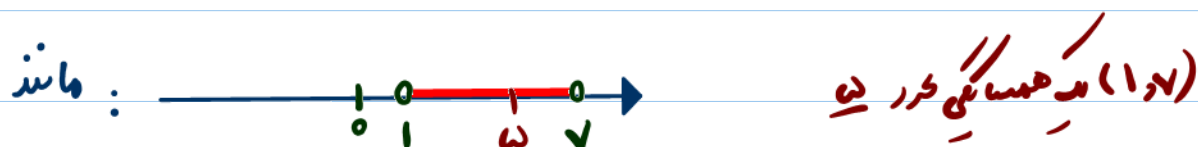
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف همسایگی: اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوئیم.



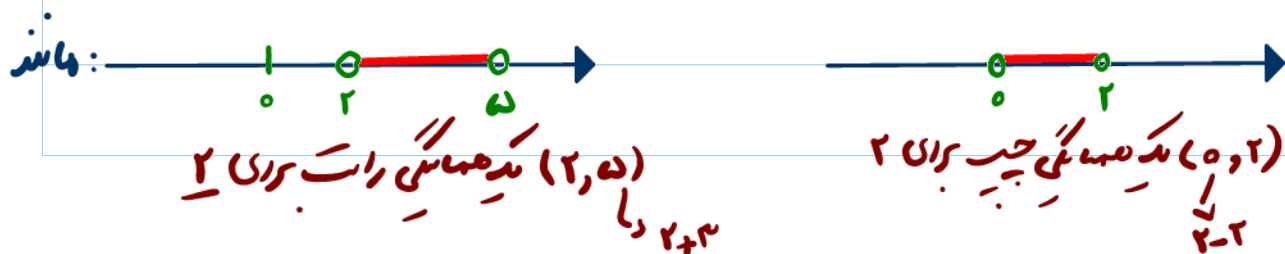
تعریف همسایگی فذوف: اگر x_0 را از همسایگی بازش خارج کنیم، همسایگی محذوف x_0 می‌دست



تعریف همسایگی راست و چپ: اگر r عددی حقیقی مثبت باشد بازه $(x_0, x_0 + r)$ را

یک همسایگی راست x_0 و بازه $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی

چپ x_0 می‌نامیم.



مثال: اگر بازه $(a-3, 2a+1)$ همسایگی عدد یک باشد، عدد a را بیابید.

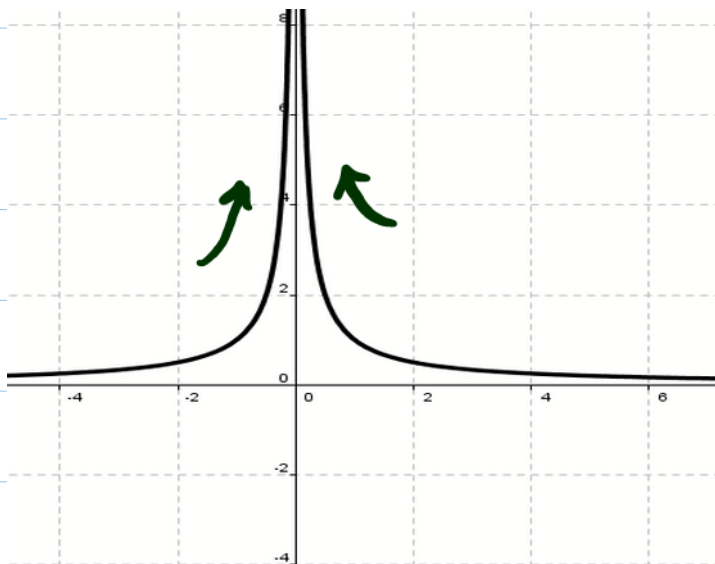
$$a-3 < 1 < 2a+1$$

$$\begin{cases} a-3 < 1 \rightarrow a < 4 \\ 2a+1 > 1 \rightarrow 2a > 0 \rightarrow a > 0 \end{cases} \quad \cap \rightarrow 0 < a < 4$$

می‌خواهیم حد تعجب $f(x) = \frac{1}{|x|}$ را در $x=0$ بررسی کنیم. تابع در $x=0$ تعریف نمی‌شود.

رنگ همسایگی حذف ۰ وجود دارد.

x	-1/5	-1/1	-1/2	-1/1000	$\rightarrow 0$	1/1000	1/100	1/1	1/5
$y = f(x)$	2	100	1000	10000	$+\infty$	$+\infty$	10000	1000	2



تعریف: فرض کنید f در یک همسایگی معدوم a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f با x

و y های k را افزایش یا بدهی از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر شوند، به شرطی که

مقادیر متغیر x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشند می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

در این صورت می گوئیم تابع f در a حد نامتناهی (مثبت بی نهایت) دارد

تذکر: اگر باشد $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$:

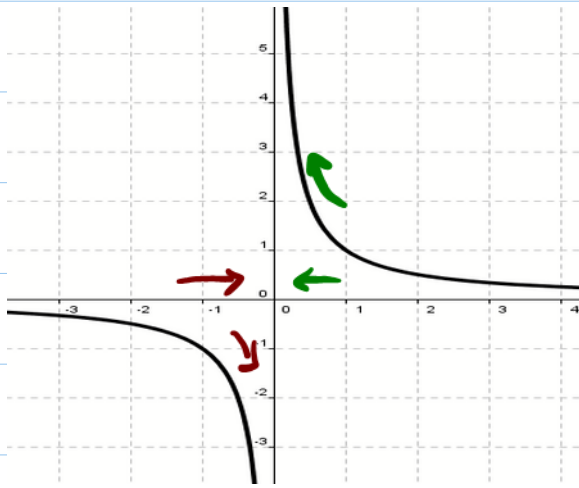
۱- مقادیر تابع f با x و y ها کاهش یابد می نویسیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

۲- f در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده باشد، مقادیر تابع f کاهش یا افزایش یابند

به ترتیب می نویسیم: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

۳- f در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد، مقادیر تابع f کاهش یا افزایش یابند

به ترتیب می نویسیم: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$



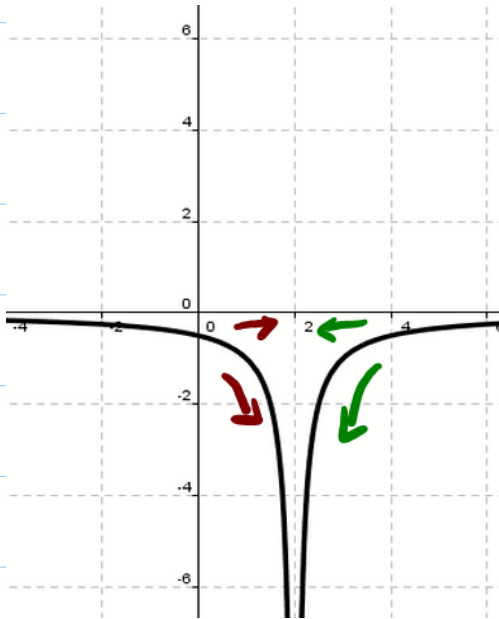
: $\dot{u}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

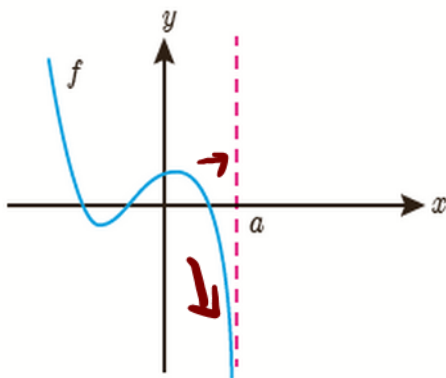


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 2^+$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow a^-$$

محاسبه حدی بی‌نهایت :

اگر $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = L \neq 0$ ، $\lim_{n \rightarrow a} g(n) = 0$ آن‌گاه $y = \frac{f(n)}{g(n)}$ در نقطه a حدی بی‌نهایتی

یا حدی بی‌نهایت دارد. علامت بی‌نهایت با توجه به علامت L ، علامت منفی یا مثبت y

در یک همسایگی معزوف a قس می‌شود. این نکته برای حد چپ و حد راست هم درست است.

پس : $\frac{\infty}{0} = \infty$ (در حدی بی‌نهایت به بی‌نهایت می‌رود و جواب حدی بی‌نهایت می‌گردد.)

نکته : برای تشخیص علامت منفی یا مثبت y به علامت y معزوف از حد گذری مقارن

نزدیک a یا جدول قس علامت در صورت اینم y باشد از زاویه مثبتی

استفاده می‌کنیم. همچنین در صورتی که حد چپ و راست در علامت منفی باشند باید هر یک

را جداگانه بررسی کرد.

کار در کلاس

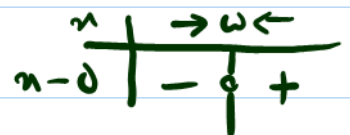
۱) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{5-5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

4.9

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{5^+-5} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

5.1

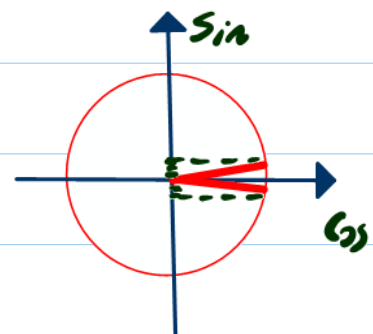


$$پ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{(0^+)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$ت) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|0^\pm|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$ث) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{-1}{|0^\pm|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$ج) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(0^\pm)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



مثال: حدهای زیر را بیابید.

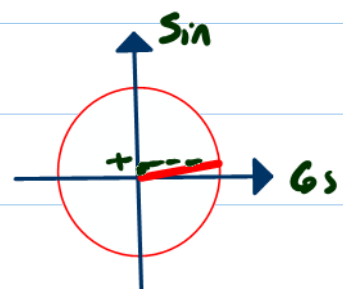
$$۱) \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{n-1}{n-n^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$x(1-x^2)$ ✓ $\begin{array}{c|c|c|c|c} - & 0 & - & 0 & + \\ \hline + & - & + & - & + \end{array}$

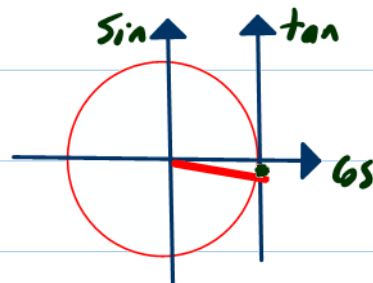
$$۲) \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{2n-1}{(n-2)^2} = \frac{2 \times 1 - 1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$\swarrow$
 $1, 9$

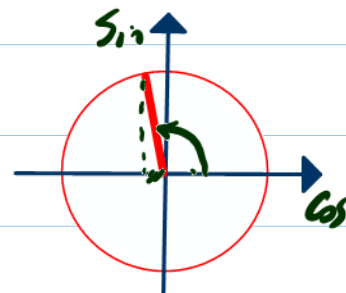
$$۳) \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1+\cos n}{\sin n} = \frac{1+1}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$



$$f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 1}{\tan x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

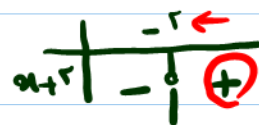


$$d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^+} \frac{\cos x - 1}{\cos x} = \frac{\cos \frac{\pi}{r} - 1}{0} = \frac{\cos \pi - 1}{0} = \frac{-1 - 1}{0} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

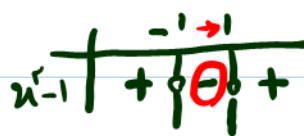


$$7) \lim_{x \rightarrow -r^+} \frac{x+1}{x+r} = \frac{-r+1}{-r+r} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

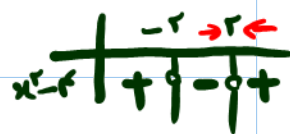
$\swarrow$
-1,9



$$v) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]-1}{x^r-1} = \frac{0-1}{(1^-)^r-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$



$$1) \lim_{x \rightarrow r} \frac{[x]-1}{x^r-r} \begin{cases} x \rightarrow r^+ : \frac{-r-1}{0^+} = -\frac{r}{0^+} = -\infty \\ x \rightarrow r^- : \frac{-1-1}{0^-} = -\frac{r}{0^-} = +\infty \end{cases}$$



$$9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} \frac{\tan x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{(0^+)^r} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$1.) \lim_{x \rightarrow r} \frac{-x}{x^r-0x+7} = \frac{-r}{0} \begin{cases} x \rightarrow r^+ : \frac{-r}{0^-} = +\infty \\ x \rightarrow r^- : \frac{-r}{0^+} = -\infty \end{cases}$$



$$11) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{0}{0}$$

کامل اولی (x-1)

روش هورنر: برای تقسیم درجه درجه درجه

$$x^3 - x^2 - x + 1 \overline{) x^3 - 3x + 2}$$

شماره مقسوم علیه

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline x & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

معادله خطی: ضرب - جمع

درم این یک واحد

باقی مانده

$$= x^2 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{1-2}{0} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، a و b را بیابید.

$$\frac{2-3}{0^+} = -\infty$$

۲ رشته مفاعف معزج است پس:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= x^2 + ax + b \\ x^2 - 4x + 4 &= x^2 + ax + b \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

درس دوم: حد در بی‌نهایت

جلسه چهارم: صفحات ۵۸ تا ۶۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

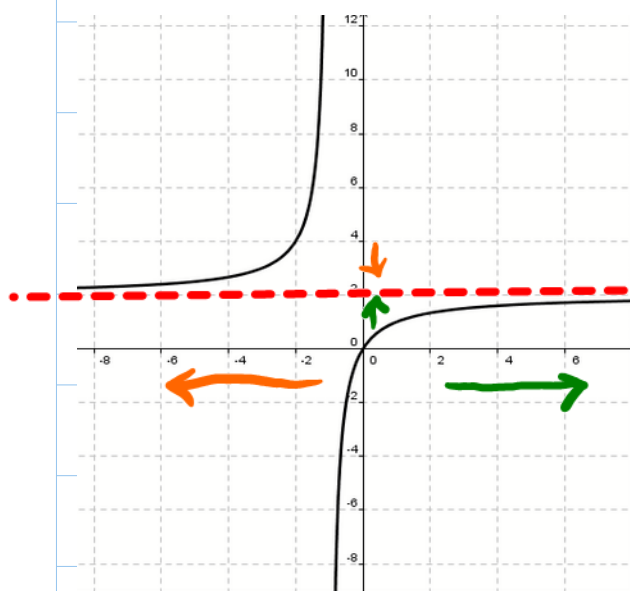
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

حد در بی نهایت :



می‌خواهیم رفتار تابع $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ را برای

برخی مقادیر مثبت، منفی و در جدول زیر بررسی کنیم.

x	$+\infty \rightarrow$	1000	100	10	1	0	-10	-100	-1000	$-\infty \leftarrow$
$f(x)$	$2 \rightarrow$	1.999	1.99	1.98	1.81	2.2	2.2	2.2	2.002	$2 \leftarrow$

تعریف: فرض کنید تابع f در بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، مقدار تابع f به هر اندازه

که بخواهیم به عدد حقیقی L نزدیک شوند به شرطی که مقدار متغیر x به اندازه کافی بزرگ

انتخاب شده باشد در این صورت می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

تذکره: اگر در تعریف بالا، بازه $(-\infty, a)$ و مقدار متغیر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شوند

می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

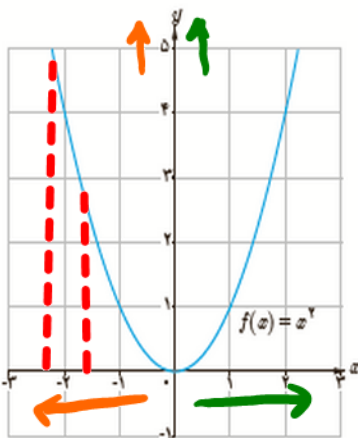
نکته: در حد در بی نهایت x به سمت مثبت یا منفی بی نهایت میل می‌کند و جواب حد عدد ثابت

نکته: در برخی توابع، وقتی به سمت بی نهایت میل می‌کنند، مقدار تابع برخی $f(x)$ هم به همان اندازه

دلتوازه بزرگ یا کوچک می‌شوند، یعنی: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. به این حالت حد نامشمار در بی نهایت می‌گویند.

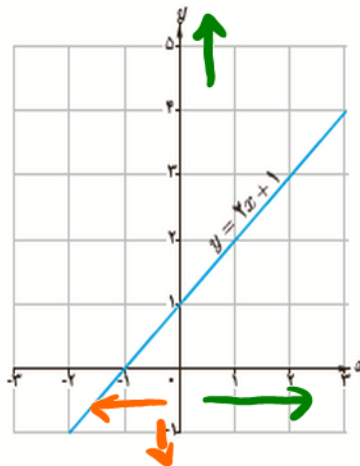
کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



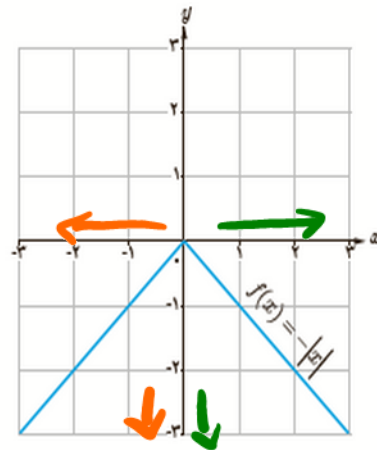
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$



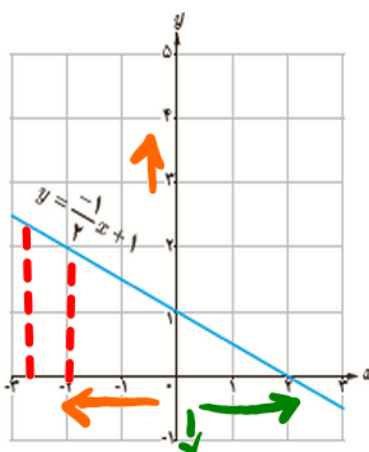
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$



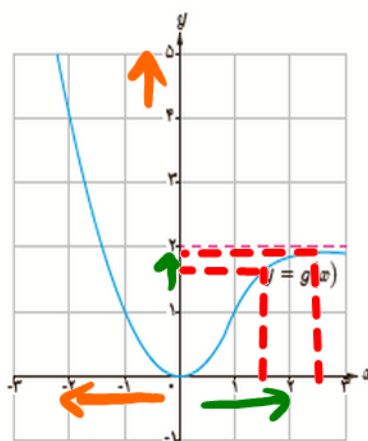
پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



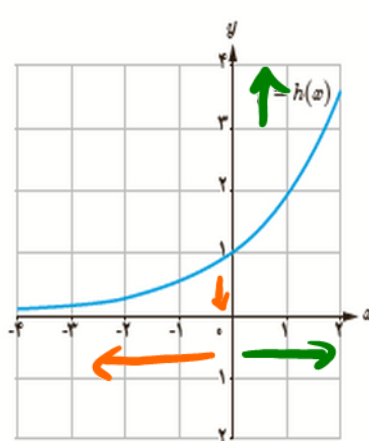
ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{2}x + 1\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2}x + 1\right) = -\infty$



ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$



ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

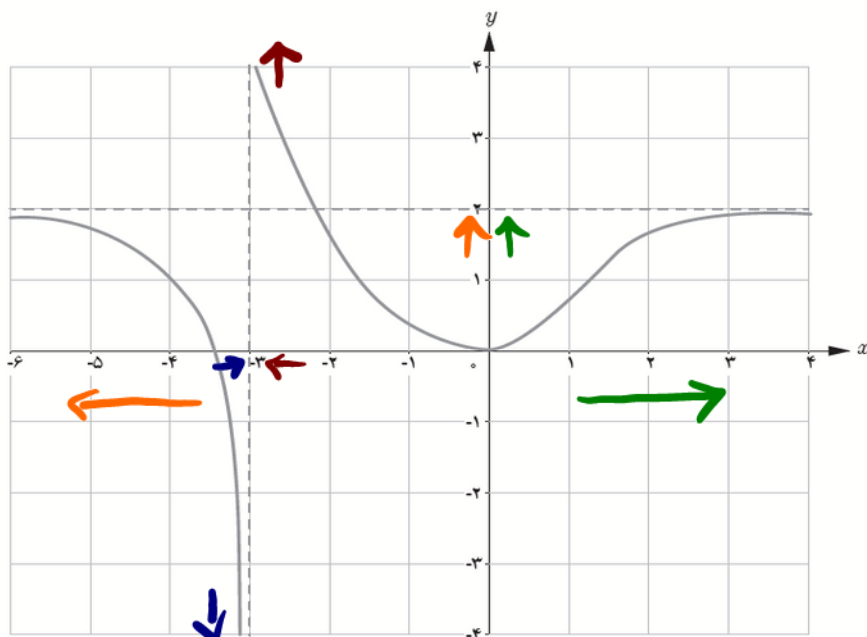
مثال: با توجه به نمودار توابع داده شده حدود خواسته شده را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = -\infty$$

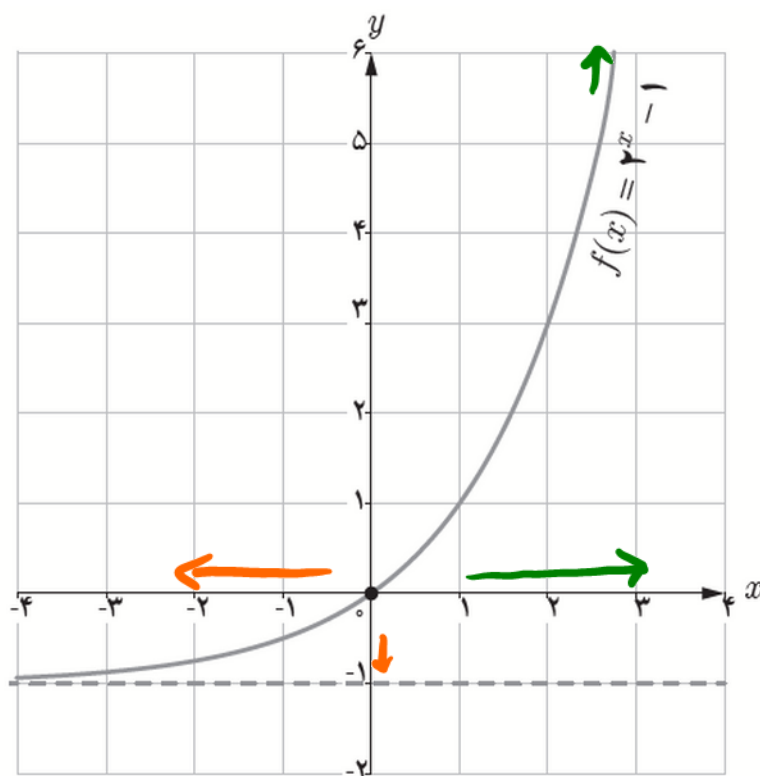
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$



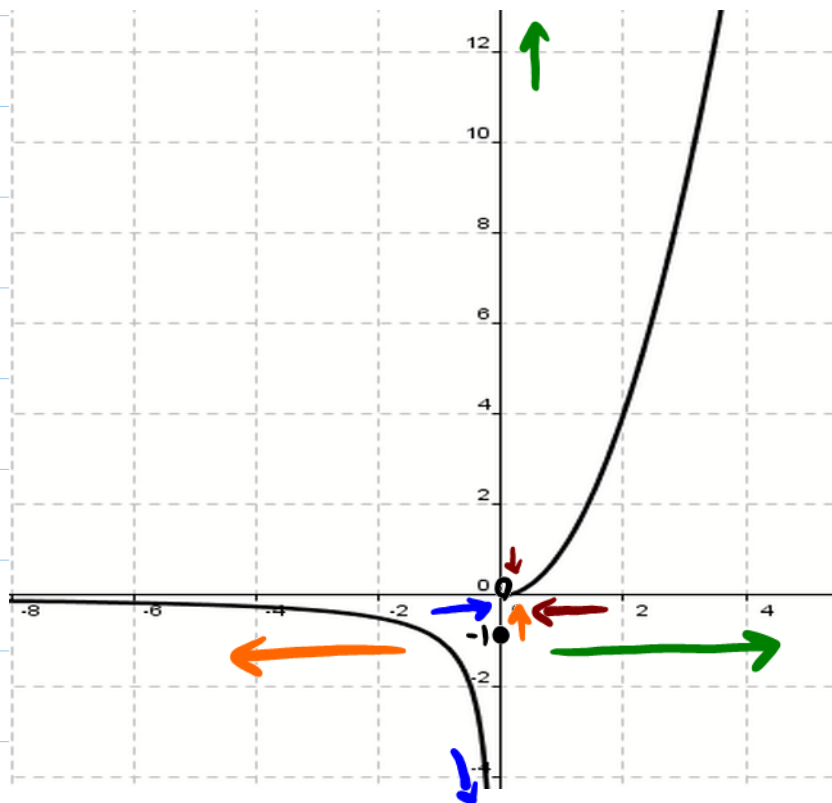
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بیابید.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases} : \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

محاسبه حد در بی نهایت از روی ضابطه :

۱۱) از قاعده های زیر، حد از جایگزینی $+\infty$ ، $-\infty$ ، به جای x ، در محاسبه حد در بی نهایت حاصل استفاده می کنیم. $(a \in \mathbb{R} - \{0\})$

$$۱) \quad a \times \infty = \infty$$

$$۲) \quad a + \infty = \infty$$

$$* ۳) \quad \frac{a}{\infty} = 0$$

$$۴) \quad \frac{\infty}{a} = \infty$$

$$۵) \quad (\infty)^a = \infty \quad (a \in \mathbb{N})$$

$$۶) \quad +\infty + \infty = +\infty$$

$$۷) \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$۸) \quad \infty - \infty : \text{حالت مبهم}$$

$$۹) \quad \infty \times \infty = \infty$$

$$۱۰) \quad \frac{\infty}{\infty} : \text{حالت مبهم}$$

$$۱۱) \quad \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$$۱۳) \quad a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\rightarrow 2^{+\infty} = +\infty$$

$$۱۴) \quad a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$$

$$\rightarrow 2^{-\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

۱۲) در محاسبه حد در بی نهایت چند جمله ای های درجه n ، از محباتی که توان متغیرنا کمتر از n است صرف نظر می کنیم.

۱۳) برای محاسبه حد در بی نهایت توابع گسری که صورت و مخرج چند جمله ای هستند، ابتدا از نکته ۲

(شماره می کنیم و از درجات کمتر صرف نظر می کنیم. سه حالت رخ می دهد:

الف) درجه صورت از مخرج بیشتر است. در این حالت حد نامتناهی می شود یعنی $+\infty$ یا $-\infty$.

ب) درجه صورت و مخرج برابر هستند. در این حالت با تقسیم ضرایب متغیر، مقدار حد محاسبه می شود.

ج) درجه مخرج از صورت بیشتر است. در این حالت مقدار حد صفر می شود.

۱۴) هدف از صورت یا مخرج عبارت رادیکالی داشتیم، از درجات کوچکتر از درجه عبارت

زیر رادیکال صرف نظر می کنیم و در صورت امکان عبارت بر توان را از زیر رادیکال خارج می کنیم.

کار در کلاس

۱) مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x-1}$

ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t}$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-3x}$

الف) $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{3n}{n} = 3$ ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-5t^2}{t^2} = -5$

پ) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{-3n} = 0$ $\frac{1}{-\infty} = 0$

$$\text{الف)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{-n+2} = -1$$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد
ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر 100 باشد.

$$\text{ب)} \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{100n}{n+4} = 100$$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

$$\text{الف)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{\sqrt{x^3} - 11x^2 - 6x}$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$$

$$\text{پ)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$$

$$\text{الف)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{\sqrt{n^3}} = \frac{2}{\sqrt{1}}$$

$$\text{ب)} \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{5n}{n^3} = 0 \quad \frac{5}{\infty} = 0$$

$$\text{پ)} \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-4n^7}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow -\infty} -2n^4 = -2 \times (+\infty) = -\infty$$

مثال: حدهای زیر را بیابید

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + x + 1}{x^3 - x + 3} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{5n^3}{n^3} = 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow -\infty} n = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-n^3}{2n^3} = -\frac{1}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^r - 1)(x+1)}{x^r - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r}{n^r} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{rx^r + 1}}{rx - r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{rn^r}}{rn} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{r}|n|}{rn} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^r + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{|n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

$$v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{rx^r - \sqrt{x - r}}{\omega x^r - \sqrt{x + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{rn^r}{\omega n^r} = \frac{r}{\omega}$$

$$\wedge) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r + \sqrt{x^r + rx + 1}}{\omega x^r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r + \sqrt{n^r}}{\omega n^r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r + n^{\frac{r}{2}}}{\omega n^r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r n^{\frac{r}{2}}}{\omega n^r} = \frac{r}{\omega}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم : مشتق

درس اول : آشنایی با مفهوم مشتق

جلسه اول: صفحات ۶۵ تا ۷۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

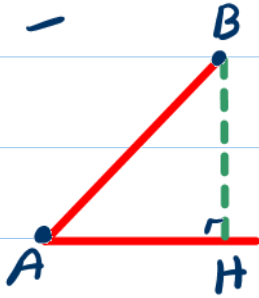
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

آپنه تابه حال در باره شیب داشته ایم :

مفهوم فیزیکی شیب: نسبت افزایش ارتفاع به مسافت افقی طی شده را شیب سطح شیبدار می گوئیم.



$$\text{شیب} = \frac{BH}{AH}$$

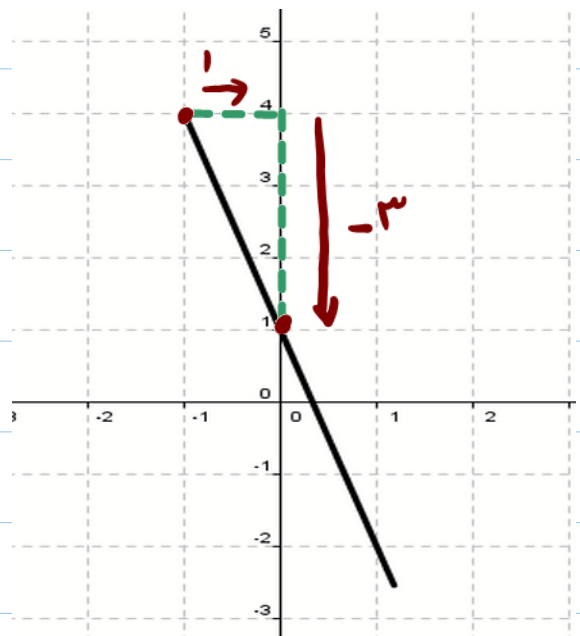
شیب خط: وقتی می گوئیم شیب خطی m است یعنی به ازای افزایش یک واحد متغیر x

متغیر y به اندازه m واحد افزایش یا کاهش می یابد.



(الف)

$$m = 2$$



(ب)

$$m = -3$$

نکته: الف) هرگاه دوی محور x ها از چپ به راست حرکت کنیم و دوی خط به سمت بالا

برویم، شیب خط مثبت خواهد بود.

ب) هرگاه دوی محور x ها از چپ به راست حرکت کنیم و دوی خط به پائین سرخیزیم

شیب خط منفی خواهد بود.

ج) اگر خط موازی محور x ها باشد شیب خط صفر است (خطهای افقی)

د) اگر خط موازی محور y ها باشد شیب خط تعریف نشده است (خطهای قائم)

یافتن شیب خط با داشتن دو نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از خط l باشند، شیب این خط برابر

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{است! :}$$

نوشتن معادله خط با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ نقطه‌ای از خط l باشد و شیب m باشد معادله این خط

از رابطه زیر جهت می‌گیرید :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه به مختصات $(1, -6)$ و $(-4, -2)$ بگذرد

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 + 6}{-4 - 1} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5} \rightarrow y + 6 = -\frac{4}{5}(x - 1)$$

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{4}{5} - 6 \rightarrow y = -\frac{4}{5}x - \frac{26}{5}$$

رابطه شیب خط و تانژانت: تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ‌ها می‌سازد برابر شیب خط است.

تذکره: (الف) به معادله‌های به شکل $y = mx + h$ معادله رستخوار خطی می‌گویند که m شیب خط و h عرض از مبدأ (عل برضر خط با محور y ‌ها) است.

