موسسه: Vipبخون

عنوان آزمون : سوالات تشریحی فصل۱

نام درس : گسسته

۱ اگر a, b دو عدد صحیح و ab فرد باشد، باقی‌مانده $a^۲ + b^۲ - ۵$ بر ۸ را حساب کنید.

۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۳ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.
الف) حاصل‌ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
ب) برای اعداد صحیح a، b و c که $a \neq ۰$، اگر $a|b+c$ آن‌گاه $a|b$ یا $a|c$.
ج) معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$.
د) اگر داشته باشیم $(a,b) = ۱$ آن‌گاه می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.

۴ اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری‌که $۷|۲k+۱$، ثابت کنید: $۴۹|۴k^۲ - ۱۰k - ۶$

۵ معادله همنهشتی $۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۰$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید.

۶ اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^۲ + b^۲ + ۵)$ را بر ۸ بیابید.

۷ باقی‌مانده تقسیم عدد $۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \ldots + ۲۰۰!$ را بر ۱۵ به دست آورید. (! نماد فاکتوریل می‌باشد.)

۸ اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(۹a + ۶)$ را به دست آورید.

۹ رقم یکان عدد $(۷ + ۲^{۱۱})$ را به دست آورید.

۱۰ معادله همنهشتی $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ را حل کرده و جواب عمومی آن‌را به دست آورید.

۱۱ ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $۳!$ بخش‌پذیر است.

۱۲ اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۳ حکم زیر را به روش خواسته شده اثبات کنید.
برای هر دو عدد حقیقی مثبت x , y نشان دهید: $x+y \geq ۲\sqrt{xy}$ (اثبات بازگشتی)

۱۴ با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است، $\sqrt{\sqrt{۳+۲}}$ نیز عددی گنگ است.

۱۵ اگر مجموع دو عدد ۱۰۲ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۴۳۲ باشد، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را بیابید.

۱۶ اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:
$a^۲+b^۲+c^۲+۳ \geqslant ۲(a+b+c)$

۱۷ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید: $y^۲+۱ \geqslant ۲x(y-x+۱)$

۱۸ اگر $m,n \in \mathbb{N}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $m \leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$

۱۹ ثابت کنید:
الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.
ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.
(راهنمایی: فرض کنید $(m,m+۱)=d$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d=۱$).

۲۰ ثابت کنید اگر $(a,b)=۱$ و $(a,c)=۱$ باشند، آن‌گاه $(a,bc)=۱$

پاسخنامه تشریحی

۱ راه اول: ab فرد است لذا هر دو عدد a, b فرد می‌باشند.

$$\begin{matrix} a = ۲k + ۱ \\ b = ۲k' + ۱ \end{matrix} \Rightarrow a^۲ + b^۲ - ۵ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ + ۴k'^۲ + ۴k' + ۱ - ۵ = ۴k(k+۱) + ۴k'(k'+۱) - ۳$$
$$= ۸q'' - ۳ = ۸(q'' - ۱) + ۵ = ۸t + ۵ \Rightarrow r = ۵$$

راه دوم: ab فرد است لذا هر دو عدد a, b فرد می‌باشند.

$$\begin{matrix} a = ۲k + ۱ \\ b = ۲k' + ۱ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱ \\ b^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱ \end{matrix} \Rightarrow a^۲ + b^۲ \overset{۸}{\equiv} ۲ \Rightarrow a^۲ + b^۲ - ۵ \overset{۸}{\equiv} -۳ \overset{۸}{\equiv} ۵ \Rightarrow r = ۵$$

۲ با فرض $a = nk$ و $b = nk'$ داریم:

$$a = bq + r \Rightarrow nk = nk'q + r \Rightarrow nk - nk'q = r \Rightarrow r = n\underbrace{(k - k'q)}_{q''} \Rightarrow n|r$$

۳ الف) نادرست (ص ۵) ب) نادرست (ص ۱۱) ج) درست (ص ۲۵) د) درست (ص ۱۳)

۴ $$۷|۲k+۱ \Rightarrow \begin{cases} ۴۹|۴k^۲ + ۴k + ۱ \\ ۴۹|۱۴k + ۷ \end{cases} \Rightarrow ۴۹|۴k^۲ - ۱۰k - ۶$$ (ص ۱۶)

۵ چون $(۱۲, ۸)|۲۰$ معادله جواب دارد. (ص ۳۰)

$$۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow ۴x \overset{۶}{\equiv} ۴ \Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow x = ۳k + ۱$$

۶ می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $۸k + ۱$ می‌باشد $(k \in Z)$ پس داریم: (ص ۱۶)

$$\begin{cases} a^۲ = ۸k + ۱ \\ b^۲ = ۸k' + ۱ \end{cases} \Rightarrow a^۲ + b^۲ + ۵ = ۸k + ۱ + ۸k' + ۱ + ۵ \Rightarrow a^۲ + b^۲ + ۵ = ۸k'' + ۷ \Rightarrow r = ۷$$

۷ می‌دانیم $۱ \overset{۱۵}{\equiv} ۱!$ و $۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۲!$ و $۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۳!$ و $۹ \overset{۱۵}{\equiv} ۴!$ و $۰ \overset{۱۵}{\equiv} ۵!$ و ... $۰ \overset{۱۵}{\equiv} ۲۰۰!$ پس داریم: (ص ۲۹)

$$۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \ldots + ۲۰۰! \overset{۱۵}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۰ + ۰ + \ldots + ۰ \overset{۱۵}{\equiv} ۳$$

۸ $$۴a - ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳a - ۵ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \Rightarrow r = ۴$$ (ص ۲۹)

۹ $$۲^۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۲ \Rightarrow ۲^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \Rightarrow ۲^{۱۱} + ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵$$

