

شرکتی مایل است برای چهار شغل تمام وقت A_1, A_2, A_3 و A_4 کارمند استخدام کند. پنج نفر به نامهای B_1, B_2, B_3, B_4 و B_5 برای تصدی این شغلها داوطلب میشوند که طبق فهرست زیر برخی صلاحیت بیش از یک کار را دارند:

B_1 میتواند سه شغل A_1, A_2 و A_3 را اداره کند.

B_2 میتواند دو شغل A_3 و A_4 را بپذیرد.

B_3 قادر است هریک از شغلهای A_1, A_2 و A_3 را انجام دهد.

B_4 و B_5 هم میتوانند تنها، متصدی شغل A_3 باشند.

به ۲ سوال بعدی پاسخ دهید:

۱ در مثال فوق اگر علاوه بر شرایط داده شده، B_5 قادر به انجام کار A_4 نیز باشد شرکت به چند طریق میتواند پستهای خالی را پر کند؟

۲ در مثال فوق اگر علاوه بر شرایط داده شده، B_4 قادر به انجام کار A_4 نیز باشد شرکت به چند طریق میتواند پستهای خالی را پر کنند؟

گراف همبند G داده شده است. اگر $v \in V(G)$ و فاصله u از v که در G با $d(v, v)$ نمایش داده میشود برابر است با طول کوتاهترین مسیر از u به v در G . به ۳ سوال بعدی پاسخ دهید:

۳ $d(u, v) = 0$ اگر تنها و تنها اگر $u = v$.

۴ به ازای هر $u, v \in V(G)$ داریم: $d(u, v) = d(v, u)$.

۵ به ازای هر $u, v, w \in V(G)$ داریم: $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$.

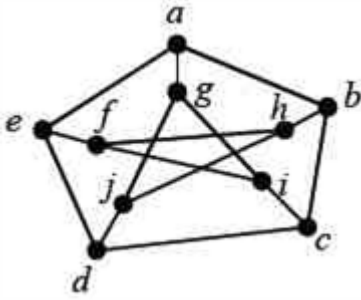
۶ اگر G یک گراف ۳-منتظم از مرتبه ۶ باشد، مقدار $q(\bar{G})$ را محاسبه نمایید.

۷ در هر گراف از مرتبه فرد، ثابت کنید تعداد رأسهای زوج، عددی فرد است.

۸ در گراف ۵-منتظم از مرتبه p و اندازه q رابطه $2q - 3p = 12$ برقرار میباشد، مقادیر p و q را به دست آورید.

۹ در گراف کامل K_p ، رابطه $10 + 4\Delta + p = q -$ برقرار است. حداکثر طول مسیر بین دو رأس متمایز در این گراف را بیابید.

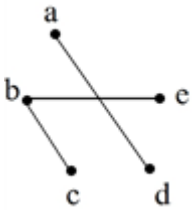
۱۰ در گراف کامل K_p ، $2 \leq p \leq 4$ ، تعداد مسیرهای «متفاوت» از یک رأس u به یک رأس v و $u \neq v$ را بیابید.



۱۱ عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

۱۲ گراف G ، ۳-منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.

۱۳ اگر G گراف شکل زیر باشد، افزایش حاصل از رابطه‌ی هم‌ارزی مذکور در سوال قبل را بیابید.

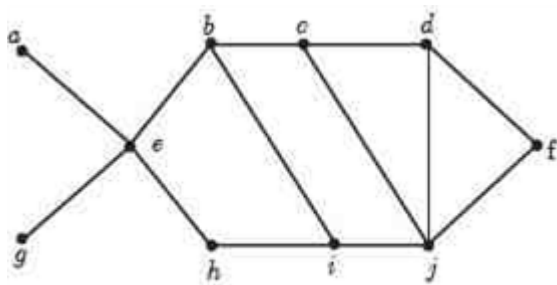


۱۴ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

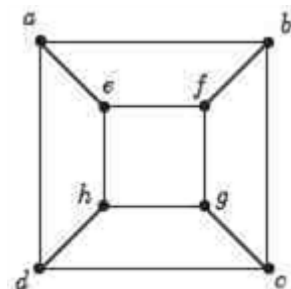
۱۵ به گراف ۸ رأسی ۳-منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه‌حل)