(ب) به معادله‌های به شکل $ax + by + c = 0$ صورت کلی خطی می‌گویند که شیب از $-\frac{a}{b}$ به دست می‌آید.

مثال: شیب خط‌های زیر را بیابید.

۱) $x = 1 \rightarrow m$: تعریف نشده

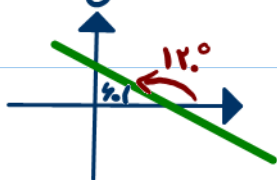
۲) $y = \sqrt{3}x - 4 \rightarrow m = \sqrt{3}$

۳) $y = -2 \rightarrow m = 0$

۴) $4x + 12y - 10 = 0 \rightarrow m = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

۵) $5x = 3y + 1 \rightarrow 3y = 5x - 1 \xrightarrow{:3} y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \rightarrow m = \frac{5}{3}$

۶)



$$m = \tan 12^\circ = \tan(180^\circ - 12^\circ) = -\tan 12^\circ = -\sqrt{3}$$

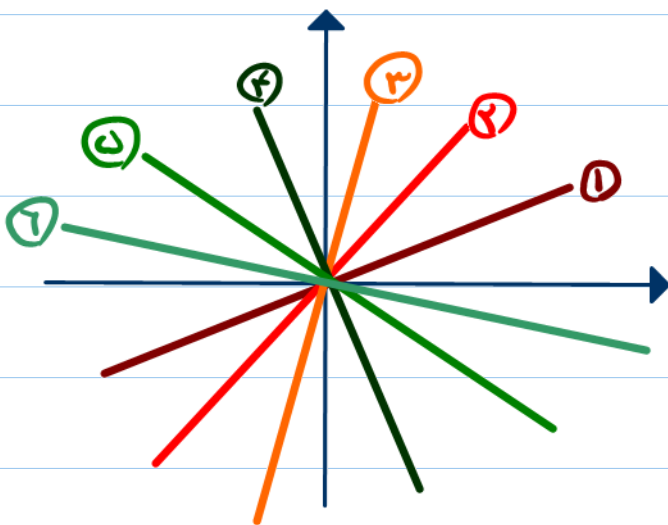
نکته: در خط‌های با شیب مثبت، هر چه خط به محور y ها نزدیک‌تر شود، شیب آن

بیشتری شود و در خط‌های با شیب منفی، هر چه خط به محور x ها نزدیک‌تر شود

شیب آن افزایش می‌یابد.

مثال: شیب خط‌های داده شده، به‌صورت $\{1, 2, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1\}$ است.

هر شیب مربوط به کدام خط است؟



$$m_1 = \frac{1}{2}$$

$$m_4 = -2$$

$$m_2 = 1$$

$$m_5 = -1$$

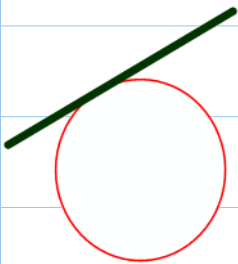
$$m_3 = 2$$

$$m_7 = -\frac{1}{2}$$

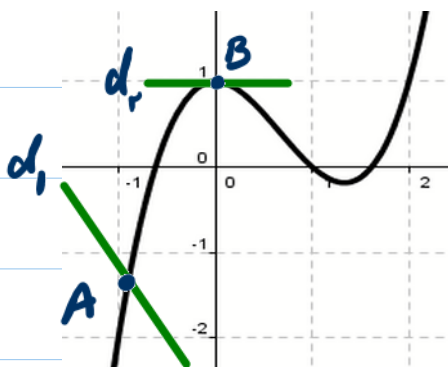
خط مماس بر منحنی :

در هندسه ، خط مماس بر دایره ، خطی تعریف می شود که دایره را فقط در یک نقطه قطع می کند .

ولی این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی ها صادق نیست .



همواره تابع زیر را در نظر بگیرید .



از لحاظ احساسی خط d_2 در B

بر تابع مماس است ولی خط d_1 در A

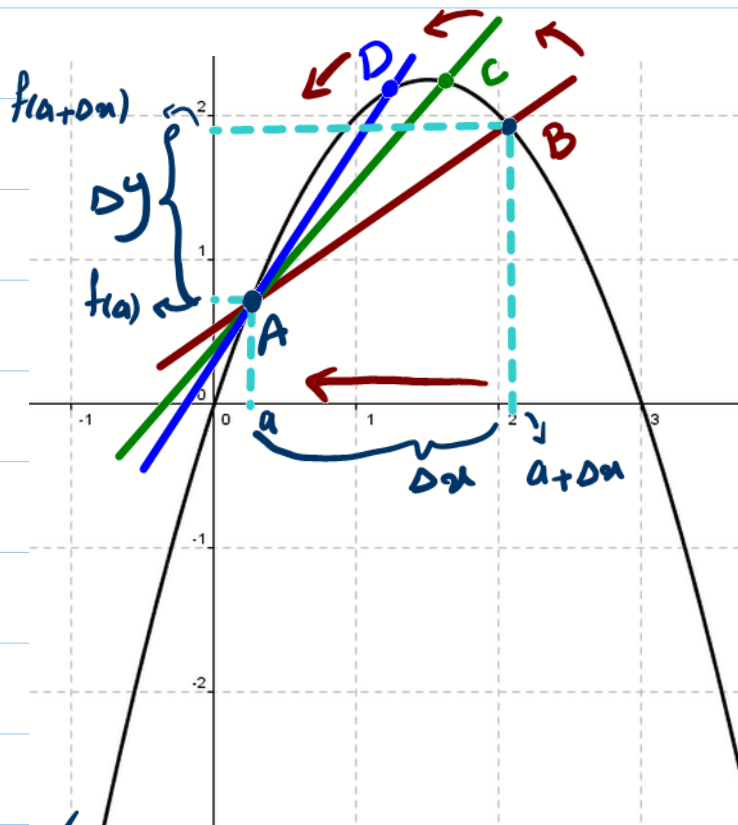
بر منحنی تابع مماس نیست .

تعریف فیردینق از خط مماس :

خط راستی است که منحنی تابع را در آن نقطه فقط لمس می کند . به صورت فیردینق

خطی ترف می شود که از دو نقطه واقع بر منحنی که بی نهایت به یکدیگر نزدیک اند می گذرد.

مثال: تابع $y = -x^2 + 3x$ را از نظر بگیرید.



هر خطی که از دو نقطه منحنی می گذرد

را خط قاطع می گوئیم مانند:

AB, AC, AD .

فرض کنید نقطه A ثابت باشد و نقطه B را به نقطه A نزدیک و نزدیک تر می کنیم.

این عمل به دل این است که $\Delta x \rightarrow 0$. ضمن انجام این عمل، خط قاطع حول

نقطه ثابت A می گردد. این خط قاطع را رای بد و ضمیمه می است.

همین ضمیمه می است که ما می خواهیم خط مماس بر منحنی را در نقطه A باشد.

حال اگر شیب خط قاطع AB را $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ در نظر بگیریم. باریک‌تر این عمل حدی شیب

خط قاطعی که به نقطه A بسیار نزدیک است به صورت: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ خواهد بود.

تعریف دقیق خط مماس:

فرض کنید تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه

$A(a, f(a))$ عبارت است از خطی که از نقطه A می‌گذرد و دارای شیب است

که از می به حد زیر بدست می‌آید:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرحی که این حد موجود باشد.

تذکره مهم: اگر حد بالا نامتناهی شود یعنی: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$ آنگاه خط مماس، خط

$x=a$ تعریف می‌شود.

نکته: اگر هیچکدام از حالت‌های بالا برقرار نباشد آنگاه خط مماس در A وجود ندارد.

سؤال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

$$a = x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7 \rightarrow A(-2, 7)$$

نقطه مماس

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-2 + \Delta x) - f(-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((-2 + \Delta x)^2 + 3) - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 3 - 7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x - 4)}{\cancel{\Delta x}} = 0 - 4 = -4$$

$$y - 7 = -4(x + 2)$$

$$y = -4x - 8 + 7 \rightarrow y = -4x - 1 :$$

معادله خط مماس در نقطه $A(-2, 7)$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم : مشتق

درس اول : آشنایی با مفهوم مشتق

جلسه دوم: صفحات ۷۲ تا ۷۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در حله قبل با تعریف خط مماس آشنا شدیم. حال به بحث اصلی یعنی مشتق می پردازیم.

تعریف مشتق:

اگر $a \in D_f$ باشد مشتق تابع f در نقطه a را با $f'(a)$ نشان می دهیم و این گونه تعریف می کنیم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

همانطور که می بینید شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(a, f(a))$

دقیقاً برابر مشتق تابع f در a است. به حد بالا شیب منحنی در a هم گفته می شود.

نکته: اکثر اوقات از h به جای Δx (استفاده می شود و تعریف مشتق به این صورت

نوشته می شود:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: اگر $f(x) = 3x^2 + 7$ باشد، مشتق تابع f را وقتی $x = a$ بیابیم.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{3(a+h)^2 + 7}^{f(a+h)} - \overbrace{(3a^2 + 7)}^{f(a)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a^2 + 2ah + h^2) + 7 - 3a^2 - 7}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 - 3a^2}{h}$$

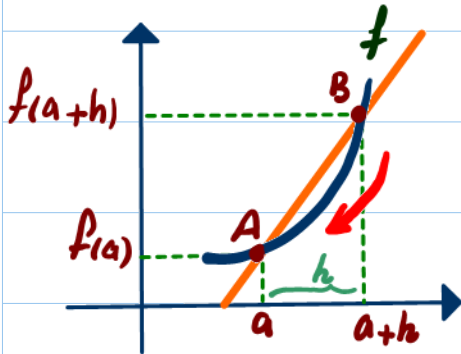
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 6ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3h + 6a)}{h}$$

$$= 3 \times 0 + 6a = 6a$$

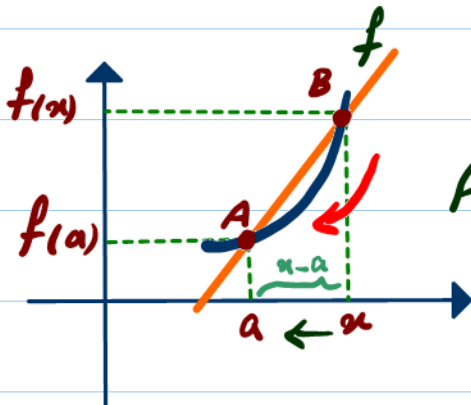
$$f'(a) = 6a$$

حال می‌خواهیم با تعیری در بناگذاری ها تعریف دیگر از مشتق ارائه دهیم. به شکل‌های

زیر دقت کنید



$$A \text{ در } f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$$A \text{ در } f' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف دیگر برای مشتق:

اگر $a \in D_f$ باشد، مشتق تابع f در $x=a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

مثال: عرّف $f(x) = -x^2 + \ln x$ ، $f'(1)$, $f'(0)$: نريد

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= -0^2 + \ln 0 \\ &= -0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + \ln x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x^2 - \ln x + 0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x-0)^2}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} -(x-0) = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= -1^2 + \ln 1 \\ &= -1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + \ln x - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 - \ln x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} -(x+1)$$

$$= -(1+1) = -2$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-5)$ را در نقطه $x=5$ حساب کنید.

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1)\dots(x-5) - 0}{x-5}$$

$$f(5) = (5-1)(5-2)\dots(5-5) = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال: اگر $f(2) = 0$ و $f'(2) = -3$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2}$ را بیابید.

از اتحاد فرابود استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - f(2))(f(x) + f(2))}{(x-2)(x+2)}$$

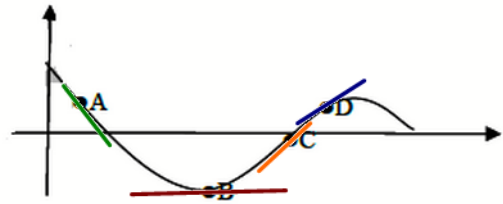
$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + f(2)}{x+2}$$

$$= f'(2) \times \frac{f(2) + f(2)}{2+2} = -3 \times \frac{2 \times 0}{4} = -3 \times \frac{0}{4}$$

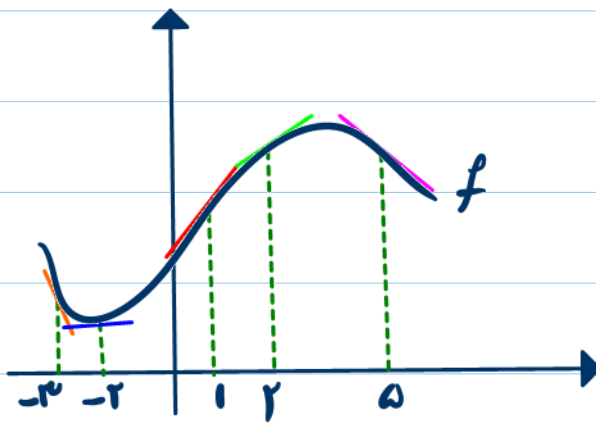
$$= -\frac{15}{2}$$

مثال: نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌ها را رتبه شده در جدول نظر کنید.

شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲
نقطه	C	B	D	A



مثال: با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.



درست زیرا خط مماس به هر دو هائز دیکتر $f'(1) > f'(-2)$ (درست)

درست زیرا خط مماس به هر دو هائز دیکتر $f'(5) > f'(-3)$ (ب)

نادرست زیرا عدد منفی $f'(-2) < f'(5)$ (ب)

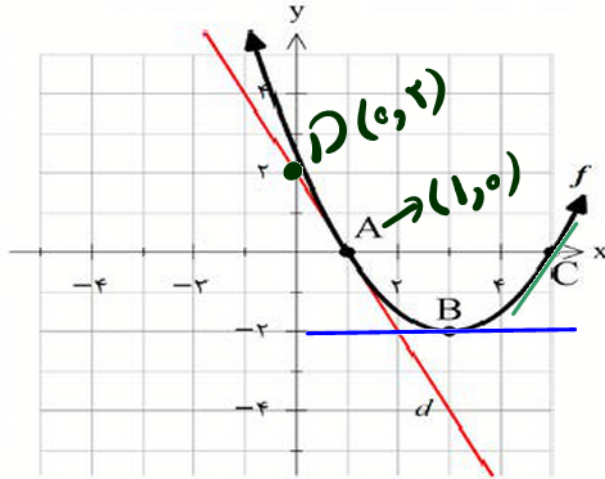
درست. $f'(-3) < f'(-2) < f'(2) < f'(1)$ (ب)

مثال:

در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = 1$ بر نمودار مماس شده است:

الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



شیب خط مماس بر f در نقطه $A = f'(1)$ (الف)

$$m_d = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = -2 \rightarrow f'(1)$$

ب) یکدیگر را مقایسه کنید
 $m_C > m_B$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم : مشتق

درس اول : آشنایی با مفهوم مشتق

جلسه سوم: حل تمرین صفحه ۷۵ و ۷۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2}$$

$3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 12 - 4 + 1 = 9$

$3x^2 - 2x - 8 \div x - 2$

درج هدر

۳	-۲	-۸
۳	$2 \times 3 - 2 = 4$	$2 \times 2 - 8 = -4$

باقی‌مانده: $3x + 4$

باقی‌مانده

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = 3 \times 2 + 4 = 10$$

$m = f'(2) = 10$ $A(2, f(2)) \Rightarrow A(2, 9)$

مماس

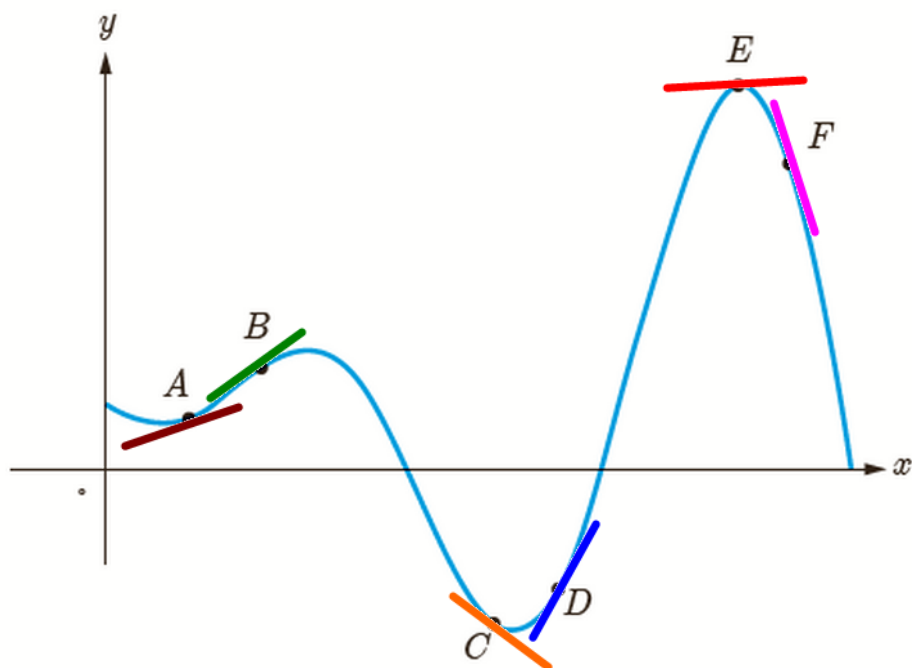
$$y - 9 = 10 \cdot (x - 2)$$

$$y = 10x - 20 + 9 \Rightarrow y = 10x - 11$$

معادله خط مماس

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف»

تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A : m_1

ب) شیب نمودار در نقطه B : m_2

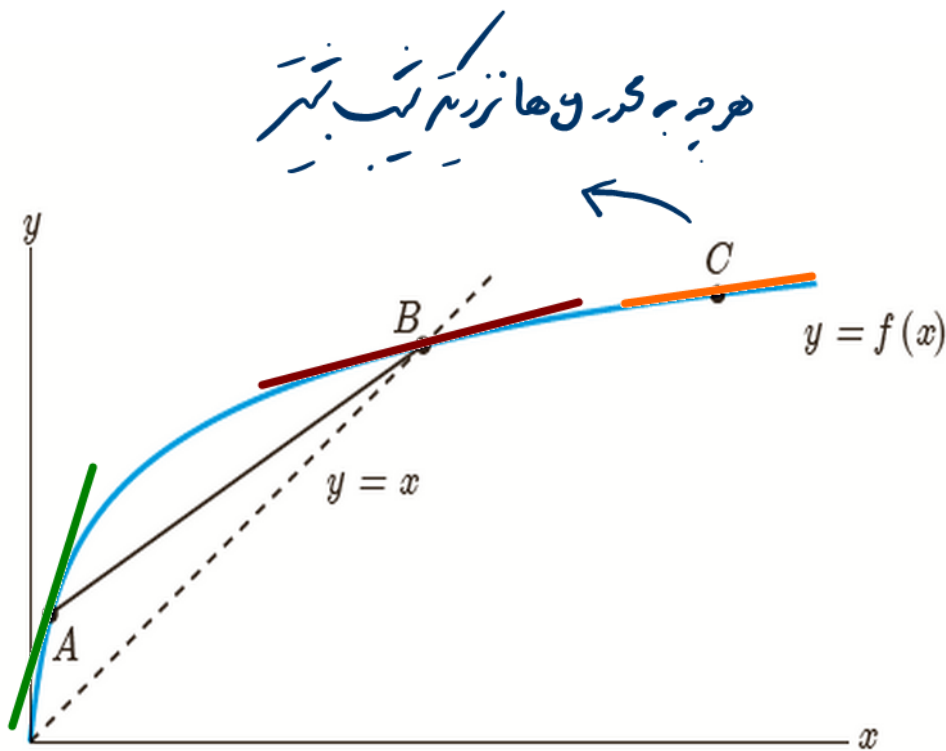
پ) شیب نمودار در نقطه C : m_3

ت) شیب خط AB : m_4

ث) شیب خط $y=2$: $m_5 = 0$

ج) شیب خط $y=x$: $m_6 = 1$

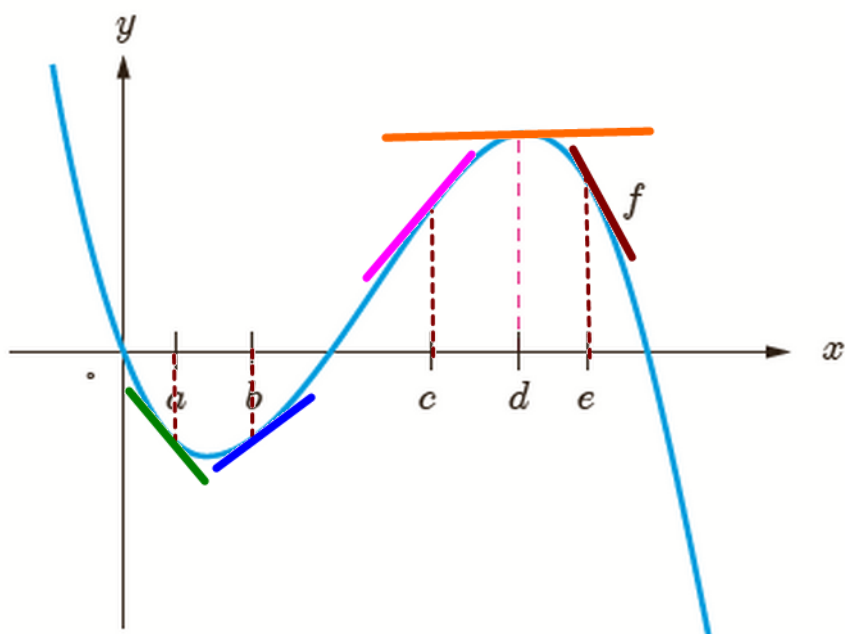
شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_1, m_2, \dots, m_6$ در نظر بگیرید.



$$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$$

با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	-۰/۵
e	-۲



۵ نقاطی مانند A, B, C, D, E, F, G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

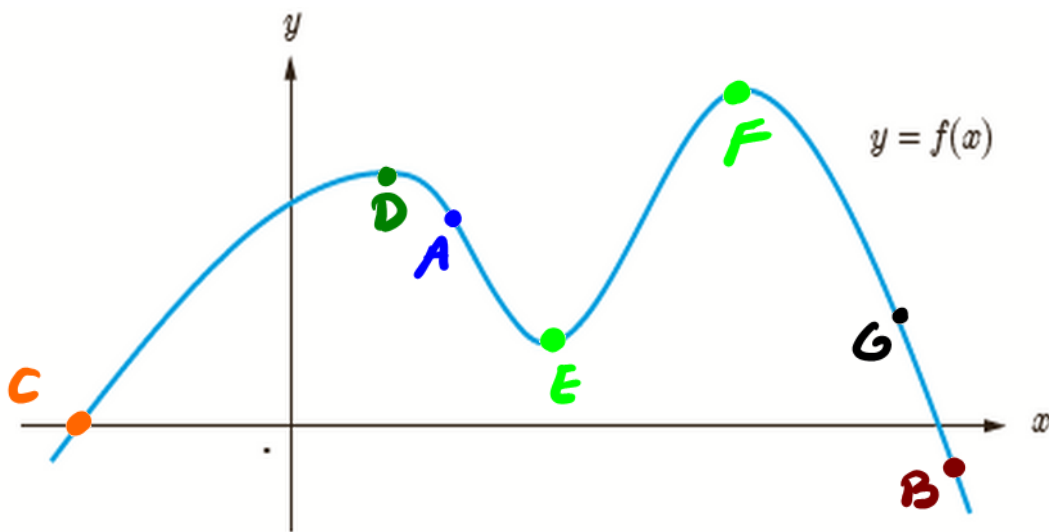
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x) = x^3 - 2$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید.

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 - (-3)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1}$$

$$= (-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

۷ نقاط A, B, C, D, E, F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک

نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. **نادرست**

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را m_A نمایش داده‌ایم) **نادرست**

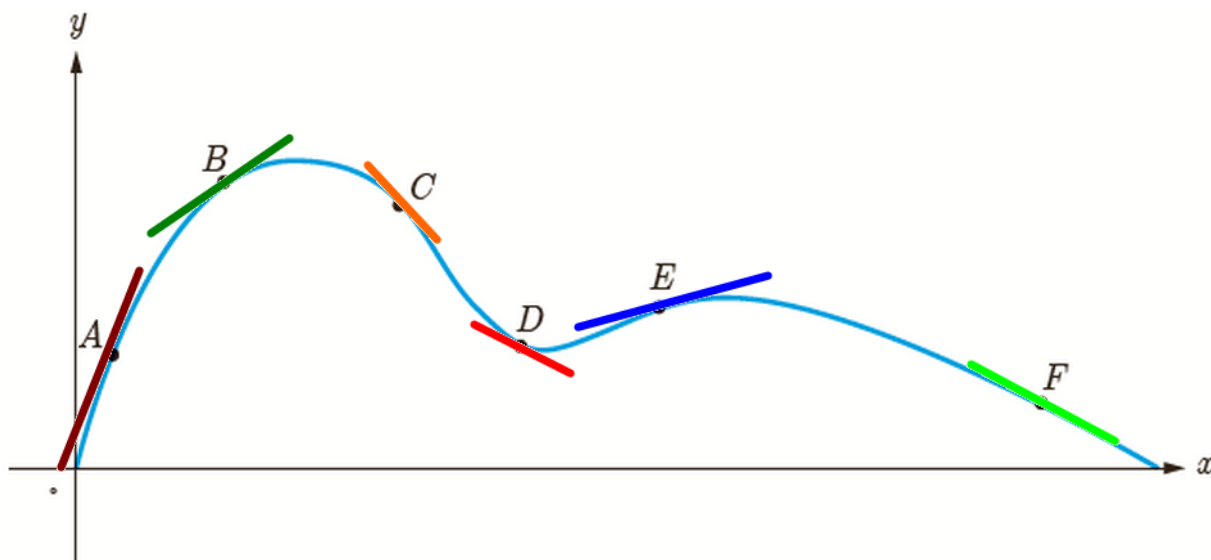
پ) $m_E < m_B < m_A$ **درست**

ت) شیب منحنی در نقاط D, F و C منفی است. **درست**

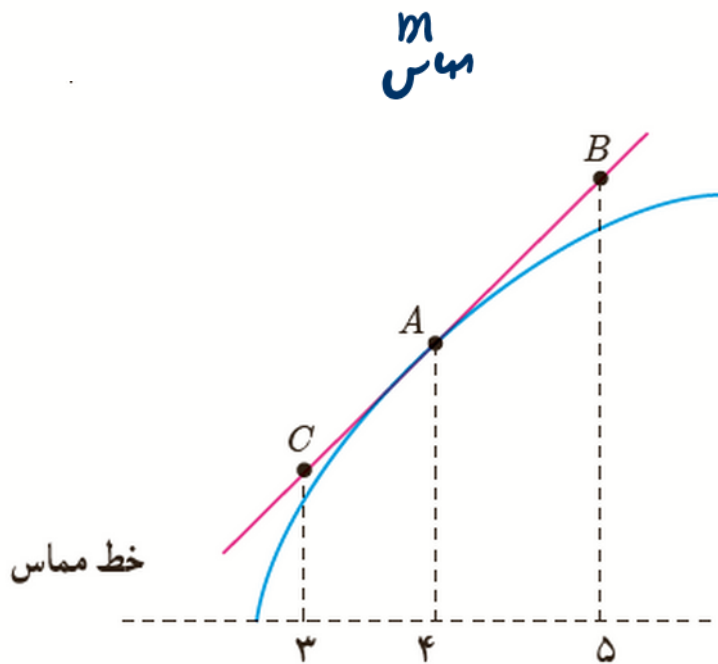
ث) $m_F < m_D < m_C$ **نادرست**

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$ **درست**

درست این مقایسه: $m_C < m_D < m_F$



۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



$$A(4, f(4)) \rightarrow A(4, 25)$$

معادله خط مماس بر f در A :

$$y - 25 = 1,5(x - 4)$$

$$y = 1,5x - 6 + 25 \rightarrow y = 1,5x + 19$$

$$x_B = 5 \xrightarrow[\text{B}]{\text{روی خط مماس}} y_B = 1,5 \times 5 + 19 = 7,5 + 19 = 26,5$$

$$x_C = 3 \xrightarrow[\text{C}]{\text{روی خط مماس}} y_C = 1,5 \times 3 + 19 = 4,5 + 19 = 23,5$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

جلسه چهارم: صفحات ۷۷ و ۷۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

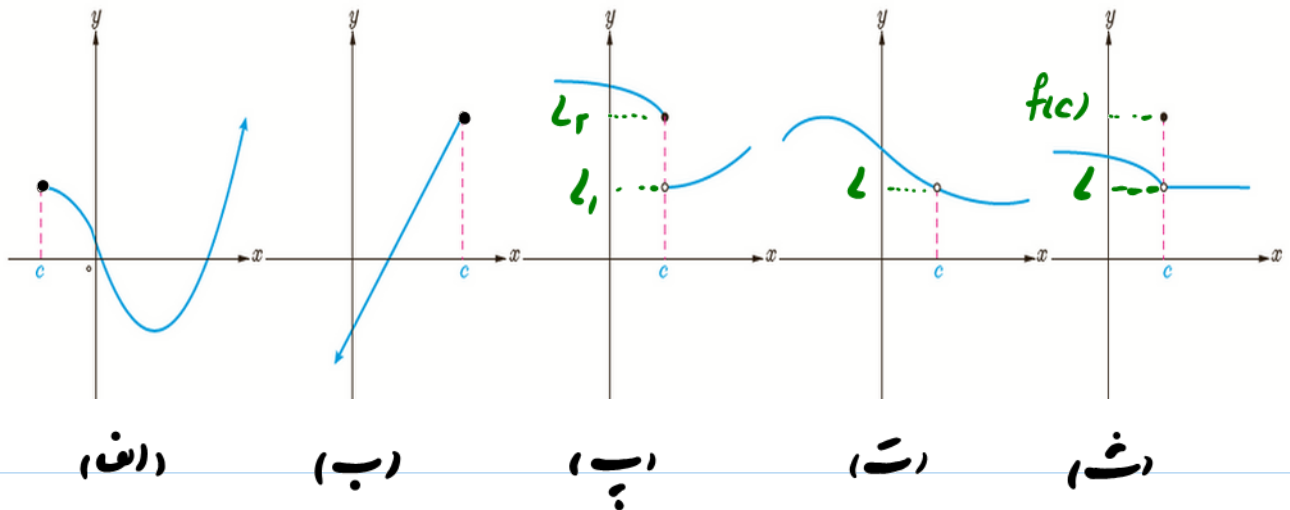
گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری :

تعریف پیوستگی : تابع f را در $x=c$ پیوسته گوئیم هرگاه : $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

یعنی مقادیر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود و با هم برابر باشند .

مثال :



(الف) $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

(ب) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

(پ) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ پس $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

(ت) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود دارد ولی $f(c)$ موجود نیست پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست .

(ث) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجودند ولی با هم برابر نیستند پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

مشتق یک طرفه:

$$x=a, \text{ مشتق راست } f, \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق، $f'_+(a)$ نیست و هم.

$$x=a, \text{ مشتق چپ } f, \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق، $f'_-(a)$ نیست و هم.

مثال: مشتق چپ و راست تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ x^2 + 5 & x < 2 \end{cases}$ را در $x=2$ بیابید.

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 5 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 2 = 4$$

دقت کنید مقدار $f(2)$ برای مشتق چپ و راست از ضابطه اول بدست می آید.

حال من خور هم دارد بحث مشتق پذیری توکم، یعنی بدانیم که تابع در چه نقطه ای مشتق دارد و در چه نقطه ای مشتق ندارد.

تعریف: تابع f در a مشتق پذیر می گوئیم اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد.

تذکر: وجود $f'(a)$ این معناست که مشتق های چپ و راست موجود، مشخص و برابر باشند.

تفسیر: اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است.

اثبات: بنا به فرض f در a مشتق پذیر است پس $f'(a)$ وجود دارد یعنی:

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n - a} \quad \text{وجود دارد}$$

شرط مورد بودن $f(a)$ برقرار است زیرا در زیر این صورت حد باقی معنات.