رقم یکان برابر ۵ است. (ص ۲۹)

۱۰ $$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰ \overset{۱۲}{\equiv} ۳۲ \xrightarrow{(۸,۱۲)=۴} x \overset{\frac{۱۲}{۴}=۳}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۳k + ۴$$ (ص ۳۰)

۱۱ $A=\underbrace{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}_{\text{ضرب ۳ عدد متوالی}}=\frac{(n+۳)!}{n!}$

از طرفی می‌دانیم : $\binom{n+۳}{۳}=q\in N\Rightarrow \frac{(n+۳)!}{۳!\times n!}=q\Rightarrow \frac{(n+۳)!}{n!}=۶q\Rightarrow A=۶q\Rightarrow ۶|A$

۱۲ روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

(۰/۲۵)

$۲۹+۳۰+۳۰+۳۰+۱۲=۱۳۱\rightarrow ۱۳۱\overset{۷}{\equiv}۵$ (۰/۵)

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد. (۰/۲۵) (صفحه ۲۴)

۱۳ $(x+y)^۲\geq ۴xy\,(۰/۲۵)\Rightarrow x^۲+y^۲+۲xy\geq ۴xy\Rightarrow x^۲+y^۲-۲xy\geq ۰(۰/۲۵)$

$\Rightarrow (x-y)^۲\geq ۰(۰/۲۵)$

رابطه بدیهی است و تمامی تمامی مراحل بازگشت‌پذیر است. (۰/۲۵) صفحه ۲۱

۱۴ فرض خلف : $\sqrt{\sqrt{۳}+۲}\notin Q'\Rightarrow \sqrt{\sqrt{۳}+۲}=\frac{a}{b}\Rightarrow \sqrt{۳}+۲=\frac{a^۲}{b^۲}\Rightarrow \sqrt{۳}=\frac{a^۲}{b^۲}-۲\Rightarrow \sqrt{۳}=\frac{a^۲-۲b^۲}{b^۲}$

به تناقض رسیده‌ایم و همان حکم اولیه برقرار است.

۱۵ که $(a',b')=۱$ $a'd+b'd=۱۰۲\rightarrow d(a'+b')=۱۰۲\ (I)$

$c=\frac{ab}{d}\rightarrow ۴۳۲d=a'db'd\rightarrow ۴۳۲=a'b'd$

$\frac{d(a'+b')}{da'b'}=\frac{۱۰۲}{۴۳۲}\rightarrow \frac{a'+b'}{a'b'}=\frac{۱۷}{۷۲}\Rightarrow ۴۳۲=۷۲d\Rightarrow d=\frac{۴۳۲}{۷۲}=۶$

$\begin{cases}a'+b'=۱۷\\ a'b'=۷۲\end{cases}\xrightarrow{d(a'+b')=۱۰۲} d=۶$

۱۶ $a^۲+b^۲+c^۲+۳\geqslant ۲a+۲b+۲c\Leftrightarrow$

$a^۲+b^۲+c^۲+۱+۱+۱-۲a-۲b-۲c\geqslant ۰\Leftrightarrow$ (۰/۲۵)

$(a^۲-۲a+۱)(b^۲-۲b+۱)+(c^۲-۲c+۱)\geqslant ۰\Leftrightarrow$ (۰/۲۵)

$(a-۱)^۲+(b-۱)^۲+(c-۱)^۲\geqslant ۰$

عبارت همواره درست است و بر طبق استدلال برگشتی برقرار می‌باشد. (۰/۲۵)

۱۷ $y^۲+۱\geqslant ۲xy-۲x^۲+۲x\rightarrow y^۲+۱-۲xy+۲x^۲-۲x\geqslant ۰$

$y^۲-۲xy+x^۲+x^۲-۲x+۱\geqslant ۰$

$(y-x)^۲+(x-۱)^۲\geqslant ۰$ بدیهی $\Leftrightarrow$ اثبات بازگشتی:

۱۸ $a|b \xrightarrow{m \text{ توان}} a^m|b^m \xrightarrow{\text{راست} \times b^{n-m}} a^m|b^m \times b^{n-m} \Rightarrow a^m|b^n$

توجه: $x|y \Rightarrow x|ky$

۱۹ الف) گیریم:

$m \in \mathrm{Z}, (m, m+۱) = d \Rightarrow d|m \wedge d|m+۱ \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(m+۱) - m \Rightarrow d|۱ \xrightarrow{d>۰} d = ۱$

ب) گیریم:

$k \in \mathrm{Z}, (۲k+۱, ۲k+۳) = d \Rightarrow d|۲k+۱ \wedge d|۲k+۳ \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(۲k+۳) - (۲k+۱)$

$\Rightarrow d|۲ \xrightarrow{d \text{ زوج نیست}} d = ۱$

۲۰ $(a, b) = ۱ \Rightarrow \exists m, n \in \mathrm{z} \; ; \; \mathrm{ma} + \mathrm{nb} = ۱ \quad (۱)$

$(a, c) = ۱ \Rightarrow \exists x, y \in \mathrm{z} \; ; \; \mathrm{xa} + \mathrm{yc} = ۱ \quad (۲)$

$(۱) \times (۲) \Rightarrow \mathrm{mxa}^۲ + \mathrm{nyac} + \mathrm{nxab} + \mathrm{nybc} = ۱ \Rightarrow a(\mathrm{max} + \mathrm{myc} + \mathrm{nxb}) + \mathrm{bc}(\mathrm{ny}) = ۱$

$\Rightarrow \mathrm{at} + (\mathrm{bc})p = ۱ \Rightarrow (a, \mathrm{bc}) = ۱$