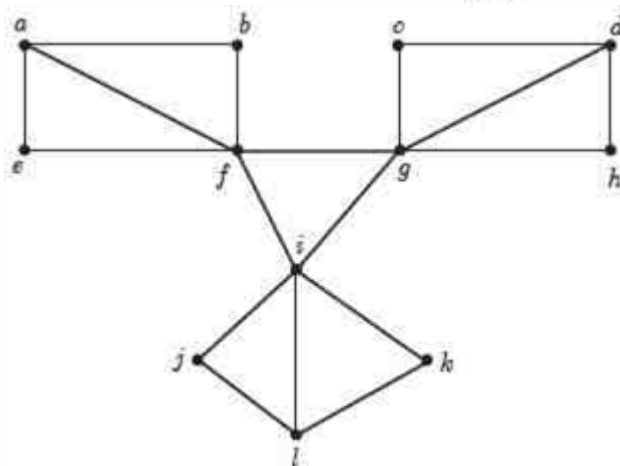
عدد احاطه‌گری را برای هریک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



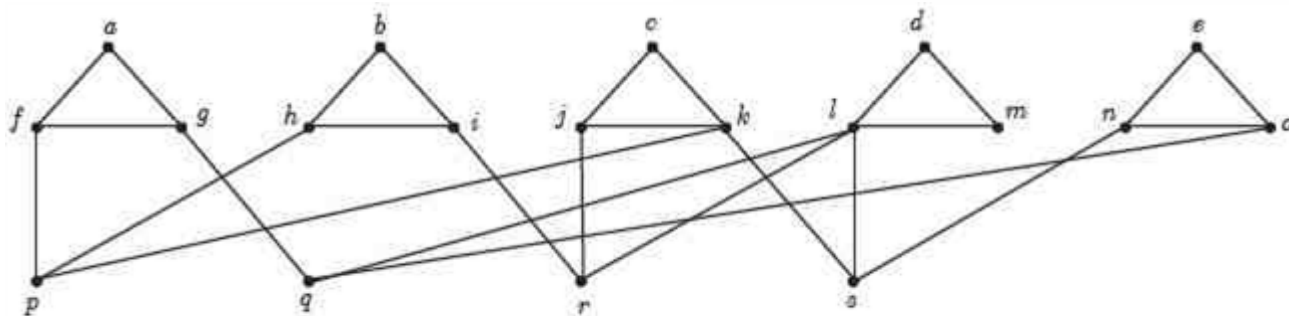
(ا)



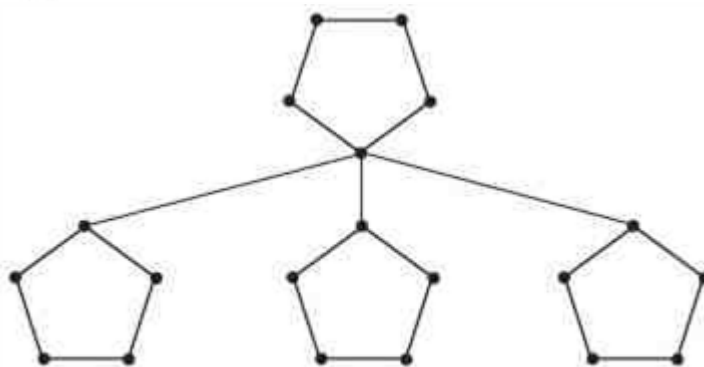
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