حد متناهی را در نظر بگیرد:

$$\lim_{n \rightarrow a} (f(n) - f(a))$$

$$= \lim_{n \rightarrow a} \left((n-a) \times \frac{f(n) - f(a)}{(n-a)} \right) = \lim_{n \rightarrow a} (n-a) \times \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n-a}$$

$$= 0 \times f'(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow a} (f(n) - f(a)) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow a} f(n) - \lim_{n \rightarrow a} \overbrace{f(a)}^{f(a)} = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow a} f(n) = f(a)$$

نتیجہ: اگر تابع f در a پیوستہ نہ سکد در a مشتق پذیر هم نیست.

تذکر: عکس قضیه با درست نیست. یعنی اگر f در a پیوستہ باشد لزوماً

در a مشتق پذیر نیست.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 2 \\ 1-x & x \geq 2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-1) = 0, \quad \underline{f(2)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0 \quad \text{پی‌تابج f در 2 پیوسته است}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x+2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$f'_+(2) \neq f'_-(2)$$

پی‌تابج f در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \quad f(1) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

چون تابع در $x=1$ پیوسته نیست لذا مشتق پذیر هم نخواهد بود.

مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x \geq 2 \\ x^2+b & x < 2 \end{cases}$ در $x=2$ مشتق پذیر باشد، a و b را بیابید.

شرط پیوستگی: $\lim_{x \rightarrow 2^+} ax+1 = 2a+1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2+b = 4+b, \quad \underline{f(2) = 2a+1}$

$$\Rightarrow 2a+1 = 4+b \rightarrow 2a+1-4=b \rightarrow b=2a-3$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax+1 - (2a+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax+1-2a-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(x-2)}{x-2} = a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+b - (2a+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + \overset{2a-3}{2a-3} - 2a-1}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 2+2=4$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow a=4 \rightarrow b=2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$a = r, b = 0$$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x^r & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f_+(0)$, $f_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

بجز در $x=0$ پیوسته است $\rightarrow \underline{f(0)=0}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^r = 0^r = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^r-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0)$ موجود نیست.

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

جلسه پنجم: صفحات ۷۹ تا ۸۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مشق نپذیری

رشته اول: همانطور که در جلسه قبلی دیدیم تابع در نقاطی که در آن ها پیوسته نیست

مشق نپذیر نیست.

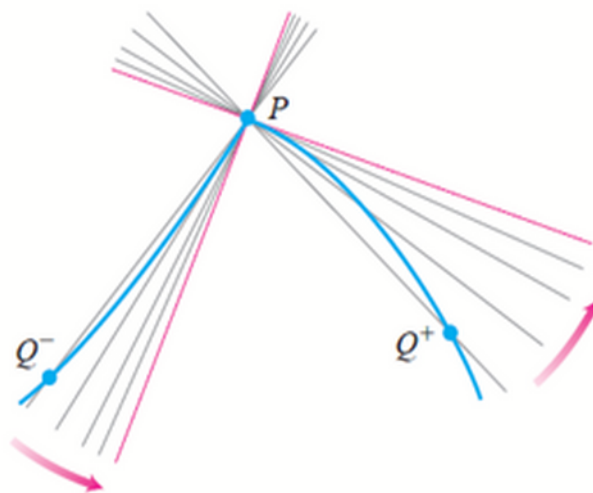
رشته دوم: اگر f در a پیوسته باشد، چنانچه مشتق های چپ و راست

موجود، مشابه و نابرابر باشند و یا حد آن ترکیبی از مشتق های چپ و راست

نامشابه باشد، f در a مشق نپذیر نیست. به این نقطه، نقطه گوشه ای

یا زاویه دار می گوئیم.

تذکر: در نقاط گوشه ای دو نیم مساحت بر تابع قابل رسم است.



مثال: به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

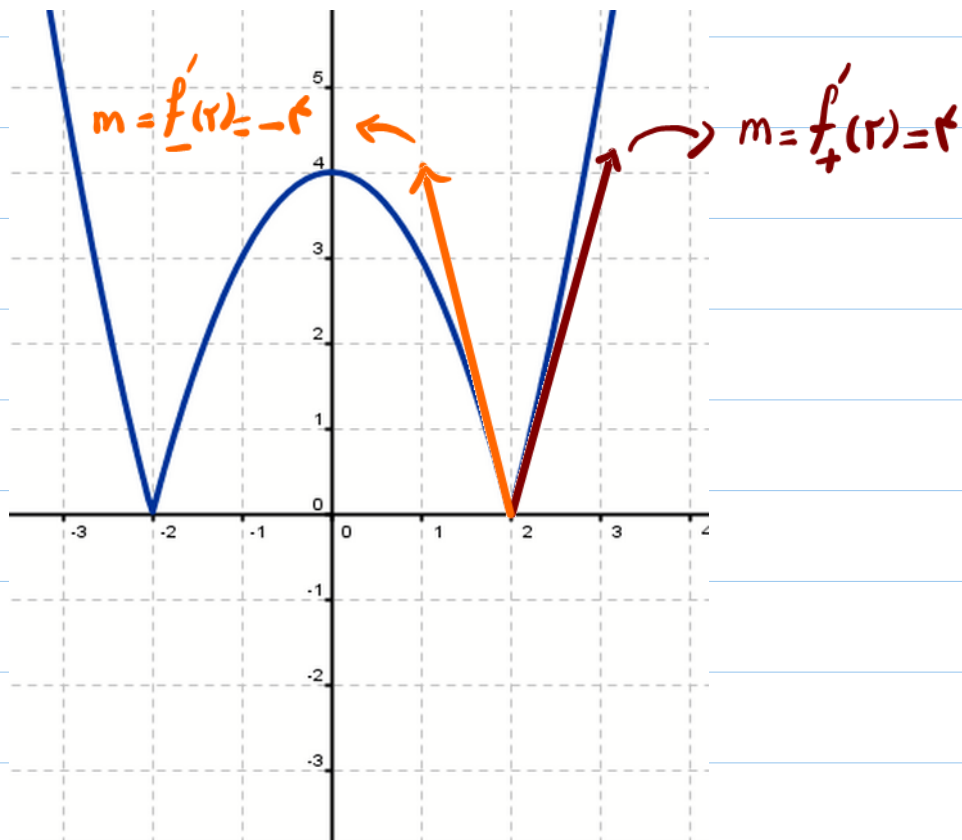
$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

	$x \rightarrow 2^+$	$x \rightarrow 2^-$
$x^2 - 4$	+	-
$x - 2$	+	-

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ ، مشتق پذیری در این نقطه برقرار نیست.



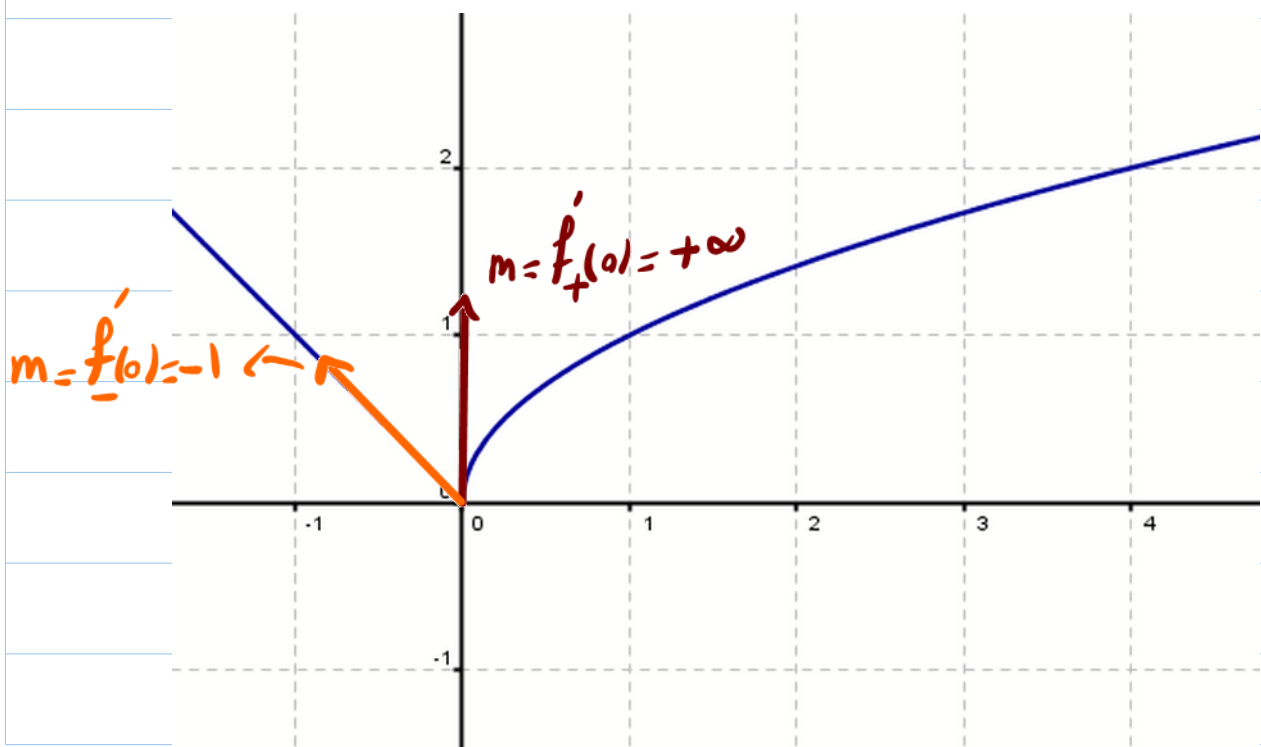
مثال: نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ در نقطه گسسته دارد.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \stackrel{x \times \sqrt{x}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

چون $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ در $x=0$ مشتق یک‌سویه در این نقطه برقرار نیست.



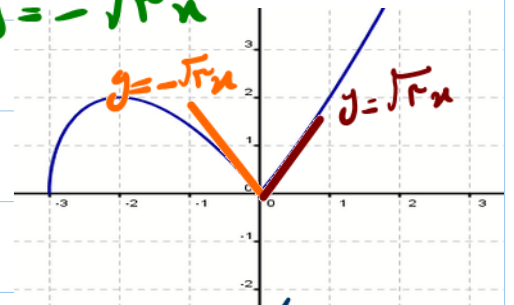
مثال: معادلهٔ نیم‌مماس‌های تابع $f(x) = |x|\sqrt{x+4}$ را در $x=0$

بدست آورید.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt{x+4} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x+4}}{x} = \sqrt{4}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|\sqrt{x+4} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{x+4}}{x} = -\sqrt{4}$$

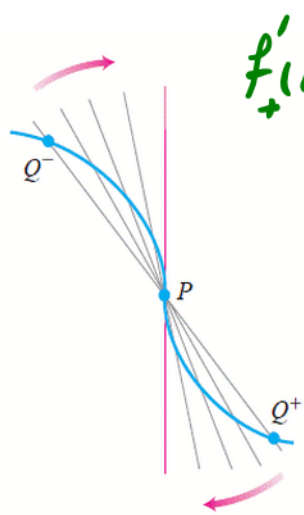
نیم‌مماس راست: $y - 0 = \sqrt{4}(x - 0) \rightarrow y = \sqrt{4}x$ $A(0,0)$
 نیم‌مماس چپ: $y - 0 = -\sqrt{4}(x - 0) \rightarrow y = -\sqrt{4}x$



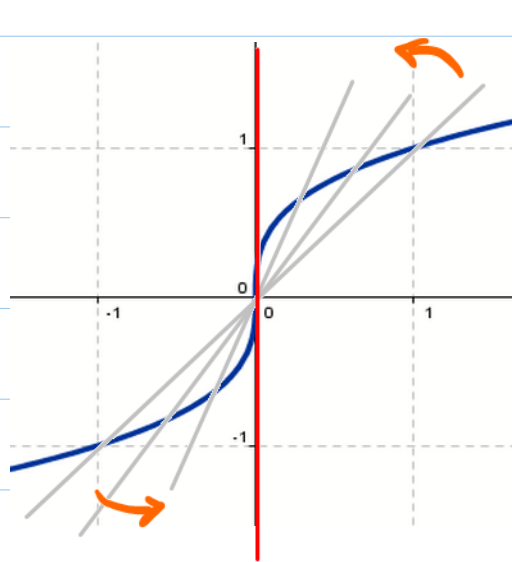
دسته سوم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های چپ و راست در a نامساوی

رسم‌یافت باشند، f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست.

نکته: در این حالت تابع در این نقطه دارای **مماس قائم** با معادله $x=a$ است.



$$f'_+(a) = f'_-(a) = -\infty$$



$$f'_+(a) = f'_-(a) = +\infty$$

مثال: مشتق پذیری تابع $g = \frac{\sqrt[n]{x-1}}{x}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

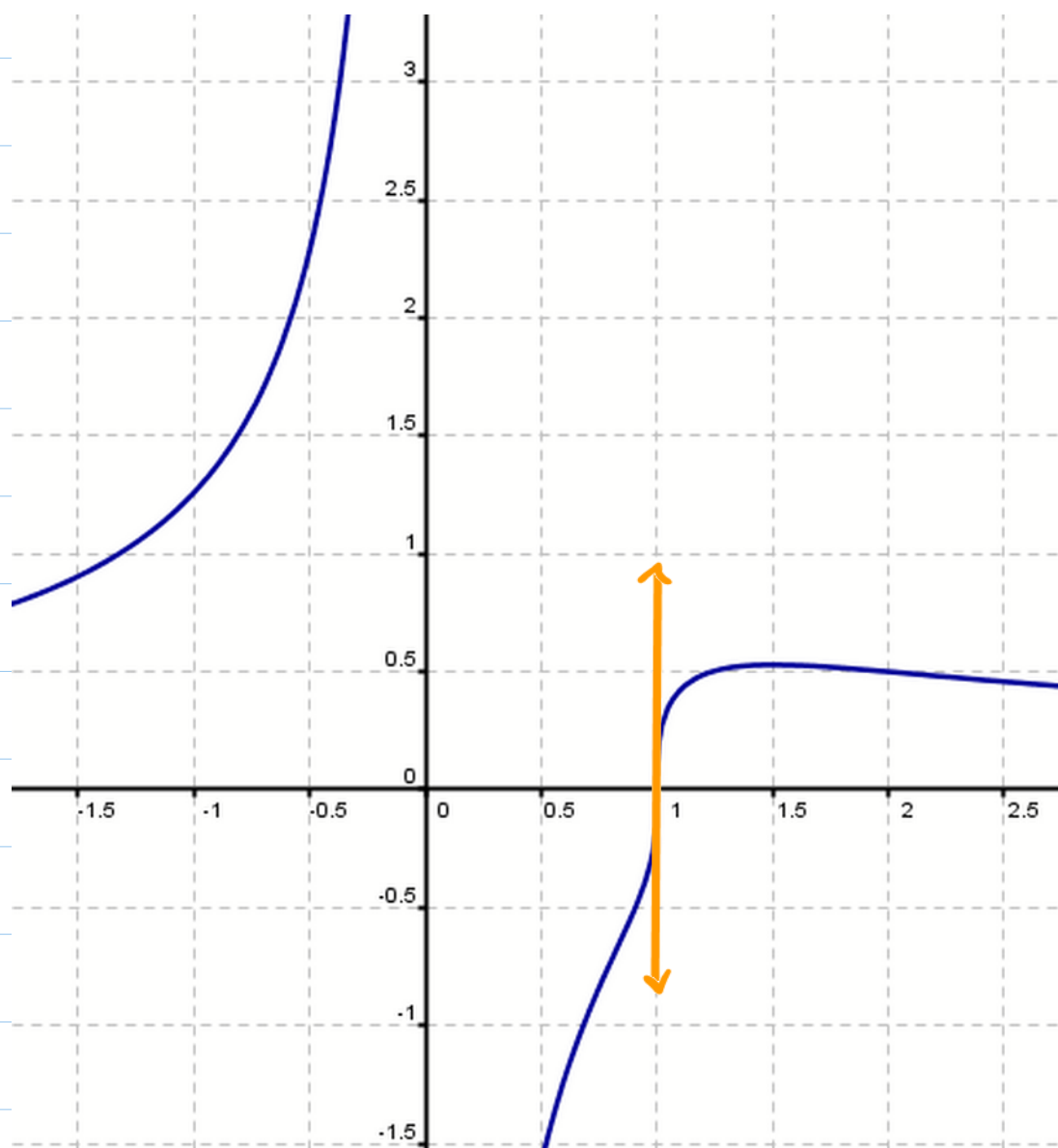
$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\sqrt[n]{x-1}}{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[n]{x-1}}{x(x-1)} \times \frac{\sqrt[n]{(x-1)^n}}{\sqrt[n]{(x-1)^n}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{\sqrt[n]{(x-1)^n}}}{x \cancel{(x-1)} \sqrt[n]{(x-1)^n}} = \frac{1}{1 \times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)}{x(x-1) \sqrt[n]{(x-1)^n}} = \frac{1}{1 \times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

به طریقی که :

چون تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست و تابع در این نقطه مماس قائم دارد.

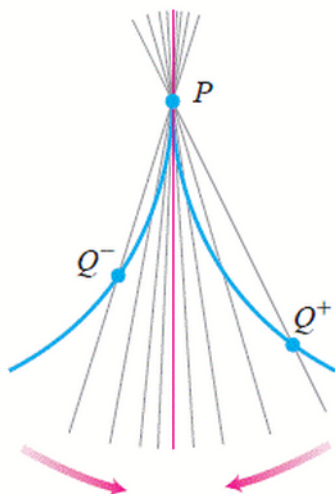


دسته چهارم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق چپ در a ناشی و

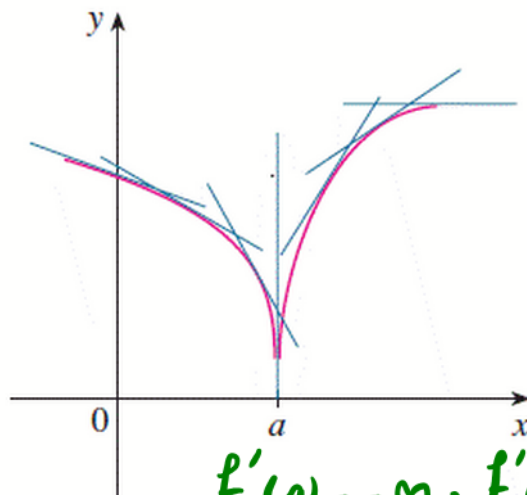
خیز هم داشته باشد، f در a مشتق پذیر نیست. به این نقطه، نقطه

بازگشت گفته می شود.

نکته: در نقطه بازگشت مسائل قلم بر بایع قابل رسم است.



$$f'_-(a) = +\infty, f'_+(a) = -\infty$$



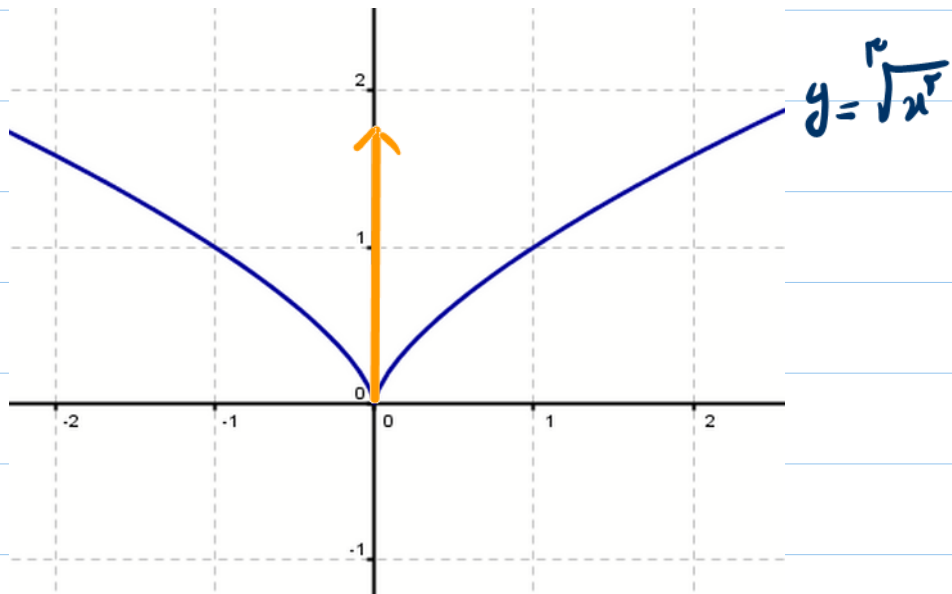
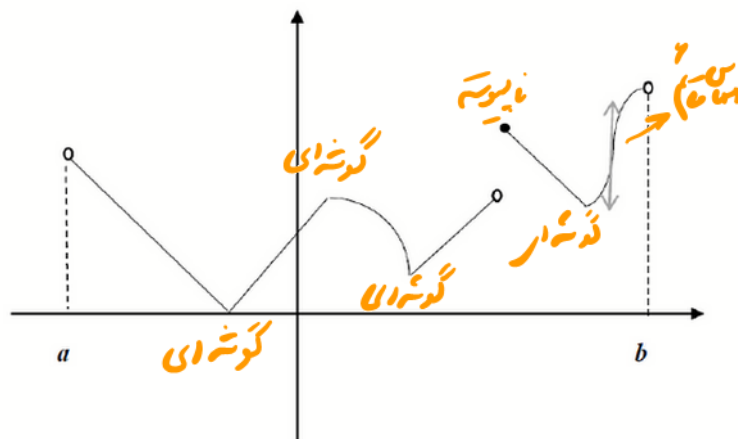
$$f'_-(a) = -\infty, f'_+(a) = +\infty$$

مثال: نشان دهید که $y = \sqrt{x}$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

به طریقی



مثال: نمودار تابع f با دامنه (a, b) به شکل مقابل است.

این تابع در چند نقطه از دامنه اش مشتق پذیر نیست؟

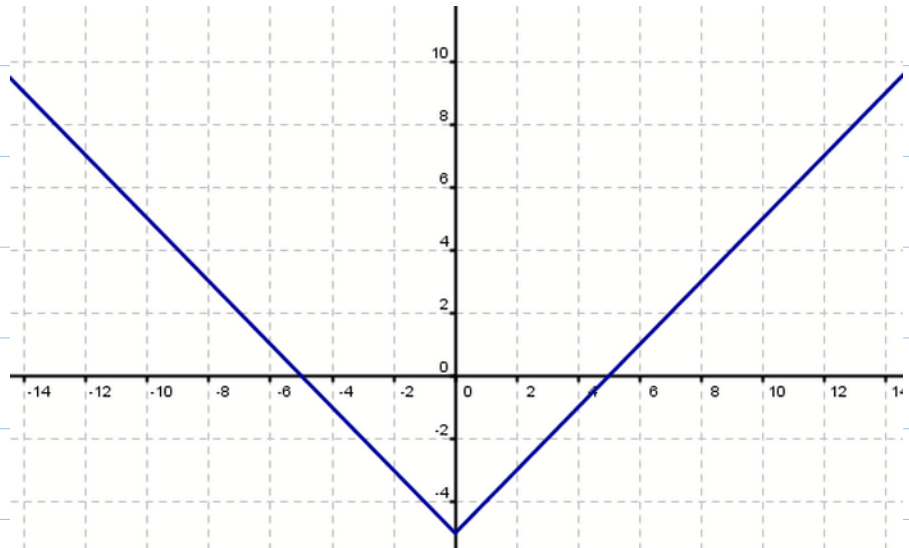
- | | |
|---------------|--------------|
| (۱) چهار نقطه | (۲) پنج نقطه |
| (۳) شش نقطه | (۴) هفت نقطه |

مثال: توابع زیر در چه نقطه مشتق پذیر نیستند.

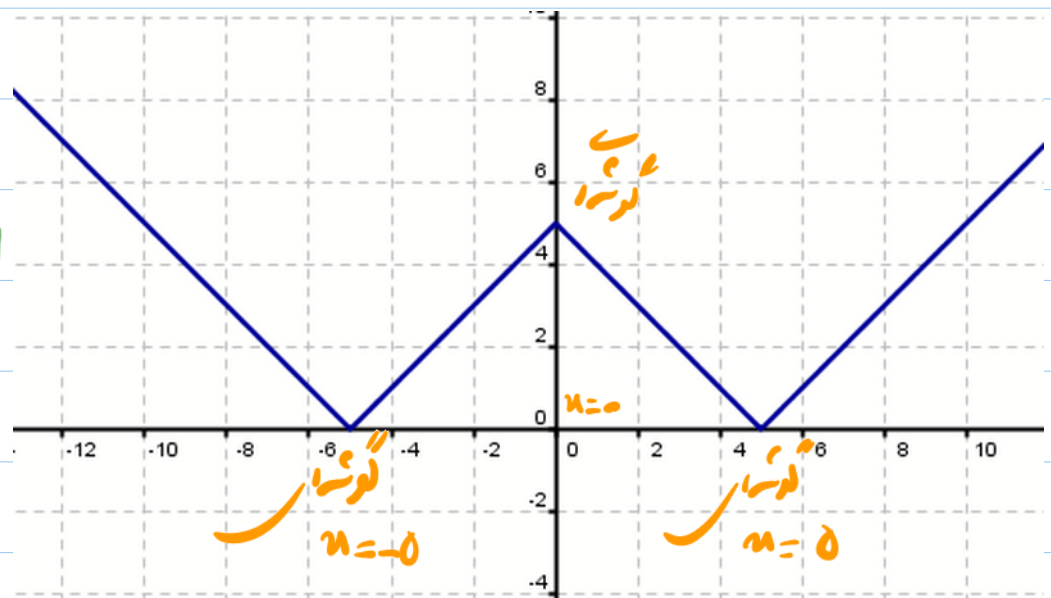
الف) $f(x) = ||x| - 5|$

ب) $g(x) = |2x - |x - 3||$

الف $f_1(x) = |x| - 5$



$f_1(x) = ||x| - 5|$



در سه نقطه

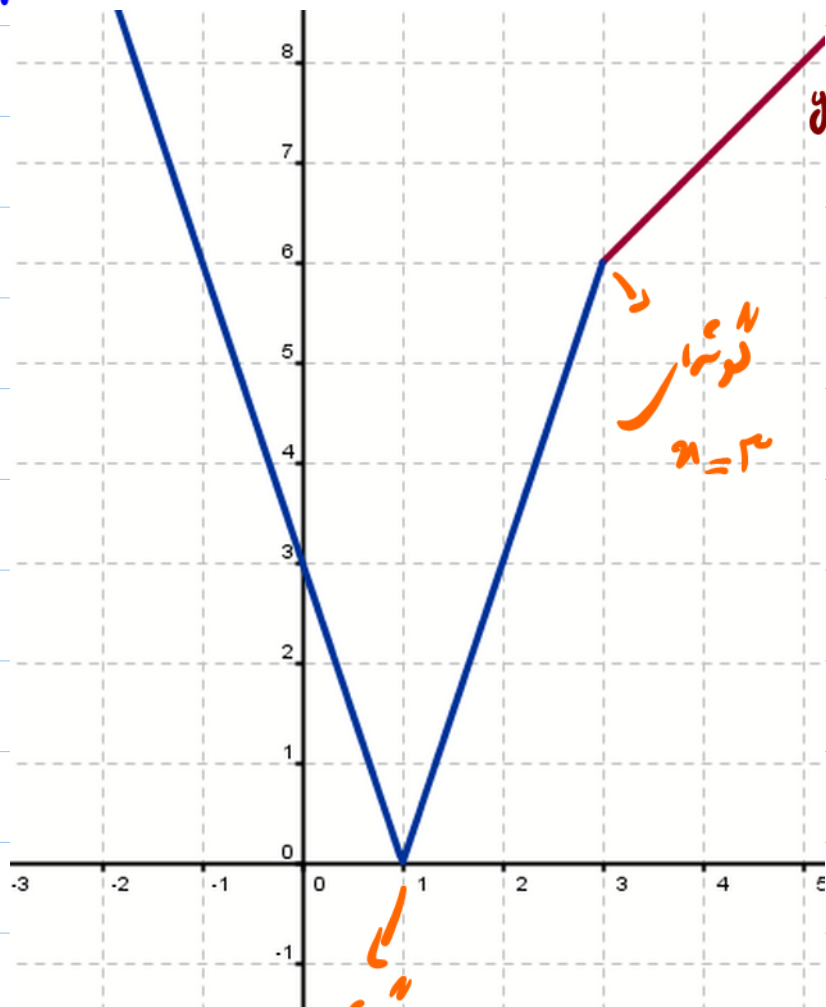
$$\text{بـ) } g(x) = |2x - |x - 3||$$

$$x > 3 \rightarrow g(x) = |2x - x + 3| = |x + 3| = x + 3$$

$$x < 3 \rightarrow g(x) = |2x - (-(x - 3))| = |2x + x - 3| = |3x - 3|$$

$$g(x) = \begin{cases} |3x - 3| & x \leq 3 \\ x + 3 & x > 3 \end{cases}$$

$$y = |3x - 3|$$



نقطه $x=1$

در دو نقطه

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

جلسه ششم: صفحات ۸۲ تا ۸۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع مشتق :

تعریف: تابع مشتق f' که با f نه تنها در دامنه مشترک است که دامنه مشتق معبره

همه نقاطی است که تابع در آنجا مشتق پذیر است و مقدار آن در نقطه a از

دامنه مشتق برابر است با :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: تابع مشتق، $f(x) = \sqrt{x}$ را بدست آورید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

همانطور که تا بحال دیدیم یافتن مشتق یک تابع با استفاده از تعریف، خیلی زمان بر

است. مانند آنچه در مثال قبل برای تابع $f(x) = \sqrt{x}$ دیدیم، می توانیم

قواعدی را بیان کنیم که با استفاده از آنها مشتق توابع را بیابیم.

قواعد مشتق گیری

۱. مشتق تابع ثابت صفر است.

مثال: $f(x) = 0 \rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = 0$

۲. مشتق تابع $f(x) = ax^n$ برابر است با حاصل ضرب، ضریب عددی در توان متغیر در

متغیر به توان یک واحد کمتر یعنی: $f'(x) = anx^{n-1}$

مثال: $y = x \rightarrow y' = 1 \times 1 \times x^{1-1} = 1 \times 1 \times x^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

$y = 4x \rightarrow y' = 4x^0 = 4$

$y = 5x^3 \rightarrow y' = 3 \times 5x^{3-1}$

$y = 2x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2} \times 2x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

حالت خاص: $(x)' = 1$

$(ax)' = a$

۳. مشتق جمع یا تفریق چند تابع برابر است با جمع یا تفریق مشتق تک تک آنها.

مثال: $f(x) = 9x^4 - 2x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x} - \sqrt{2}$

$$f'(x) = 04x^3 - 2x + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} x^{\frac{1}{x}-1} + \frac{1}{2} + 0$$

$$f'(x) = 04x^3 - 2x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}$$

۴. مشتق ضرب دو تابع برابر است با مشتق اولی در خود دومی بعلاوه مشتق دومی در خود

اولی یعنی: $(f \times g)'(x) = f'g + g'f$

مثال: $f(x) = (\sqrt{x} + 2)(x^3 + 4x^2 + x)$

$$f'(x) = (\frac{1}{2\sqrt{x}})(x^3 + 4x^2 + x) + (3x^2 + 8x + 1)(\sqrt{x} + 2)$$

۵. مشتق تقسیم دو تابع برابر است با مشتق صورت در خود مخرج منهای مشتق مخرج در خود صورت تقسیم بر خود مخرج به توان دو یعنی:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

مثال: $f(x) = \frac{\sqrt{x}-9}{x^4+2x}$

$$f'(x) = \frac{(21x^3)(x^4+2x) - (4x^3+2)(\sqrt{x}-9)}{(x^4+2x)^2}$$

صورت خاص : ۱) $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ ۲) $(\frac{a}{x})' = -\frac{a}{x^2}$

۳) $(\frac{ax+b}{cx+d})' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

مثال : $y = \frac{1}{x} \rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$

$y = \frac{2x+6}{3x-4} \rightarrow y' = \frac{\overset{-1}{2}(-4) - \overset{-1}{6}(3)}{(3x-4)^2} = \frac{-26}{(3x-4)^2}$

۶. مشتق توابع رادیکالی با فرجه دو برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر دو برابر خود

رادیکال یعنی اگر $f(x) = \sqrt{u}$ که u تابع بر حسب x باشد آنگاه $f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

مثال : $f(x) = \sqrt{3x^2 - x + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{3x^2 - x + 1}}$

$g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}$

$h(x) = \sqrt{(x^2+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}$

$h'(x) = \frac{(2x+2)(1-9x+\frac{1}{x}) - (-9-\frac{1}{x^2})(x^2+2x)}{2\sqrt{(x^2+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}}$

صورت خاص $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۷. مشتق توابع رادیکالی با فرجه سه برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر سه برابر خود

رادیکال به توان دو یعنی اگر $f(x) = \sqrt[3]{u}$ که u تابع بر حسب x باشد آنگاه

$$f'(x) = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-8}{x+1}} \rightarrow g'(x) = \frac{\frac{2-(-8)}{(x+1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2x-8}{x+1}\right)^2}}$$

حالت خاص: $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

۸. مشتق هر تابع تواندار برابر است با حاصلضرب ضریب عددی (در صورت وجود) در

توان تابع در خود تابع با توان یک واحد کمتر در مشتق تابع بدون توان یعنی:

$$(au^n)' = anu^{n-1}u'$$

مثال: $y = 4(3x^4 - 7x + 1)^5$

$$y' = 20(3x^4 - 7x + 1)^4(12x^3 - 7)$$

$$y = \left(\frac{1}{u} + \sqrt{u} + \sqrt{2}u' \right)^2$$

$$y' = 2 \left(\frac{1}{u} + \sqrt{u} + \sqrt{2}u' \right) \times \left(-\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2\sqrt{u}} + \sqrt{2} \right)$$

مثال: مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱) $f(x) = (x^2 + 1)^2 (5x - 1)$

$$f'(x) = 2(x^2 + 1)(2x)(5x - 1) + (0)(x^2 + 1)^2$$

۲) $g(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

$$g'(x) = \frac{(9)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

۳) $f(x) = \left(\frac{x^2}{3x - 1} \right)^5$

$$f'(x) = 5 \left(\frac{x^2}{3x - 1} \right)^4 \times \frac{2x(3x - 1) - (3)x^2}{(3x - 1)^2}$$

$$f) g(x) = (\sqrt{rx+r})(x^r + 1)$$

$$g'(x) = \left(\frac{r}{\sqrt{rx+r}} \right) (x^r + 1) + (rx^r)(\sqrt{rx+r})$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

جلسه هفتم : صفحات ۸۷ تا ۹۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مثال: اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(3f + 2g)'(1)$ برابر است.

نکته: $(kf)' = k f'$

$$(3f + 2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1)$$

$$= 3 \times 3 + 2 \times 5 = 9 + 10 = 19$$

مثال: اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ باشد، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

یادآوری: نوشتن معادله خط مماس بر f در نقطه A :

۱- تعیین مختصات نقطه A : $(A, f(A))$

۲- $m = f'(A)$

۳- معادله خط مماس: $y - f(A) = m(x - A)$

$$f(x) = 6x - 2 \rightarrow f'(x) = 6 \rightarrow f'(2) = 6 \rightarrow m = f'(2) = 6$$

$$x = 2 \rightarrow y = f(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 12 - 4 + 1 = 9 \rightarrow (2, 9)$$

$$y - 9 = 6(x - 2) \rightarrow y = 6x - 12 + 9 \rightarrow y = 6x - 3$$

مثال: اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 1$ ، $g(2) = -3$ و $g'(2) = 2$ ، مقادیر $(fg)'(2)$ و $(f+g)'(2)$ را به دست آورید.

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = 1 \times (-3) + 2 \times 3 = -3 + 6 = 3$$

$$(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 1 + 2 = 3$$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

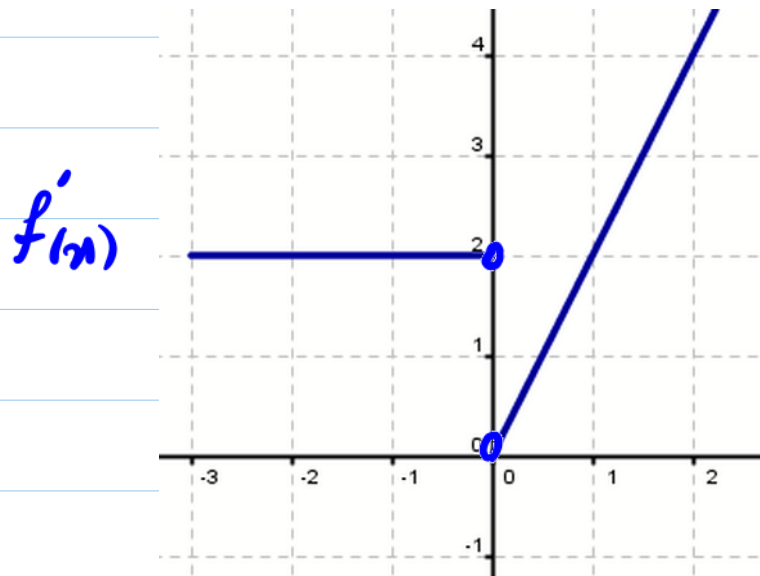
الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

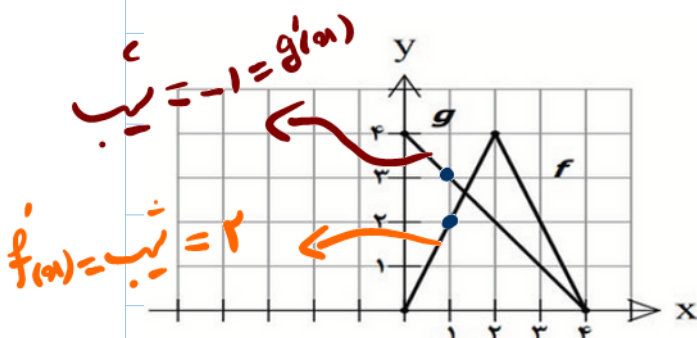
$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ \text{وجود ندارد} & x = 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

تابع در هر مشتق در ریت $f'_-(0) = 2 \neq 0$, $f'_+(0) = 2 \times 0 = 0$



مثال: نمودار تابع f, g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.

اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(1)$ را بیابید.



$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \rightarrow h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)}$$

چون تابع f به یک خط در نظر گرفته می‌شود، شیب خط‌ها همان تابع مشتق می‌شود.

رَبْخَو
 $g(x) = ax + b \rightarrow g'(x) = a :$

$$h'(1) = \frac{2 \times 2 - (-1) \times 2}{3^2} = \frac{7+2}{9} = \frac{1}{9}$$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ ، کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{7}{12}$ (۳) ✓

$\frac{5}{12}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}})(5-2x) - (-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}$$

$$f'(4) = \frac{\frac{1}{2}(5-1) + 2 \times 2}{(5-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2} + 6}{4} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{12}{2}}{4} = \frac{\frac{11}{2}}{4}$$

$$= \frac{11}{2 \times 4} = \frac{11}{8}$$

مثال: مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3$ در نقطه $x = 2$ ، کدام است؟

$-\frac{15}{4}$ (۴) ✓

$-\frac{5}{2}$ (۳)

$-\frac{5}{4}$ (۲)

$-\frac{3}{4}$ (۱)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-x)^3 - 3(x^2-x)^2(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(n) = \frac{(n^r - n)^r ((r n + r)(n^r - n) - r(r n - 1)(n^r + r n))}{(n^r - n)^{2r}}$$

$$f'(n) = \frac{(r n + r)(n^r - n) - r(r n - 1)(n^r + r n)}{(n^r - n)^r}$$

$$f'(r) = \frac{(4)(2) - r(r)(1)}{r^r} = \frac{12 - 7r}{16} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$$

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق پذیر است. مقدار c کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{3}$ (3) ✓ $-\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (1)

شرط پیوستگی:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} -\frac{1}{2}x^2 + bx + c = -2 - 2b + c$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{5-2x} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3 = f(-2)$$

$$\Rightarrow -2 - 2b + c = 3 \rightarrow -2b + c = 5 \quad (1)$$

برابری مشتق چپ و راست:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} & x < -2 \\ -x + b & x > -2 \end{cases}$$

$$f'_+(-2) = -(-2) + b = 2 + b$$

$$f'_{-}(-2) = \frac{-2}{2\sqrt{0+4}} = \frac{-1}{2}$$

$$f'_{+}(-2) = f'_{-}(-2) \Rightarrow 2+b = -\frac{1}{2} \rightarrow b = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$$

شرط پیوستگی

$$(1) \rightarrow -2b + c = 0 \rightarrow -2(-\frac{5}{2}) + c = 0$$

$$c = 0 - \frac{14}{2} \rightarrow c = -7$$

مثال: مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[m]{\left(\frac{2x-x^2}{2x+5}\right)^2}$ در نقطه $x = -2$ ، کدام است؟

۶ (۴) ✓ ۵ (۳) ۴ (۲) ۳ (۱)

$$(\sqrt[m]{u^n})' = \frac{n u^{n-1} u'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

نکته:

$$f'(x) = \frac{2 \frac{(2-x)(2+x) - 2(2x-x^2)}{(2x+5)^2}}{2 \sqrt[2]{\left(\frac{2x-x^2}{2x+5}\right)^{2-2}}}$$

$$f'(-2) = \frac{2 \frac{4(-1) - 2(-4)}{1}}{2 \sqrt[2]{\frac{-4}{-1}}} = \frac{2(-4+4)}{2\sqrt{1}} = \frac{2 \times 0}{2} = 0$$

مشتق تابع مرکب: (قاعده زنجیری)

اگر f, g دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه: $(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$

نماد دیگر: $y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$

مثال: اگر $f(x) = x^2 - x + 1$ و $g(x) = 2 - x^2$ ، مقدار $(gof)'(1)$ را بیابید.

$$(g \circ f)'(1) = f'(1) g'(f(1))$$

$$f'(x) = 2x - 1 \rightarrow f'(1) = 2 - 1 = 1, \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$g'(x) = -2x \rightarrow g'(f(1)) = g'(1) = -2 \times 1 = -2$$

$$(g \circ f)'(1) = 1 \times (-2) = -2$$

مثال: اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 4$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱) ✓

$$(fog)'(2) = 4 \rightarrow g'(2) f'(g(2)) = 4 \quad (1)$$

$$g'(x) = \frac{-2-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \rightarrow g'(2) = \frac{-3}{1} = -3$$

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} (-1) f'(0) = 4 \rightarrow f'(0) = \frac{4}{-1} = -4$$

مشتق مرتبه دوم :

اگر تابع مشتق $y = f(x)$ مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم را با $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم. دربرای محاسبه آن از مشتق اول یعنی $f'(x)$ یک بار دیگر مشتق می‌گیریم.

مثال: مشتق مرتبه دوم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 12x$

$$f'(x) = 12x^2 - 14x + 12$$

$$f''(x) = 24x - 14$$

ب) $f(x) = \sqrt{3x+1} \rightarrow f(x) = (3x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (3x+1)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} (3x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) (3x+1)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4} (3x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-9}{4(3x+1)^{\frac{5}{2}}} \rightarrow f''(x) = \frac{-9}{4\sqrt{(3x+1)^3}}$$

مشتق پذیری روی بازه :

الف) تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

ب) تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد

و در $x=a$ مشتق راست در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

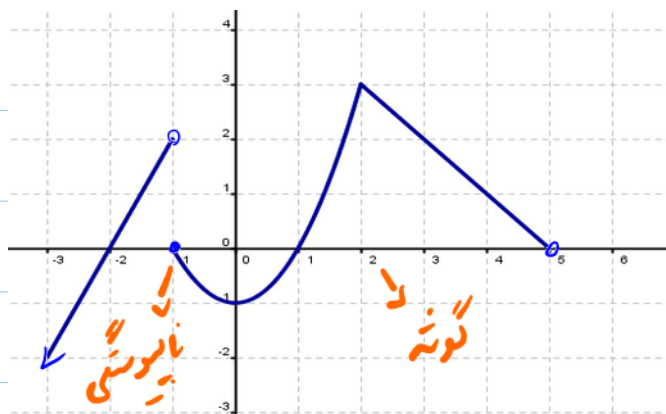
پ) مشتق پذیری روی بازه های (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b)$

$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ به طر مشابیه قریب شود.

کار در کلاس

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

اگر $f(x)$ نمودار را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه های $[-1, 1]$, $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.



مشتق چپ : $[-1, 1]$
مشتق چپ : $(2, 5)$

مشتق چپ زیر $x=1$: $[-2, 0]$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

درس سوم: آهنگ تغییر

جلسه هشتم: صفحات ۹۳ تا ۹۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

آهنگ متوسط و کلمه ای تغییر

اگر ماشینی مسافت ۱۸ کیلومتر را در ۱۵ دقیقه طی کند سرعت متوسط آن $90 = \frac{18}{\frac{1}{2}}$ کیلومتر بر ساعت است. یعنی در این بازه زمانی به طور متوسط در هر ساعت ۹۰ کیلومتر را طی می کند. اگر بازه زمانی را خیلی کوچک کنیم سرعت متوسط به سرعت کلمه ای نزدیک می شود. یا وقتی می گوئیم آهنگ متوسط رشد یک کودک در بازه [۶ ماه، ۱ ساله]، دو سانی متر بر ماه است یعنی در طی این ۶ ماه، رشد متوسط قد کودک ۲ سانتی متر در هر ماه است. به جز مثال های بالا، در مطالعه پدیده های گوناگونی، کمیت های دگر در دارند به تغییر یکی وابسته به تغییرات دیگری است مانند تغییرات دما در زمان های مختلف، تغییرات یک دایره وقتی شعاع آن تغییری کند یا تغییر جدیت در زمان های مختلف.

اگر رابطه بین دو متغیر x و y به صورت $y = f(x)$ باشد، نسبت تغییرات y (تغیروا) به تغییرات x (متغیر مستقل)، در آهنگ متوسط تغییر y نسبت به x می گوئیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_r - y_1}{x_r - x_1}$$

تعریف: آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

شیب خط مقطع

تذکره: اگر بازه را به صورت $[x_1, x_1 + \Delta x]$ بنویسیم، تعریف آهنگ متوسط تغییر بعضی‌ها را می‌توان نوشت:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

تعریف: آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x = x_1$ برابری با مشتق تابع f در x_1 .

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

شیب خط مماس

مثال: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند به دست آورید.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{7+2} - \sqrt{2+2}}{5} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

مثال: جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب شده است، که معادله ارتفاع آن از سطح زمین به صورت $f(t) = -2t^2 + 10t$ می‌باشد. سرعت لحظه‌ای این جسم را در $t = 2$ به دست آورید.

$$f'(t) = -4t + 10 \rightarrow f'(2) = -4(2) + 10 = -8 + 10 = 2$$

سؤال: یک توده ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است.

الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه ی زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه ی $t = 3$ چقدر است؟

$$\text{الف) } \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = \frac{\sqrt{4} + 2(4)^2 - (\sqrt{3} + 2(3)^2)}{1} = 2 + 128 - \sqrt{3} - 54 = 74 - \sqrt{3}$$

$$\text{ب) } x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t \rightarrow x'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 4(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 12$$

سؤال: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده

شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(5^2 - 5 + 10) - (0^2 - 0 + 10)}{5} = \frac{15 - 10}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$f'(t) = \text{سرعت متوسط} = 1 \rightarrow 2t - 1 = 1 \rightarrow 2t = 2 \rightarrow t = 1$$

سؤال: آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه $[5, 6]$ برابر آهنگ تغییر لحظه ای این تابع، با کدام مقدار

x است؟

$$2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \quad (4) \quad 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad (3) \quad 3 + 2\sqrt{2} \quad (2) \quad 4 + \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21 - 36} + 24 - (\sqrt{21 - 25} + 20)}{1} = 3 - 4 = -1$$

$$f'(x) = \frac{-x + 4}{\sqrt{21 - x^2}} = -1 \rightarrow \sqrt{21 - x^2} + 4x = x - 2$$

برابر $21 - n^2 + 4n = n^2 - 4n + 4$

$\rightarrow 2n^2 - 8n - 17 = 0 \rightarrow \Delta = 64 - 4(2)(-17) = 64 + 136 = 200$

$n = \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = \frac{8 \pm 10\sqrt{2}}{4} < \begin{cases} \frac{8+10\sqrt{2}}{4} = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \checkmark \\ \frac{8-10\sqrt{2}}{4} = 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2} \times \end{cases}$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن

در $x = \frac{3}{2}$ ، چقدر کمتر است؟

۰/۰۶ (۴)

۰/۰۵ (۳)

۰/۰۴ (۲) $\checkmark$

۰/۰۳ (۱)

رشد متوسط $= \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\sqrt{2(4)+1} + \frac{1}{4+1} - (\sqrt{2(0)+1} + \frac{1}{0+1})}{4}$

$= \frac{2 + \frac{1}{5} - 1 - 1}{4} = \frac{1 + \frac{1}{5}}{4} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

رشد لحظه‌ای: $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} + \frac{-1}{(x+1)^2}$

$f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{3}{2} + 1}} - \frac{1}{(\frac{3}{2} + 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{25}{4}}$

$= \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{25 - 8}{50} = \frac{17}{50} \times \frac{2}{2} = \frac{34}{100}$

$\frac{34}{100} - \frac{3}{10} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس اول: اکستریم‌های تابع

قسمت اول

جلسه اول: صفحات ۱۰۲ تا ۱۰۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

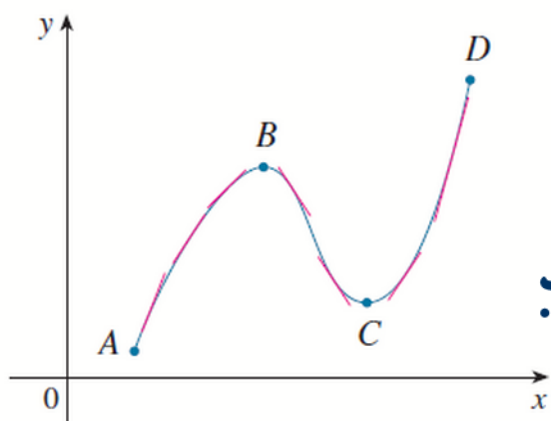
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در فصل اول با توابع مثلثاتی آشنا شدید و کنیزای تابع را با توجه به نمودارش بررسی می کردیم.

به نمودار مقابل و خط های مماس رسم شده دقت کنید:



در بازه های که تابع صعودی است تانژانت های مماس مثبت
و در بازه های که تابع نزولی است تانژانت های مماس منفی است.

۱) آزمون کنیزای تابع :

الف) در یک بازه از دامنه f اگر f صعودی و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر f صعودی و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر f برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

به عبارات دیگر برای بررسی کنیزای تابع مشتق داریم f' ، از آن مشتق می گیریم و مشتق

را بر رسم جدول، تعیین علامت می کنیم. به این جدول چنین علامت، جدول تغییرات

تابع می گوئیم. اگر علامت مشتق در بازه ای مثبت باشد، تابع در آن بازه اکیداً صعودی

و اگر علامت مشتق در بازه ای منفی باشد تابع در آن بازه اکیداً نزولی است و عکس.

مثال: گویای تابع $y = x^3 - 3x^2 + 2$ را بررسی کنید.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

در بازه‌ها $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$ تابع ابتدا صعودی و در بازه $(2, +\infty)$ تابع نزاعی است.

مثال: تابع $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ در بازه $[a, b]$ صعودی (کریات) حداثر مقدار $b-a$ را

بدست آورید.

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$-x^2+1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

✓
 $\Rightarrow a = -1, b = 1 \Rightarrow b-a = 1+1 = 2$

نکته: در توابع پویسته اگر مشتق تابع در نقطه‌ای جدا از هم در یک بازه منفی شود باز هم تابع

روی آن بازه می‌تواند اکیداً صعودی یا نزولی باشد.

مسئله: کمترین تابع $f(x) = x^2$ را بررسی کنید.

$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
f			

تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

مسئله: به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x) = -x^3 + mx^2 - 12x + 1$ روی $\mathbb{R}$ الگانه‌نزد است؟

$$f' < 0 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2mx - 12 < 0$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(-3)(-12) \leq 0$$

$$4m^2 - 144 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 36 \Rightarrow -6 \leq m \leq 6$$

$$m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$$

نکته: آزمون کنونی برای تابع پیوسته برقرار است. پس در توابع گسری، در بازه‌های تواریخ

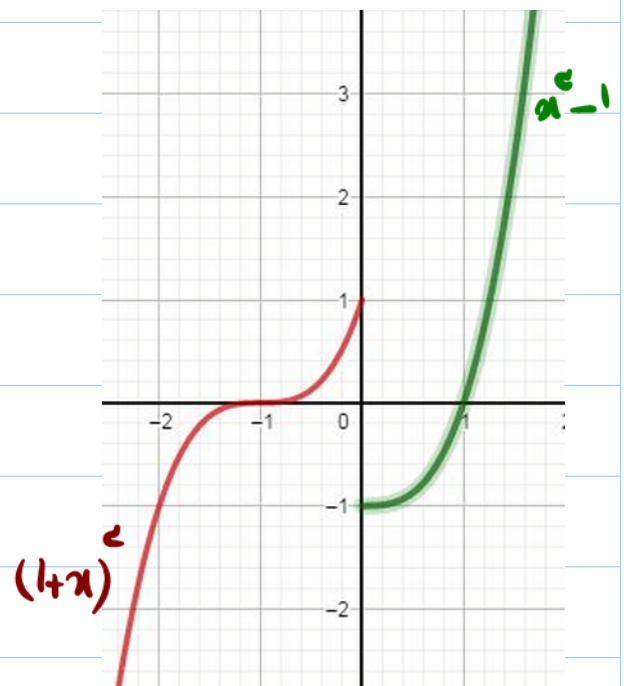
از این آزمون استفاده کنی که شامل ریشه می‌شود. در توابع چندضابطه‌ای هم در نقاط

مرزی همین نکته را داریم.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ (1+x)^2 & x < 0 \end{cases}$ در کدام بازه صعودی است؟

(۱) (۱، ۲) (۲) (-۱، ۲) (۳) (-۲، ۱) (۴) (۰، ۲)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ \text{موجود نیست} & x = 0 \\ 2(1+x) & x < 0 \end{cases}$$



تابع در $(-\infty, 0)$ اکثراً صعودی است ولی برای رسیدن به عافیه نیز باید تردد کند. تابع در

$(0, +\infty)$ هم اکثراً صعودی است. پس تابع فقط در بازه $(۰, ۲)$ که شامل منفرجه صعودی است

مثال: تابع $f(x) = \frac{5}{x^2 - 2x}$ روی کدام بازه منفرد است؟

۱) $(1, 2)$ ۲) $(-1, 1)$ ۳) $(0, 2)$ ۴) $(2, 2)$

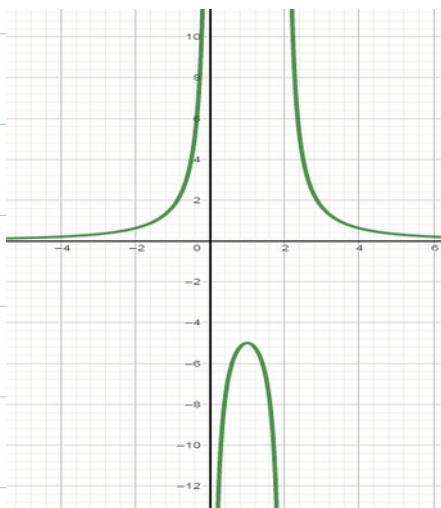
$$f'(x) = \frac{0 - 5(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-10x + 10}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$-10x + 10 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		+		+	0	-	-		
f									

باید بازه ای را انتخاب کنیم که مشتق در آن یک علامت داشته باشد و مثال ریم

منفی نباشد که فقط گزینه ی بازه $(2, 2)$ مورد درگی را دارد.



ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس اول: اکستریم‌های تابع

قسمت دوم

جلسه دوم: صفحات ۱۰۵ تا ۱۰۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۲) دسته‌های نسبی تابع :

الف) تابع f در نقطه‌ای به طول c **ماکزیم نسبی** دارد، هرگاه یک همای از آن مانند $f \in I$ باشد

که برای هر $n \in I$ داشته باشیم: $f(c) \geq f(n)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیم نسبی f می‌نامیم.

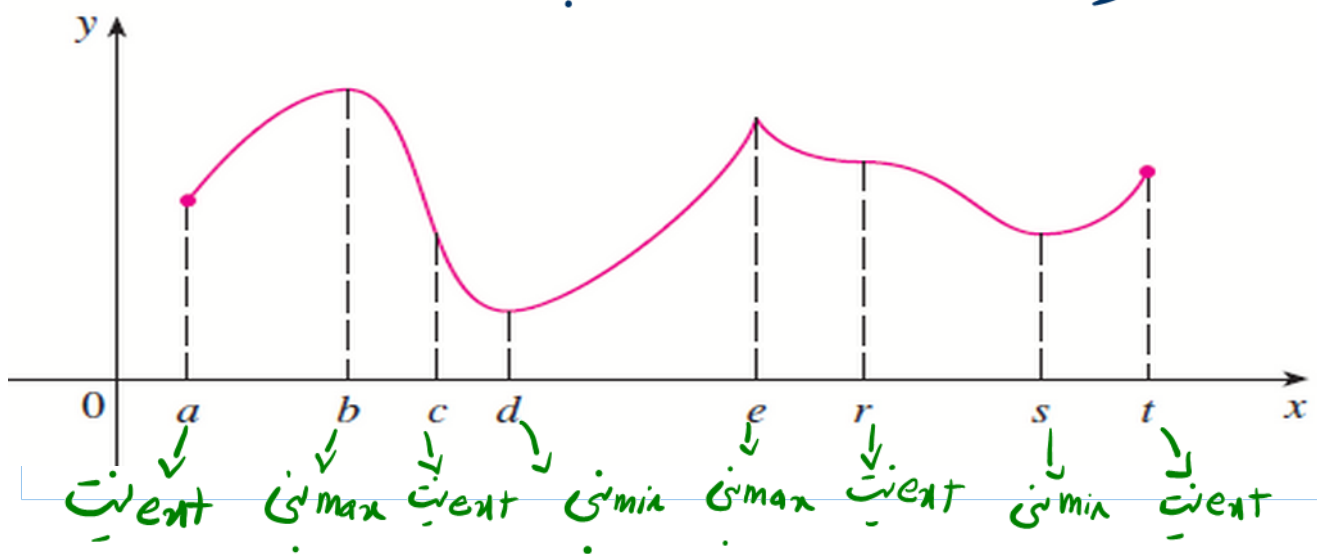
ب) تابع f در نقطه‌ای به طول c **مینیم نسبی** دارد، هرگاه یک همای از آن مانند $f \in I$ باشد

که برای هر $n \in I$ داشته باشیم: $f(c) \leq f(n)$. $f(c)$ را مقدار مینیم نسبی f می‌نامیم.

به عبارت دیگر اگر عرض نقطه‌ای نسبت به نقاط اطرافش کوچکتر یا مساوی باشد به آن

$\min$ نسبی و اگر بزرگتر یا مساوی باشد به آن $\max$ نسبی می‌گوئیم.

مثال: در نمودار زیر کدام یک از نقاط مشخص شده اکتریم نسبی هستند؟



چند نکته درباره اکسترم های نسبی :

فرض کنید $x=c$ طول نقطه اکسترم نسبی تابع f باشد در این صورت :

(۱) نقطه ابتدای دامنه نمی تواند نقطه اکسترم نسبی باشد.

(۲) f می تواند در این نقطه پیوسته نباشد.

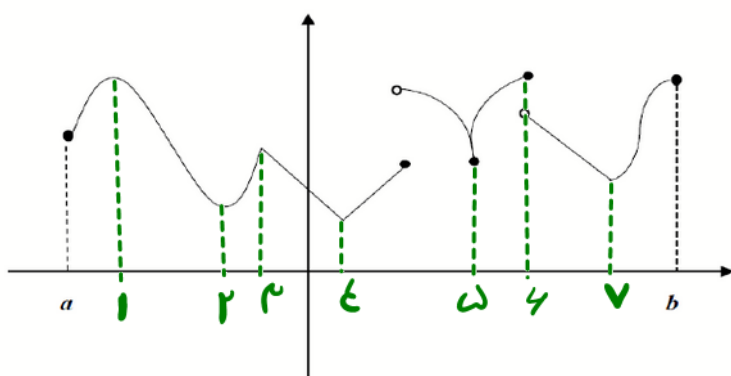
(۳) f می تواند در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

(۴) اگر f در این نقطه مشتق پذیر باشد گفته : $f'(c)=0$.

(۵) نقطه $(c, f(c))$ روی نمودار تابع f قرار دارد یعنی مختصات این نقطه در معادله

تابع صدق می کند.

(۶) در تابع ثابت تمام نقاط هم $\max$ نسبی هستند هم $\min$ نسبی.



مثال : تابع متغیر در بازه $[a, b]$

چند نکته اکسترم نسبی دارد ؟ نکته

مسئله تکرار ۹۸ تعویض :

در تابع با ضابطه $f(x) = x|x-4|$ ، فاصله دو نقطه ماکسیمم نسبی و می نیمم نسبی آن، کدام است؟

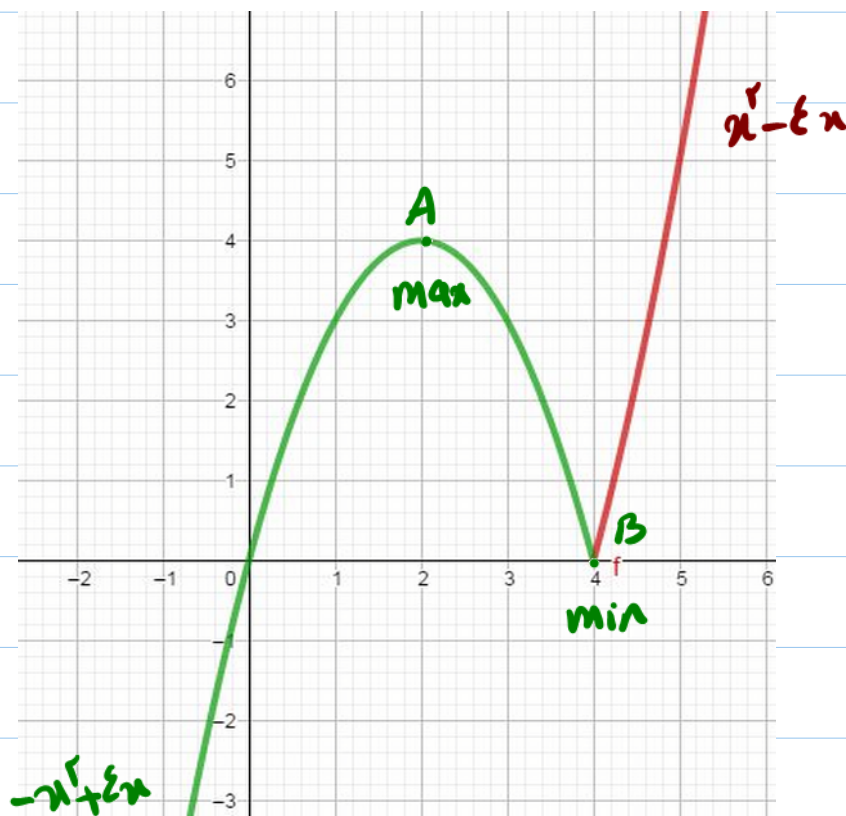
$$2\sqrt{5} \quad (4)$$

$$3\sqrt{2} \quad (3)$$

$$2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{5} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & x \geq 4 \\ -x(x-4) & x < 4 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases}$$



$A(2, 4)$: می^نmax

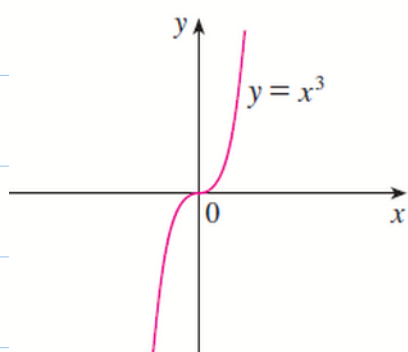
$B(4, 0)$ می^نmin

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad \text{گزینه ۴}$$

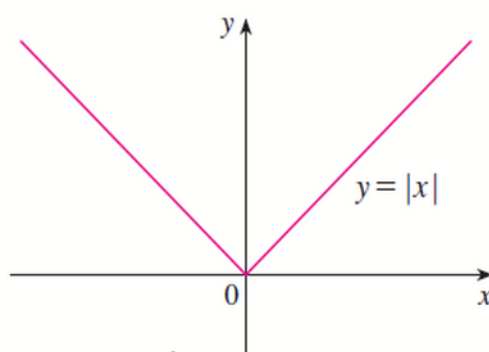
نقطه گردنی :

نقطه‌ای به طول c از دامنه f است که در آن $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مانند :

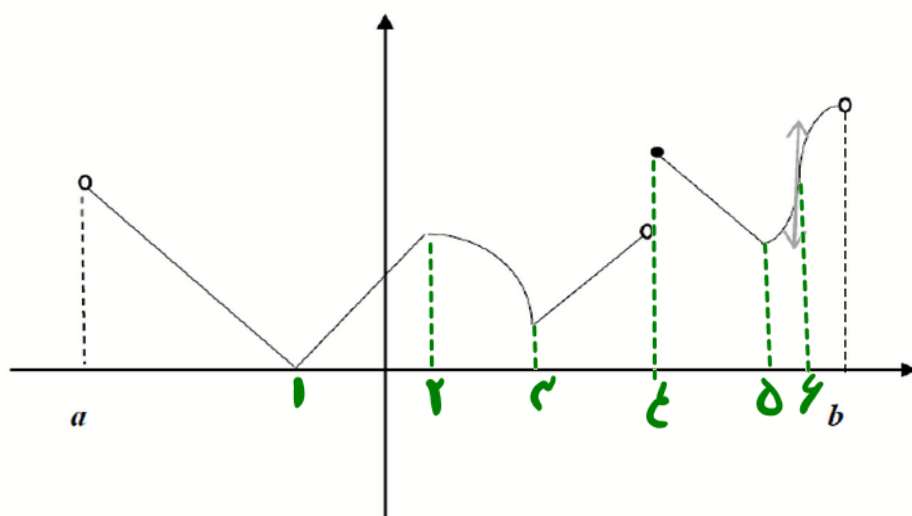


$f'(0) = 0$ ، $x=0$ جوابی



$f'(0)$ موجود نیست ، $x=0$ جوابی

مثال : تابع f با نمودار زیر در بازه (a, b) چند نقطه گردنی دارد ؟



در ۶ نقطه

نکته: هر نقطه اکسترمس منبج تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

وی عکس آن درست نیست یعنی هر نقطه بحرانی، اکسترمس منبج نیست.

توجه: نقاط استدار انتهایی دامنه، نقطه بحرانی هستند.

مثال: تابع $f(x) = 4x^2 - 12x$ در بازه $[0, 4]$ ضد نقطه بحرانی دارد؟

$$f'(x) = 8x - 12 = 0 \Rightarrow 8(x - 1.5) = 0 \Rightarrow x = 1.5$$

چون $x = 1.5$ در دامنه تابع نیست پس بحرانی نیست.

نقاط بحرانی $x = 0$ ، $x = 4$ است.

مثال: نقاط بحرانی تابع زیر را بیابید.

$$1) f(x) = x^2(x+2)^3$$

$$f'(x) = 2x(x+2)^3 + 3(x+2)^2 x^2 = x(x+2)^2(2(x+2) + 3x) = 0$$

$$\Rightarrow x(x+2)^2(5x+4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2, x = -\frac{4}{5}$$

$$r) g(x) = \frac{x^r}{(1-x)^r}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g'(x) = \frac{r x^{r-1} (1-x)^r - r(1-x)(-1)x^r}{(1-x)^{2r}}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x^r(1-x)(r(1-x) + r) = 0 \Rightarrow x^r(1-x)(-x+2) = 0$$

$$x=0, x=1, x=2 \Rightarrow \begin{matrix} \rightarrow \notin D_f \\ \end{matrix} \quad x=2, x=0 \text{ برای } x=2$$

$$g'(x) = \text{موجب} \Rightarrow (1-x)^2 = 0 \Rightarrow x=1 \notin D_f$$

$$r) f(x) = \begin{cases} x^r - r x & -r < x \leq r \\ x^r - 1 x & r < x < \varepsilon \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} r x^{r-1} - r & -r < x < r \\ \text{موجب} & x = r \\ r x^{r-1} - 1 & r < x < \varepsilon \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow r x^{r-1} - r = 0 \Rightarrow x^{r-1} - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \in (-r, r)$$

$$\Rightarrow r x^{r-1} - 1 = 0 \Rightarrow x^{r-1} - \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[r-1]{\frac{1}{r}} \begin{cases} \sqrt[r-1]{\frac{1}{r}} \in (r, \varepsilon) \\ -\sqrt[r-1]{\frac{1}{r}} \notin (r, \varepsilon) \end{cases}$$

f' و $n=2$ بحریت سے $\{ \sqrt{e}, 1, -1, -\sqrt{e} \}$ نقاط بحریت ہوں گے۔

4) $h(x) = x|x^2 - 1|$

$$\begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 1 & +\infty \\ \hline x^2-1 & + & 0 & 0 & + \end{array}$$

$$h(x) = \begin{cases} x(x^2 - 1) & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x(x^2 - 1) & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x^3 + x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ \text{بحریت} & x = 1 \\ \text{بحریت} & x = -1 \\ -3x^2 + 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

نہیں
 سے $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} > -1$ و $x = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ میں درجہ حالت نقاط بحریت ہوں گے۔

$$\Rightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

در این ضابطه هر دو کدر در بازه $(-1, 1)$ قرار دارند پس عبارت می‌اند.

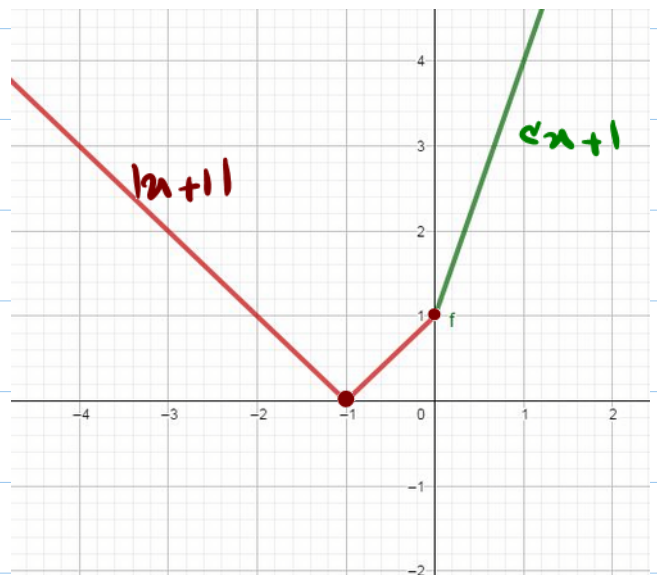
بنابراین $\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{m}} \right\}$ نقاط عبارت می‌اند.

$$5) f(x) = |2x + |x| + 1|$$

$$f(x) = \begin{cases} |2x + x + 1| & x \geq 0 \\ |2x - x + 1| & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 0 \\ |x + 1| & x < 0 \end{cases}$$

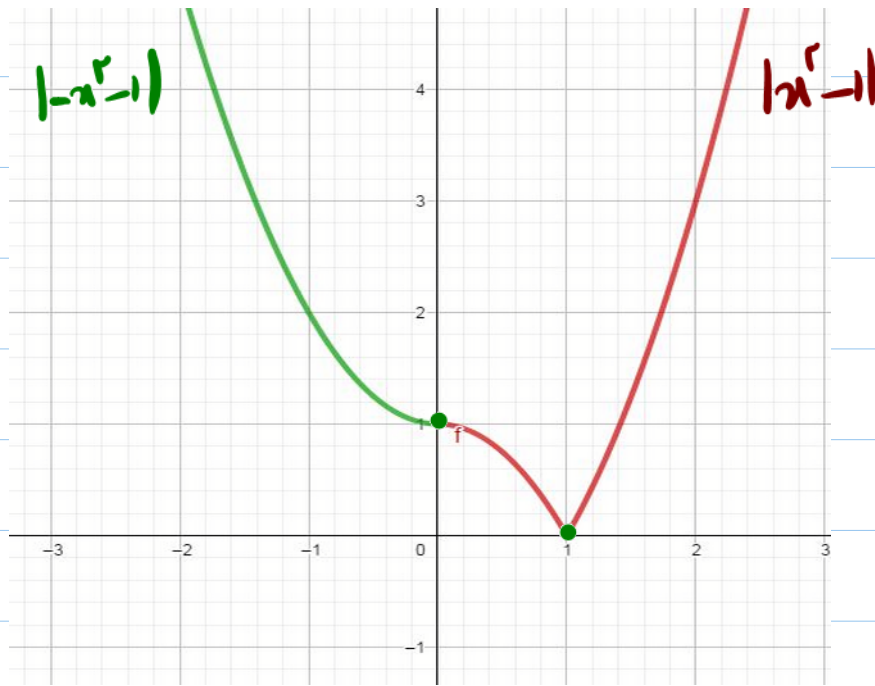
در $x = -1$ و $x = 0$

مشق مورد نیاز است این نقاط عبارت می‌اند.



$$6) g(x) = |x|x| - 1|$$

$$g(x) = \begin{cases} |x(x) - 1| & x \geq 0 \\ |x(-x) - 1| & x < 0 \end{cases} = g(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & x \geq 0 \\ |-x^2 - 1| & x < 0 \end{cases}$$



در $x=1$ مشتق موجود نیست. در $x=0$ مشتق موجود است. پس $\{0, 1\}$
نقاط بحرانی هستند.

$$v) f(x) = (x-2)x^{\frac{5}{3}}$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5x^{\frac{2}{3}}}{3} - \frac{10}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x - 10}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x - 10}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 5x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

پس $\{2, 0\}$ نقاط بحرانی اند. $f'(x)$ موجود نیست $\rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

$$1) f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{3 - 3x^2}{3\sqrt[3]{(3x - x^3)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) : \text{موجبات} \Rightarrow \sqrt[3]{(3x - x^3)^2} = 0 \Rightarrow 3x - x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x(3 - x^2) = 0 \xrightarrow{x=0} 3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

و $\{\pm 1, 0, \pm\sqrt{3}\}$ نقاط بحرانی اند.

$$2) f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$D_f: 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -4 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_f = [-2, 2]$$

$$f'(x) = \frac{-x}{2\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow -x = 0 \rightarrow x = 0$$

۲- نقاط انتهای دامنه و ریشه معین هم هستند پس چرا اند

معبره نقاط بحرانی باطل‌های: $\{0, \pm 2\}$

$$1.) f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$D_f: -1 \leq x \leq 1 \rightarrow x > 1 \rightarrow x > 0 \rightarrow x > -1$$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

پس تابع در $x=1$ ، $x=-1$ نقطه بحرانی دارند.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس $\{0, \pm 2\}$ معبره طول‌های نقاط بحرانی است.

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس اول: اکستریم‌های تابع

قسمت سوم

جلسه سوم: صفحات ۱۰۸ و ۱۰۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

آزمون مشتق اول برای تشخیص اکسترم‌های نسبی :

فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و f در c

همگی معدوم c مشتق پذیر است :

الف) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در c ، $\max$ نسبی دارد.

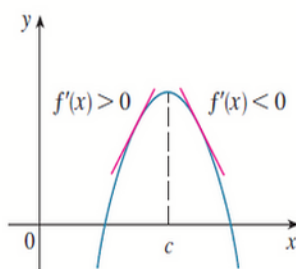
x		c	
f'	+		-
f			

ب) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در c ، $\min$ نسبی دارد.

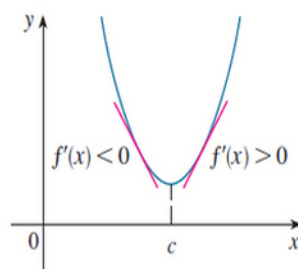
x		c	
f'	-		+
f			

پ) اگر f در c غیرصاف باشد و f در c ، $\max$ و $\min$ نسبی ندارد.

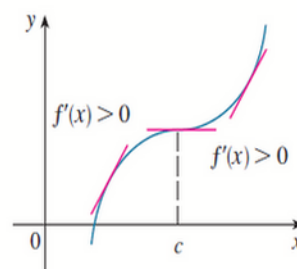
به شکل زیر دقت کنید :



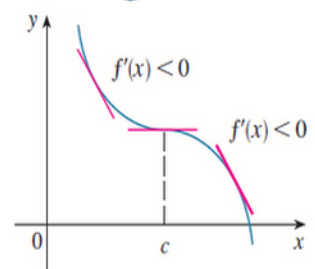
(a) Local maximum



(b) Local minimum



(c) No maximum or minimum



(d) No maximum or minimum

مثال: نقطه اترسیمی تابع $f(x) = x^3 - 5x^2$ را بیابید.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 3x^2(1 - \frac{10}{3}) = 0 \quad \begin{cases} 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - \frac{10}{3} = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{10}{3}} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{10}{3}}$	0	1	$\sqrt{\frac{10}{3}}$	$+\infty$
f'		+	0	-	0	+
f						

max
min

مثال: فاصله نقطه min می تابع $y = x^3 - 12x + 12$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

$$y' = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	$-\infty$	$-r$	r	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y					$-\varepsilon$	

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

max min

$A(2, -4)$ $(0, 0)$ $(-2, 20)$

$$OA = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

مثال: تابع $y = \frac{x+1}{x^2-2x}$ چند لگرم نمی دارد؟

$$y' = \frac{1(x^r - rx) - (rx - r)(x+1)}{(x^r - rx)^r} = \frac{x^r - rx - r(x-1)(x+1)}{(x^r - rx)^r}$$

$$= \frac{x^r - rx - rx^r + r}{(x^r - rx)^r} = \frac{-x^r - rx + r}{(x^r - rx)^r}$$

$$y' = 0 \rightarrow -x' - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \times (-1) \times (1) = 1 + 4 = 5$$

$$u = \frac{r \pm \sqrt{r}}{-r} = \frac{r \pm r\sqrt{r}}{-r} = \begin{cases} -1 + \sqrt{r} \\ -1 - \sqrt{r} \end{cases}$$

موریت : $(u^r - ru)^r = 0 \rightarrow u = 0, r$

x	$-\omega$	$-1/\sqrt{r}$	0	$1/\sqrt{r}$	r	$+\omega$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y		$\swarrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\swarrow$	$\swarrow$

$\min$
 $\max$

نمبر ۱۳

مثال کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ ، کدام است؟

$1 + \sqrt{3}$ (۴)

$-1 + \sqrt{3}$ (۳)

$1 + \sqrt{5}$ (۲)

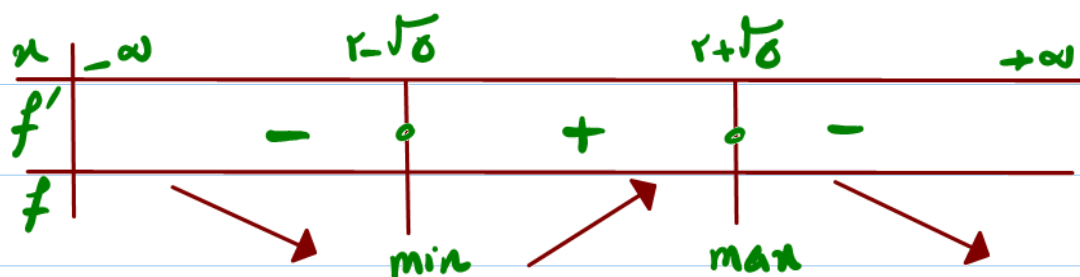
$-1 + \sqrt{5}$ (۱)

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^3+x+x^2+1-x^3-2x^2+3x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(-x^2+4x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 : -x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(-1)(1) = 20$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{-2} = 2 \pm \sqrt{5}$$



$$f(2+\sqrt{5}) = \frac{(2+\sqrt{5})^2 + 2(2+\sqrt{5}) - 3}{(2+\sqrt{5})^2 + 1} = \frac{4+8+4\sqrt{5} + 4+2\sqrt{5} - 3}{4+8+4\sqrt{5} + 1}$$

$$= \frac{10+4\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}} = \frac{5+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} = 1$$

$$= \frac{-5 + 5\sqrt{5}}{5} = -1 + \sqrt{5}$$

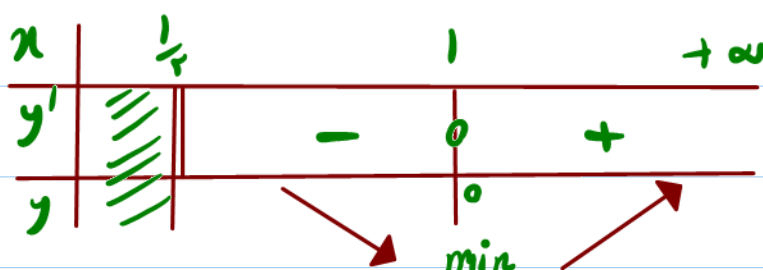
گزینہ ۱

مثال: نقطہ انتزاعی تابع $y = x - \sqrt{2x-1}$ را بدست آورید.

$$y' = 1 - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{\sqrt{2x-1}} \quad D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$y' = 0 : \sqrt{2x-1} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \rightarrow 2x-1 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$y' = 0 : \sqrt{2x-1} = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$



min : $(1, 0)$

مثال: طول نقطه max انتزاعی تابع $f(x) = (x-1)^2 \sqrt{x}^{\frac{r}{p}}$ کدام است؟

$$\frac{r}{p} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{r} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{p} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{x} \text{ (۱)}$$

$$f(x) = x^{\frac{r}{p}} (x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{r}{p} x^{-\frac{1}{p}} (x-1)^2 + 2(x-1) x^{\frac{r}{p}}$$

$$f'(x) = \frac{r}{r} \frac{(x-1)^r}{\sqrt[r]{x}} + r(x-1) \frac{1}{\sqrt[r]{x^r}} = \frac{r(x-1)^r + r(x-1)x}{r\sqrt[r]{x}}$$

$$= \frac{r(x-1)(x-1+x)}{r\sqrt[r]{x}} = \frac{r(x-1)(2x-1)}{r\sqrt[r]{x}}$$

$$f' = 0 \rightarrow r(x-1)(2x-1) = 0 \rightarrow x = 1, \frac{1}{2}$$

$$f' = 0 \rightarrow r\sqrt[r]{x} = 0 \rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$r(x-1)(2x-1)$	+	+	0	-	+
$\sqrt[r]{x}$	-	0	+	+	+
f'	-	0	+	-	+
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		min	max	min	

گزینه ۱

مثال: اگر $(1, 1)$ نقطه اکстрیم بی‌بج $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + 1$ باشد، a, b را بیابید.

$$(1, 1) \xrightarrow{\text{نقطه بی‌بج، محلی}} f(1) = 1 + a + b + 1 = 1 \rightarrow a + b = -1$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 4 + 2a + b = 0$$

$$\rightarrow 2a + b = -4$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ a = -3 \end{cases} \rightarrow b = 2$$

مثال: تابع $f(x) = x^4 + ax^2 + x - 1$ فاعده اقلترسم بنی است. حدود a را بیابید.

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + 1$$

f' باید همواره مثبت یا همواره منفی باشد.

ولی چون ضرب x^3 ، مثبت است پس f' همواره مثبت است:

$$f' \geq 0 : 5 \leq 0 : 4a^2 - 12 \leq 0 \rightarrow a^2 \leq 3$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس اول: اکستریم‌های تابع

قسمت چهارم

جلسه چهارم: صفحات ۱۱۰ و ۱۱۱

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱۴) دسته‌های مطلق تابع :

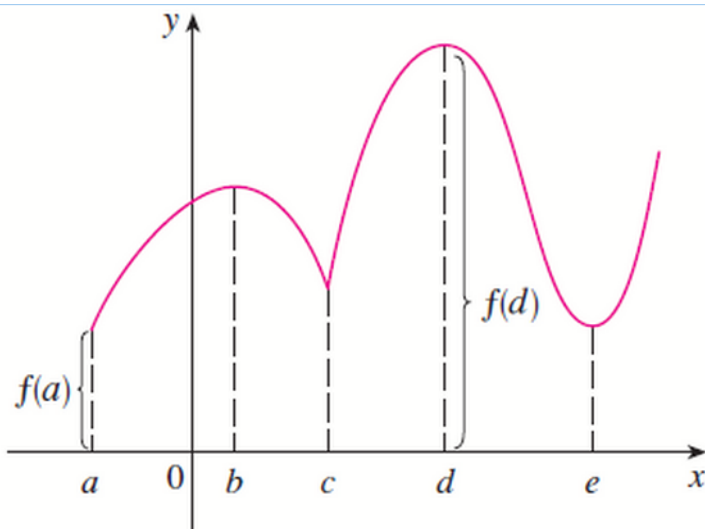
الف) تابع f در D_f ، $x=c \in D_f$ ، **ماکزیمم مطلق** دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f

داشته باشیم : $f(x) \leq f(c)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f می‌گوئیم .

ب) تابع f در D_f ، $x=c \in D_f$ ، **مینیمم مطلق** دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f

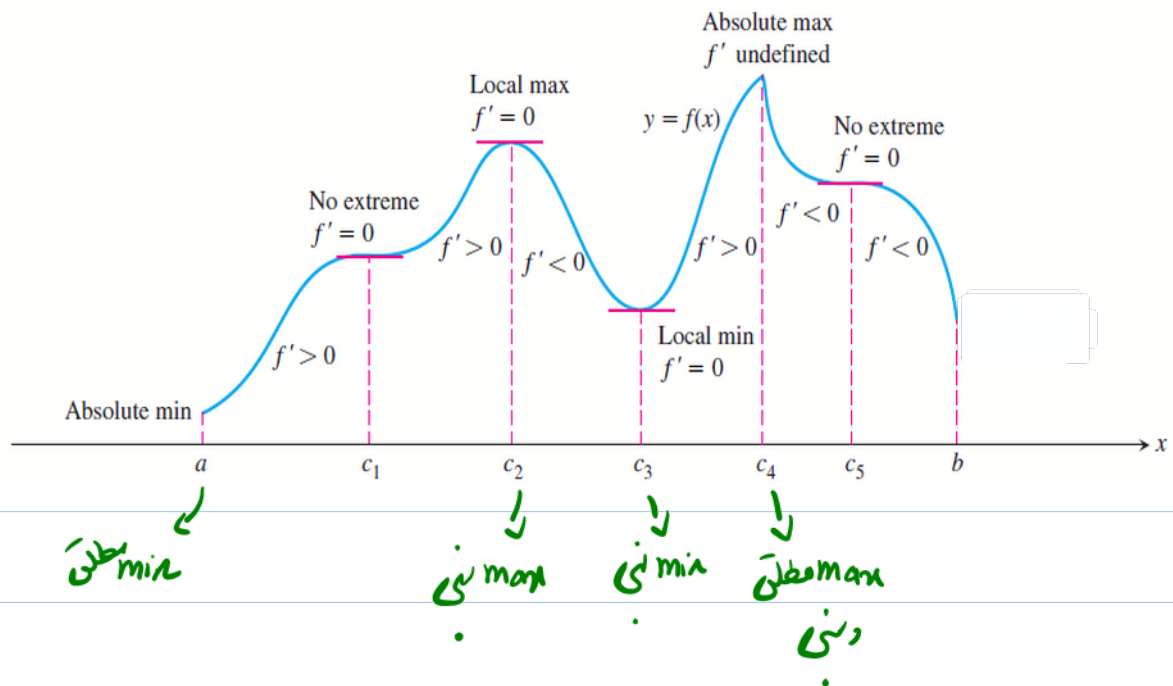
داشته باشیم : $f(x) \geq f(c)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f می‌گوئیم .

در نمودارهای زیر داریم :



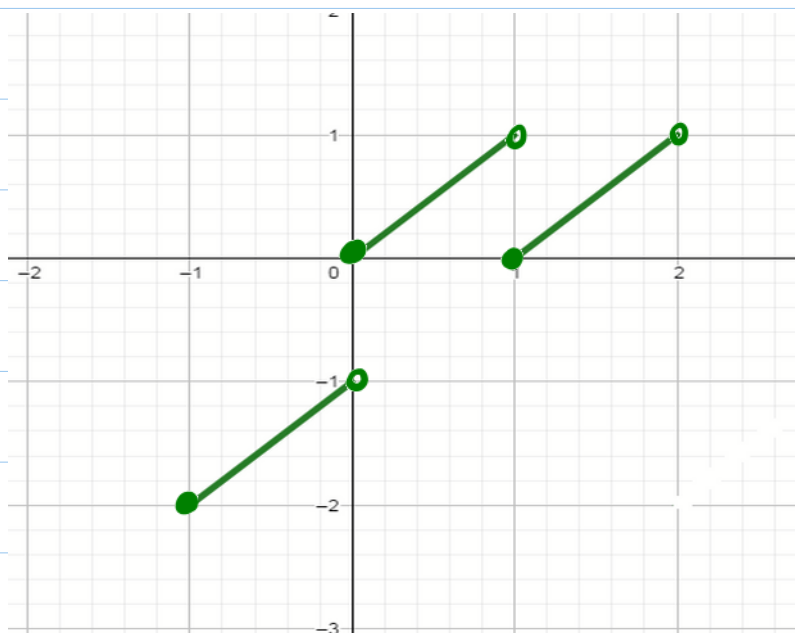
در $x=a$ ، $\min$ مطلق داریم .

در $x=d$ ، $\max$ مطلق داریم .



مثال: مقادیر $\min$, $\max$ مطلق تابع $f(x) = x - [x]$ را روی بازه $(-2, 2)$ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & -1 < x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

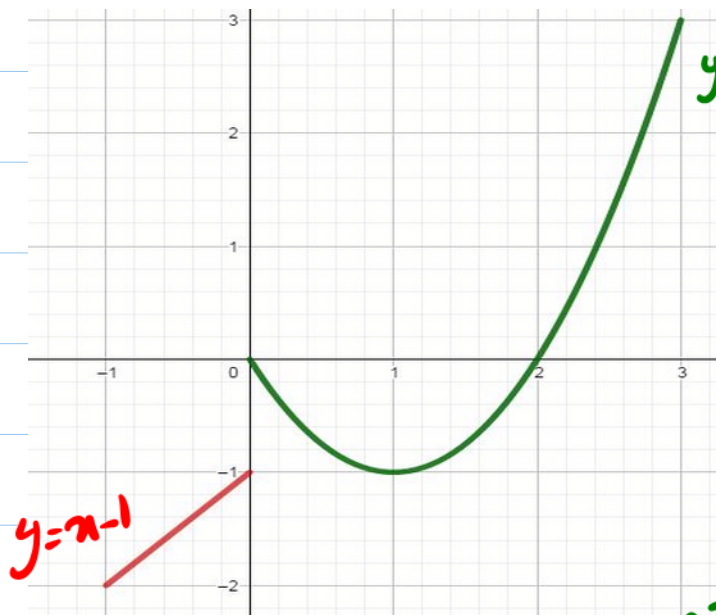


$\max$ مطلق ندارد.

$\min$ مطلق دارد، $x = -1$

کمترین مقدار آن $-2 = f(-1)$ است.

مثال: مقدار $\min, \max$ مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & 0 \leq x \leq 3 \\ x - 1 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ را بیابید.



$\max$ مطلق در $x = 3$ ؛

مقدار $f(3) = 3$.

$\min$ مطلق در $x = 1$ به مقدار -1 ؛ $f(1) = -1$.

نقشه: اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه $\min, \max$ مطلق دارد.

روش یافتن اکثر هم‌های مطلق توابع پیوسته در بازه $[a, b]$:

ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازه $[a, b]$ می‌یابیم. سپس مقدار تابع را در نقاط بحرانی حساب

می‌کنیم. بهترین مقدار $\max$ مطلق و کمترین مقدار $\min$ مطلق تابع f در بازه هستند.

مثال کنکور تجربی ۹۸

مقدار $\min, \max$ مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 10x$ را روی بازه $[-4, 4]$ بیابیم.

(۱) -۱۱ و ۲۴ (۲) -۲۵ و ۲۷ (۳) -۳۶ و ۲۷ (۴) -۲۷ و ۳۶

$$f'(x) = x^2 - 2x - 10 = 0 \rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \quad \begin{cases} x=5 \notin D_f \\ x=-2 \checkmark \end{cases}$$

بین پنج نقطه چهار $x=-2, x=3$ را در نظر بگیریم.

x	-2	-1	3
y	$\frac{78}{3}$	$\frac{27}{3}$	$\frac{-45}{3}$

max
min

$x=3$ را در نظر بگیریم.

$$f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 - 10(-2) = -\frac{8}{3} - 4 + 20 = \frac{-8 - 12 + 60}{3} = \frac{40}{3}$$

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 10 = \frac{-1 - 3 + 30}{3} = \frac{26}{3}$$

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 10(3) = 9 - 9 - 30 = -30$$

گزینه ۲

مثال: حداکثر مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ در بازه $(\frac{1}{4}, 1)$ چقدر از کمترین مقدار

آن در این بازه بیشتر است؟

$$\frac{19}{21} \quad (2)$$

$$\frac{5}{7} \quad (3)$$

$$\frac{6}{7} \quad (4)$$

$$\frac{16}{21} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{-(2x-1) \cdot 1}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x+1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r}$	1
y	$\frac{\epsilon}{\sqrt{r}}$	$\frac{\epsilon}{\sqrt{r}}$	1
	$\searrow$ min	$\searrow$ max	

$$f(-\frac{1}{r}) = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{r} + 1} = \frac{1}{\frac{1+r+\epsilon}{\epsilon}} = \frac{\epsilon}{\sqrt{r}}$$

$$f(\frac{1}{r}) = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{r} + 1} = \frac{1}{\frac{1-r+\epsilon}{\epsilon}} = \frac{\epsilon}{r}, \quad f(1) = \frac{1}{1-1+1} = 1$$

$$\text{max} - \text{min} = \frac{\epsilon}{r} - \frac{\epsilon}{\sqrt{r}} = \frac{r-1}{r} = \frac{14}{21}$$

نتیجه

مثال: مقادیر min, max تابع $f(x) = x\sqrt{\epsilon - x^2}$ را بیابید.

$$f'(x) = 1 \times \frac{\sqrt{\epsilon - x^2}}{1} + \frac{-2x}{2\sqrt{\epsilon - x^2}} \times x = \frac{\epsilon - x^2 - x^2}{\sqrt{\epsilon - x^2}} = \frac{-2x^2 + \epsilon}{\sqrt{\epsilon - x^2}}$$

$$D_f: \epsilon - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq \epsilon \rightarrow -r \leq x \leq r \rightarrow D_f = [-r, r]$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + \epsilon = 0 \rightarrow x^2 = r \Rightarrow x = \pm\sqrt{r}$$

x	-r	$-\sqrt{r}$	$\sqrt{r}$	r
y	0	-r	r	0
		$\searrow$ min	$\searrow$ max	

$$f(x) = f(-x) = 0$$

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sqrt{4-2} = -2$$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{4-2} = 2$$

مقدار $\max$ مطلق = 2 ، مقدار $\min$ مطلق = -2

مثال: حاصل مرتب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ کدام است؟

$$0 \leq x \leq 5$$

$$1. \text{ (1)}$$

$$2. \text{ (2)}$$

$$3. \text{ (3)}$$

$$D_f : \text{ (1) } x \geq 0$$

$$\text{ (2) } 5-x \geq 0 \rightarrow x \leq 5$$

$$D_f = \text{ (1) } \cap \text{ (2) } = [0, 5]$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} - \sqrt{x} = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x}$$

$$\frac{r}{r} \rightarrow 2(0-x) = x \rightarrow 2. - 2x = x \rightarrow -2x = -2. \rightarrow x = 1$$

x	0	1	0
y	$\sqrt{0}$	0	$2\sqrt{0}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	
	min	max	

$$f(0) = 0 + \sqrt{0} = \sqrt{0}$$

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$\max x \times \min = 0\sqrt{0}$$

نیز

$$f(0) = 2\sqrt{0} + 0 = 2\sqrt{0}$$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = (2x-1)\sqrt{x}$ را، خاصه $[0,1]$ کدام است؟

$$\frac{-1}{x} \quad 1$$

$$\frac{-2}{x} \quad 1$$

$$\frac{-2}{x} \quad 1$$

$$\frac{-2}{x} \quad 1$$

$$f(x) = (2x-1)x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(2x-1) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 0 : \text{بصورت} \quad 2\sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0$$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
y	4	0	$-\frac{3}{2}$	1
	$\nearrow$ max		$\searrow$ min	

$$f(-1) = -2 \times (-1) = 2 \qquad f(0) = (-1) \times 0 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \qquad f(1) = 1 \times 1 = 1$$

گزینه ۲

نکته: برای یافتن اتریم‌های مطلق تابع f روی بازه (a, b) ، در روش بالا به جای

$f(a)$ ، $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ و به جای $f(b)$ ، $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر بیشترین

یا کمترین مقدار، در این مقادیر حدی اتفاق افتد آن‌گاه تابع در این بازه max

یا min مطلق خواهد داشت. در مورد بازه‌های $(a, b]$ ، $[a, b)$ ، $(-\infty, a)$ ،

$(-\infty, a]$ ، $(a, +\infty)$ ، $[a, +\infty)$ ، $(-\infty, +\infty)$ هم به این شکل عمل می‌کنیم.

مثال: تابع $f(x) = x^2 - 2x$ در بازه $(-1, 4)$ مفروض است. اتریم‌های مطلق آن را

در صورت وجود می‌یابید.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \xrightarrow{\div x} x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$$

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 1 - 12 = -11, \quad f(-1) = -1 - 3 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - 2x^2 = 0 - 0 = 0$$

x	-1	0	2	4
f	-4	0	-11	16

چون مقدار max در حد جمع دهم $x \rightarrow 4$

اشتراکات بین max مطلق و min مطلق را در: $f(-1) = f(2) = -11$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ روی بازه $(0, +\infty)$ چقدر است؟

11 17 12 12 10 13 9 14

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{16}{0^+} = 0 + \infty = +\infty \quad \text{خانه max مطلق است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

در $x=2$ min مطلق را در: $f(2) = 4 + 8 = 12$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس دوم: بهینه‌سازی

جلسه پنجم: صفحات ۱۱۳ تا ۱۱۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

بهنه سازی :

هدف از بهینه سازی پیدا کردن بهترین یا کمترین مقدار یک تابع است.

در اکثر سوالات بهینه سازی، ضابطه تابع به ما داده نمی شود و باید با توجه به داده های مسئله

تابع هدف را بنویسیم. مراحل زیر را برای حل اینگونه سوالات دنبال می کنیم :

۱- در صورت لزوم شکل مناسبی رسم می کنیم.

۲- اگر تابع هدف بیش از یک متغیر داشته باشد با استفاده از شرط سوال (رابطه کپی)

آن را بر حسب یک متغیر بنویسیم.

۳- از تابع هدف مشتق می گیریم و مساوی صفر قرار می دهیم. مقدار اکثر هم تابع هدف را محاسبه می کنیم.

مثال: اگر x و y دو عدد مثبت باشند که $xy=4$ ، مقدار مینیمم عبارت $P=2x+4y$

را محاسبه کنید. // رابطه معکوس : $xy=4 \rightarrow y=\frac{4}{x}$

تجربہ $p = 2x + 2 \times \frac{4}{x} \Rightarrow p(x) = 2x + \frac{18}{x}$

$p'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{18}{x^2} = 2 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

$y = \frac{4}{x} = 2$

$p_{\min} = 2 \times 3 + 2 \times 2 = 4 + 4 = 12$

مثال: اگر $x + y = 4$ باشد، کمترین xy کیا ہے؟

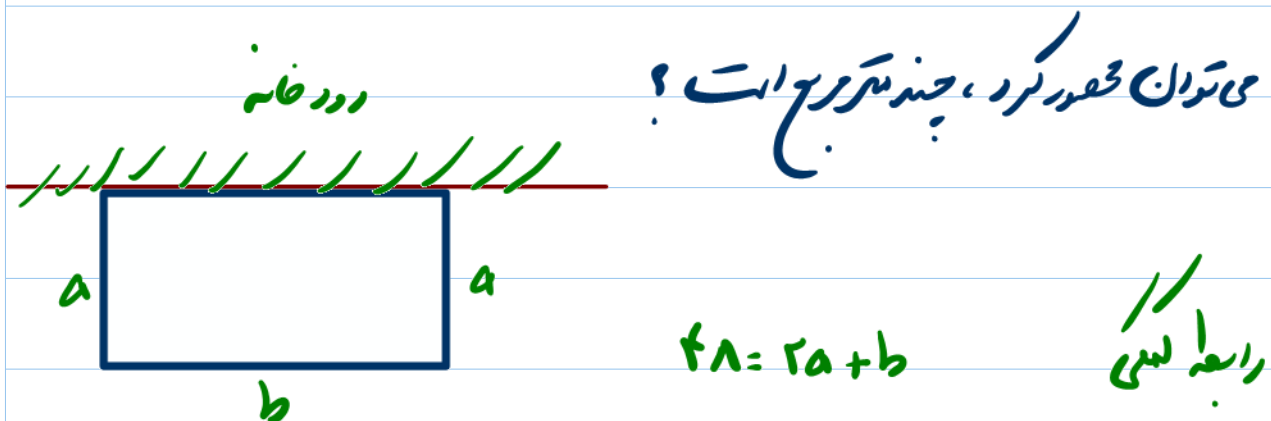
$y = 4 - x : p = xy \Rightarrow p(x) = x(4 - x) = 4x - x^2$

$p'(x) = 4 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

$\begin{cases} 4 - 2x = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \min \\ 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \max \end{cases}$

$y = 4 - 2 = 2 : p_{\max} = 2 \times 2 = 4$

مثال: بیشترین مساحت مستطی که بوسیله یک جانب به طول ۴۸ متر در حاشیه یک رودخانه



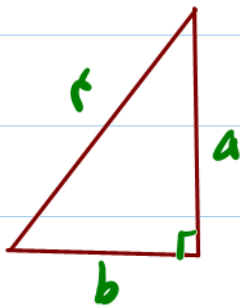
$\rightarrow b = 48 - 2a$

$$S = a \times b = a(48 - 2a) = 48a - 2a^2 \quad \text{تابع هدف:}$$

$$S'(a) = 48 - 4a = 0 \rightarrow 4a = 48 \rightarrow a = 12 : b = 48 - 24 = 24$$

$$S_{\max} = 12 \times 24 = 288$$

مثال: طول درشت قائم الزاویه برابر است. بیشترین مساحت آن را بیابید.



$$a^2 + b^2 = 14^2 : \text{رابطه نیخترس}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{14^2 - a^2}$$

$$S = \frac{1}{2}ab \Rightarrow S = \frac{1}{2}a\sqrt{14^2 - a^2}$$

$$S'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 - a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{14^2 - a^2}} \times \frac{1}{2}a$$

$$S'(a) = \frac{14^2 - a^2 - a^2}{2\sqrt{14^2 - a^2}} = \frac{14^2 - 2a^2}{2\sqrt{14^2 - a^2}} = \frac{14^2 - a^2}{\sqrt{14^2 - a^2}}$$

$$S'(a) = 0 \rightarrow 14^2 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 14^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{14^2 - 14} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{14} \times \sqrt{14} = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

مثال: کنسرت ۹۹

از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

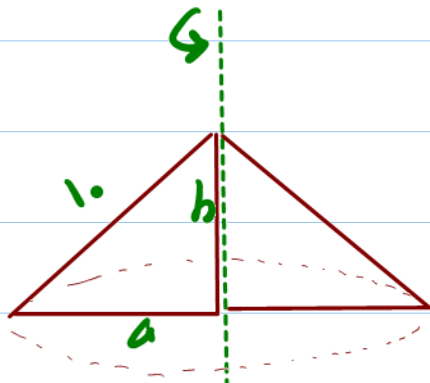
$$\frac{\sqrt{2}}{1} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{1} \quad (۱)$$

اگر یک مثلث قائم‌الزاویه را حول یک ضلع قائم دوران دهیم، یک مخروط ایجاد می‌شود که شعاع قاعده و ارتفاعش برابر اضلاع قائم مثلث اند.



$$V = \frac{1}{3} \pi a^2 b$$

رابطه کس: $a^2 + b^2 = 100 \rightarrow a^2 = 100 - b^2$: رابطه حذف

$$V = \frac{1}{3} \pi (100 - b^2) b = \frac{1}{3} \pi (100b - b^3)$$

$$V'(b) = \frac{1}{3} \pi (100 - 3b^2) = 0 \rightarrow 3b^2 = 100 \rightarrow b = \frac{10}{3}$$

$$a = 100 - \frac{100}{9} = \frac{800}{9}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{\frac{800}{9}}{\frac{100}{9}}} = \sqrt{8} \quad \text{نیز ۴}$$

مثال: مسئله ۹۹ :

کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x+7}$ ، کدام است؟

(۴) $3\sqrt{2}$

(۳) ۵

(۲) $4/5$

(۱) ۴

نقطه $B(x, y)$ را روی تابع در نظر بگیریم. فاصله $A(5, 0)$ تا B را تابع هدف

می‌نامیم که باید $\min$ شود :

رابطه کسری $y = \sqrt{2x+7}$ $AB = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}$

تابع هدف $AB = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$

$$(AB)' = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = 0 \rightarrow 2x-8=0 \rightarrow x=4$$

گزینه ۱ $(AB)_{\min} = \sqrt{4^2 - 8 \times 4 + 32} = \sqrt{16} = 4$

مثال: مسئله ۹۸ :

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله

$y = \sqrt{12-x}$ ، در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

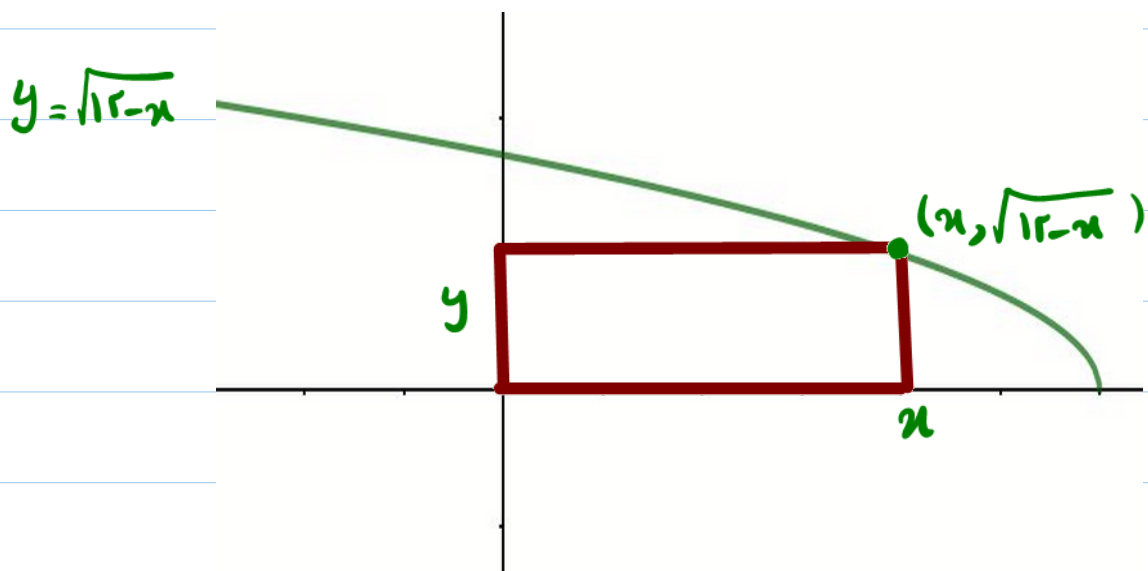
۱

(۴) ۱۸

(۳) ۱۶

(۲) $8\sqrt{3}$

(۱) $8\sqrt{2}$



$$S = xy = x\sqrt{12-x} = \sqrt{12x^2 - x^3}$$

$$S'(x) = \frac{24x - 3x^2}{2\sqrt{12x^2 - x^3}} \rightarrow S' = 0 \rightarrow 24x - 3x^2 = 0$$

$$3x(8-x) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \text{ غلط} \\ x=8 \checkmark \end{matrix} \quad y = \sqrt{12-8} = \sqrt{4} = 2$$

$$S_{\max} = 8 \times 2 = 16 \quad \text{گزینه } c$$

مثال: شعاع به ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

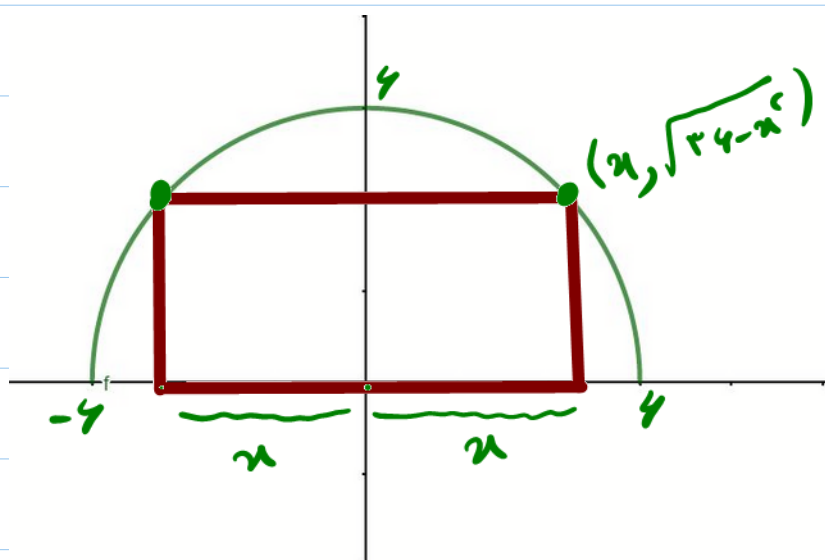
بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

۳۶ (۴)

۲۷ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)



$$x^2 + y^2 = 16 \quad \text{معادله دایره}$$

$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$S = 2x \times y = 2x \sqrt{16 - x^2} = 2\sqrt{32x^2 - x^4}$$

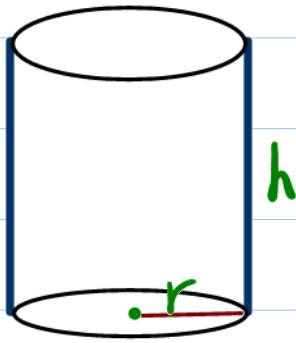
$$S'(x) = 2 \frac{\sqrt{32x^2 - x^4}}{2\sqrt{32x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow \sqrt{32x^2 - x^4} = 0$$

$$x(16 - x^2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{16} \checkmark \\ x=-\sqrt{16} \end{cases} \quad y = \sqrt{16 - 16} = \sqrt{16}$$

$$S_{\max} = 2 \times \sqrt{16} \times \sqrt{16} = 2 \times 16 = 32 \quad \text{گزینه ۴}$$

مثال: می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌شکل بازم که گنجایش آن 2π لیتر باشد. ارضاع

استوانه چه قدر باشد تا هزینه فنر به کار رفته در تولید آن کمینه شود؟



$$V = \pi r^2 h = r\pi \Rightarrow r^2 h = r$$

القوة

$$\Rightarrow h = \frac{r}{r^2}$$

رابطه می

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{پایه}} + S_{\text{جانب}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$S_{\text{کل}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{r}{r^2} = 2\pi \left(r^2 + \frac{r}{r} \right)$$

تابع هدف

$$S'(r) = 2\pi \left(2r - \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

$$\frac{2r^3 - 1}{r^2} = 0 \rightarrow 2r^3 - 1 = 0 \rightarrow r^3 = \frac{1}{2} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$h = \frac{r}{r^2} = \frac{r}{1} = r$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با
مقاطع مخروطی

قسمت اول: دوران و برش

جلسه اول: صفحات ۱۲۲ تا ۱۲۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

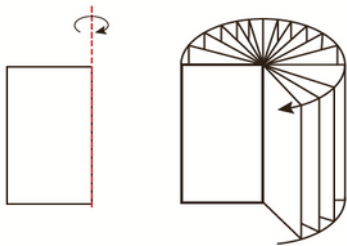
اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

دوران حول محور :

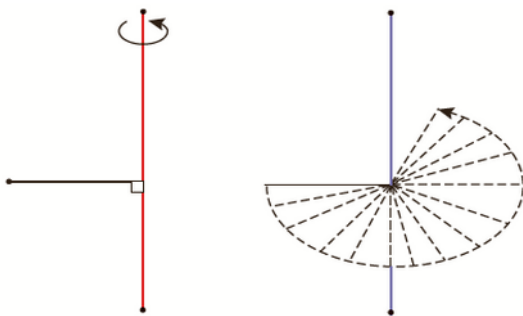
اگر شخصی هندسی را حول یک محور دوران دهیم یک جسم هندسی بدست می‌آید. در شکل‌های زیر

حاصل دوران برخی اشکال معروف حول یک محور را نشان داده‌ایم.



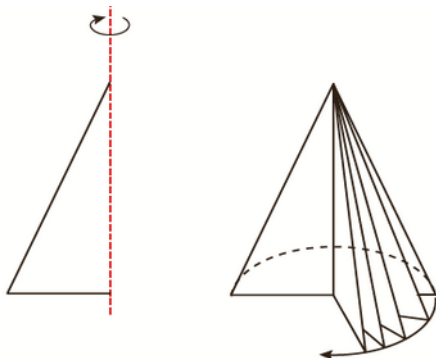
۱) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن :

دایره‌توخی



۲) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است :

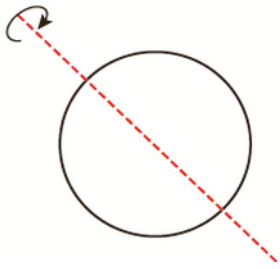
دایره توپر (محصن)



۳) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه :

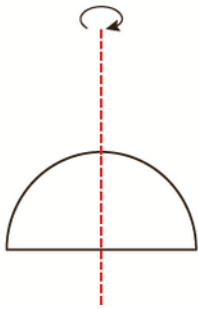
مخروط توخی

۴) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن :



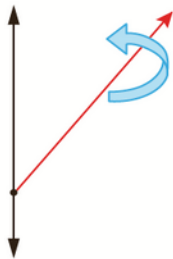
کره توخالی

۵) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن :



نیم کره توخالی

۶) شکل حاصل از دوران نیم خط حول محور



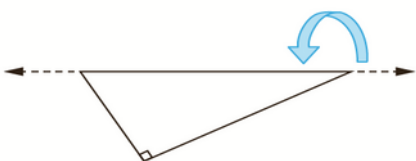
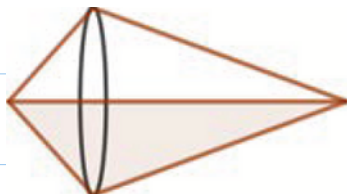
مغروط توخالی (دانشی)

۷) شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه حول محور



مغروط توپر

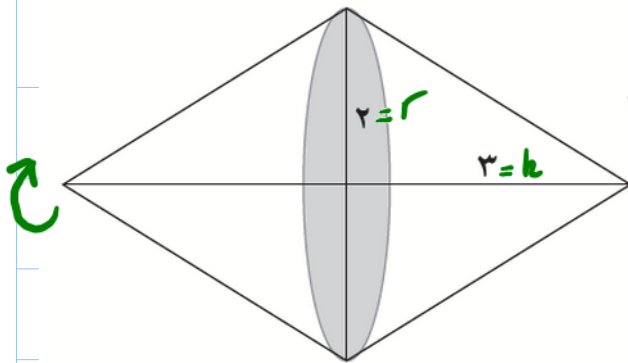
۸) دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن



دو مغروط توخالی با قاعده مشترک

مثال: اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

شکل حاصل دو مخروط با قاعده مشترک و حجم برابر



یادآوری:
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

مخروط

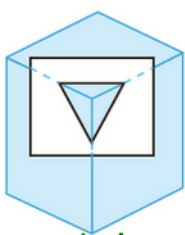
$$V_{\text{حجم حاصل}} = 2 V_{\text{مخروط}} = 2 \times \frac{1}{3} \pi (2)^2 \times 3 = 8\pi$$

برش:

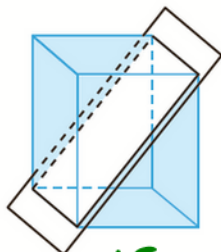
به برش در یک صنفه باید جسم هندسی، برش آن جسم گفته، به شکل حاصل از این برش،

سطح مقطع می‌گوئیم.

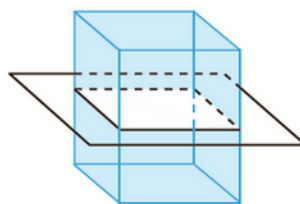
مثال: بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعده مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید.



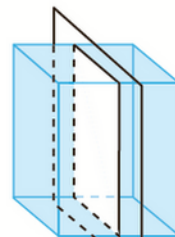
مثلث



مستطیل



مربع

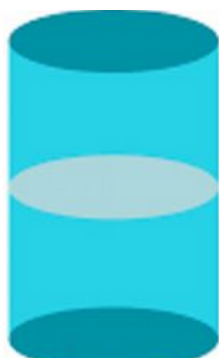


مستطیل

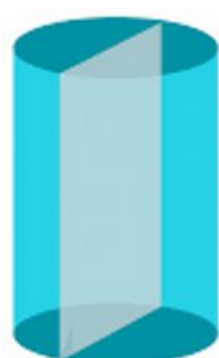
مثال: سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحه‌ی مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟



بیضی

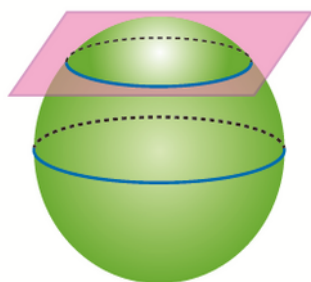


دایره



مستطیل

مثال: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟



دایره

در حالتی که صفحه از مرکز کره عبور کند.

مثال:

مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.

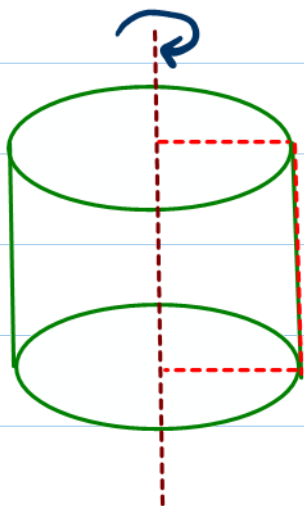
الف) شکل حاصل را رسم کنید.

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد این استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

پ) اگر ابعاد مستطیل، ۳ و ۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه موازی با قاعده این استوانه چقدر است؟

ت) در حالت پ، اگر صفحه‌ای عمود بر قاعده استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟

حل الف) استوانه



حل ب) در حالتی که صنف عمود بر قاعده ها و از مرکز قاعده میگذرد و

ارتفاع استوانه و قطر قاعده مساوی باشند، سطح مقطع یک جریح خواهد بود.

حالت اول : عرض = ۴ طول = ۳ حجم حاصل : استوانه ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳

سطح مقطع دایره ای به شعاع ۳ خواهد بود : $S = \pi \times 3^2 = 9\pi$

حالت دوم : عرض = ۴ طول = ۴ حجم حاصل : استوانه ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۴

سطح مقطع دایره ای به شعاع ۲ خواهد بود : $S = \pi \times 2^2 = 4\pi$

حالت ۳ اگر صنف از محور دوران عبور نکند و بر قاعده عمود باشد، سطح مقطع مستطیلی است

به بیشترین مساحت را دارد.

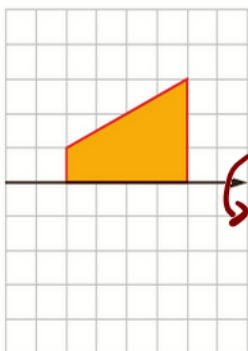
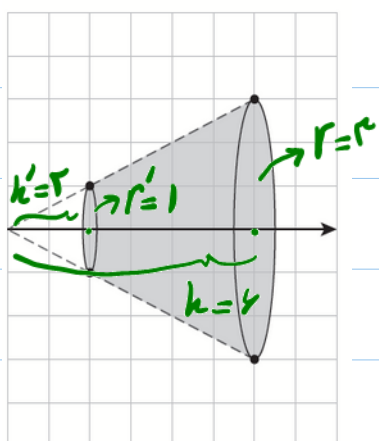
$$\text{حالت اول} : S = 4 \times (2 \times 3) = 4 \times 6 = 24$$

$$\text{حالت دوم} : S = 4 \times (2 \times 4) = 4 \times 8 = 32$$

مثال: در شکل روبه‌رو می‌خواهیم دوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



حل الف) حجم حاصل یک مخروط ناقص است.

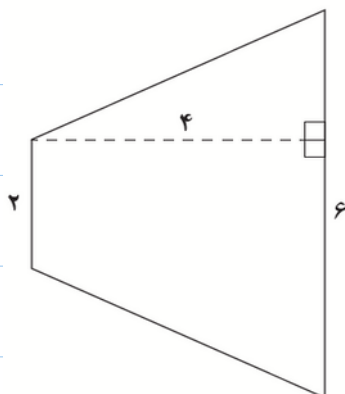
$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}}$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r'^2 h'$$

$$= \frac{1}{3} \pi (3)^2 \times 4 - \frac{1}{3} \pi (1)^2 \times 2$$

$$= 18\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{54\pi - 2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow V_{\text{مخروط ناقص}} = \frac{52\pi}{3}$$



حل ب) **مساحت (بجای دوزنقه) = $\frac{1}{2} \times (\text{جمع دو ضلع عمود بر هم}) \times \text{ارتفاع}$** : یا دیگری

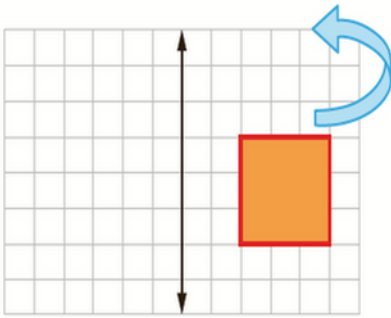
$$S = \frac{1}{2} (2 + 6) \times 4 = 2(8) = 16$$

مسئله :

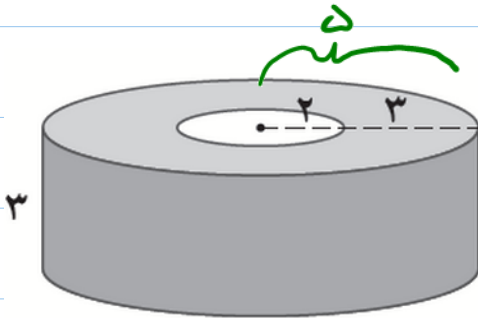
مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل رویه‌رو در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعده آن توصیف کنید.



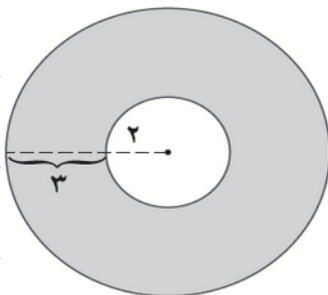
حل الف)



$$V_{\text{حجم حاصل}} = V_{\text{استوانه بزرگ}} - V_{\text{استوانه کوچک}}$$

یادآوری : $V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h$

$$\begin{aligned} V_{\text{حجم حاصل}} &= \pi (3)^2 \times 3 - \pi (2)^2 \times 3 \\ &= 27\pi - 12\pi = 15\pi \end{aligned}$$



حل ب)

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با

مقاطع مخروطی

قسمت دوم: بیضی

جلسه دوم: صفحات ۱۲۶ تا ۱۳۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

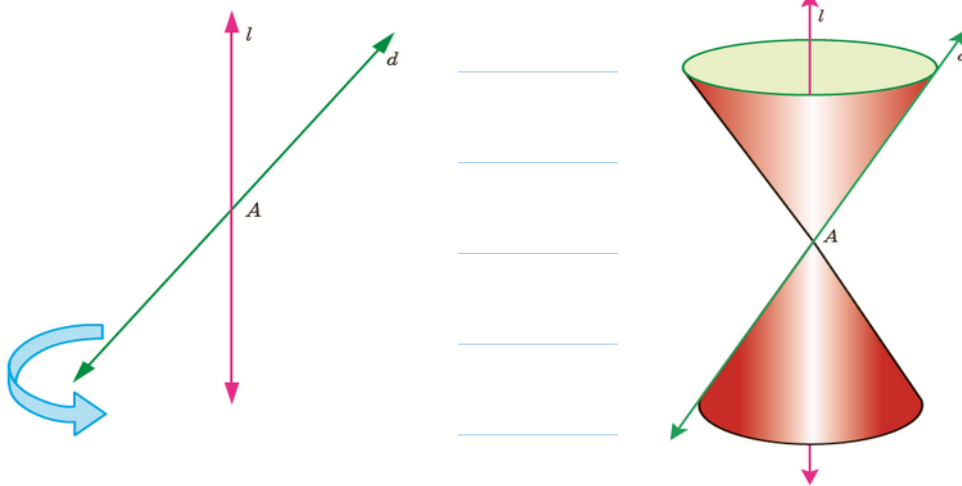
گروه ریاضی
استان همدان

آشنایی با مقاطع مخروطی

فرض کنید خط های d و l در نقطه A متقاطع باشند. اگر خط d را حول خط l بچرخانیم

شکل حاصل را یک سطح مخروطی می نامیم. در این سطح، خط l را محور، نقطه A را رأس و

خط d را مولد می نامیم.



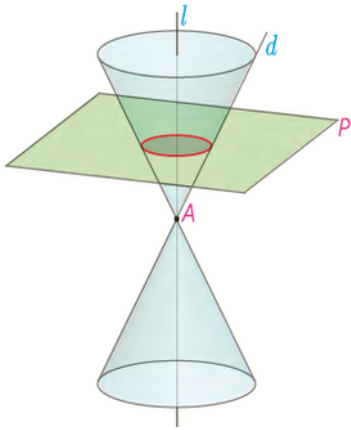
اگر یک سطح مخروطی را با یک صفحه برش دهیم، مقطع مخروطی بوجود می آید. با توجه به موقعیت صفحه

و سطح مخروطی، مقاطع مخروطی متفاوتی حاصل خواهد شد.

۱) دایره :

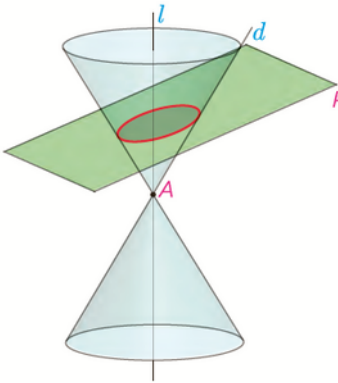
اگر سطح مخروطی را با یک صفحه که بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی کند

برش دهم، سطح مقطع دایره خواهد بود.



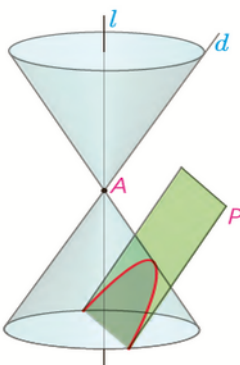
۱۲. بیضی:

اگر سطح مخروطی را با صفحه‌ای برش دهیم که نه بر محور سطح مخروطی عمود باشد نه با محور سطح مخروطی موازی باشد و نه از رأس مخروطی بگذرد، سطح مقطع حاصل، بیضی خواهد بود.



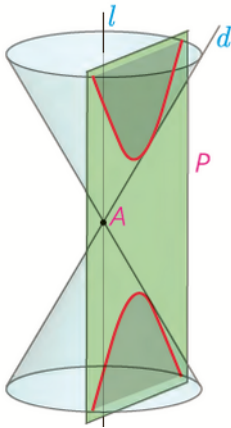
۱۳. سهمی:

اگر سطح مخروطی را با صفحه‌ای برش دهیم که با محور سطح مخروطی موازی است و از رأس مخروطی نگذرد، شکل حاصل سهمی خواهد بود.

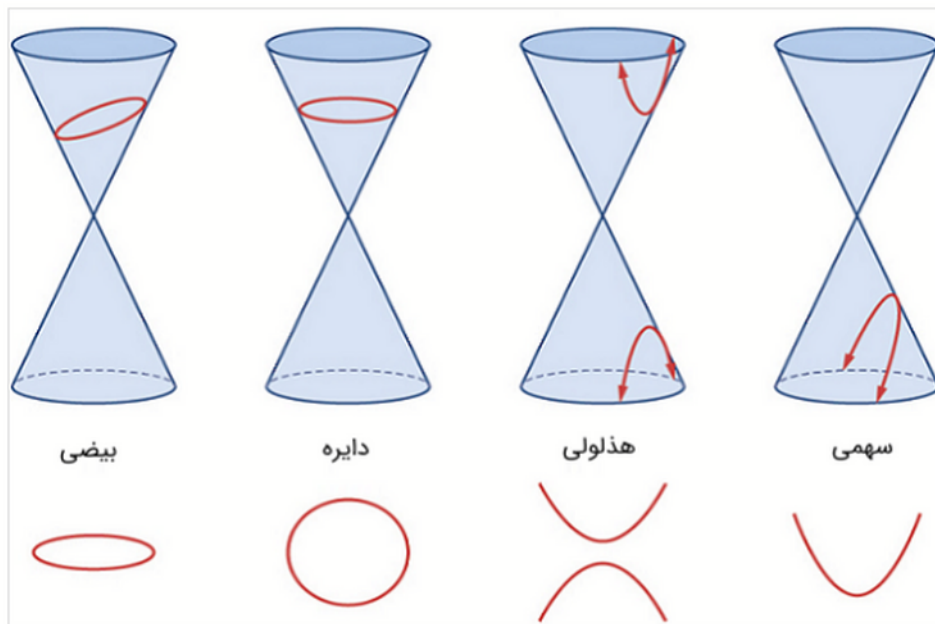


۱۴ هذلولی :

در صورتی که سطح مخروطی را با صفحه‌ای برش دهیم که هم قسمت بالایی هم قسمت پایینی سطح را قطع کند و از دو رأس عبور نکند، سطح مقطع حاصل، یک هذلولی خواهد بود.



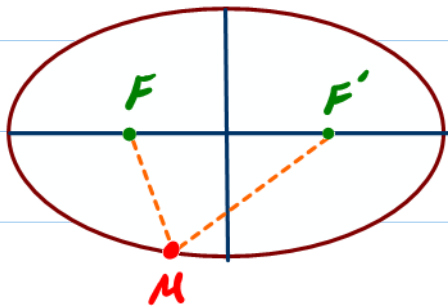
جمع‌بندی :



بررسی بیشتر بیضی :

تعریف : بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله های آن نقاط از دو نقطه ثابت

در صفحه ، مدری ثابت است .



$$MF + MF' = \text{مدر ثابت}$$

معرفی اجزای بیضی :

۱) دو نقطه ثابت F, F' را کانون های بیضی می نامیم و اندازه FF' فاصله کانونی

بیضی نامیده می شود و برابر $2c$ تعریف می شود یعنی $FF' = 2c$.

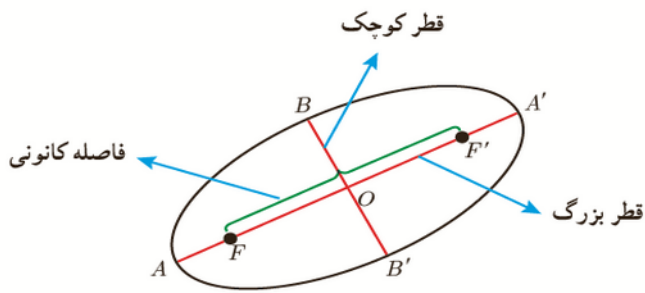
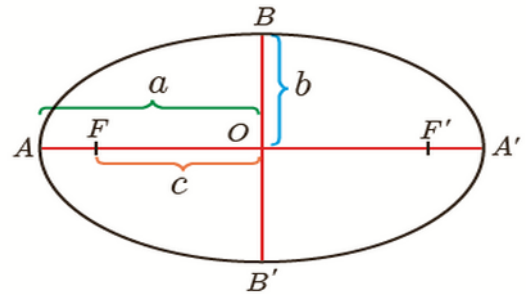
۲) وسط FF' را مرکز بیضی در نظر گرفته و با O نشان می دهیم .

۳) قطری که از کانون های بیضی می گذرد را محور بزرگ یا کانونی بیضی می نامیم و با AA'

نشان می دهیم و اندازه آن را برابر $2a$ می گیریم پس $AA' = 2a$.

۱۴) قطری که بر قطر بزرگ در مرکز بیضی عمود است را قطر کوچک بیضی نامیده و با BB' نمایش

می‌دهیم. در اندازه‌های آن را $2b$ می‌گیریم یعنی $BB' = 2b$.



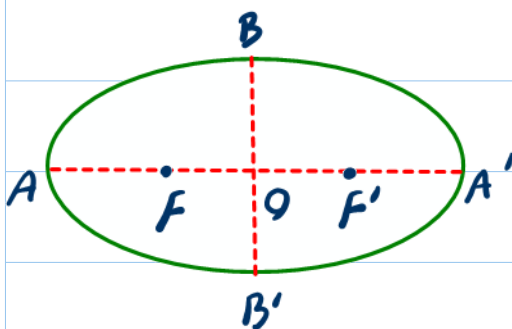
تذکر: اگر قطر بزرگ بیضی، انحنای باشد، بیضی انحنای است و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی

قائم‌الاست.

قضیه ۱) مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های آن برابر طول قطر بزرگ بیضی

است یعنی: $MF + MF' = AA' = 2a$

(نشان بده):



۱) برای نقطه A: $متناهی = AF + AF' = AF + (AF + FF') = 2AF + FF'$

$$\text{برای نقطه } A: \text{مستطاب} = A'F' + AF = \underline{A'F'} + (\underline{A'F} + FF') = 2A'F' + FF' \quad (2)$$

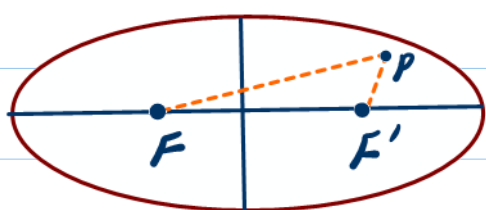
$$(1) \text{ و } (2) \rightarrow \text{مستطاب} = 2AF + \cancel{FF'} = 2A'F' + \cancel{FF'} \Rightarrow 2AF = 2A'F'$$

$$\Rightarrow AF = A'F'$$

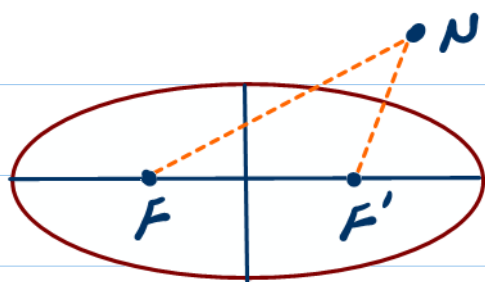
$$A: \text{مستطاب} = AF + AF' = A'F' + AF' = AA' = 2a \quad \square$$

نتیجه: اگر نقطه‌ای خارج بیضی باشد، مجموع فاصله‌های آن تا کانون‌های بیضی از $2a$

بیشتر است. اگر نقطه‌ای درون بیضی باشد، مجموع فاصله‌های آن تا کانون‌های بیضی از $2a$ کمتر است.



$$PF + PF' < 2a$$



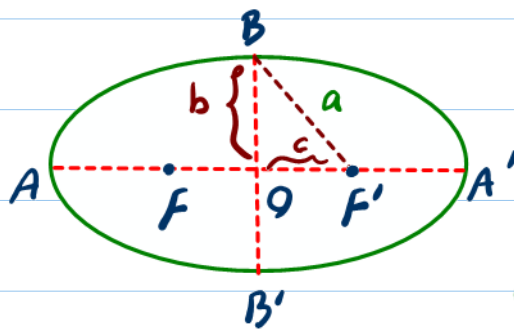
$$NF + NF' > 2a$$

نقشه ۲) اگر در یک بیضی، نصف طول قعر بزرگ برابر a ، نصف طول قعر کوچک برابر b

و نصف فاصله کانونی برابر c باشد، رابطه $a^2 = b^2 + c^2$

(اثبات)

از B به F و F' می‌کشیم.



مقدار ثابت $BF + BF' = 2a$ برای بیضی

از طرفی BB' محور منصف FF' است و می‌دانیم فاصله هر نقطه روی محور منصف از

در سرباره خط به یک فاصله است یعنی $BF = BF'$ بنابراین $BF' = a$.

در مثل قائم‌الزاویه BOF' نقشه نیامده را می‌نویسیم:

$$BF'^2 = BO^2 + OF'^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \quad \square$$

مثال: اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5$ و $b=3$ ، در این صورت اندازه فاصله کانونی را محاسبه کنید.

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow 5^2 - 3^2 = c^2 \Rightarrow 25 - 9 = c^2$$

$$\rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4 \rightarrow FF' = 2c = 2 \times 4 = 8$$

مثال: در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴، ۵) باشد:

الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.

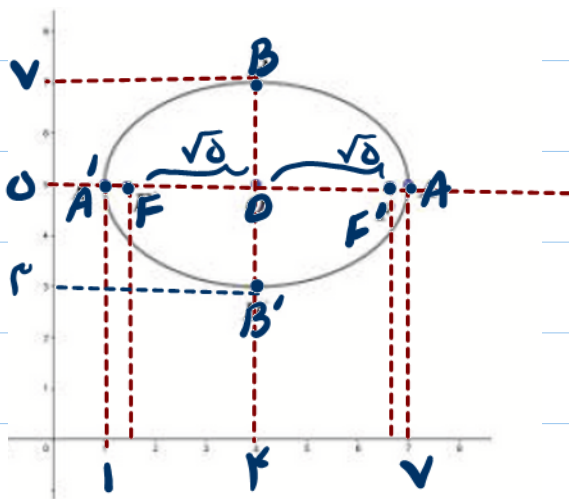
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

$$\text{الف) } AA' = 2a = 4 \rightarrow a = 2$$

$$BB' = 2b = 4 \rightarrow b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \rightarrow 2^2 - 2^2 = c^2 \rightarrow 4 - 4 = c^2 \rightarrow c^2 = 0$$

$$\rightarrow c = \sqrt{0} \rightarrow FF' = 2c = 2\sqrt{0}$$



ب)

$$A(2,0), A'(-2,0)$$

$$B(0,2), B'(0,-2)$$

$$F(0,1), F'(0,-1)$$

خروج از مرکز بیضی :

مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامیم و با حرف e نمایش می دهیم.

چون $a^2 = b^2 + c^2$ پس $c < a$ است و در نتیجه $1 > \frac{c}{a} > 0$. بنابراین

خروج از مرکز همیشه از یک کمتر است.

هر قطعه خروج از مرکز بزرگتر و بیکی نزدیکتر باشد، بیضی کشیده تر و هر قطعه خروج از مرکز کوچکتر

و بیکی نزدیکتر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیکتر می شود.

مثال: خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.
(الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.
(ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون های بیضی را پیدا کنید.

$$\text{الف) } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}, \quad BB' = 2b = 6 \rightarrow b = 3$$

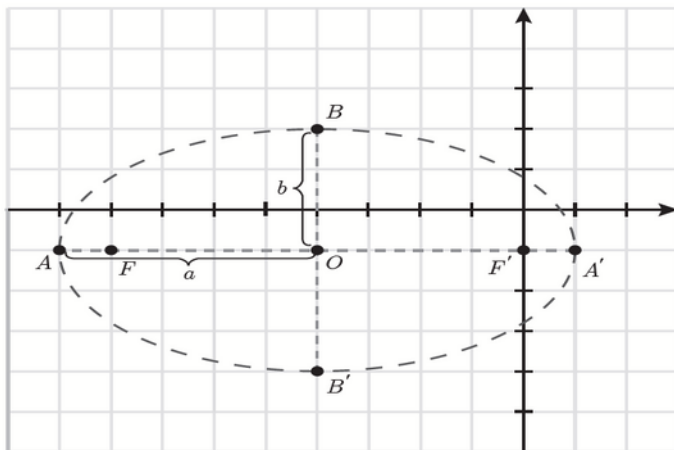
$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \rightarrow 5c = 4a \xrightarrow{+5} c = \frac{4}{5}a$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 3^2 + \left(\frac{4}{5}a\right)^2 \rightarrow a^2 - \frac{16}{25}a^2 = 9$$

$$\frac{20a' - 12a'}{20} = 9 \rightarrow \frac{9}{20} a' = 9 \xrightarrow{\div 9} \frac{a'}{20} = 1 \rightarrow a' = 20 \rightarrow a = 8$$

$$c = \frac{c}{a} a = \frac{c}{8} \times 8 = 2$$

$$AA' = 2a = 2 \times 8 = 16, \quad FF' = 2c = 2 \times 2 = 4$$



(ب)

$$A(-8, 0) \quad A'(8, 0)$$

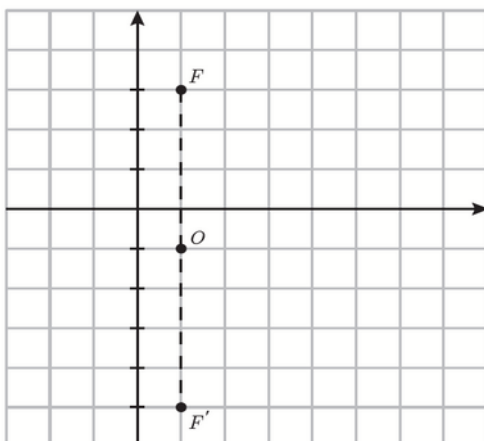
$$B(0, 2) \quad B'(0, -2)$$

$$F(-2, 0) \quad F'(2, 0)$$

نشان: کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = 6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.



الف) با توجه به مختصات F و F' بیضی قائم است

$$FF' = |3 - (-5)| = |3 + 5| = 8$$

$$O = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{-5+7}{2} \right) = (1, 1) \quad \text{وسط فف است.}$$

$$u = 1 : \text{برای قطر بزرگ} \quad v = -1 : \text{برای قطر کوچک}$$

$$(b) \quad FF' = 2c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{2} \quad , \quad a' = b' + c' \Rightarrow a' - c' = b' \quad , \quad FF' = 2c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4' - \frac{1}{2} = b' \rightarrow 3\frac{1}{2} = b' \rightarrow 2. = b' \rightarrow b = \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{4 \times 0} = 2\sqrt{0} \quad \Rightarrow BB' = 2b = 2(2\sqrt{0}) = 4\sqrt{0}$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

مثال شماره ۹۸ :

در یک بیضی به کانون‌های $(2, 7)$ و $(2, -1)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

۰/۸ (۴) ✓

۰/۷۵ (۳)

۰/۶۴ (۲)

۰/۶ (۱)

$$FF' = \sqrt{(2-2)^2 + (7-(-1))^2} = \sqrt{0+8^2} = \sqrt{64} = 8 = 2c \rightarrow c = 4$$

$$BB' = 2b = 6 \rightarrow b = 3 \quad , \quad a' = b' + c' \rightarrow a' = 9 + 16 \rightarrow a' = 25$$

$$\rightarrow a = 5 \rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{گزینه ۴}$$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس دوم: دایره

قسمت اول

جلسه سوم: صفحات ۱۳۴ تا ۱۳۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

دایره:

تعریف: مجموعه نقاطی از صفحه را که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت به نام مرکز، مقداری

ثابت و غیر صفر به نام شعاع است، دایره می‌نامیم.

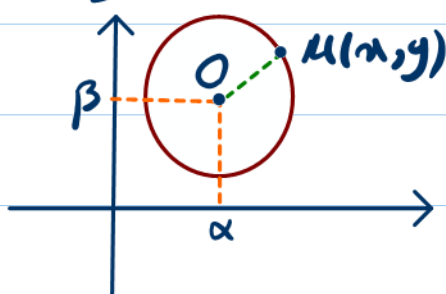
دایره با به مرکز O و شعاع r را با (O, r) نشان می‌دهیم.

معادله استاندارد دایره:

اگر نقطه O به مختصات (α, β) مرکز دایره و r شعاع آن باشد، معادله استاندارد

دایره به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ است. زیرا اگر فاصله نقطه M با

مختصات (x, y) روی محیط دایره را از مرکز دایره $O(\alpha, \beta)$ به رسم داریم:



$$OM = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \xrightarrow{OM=r} r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان 2}} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

یادآوری ۱: فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ با طول یاره خط AB :

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

یادآوری ۲: مختصات وسط یاره AB : $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

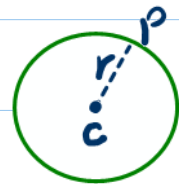
مثال: در حالت‌های زیر معادله دایره را بنویسید:

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2, -1)$ باشد.

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2, 3)$ و نقطه $(-3, -9)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

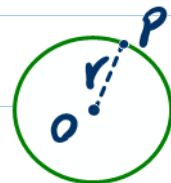
پ) دایره‌ای که نقاط $(0, 3)$ و $(-4, -1)$ دو سری یکی از قطرهای آن باشند.

الف) مرکز دایره $C(2, -1)$ ^{α} ^{β} روی خط یاره $p(0, 0)$ (الف)



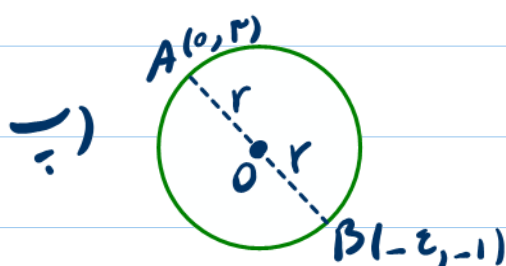
$$|PC| = r = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

ب) مرکز دایره $O(2, 3)$ ^{α} ^{β} روی خط یاره $p(-3, -9)$ (ب)



$$|PO| = r = \sqrt{(-3-2)^2 + (-9-3)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 169 \rightarrow 13^2$$



$$AB = 2r = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$2r = 4\sqrt{2} \rightarrow r = 2\sqrt{2} \rightarrow r^2 = 4 \times 2 = 8$$

$$O_{\text{وسط } AB} = \left(\frac{-4+0}{2}, \frac{-1+4}{2} \right) = (-2, 1) \rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

مثال: اگر معادله دایره‌ای به شکل $(x+1)^2 + y^2 = 4$ باشد:
الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.

$$O(-1, 0), \quad r^2 = 4 \rightarrow r = 2$$

ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$$\text{محال بر محور } x: y=0 \rightarrow (x+1)^2 + 0^2 = 4 \rightarrow (x+1)^2 = 4 \rightarrow x+1 = \pm 2$$

$$\begin{cases} x+1=2 \rightarrow x=1 \\ x+1=-2 \rightarrow x=-3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{نقاط تقاطع} \\ \text{با محور } x \end{matrix}$$

$$\text{محال بر محور } y: x=0 \rightarrow (0+1)^2 + y^2 = 4 \rightarrow 1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

نقاط تقاطع با محور y: $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$

معادله ضمیمه یا گسترده دایره:

اگر با استفاده از یک درج دوم مجهولی، معادله استاندارد دایره را بازکنیم به معادله گسترده دایره می‌رسیم.

$$\text{که به صورت: } x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{به درستی}$$

در فرم ضمیمه دایره مختصات مرکز $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right)$ است و شعاع از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

تذکره: با توجه به رابطه شعاع واصله باید زیر رادیکال مثبت باشد و توان گفت زه

دایره منحنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله دایره است که $a^2 + b^2 - 4c > 0$ باشد

مثال: معادله گسترده دایره ای به شکل $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

روشن اول: $O(1, 2) \rightarrow O(-\frac{2}{2}, -\frac{4}{2}) \rightarrow O(-\frac{2}{2}, -\frac{4}{2})$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - 4 \times 4} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 16} = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1$$

معادله استاندارد: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

روش دوم: استفاده از جمع هس کردن

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \rightarrow \underline{x^2 - 2x} + \underline{y^2 - 4y} + 4 = 0$$

یادآوری: برای جمع هس کردن نصف ضرایب x و y را اضافه می‌کنیم.

x ضریب: $(-\frac{2}{2})^2 = 1$

y ضریب: $(-\frac{4}{2})^2 = 4$

$$\underline{x^2 - 2x + 1} + \underline{y^2 - 4y + 4} - 1 - 4 + 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 - 4 + 4 = 0 \rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

مثال: حدود a را طوری بیابید که $a = 0$ $x^2 + y^2 - 2x - a = 0$ حدود ضعیف یک دایره باشد.

$$1. -4a > 0 \rightarrow 9 + 1 + 4a > 0 \rightarrow 4(-a) > 0 \rightarrow 1^2 + (-2)^2$$

$$\rightarrow \frac{5}{4} - a > 0 \rightarrow \frac{5}{4} > a$$

وضعیتی نقطه دایره:

دایره ای به مرکز $O(a, b)$ شعاع r را در نظر بگیرید.

(الف) اگر نقطه A روی دایره باشد فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است یعنی

$$OA = r. \text{ پس نتایجی که به دست می آید در راستای } r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 \text{ صدق می کند}$$

نتایجی هستند که روی دایره قرار دارند.

(ب) اگر نقطه B درون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است یعنی

$$OB < r. \text{ پس نتایجی که به دست می آید در راستای } r^2 > (x-a)^2 + (y-b)^2 \text{ صدق می کند}$$

صدق می کند، نتایجی هستند که درون دایره قرار دارند.

پ ۱) اگر نقطه C بیرون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است یعنی

$$r < 0. \text{ پس نقاطی که مختصات آنها در ناسازی } r^2 > (x-a)^2 + (y-b)^2$$

صدق می کنند، نقاطی هستند که بیرون دایره قرار دارند.

مثال: با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید:

معادله دایره	شعاع و مختصات مرکز دایره	نقاط		
		$A(1, 1)$	$B(0, 3)$	$C(-2, 4)$
$C_1: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$	دایره به مرکز $(-2, 3)$ و شعاع ۲	بیرون دایره	روی دایره	درون دایره
$C_2: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$	دایره به مرکز $(1, -2)$ و شعاع ۳	روی دایره	بیرون دایره	بیرون دایره

$$A(1, 1) \xrightarrow{C_1} (1+2)^2 + (1-3)^2 = 9 + 4 = 13 > 4 \xrightarrow{r^2} \text{ بیرون دایره}$$

$$B(0, 3) \xrightarrow{C_1} (0+2)^2 + (3-3)^2 = 4 + 0 = 4 \xrightarrow{r^2} \text{ روی دایره}$$

$$C(-2, 4) \xrightarrow{C_1} (-2+2)^2 + (4-3)^2 = 0 + 1 = 1 < 4 \xrightarrow{r^2} \text{ درون دایره}$$

$$A(1, 1) \xrightarrow{C_2} (1-1)^2 + (1+2)^2 = 0 + 9 = 9 \xrightarrow{r^2} \text{ روی دایره}$$

$$C(-2, 4) \xrightarrow{C_2} (-2-1)^2 + (4+2)^2 = 9 + 36 = 45 > 9 \xrightarrow{r^2} \text{ بیرون دایره}$$

نکته: برای بررسی وضعیت نیمی نقطه دایره در مثل گنجه دایره، مقدمات نقطه را

در دایره قرار می دهیم. اگر مغرب است بعد از دایره، اگر در منحنی شد در دایره

و اگر در منحنی مثبت است بعد از دایره است.

مثال: وضعیت نقاط $(0,0)$ و $(-1,-2)$ ، $(0,-1)$ ، $(1,0)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مشخص کنید.

$$\text{برون دایره} \quad 0 < 1 = 1 + 4 + 1 - 2 \times 0 + 4 \times 0 = 1 \rightarrow (0,0)$$

$$0 = 1 + 4 + 2 - 8 + 1 = 0 \rightarrow (-1,-2) \quad \text{روی دایره}$$

$$0 < -2 = 1 - 4 + 1 - 2 \times 0 + 4 \times (-1) = -2 \rightarrow (0,-1) \quad \text{درین دایره}$$

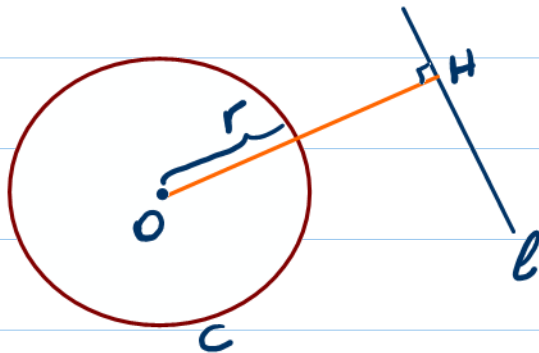
$$0 = 1 - 2 + 1 = 0 \rightarrow (1,0) \quad \text{روی دایره}$$

اوضاع نسبی خط و دایره :

یک خط و دایره می‌توانند به سه حالت زیر یکدیگر قرار گیرند :

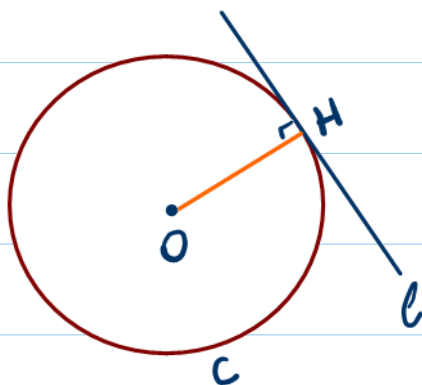
الف) دایره و خط هیچ نقطه مشترکی با هم نداشته باشند یعنی دایره و خط یکدیگر را قطع نکنند.

اگر فاصله مرکز دایره تا خط را OH بگیریم داریم : $OH > r$



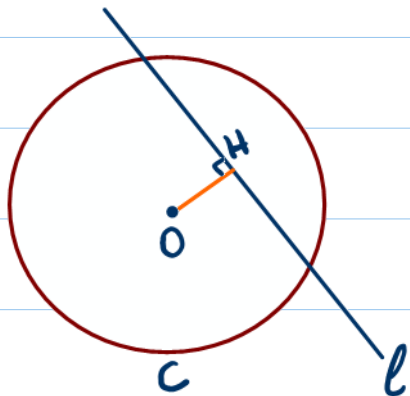
ب) دایره و خط یک نقطه مشترک داشته باشند، یعنی خط بر دایره مماس باشد. خط مماس

در نقطه مماس بر شایع نظر نقطه مماس عمود است و داریم : $OH = r$



پ دایره و خط دو نقطه مشترک داشته باشند، یعنی خط دایره را قطع می‌کند. در این حالت داریم:

$$OH < r$$



یادآوری رابطه فاصله نقطه از خط:

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $l: ax + by + c = 0$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: اوضاع خط‌های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

(الف) $6x + 4y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

$$O(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = (2, 2), \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{32}$$

$$\rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{4} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

فرب و رشت فرب و رشت

$$OH = \frac{|1 \times 2 + 4 \times 2 + 0|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{16+1}} = \frac{10}{\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{17}}$$

$$OH = \frac{10}{\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{17}} \approx 2.77$$

خط را بر رانطع نمی کند. $\Rightarrow 2.77 = OH > r = 1$ (بیرون دایره)

ب) $y = -x - 2$ و $x^2 + y^2 = 2$

$O(0,0)$, $r = \sqrt{2}$ $l: x + y + 2 = 0$

$$OH = \frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2}{2} = 1$$

$\Rightarrow OH = r = \sqrt{2}$ خط بر دایره مماس است.

ب) دایره $x^2 + (y+3)^2 = 4$ و خط $y = -1$

$O(2,-3)$, $r = 2$ $l: y + 1 = 0$

$$OH = \frac{|0 \times 2 + 1(-3) + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|-3+1|}{1} = |-2| = 2 \Rightarrow OH = r = 2$$

خط بر دایره مماس است

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل ششم: هندسه

درس دوم: دایره

قسمت دوم

جلسه چهارم: صفحات ۱۳۹ تا ۱۴۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

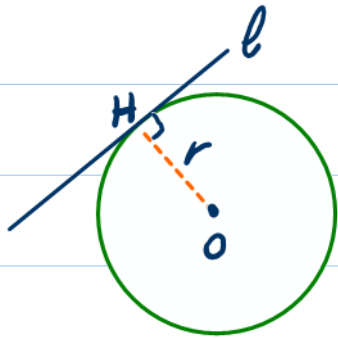
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطه $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.



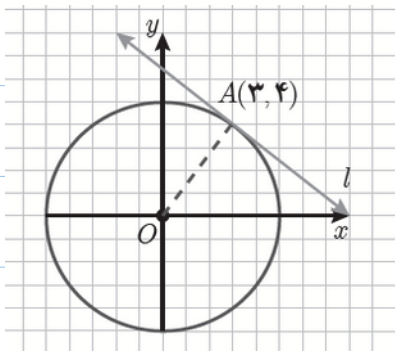
$$l: 3x - 4y - 3 = 0$$

$$OH = r = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$$

معادله دایره: $(x-0)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$$\rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 9$$

مثال: اگر بدانیم خط l در نقطه $(3, 4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مماس است، معادله خط مماس چیست؟



چون شعاع در محل تماس بر خط مماس عمود است، پس $OA \perp l$ و شیب آنها قسماً درجه ۹۰ است.

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{4 - 0}{3 - 0} = \frac{4}{3}$$

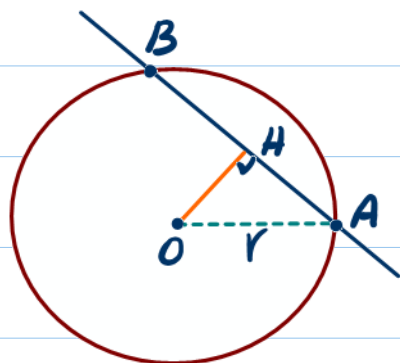
$$m_l = -\frac{3}{4}, \quad A(3, 4)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \xrightarrow{\times 4} 4y - 16 = -3x + 9 \rightarrow 3x + 4y - 25 = 0$$

معادله خط l

نکته: در حالتی که خط دایره را قطع کند، دایره روی خط دایره به طول $2r$ جدا می‌کند

که از رابطه $AB = 2\sqrt{r^2 - OH^2}$ بدست می‌آید زیرا :



اگر فرض کنیم OH فاصله مرکز دایره از خط دایره

$$r^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow AH^2 = r^2 - OH^2$$

$$\rightarrow AH = \sqrt{r^2 - OH^2}$$

به راحتی ثابت می‌شود $AB = 2AH$ پس $AB = 2\sqrt{r^2 - OH^2}$

مثال: مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.

$$OH = \frac{|3 \times 2 - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 12 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$AB = 2\sqrt{r^2 - OH^2} \rightarrow 6 = 2\sqrt{r^2 - 4^2} \rightarrow 3 = \sqrt{r^2 - 16}$$

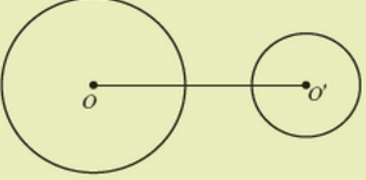
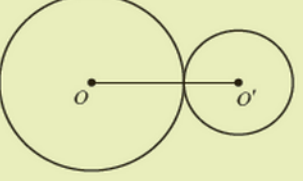
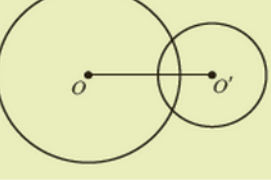
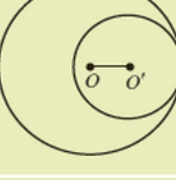
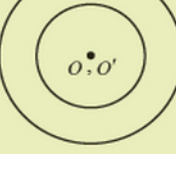
$$\xrightarrow{\text{مربع کردن}} 9 = r^2 - 16 \rightarrow r^2 = 25 \rightarrow r = 5 \rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

اوضاع نسبی دو دایره :

اگر نقاط O ، O' مرکزهای دو دایره به شعاع‌های r ، r' باشند و پاره خطی که مرکزهای دو دایره

را به هم وصل می‌کند، خط‌الرکنین بنامیم و با d نمایش دهیم، وضعیت دو دایره با توجه به

طول r ، r' ، d به یکی از صورت‌های زیر است : ($r > r'$)

	$d > r + r'$	دو دایره بیرون هم (متخارج)
	$d = r + r'$	دو دایره مماس بیرون
	$r - r' < d < r + r'$	دو دایره متقاطع
	$d = r - r'$	دو دایره مماس درون
	$d < r - r'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دو دایره هم‌مرکز

مسئله: برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید :

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \quad \text{و} \quad C_2: x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9$$

$$C_1: O(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \rightarrow O(1, -2), \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 - 4(-4)}$$

$$\rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{36} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$C_2: O'(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \rightarrow O'(-1, 2), \quad r' = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - 4(-9)}$$

$$\rightarrow r' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 36} = \frac{1}{2} \sqrt{56} = \frac{1}{2} \sqrt{14 \times 4} = \sqrt{14} \approx 3.7$$

$$d = OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \approx 4.47$$

$$\sqrt{14} - 3 < \sqrt{20} < \sqrt{14} + 3 \rightarrow r' - r < OO' < r + r \rightarrow \text{دو دایره متقاطع اند}$$

$$C_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 7 \quad \text{و} \quad C_2: x^2 + (y-5)^2 = 5$$

$$C_1: O(2, -3), \quad r = \sqrt{7} \quad C_2: O'(0, 5), \quad r' = \sqrt{5}$$

$$OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} \Rightarrow \sqrt{68} > \sqrt{7} + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow OO' > r + r' \Rightarrow \text{دو دایره متفرج اند}$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که بر دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ مماس بیرون و مرکز آن نقطه $O^\alpha(-2, 2)$ باشد.

$$C_1: O'(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}) \rightarrow O'(-1, 2)$$

$$r' = \frac{1}{3} \sqrt{2^2 + (-4)^2 - 4(-4)} = \frac{1}{3} \sqrt{4 + 16 + 16} = \frac{1}{3} \sqrt{36} = 2$$

$$OO' = \sqrt{(2+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

مماس بیرون: $OO' = r + r' \rightarrow 5 = 2 + r' \rightarrow r' = 3$

معادله دایره: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O^\alpha(-1, -1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد.

$$C_1: O'(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) = (2, 3)$$

$$r' = \frac{1}{3} \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 - 4(-3)} = \frac{1}{3} \sqrt{16 + 4 + 12} = \frac{1}{3} \sqrt{32} = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$$

$$OO' = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

مماس درون: $OO' = |r - r'| \rightarrow 5 = |r - \frac{4}{3}|$
 $\begin{matrix} r=9 \checkmark \\ r=-1 \times \end{matrix}$

معادله دایره: $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل هفتم: احتمال

یادآوری: مفاهیم شمارش و احتمال

جلسه اول: صفحه ۱۴۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

نکات و مفاهیم پایه در شمارش :

۱- اصل ضرب : فرض کنید رنجام کاری k مرحله دارد. اگر مرحله اول را بتوان به m_1 طریق

تکثیر کرد «و» رنجام دارد، مرحله دوم را به m_2 طریق و... مرحله k ام را به m_k طریق

رنجام دارد، کل کار مورد نظر را می توان به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق رنجام دارد.

۲- اصل جمع : فرض کنید بتوان کاری را از k روش رنجام دارد. اگر روش اول به m_1 طریق،

روش دوم به m_2 طریق و... روش k ام به m_k طریق ممکن باشد و خود هم

نقطه ای از این k روش را انتخاب کنیم، برای رنجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ یا از روش اول یا از روش دوم یا...
طریق وجود دارد.

مثال کنکور ریاضی ۹۹ :

تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش پذیر بر ۵، با ارقام غیر تکراری، کدام است؟

۹۷۲ (۴)

۹۶۸ (۳)

۹۵۲ (۲) ✓

۹۴۸ (۱)

$$\boxed{9} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1} = 504$$

$$\Rightarrow 504 + 448 = 952$$

$$\boxed{8} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{1} = 448$$

گزیده ۲

فرموده

۳- جابجایی:

فرض کنید n شیء متمایز داریم. به صورت از قرار گرفتن این اشیاء در کنار هم یک جابجایی می‌گیریم. تعداد جابجایی‌های n شیء متمایز $n!$ است.

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad 0! = 1$$

مثال: a, b, c	abc	bca
	acb	cab
	bac	cba

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

۴- تبدیل (ترتیب):

تعداد جابجایی‌های r تایی از n شیء متمایز یا جابجایی دیگر تعداد انتخاب‌های r تایی

از بین n شیء متمایز را که در کنارها ترتیب قرار گرفتن اهمیت داشته باشد را با $P(n, r)$

نشان می‌دهیم و به آن تبدیل r تایی از n شیء متمایز گفته می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: a, b, c	$\xrightarrow{\text{جابجایی‌های ۲ تایی}}$	ab, ba, ac, ca	$P(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$
		bc, cb	

۵- ترکیب:

بعد از انتخاب r شی از n شی متبقی که در آن ترتیب اشیاء انتخاب شده مهم نباشد، یک

ترکیب r تایی از n شی می‌گیریم و تعداد آن‌ها را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که از رابطه زیر می‌توانیم بدست آوریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3 \quad \text{ترکیب‌های } \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \text{ مثلاً } a, b, c$$

حالت‌های خاص در رابطه ترکیب:

$$۱) \binom{n}{0} = 1 \quad \text{مثلاً } \binom{1}{0} = 1$$

$$۲) \binom{n}{n} = 1 \quad \text{مثلاً } \binom{0}{0} = 1$$

$$۳) \binom{n}{1} = n \quad \text{مثلاً } \binom{7}{1} = 7$$

$$۴) \binom{n}{n-1} = n \quad \text{مثلاً } \binom{6}{5} = 6$$

$$۵) \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{مثلاً } \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

$$۶) \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad \text{مثلاً } \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$$

$$۷) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \text{مثال} \quad \binom{۷}{۳} = \binom{۷}{۴} \quad \underline{۱} \quad \binom{۱}{۱} = \binom{۱}{۰}$$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌ها ۲ⁿ خفزی از یک مجموعه n خفزی برابر $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \dots + \binom{n}{n}$ است و تعداد زیرمجموعه‌ها

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \dots + \binom{n}{n} = ۲^n \quad \text{یک مجموعه n خفزی برابر ۲^n است پس:}$$

مثال کنکور تجربی ۹۹:

به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

۹۵ (۴)

۹۱ (۳) ✓

۸۷ (۲)

۸۴ (۱)

$$\binom{۷}{۵} = \binom{۷}{۲} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱ \quad \text{دو نفر را کنار بگذاریم}$$

$$\binom{۲}{۱} \binom{۷}{۴} = ۲ \times \binom{۷}{۴} = ۲ \times \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۳!} = ۲ \times ۳۵ = ۷۰ \quad \text{یکی از دو نفر را کنار بگذاریم}$$

$$۲۱ + ۷۰ = ۹۱ \quad \text{گزینه ۳}$$

مثال کنکور تجربی ۹۸:

گل فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱۶۸ (۴)

۱۵۴ (۳) ✓

۱۴۰ (۲)

۱۲۶ (۱)

$$\binom{۸}{۴} + \binom{۸}{۵} + \binom{۸}{۶} = ۷۰ + \binom{۸}{۴} + \binom{۸}{۲} = ۷۰ + \frac{۸ \times ۷ \times ۶}{۴} + \frac{۸ \times ۷}{۲}$$

$$\frac{۸!}{۴! \times ۴!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۴!} = ۷۰$$

$$= ۷۰ + ۵۶ + ۲۸ = ۱۵۴ \quad \text{گزینه ۳}$$

نکات و نیم به در احوال :
- :-

۱- پدیده یا آزمائش تصادفی: پدیده ای است که نتیجه آن را نتوان قبل از رخ نمود، به طور قطعی

پیش بینی کرد.

۲- فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن برای یک آزمائش تصادفی را فضای نمونه ای می نامیم

و آن را با S نمایش می دهیم.

۳- شمار تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک شمار تصادفی در آن فضای نمونه ای گویند.

و آن را $A, B, C, \dots$ نشان می دهیم.

۴- احوال روی شمارها: اگر A و B شمارهای تصادفی در فضای نمونه ای S باشند:

الف) اجتماع A و B : شمار $A \cup B$ را می گویند که حداقل یکی از دو شمار A یا B رخ دهد:

$$A \cup B = \{ \omega \in S \mid \omega \in A \vee \omega \in B \}$$

ب) اشتراک A و B : شمار $A \cap B$ را می گویند که هر دو شمار A و B رخ دهند:

$$A \cap B = \{u \in S \mid u \in A \wedge u \in B\}$$

پ، حاصل A ، B : پیام $A-B$ ز غای A دهده ولی B دهده :

$$A-B = \{u \in S \mid u \in A \wedge u \notin B\}$$

(از A اترک A ، B را حذف می کنیم.)

ت، متمم پیام : پیام A' ز غای A دهده که پیام A دهده :

$$A' = \{u \in S \mid u \notin A\}$$

$$(A' = S - A)$$

۵- احتمال رخ دادن یک پیام : احتمال وقوع پیام A از فضای نمونه ای S را با $P(A)$

نمایش می دهیم و از رابطه زیر می سببی کنیم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیام}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه ای}}$$

دقت کنید برای یافتن $n(A)$ و $n(S)$ در صورت امکان با نوشتن پیامدهای نمونه ای،

تعداد اعضا را محاسبه کنیم و در فرآیند محاسبه از اصل قیاس جمع، جایگزینی و ترکیب استفاده می کنیم.

۶- چندبسامد خاص :

- الف) اگر A تهی باشد آنگاه $p(A) = 0$ است و به بسامد A فرسنگی گویند.
- ب) اگر $A = S$ باشد آنگاه $p(A) = 1$ است و به بسامد A حتمی گویند.
- ج) اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه A و B را بسامدهای ناهمگاری گویند.

۷- چند قانون در احتمال :

۱) احتمال هسته خدای بین ۰ و ۱ است یعنی $0 \leq p(A) \leq 1$.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (۲)$$

۳) اگر A و B ناهمگاری باشند در قانون ۲: $p(A \cap B)$ صفر می شود :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$1 = p(S) = p(A \cup A') = p(A) + p(A') \quad (۴)^*$$

پس قانون احتمال بسامد متمم را داریم : $p(A) = 1 - p(A')$ یا $p(A') = 1 - p(A)$

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) \quad (۵)$$

$A \cap B'$

۸- احتمال شرطی:

احتمال وقوع A به شرط B که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم:

احتمال وقوع پیشامد A است به شرطی که بدانیم پیشامد B رخ داده است و برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \xrightarrow[\text{درخرج بر } n(B)]{\text{تقسیم صورت}} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) \neq 0$$

می‌دانیم مسائل احتمال شرطی را بدون فرمول و با **کافش فضای نمونه‌ای** هم حل کرد.

۹- قانون ضرب احتمال:

از رابطه احتمال شرطی $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ برای y به $P(A \cap B)$ (نشانه‌ی کنیم):

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

از این رابطه در مسائلی استفاده می‌کنیم که دو پیشامد A و B پشت سرهم رخ دهند.

۱۰- پیشامدها مستقل:

می‌گوئیم دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، به شرطی که وقوع **یکی** بر احتمال وقوع

دگرگی تأثیر نداشته باشد.

اگر A و B رویشامد مستقل باشند نگاه :

$$P(A|B) = P(A) \quad , \quad P(B|A) = P(B)$$

در نتیجه : رویشامد A و B مستقل از هم هستند اگر فقط اگر $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

وقت داشته باشید اگر A و B مستقل باشند نگاه $A, B, A', B', A \cap B, A \cap B'$ هم مستقل اند.

نکته مهم : اگر A و B رویشامد ناآوی و نامازگار باشند نگاه A و B مستقل نیستند.

مثال شماره ۹۹ :

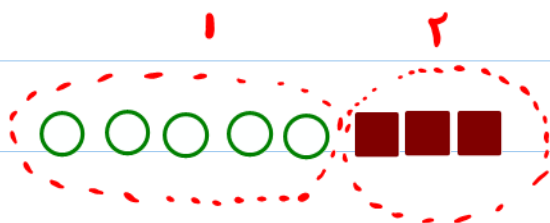
پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

$$\frac{1}{56} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{28} \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{21} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{14} \quad (۱)$$



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \times 3! \times 2!}{1!} = \frac{5! \times 6 \times 2}{8 \times 7 \times 6 \times 5} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$$

گزین ۳

مسئله تئوری (خارج) ۹۹:

۱۵ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد مورد نظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

$$\frac{9}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۳) \checkmark$$

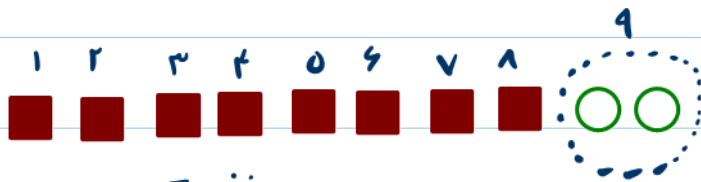
$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

روش اول: (شماره از یکم به ششم)

A : در ردیف مورد نظر نشاند

A' : در ردیف مورد نظر نشاند

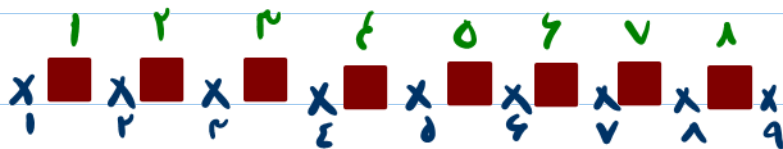


جای دو نفر در ردیف ۹

$$P(A') = \frac{9! \times 2!}{1.1} = \frac{9! \times 2}{1 \times 9!} = \frac{2}{1} = \frac{1}{5} \rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

گزینه ۳

روش دوم: معادله مستقیم



جای دو نفر در ردیف ۹

$$P(A) = \frac{P(9,2) \times 1!}{1.1} = \frac{\frac{9!}{(9-2)!} \times 1!}{1.1} = \frac{\frac{9!}{7!} \times 1!}{1.1}$$

$$= \frac{9! \times 1!}{7! \times 1.1} = \frac{\cancel{9!} \times \cancel{1!} \times \cancel{7!}}{\cancel{7!} \times 1 \times \cancel{1!}} = \frac{1}{1} = \frac{4}{5}$$

گزینه ۳

مثال ششدر ریاضی (فاج) ۹۹ :

یک تاس سالم را سه بار به طور متوالی پرتاب می کنیم، احتمال روشن شدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

$$\frac{31}{72} \quad (4)$$

$$\frac{91}{216} \quad (3)$$

$$\frac{41}{108} \quad (2)$$

$$\frac{13}{36} \quad (1)$$

A : آمدن حداقل یک بار ۶

A' : آمدن ۶ ظاهر نشود $n(A') = 0 \times 0 \times 0 = 120$

$$P(A') = \frac{120}{4^3} = \frac{120}{216} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{120}{216} = \frac{216-120}{216} = \frac{96}{216}$$

گزینه ۳

مثال ششدر ریاضی ۹۹ :

به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

$$\frac{8}{15} \quad (4)$$

$$\frac{7}{15} \quad (3)$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

نکته: از مجموعه N کفزه: $\{n+1, n+2, \dots, n+N\}$ تعداد $\left[\frac{N}{k}\right]$ تا بزرگترین مضرب k

A : عدد در انتخابی مضرب ۳ $N = 9 \times 10 = 90$ $n(A) = \left[\frac{90}{3}\right] = 30$

$$n(A) = \left[\frac{90}{3}\right] = [30] = 30$$

B : عدد انتخابی مضرب ۵ $n(B) = \left[\frac{90}{5}\right] = 18$

$A \cap B$: عدد انتخابی مضرب ۱۵ $n(A \cap B) = \left[\frac{90}{15}\right] = [6] = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{9}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{18}{9}, \quad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{4}{9}.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{9} + \frac{18}{9} - \frac{4}{9} = \frac{17}{9} \quad \text{گزینه ۳}$$

مسئله کنکور ۹۹:

تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این که لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{7}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{5}{12} \quad (1)$$

$$n(S_{\text{مفید}}) = \text{در تاس زوج یک تاس فرد} + \text{در تاس فرد یک تاس زوج}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 + (3 \times 3 \times 3) \times 3 = 27 + 81 = 108$$

A: حدتس یک تاس زوج

A': (حدتس ۲ نیست)

$$n(A') = 3 \times 3 \times 3 + \overset{4,4}{\uparrow} \overset{2,2}{\uparrow} (2 \times 2 \times 3) \times 3$$

$$= 27 + 36 = 63$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{63}{108} = \frac{108 - 63}{108} = \frac{45}{108} = \frac{5}{12} \quad \text{گزینه ۱}$$

مسئله کنکور ریاضی ۹۹:

A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A) = 0.4$ ، $P(B|A) = 0.25$ و $P(B) = 0.3$ باشد، $P(B|A')$ کدام است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A')}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow 0.25 = \frac{P(A \cap B)}{0.4} \rightarrow P(A \cap B) = 0.6 \times 0.25 = 0.15$$

$$\Rightarrow P(B|A') = \frac{0.3 - 0.15}{0.6} = \frac{0.15}{0.6} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۲

مسئله کنکور ریاضی (خارج) ۹۹:

در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = 0.1$ ، $P(A \cup B) = 0.6$ و با فرض $P(B') > P(B)$ ، احتمال وقوع پیشامد B، کدام است؟

0.25 (۴)

0.2 (۳)

0.3 (۲)

0.4 (۱)

$P(A) \times P(B)$ مشتق

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

معبرع رشته‌ها

$$0.4 = P(A) + P(B) - 0.1 \rightarrow P(A) + P(B) = 0.5$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.1$$

ضرب رشته‌ها (P)

معادله درجه دوم: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x^2 - \frac{1}{7}x + \frac{1}{11} = 0 \rightarrow (x - \frac{1}{12})(x - \frac{1}{5}) = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{12} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases} \xrightarrow{P(B') > P(B)} P(B) = \frac{1}{12}, \quad P(A) = \frac{1}{5}$$

مثال کشر تجربی ۹۸:

احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول $\frac{7}{10}$ و در آزمون دوم $\frac{6}{10}$ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم $\frac{8}{10}$ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

$$\circ \frac{84}{100} \quad (4)$$

$$\circ \frac{82}{100} \quad (3)$$

$$\circ \frac{76}{100} \quad (2)$$

$$\circ \frac{74}{100} \quad (1)$$

$$\begin{cases} P(A) = \frac{1}{7} \\ P(B) = \frac{1}{4} \\ P(B|A) = \frac{1}{8} \\ P(A \cup B) = ? \end{cases}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow \frac{1}{8} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{7}} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{56} = \frac{13}{14} - \frac{1}{56} = \frac{17}{14}$$

گزینه ۱

ریاضی ۳

پایه دوازدهم تجربی

درسنامه، تمرین

به نام خدا

پایه دوازدهم تجربی

فصل هفتم: احتمال

درس: قانون احتمال کل

جلسه دوم: صفحه ۱۴۵ تا ۱۴۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

افراز یک مجموعه :

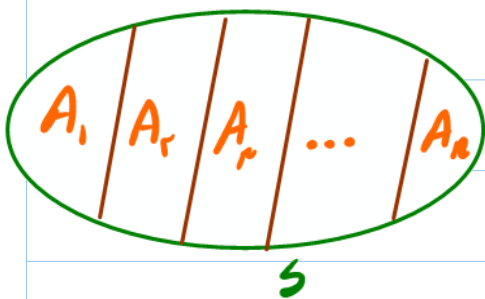
فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n$ زیر مجموعه هایی از مجموعه S باشند به طوری که :

(۱) هگی خدیهی باشند : $(A_i \neq \emptyset) : 1 \leq i \leq n$

(۲) اجتماع آنها برابر S شود : $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S)$

(۳) اشتراک هر دو از آنها تهی باشد : $(A_i \cap A_j = \emptyset)$

در این صورت می گوئیم $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعه S را افراز کرده اند.



مثال : برای مجموعه های زیر دو افراز متفاوت بنویسید.

دیف $A = \{1, 2, \dots, 10\}$

یک افراز ۲ عضوی $A_1 = \{1, 3, 5, \dots, 9\}$ $A_2 = \{2, 4, 6, \dots, 10\}$

$A_1 = \{1, 2, \dots, 10\}$, $A_2 = \{1, 2, \dots, 10\}$, $A_3 = \{1, 2, \dots, 10\}$

یک افراز ۳ عضوی

ب) $A = \mathbb{Z}$

$$A_1 = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\} \quad A_2 = \{\pm 1, \pm 3, \dots\}$$

یک افراز ۲ عضوی

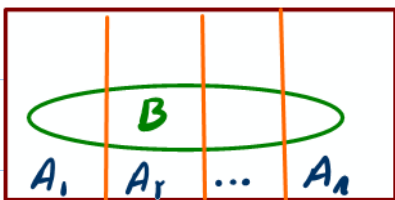
$$A_1 = \{\dots, -2, -1\}, \quad A_2 = \{0\}, \quad A_3 = \{1, 2, \dots\}$$

یک افراز ۳ عضوی

احتمال کل:

فرض کنید پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ مانند شش یک افراز روی فضای نمونه S

باشند و B یک پیشامد دیگر باشد. داریم:



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

که در آن $(B \cap A_i)$ و $(B \cap A_j)$ ناهمپوشانند پس:

برای حتمه نویسی جمع می‌گیریم

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

و بر طبق قانون ضرب احتمال داریم:

$$P(B \cap A_i) = P(A_i) P(B|A_i)$$

پس می‌توان $P(B)$ را این‌طور بنویسیم:

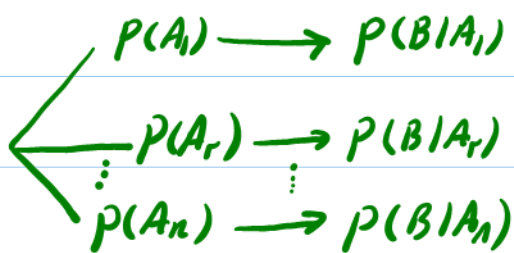
$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

$$\Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

برابطه بالا قانون احتمال کل می‌گوئیم.

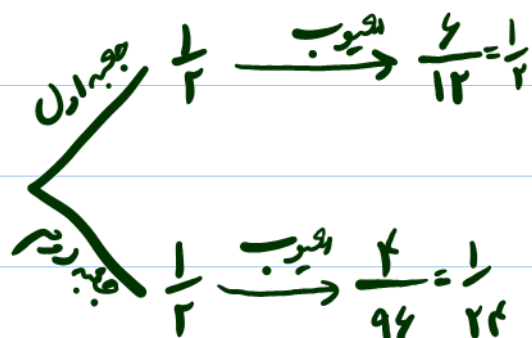
نکته مهم: برای ساده‌تر شدن می‌توانیم $P(B)$ به عبارت از مقدار درختی اشاره کنیم که درخت

شاخه‌های اصلی درخت $A_1, \dots, A_n$ هستند.



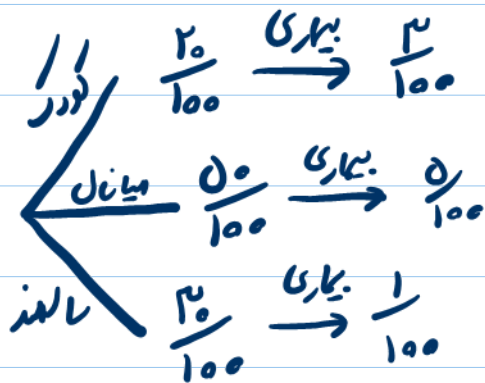
برای بدست آوردن $P(B)$ ، احتمال هر شاخه را در هم ضرب در درخت جمع می‌کنیم.

مثال: دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟



$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{48} = \frac{13}{48}$$

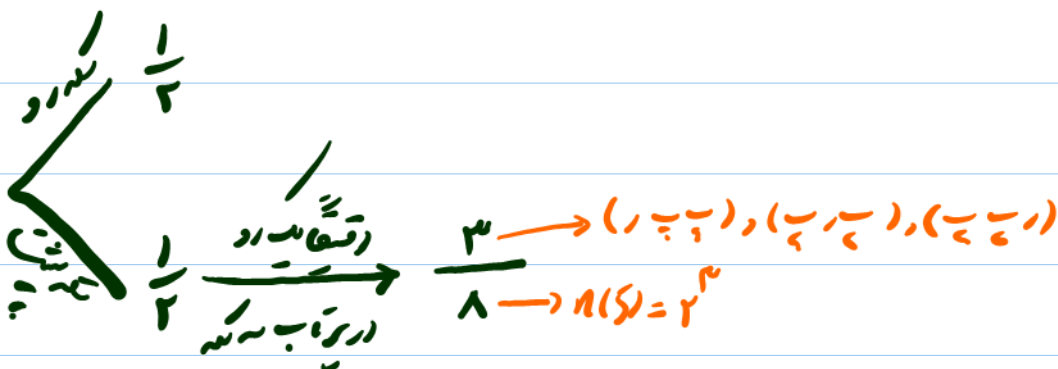
مثال: فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟



$$P(B) = \frac{20}{100} \times \frac{2}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{4 + 25 + 3}{1000} = \frac{32}{1000}$$

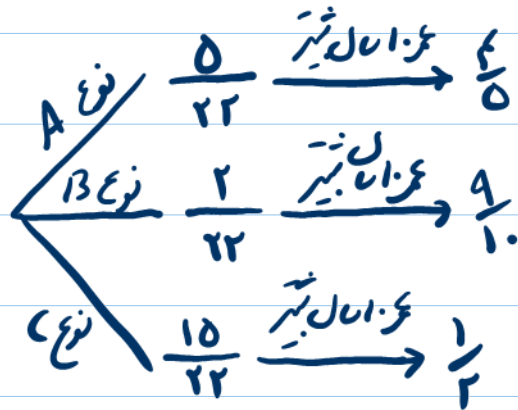
$$= \frac{32}{1000} = \frac{17}{500}$$

مثال: یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟



$$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

مثال: در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{4}{5}$ ، برای نوع B، $\frac{9}{10}$ و برای نوع C، $\frac{1}{2}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟



$$P(B) = \frac{5}{22} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{22} \times \frac{9}{10} + \frac{15}{22} \times \frac{1}{2} = \frac{20}{110} + \frac{18}{220} + \frac{15}{44}$$

$$= \frac{40 + 18 + 75}{220} = \frac{133}{220}$$

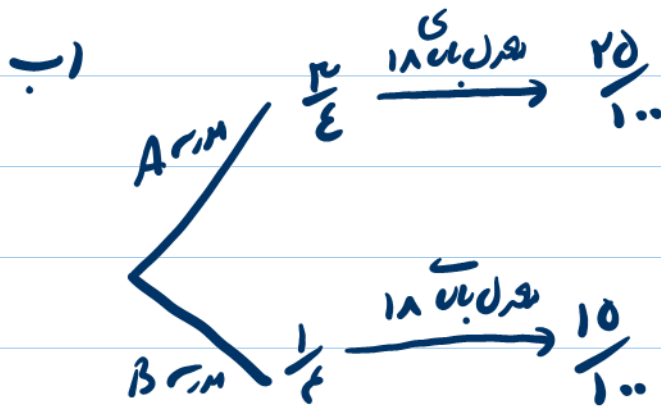
مثال: مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش آموز دارد. ۲۵ درصد دانش آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه دانش آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم:
الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

الف) $n(A) = 3n(B)$, $n(A) + n(B) = n(S)$

$$\Rightarrow 3n(B) + n(B) = n(S) \rightarrow 4n(B) = n(S) \rightarrow n(B) = \frac{n(S)}{4}$$

$$n(A) = 3n(B) = \frac{3n(S)}{4}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\frac{3n(S)}{4}}{n(S)} = \frac{3}{4} , P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\frac{n(S)}{4}}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

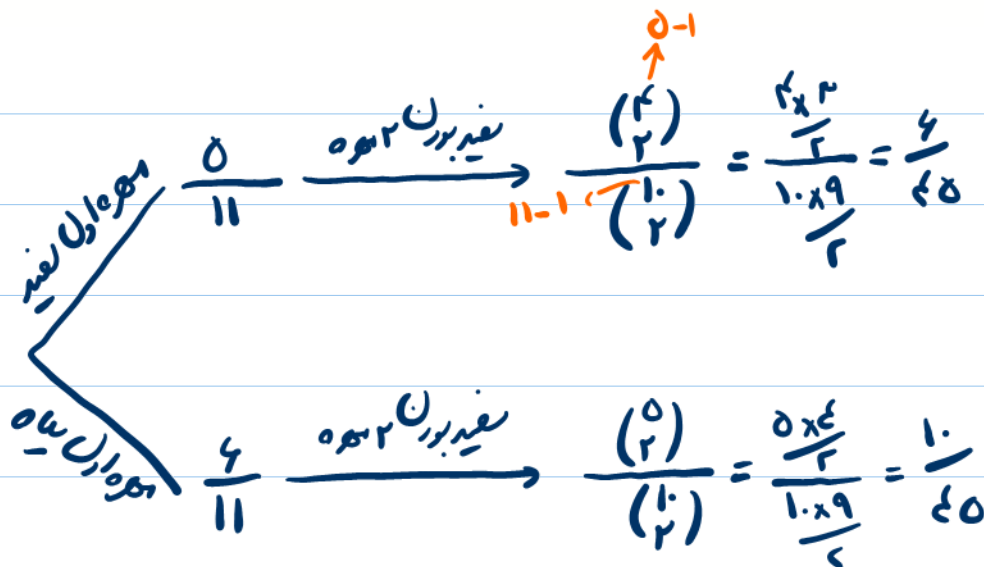


$$P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{20}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{10}{100} = \frac{70}{400} + \frac{10}{400} = \frac{80}{400} = \frac{2}{10}$$

سوال کنکور تجربی ۹۸ :

در جعبه‌ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می‌کنیم. سپس از بین بقیه مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهره اخیر، سفید است؟

$$\frac{5}{22} \quad (۴) \qquad \frac{4}{11} \quad (۳) \qquad \frac{2}{11} \quad (۲) \qquad \frac{1}{11} \quad (۱)$$



گزینش ۲ :

$$P(B) = \frac{5}{11} \times \frac{4}{40} + \frac{6}{11} \times \frac{1}{40} = \frac{2}{22} + \frac{1}{22} = \frac{3}{22} = \frac{1}{11}$$

مثال کنکور ریاضی ۹۹:

سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره سفید، در دومی ۹ مهره سیاه و در سومی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

$$\frac{13}{18} \quad (4)$$

$$\frac{25}{36} \quad (3)$$

$$\frac{11}{18} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ظرف اول} \quad \frac{1}{3} \rightarrow \text{حداقل یکی از دو مهره سیاه} \quad 0 \\
 & \text{ظرف دوم} \quad \frac{1}{3} \rightarrow \text{حداقل یکی از دو مهره سیاه} \quad 1 \\
 & \text{ظرف سوم} \quad \frac{1}{3} \rightarrow \text{حداقل یکی از دو مهره سیاه} \quad \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1} + \binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{5 \times 4 + \frac{5 \times 4}{2} \times 1}{\frac{9 \times 8}{2}} = \frac{10 + 10}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}
 \end{aligned}$$

گزینه ۲
$$P(B) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{5}{27} = \frac{11}{27}$$

مثال کنکور ریاضی (خارج) ۹۹

در جعبه اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبه دوم می اندازیم. سپس دو مهره از جعبه دوم بیرون می آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

$$\frac{23}{27} \quad (4)$$

$$\frac{38}{45} \quad (3)$$

$$\frac{34}{45} \quad (2)$$

$$\frac{20}{27} \quad (1)$$

حداقل یکی از دو مهره سفید: B

دو مهره سیاه: B'

$$\begin{array}{l}
 \text{از ظرف اول} \quad \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{هر دو سوه پیاپی}} \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{10}{45} \\
 \text{از ظرف دوم} \quad \frac{3}{9} \xrightarrow{\text{هر دو سوه پیاپی}} \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45}
 \end{array}$$

$$P(B') = \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27} + \frac{1}{9} = \frac{5}{27}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{5}{27} = \frac{22}{27} \quad \text{گزینه ۱}$$

مثال کنکور ریاضی ۹۸

در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول ۵ لامپ و از جعبه دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب است؟

$$\frac{7}{24} \quad (4)$$

$$\frac{13}{48} \quad (3)$$

$$\frac{11}{48} \quad (2)$$

$$\frac{5}{24} \quad (1)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{از جعبه اول برده} \quad \frac{5}{12} \xrightarrow{\text{معیوب}} \frac{4}{20} \\
 \text{از جعبه دوم برده} \quad \frac{7}{12} \xrightarrow{\text{معیوب}} \frac{3}{12}
 \end{array}$$

$$P(B) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{20} + \frac{7}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{1}{12} + \frac{7}{48} = \frac{11}{48} \quad \text{گزینه ۲}$$