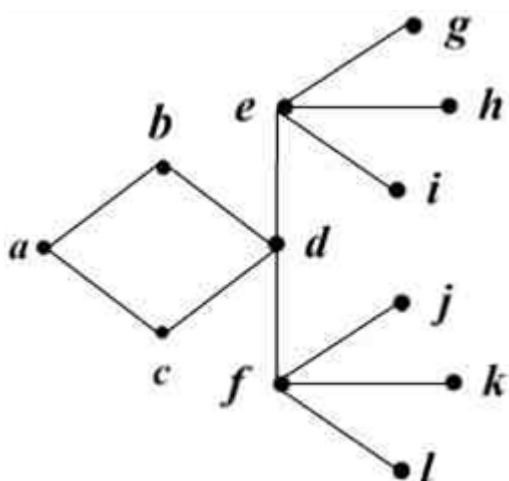
۱۷

گراف زیر را در نظر بگیرید:

الف) عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.

ج) یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال ۴ عضوی بنویسید.



۱۸

علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکه‌ی اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آن‌ها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

۱۹

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، یال دارد.

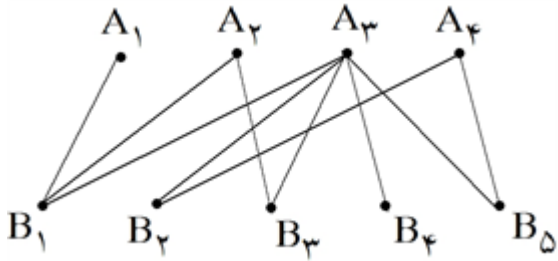
ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل رأس برای احاطه همه رئوس لازم است.ج) اگر در گراف G از مرتبه P داشته باشیم $\chi(G) = 1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر است.

۲۰

ثابت کنید گراف مقابل یک گراف بازه‌ای نیست.

۱

ابتدا گراف مربوط به هر شغل و نفر را می‌کشیم. سپس از رئوس شغل به نفرات نگاه می‌کنیم، چون مهم آن است که شغلی خالی نماند. پس چنین حذف می‌شود:



شغل A_1 را فقط B_1 می‌تواند انجام دهد پس $A_1 \rightarrow B_1$.

سایر شاخه‌های B_1 را حذف می‌کنیم، شغل A_2 را فقط B_3 می‌تواند انجام دهد، پس: $A_2 \rightarrow B_3$.

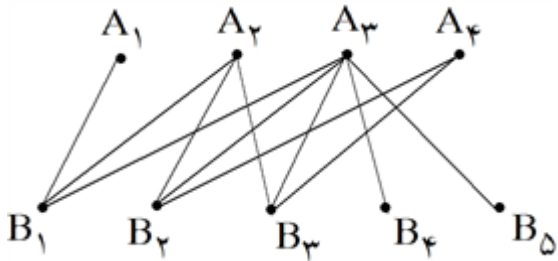
سایر شاخه‌های B_3 را حذف می‌کنیم، شغل A_4 بعد از حذف شاخه‌های B_1 و B_3 فقط توسط دو نفر B_5 یا B_2 صورت می‌گیرد که چنین عمل می‌کنیم:

آنچه مسلم است به چهار طریق می‌توان شغل‌های خالی را پر کرد.

$$\begin{cases} B_4 \\ \text{یا} \\ B_5 \\ B_2 \end{cases} \text{ اگر } A_4 \rightarrow B_2 : A_3 \begin{cases} B_4 \\ \text{یا} \\ B_5 \\ B_2 \end{cases} \text{ اگر } A_4 \rightarrow B_5 : A_3$$

۲

ابتدا گراف مربوط به هر شغل و نفر را می‌کشیم. سپس از رئوس شغل به نفرات نگاه می‌کنیم، شغل‌هایی که شاخه کمتر دارند را به نفرات می‌دهیم، شاخه نفرات را حذف می‌کنیم، سایر مشاغل را تقسیم‌بندی می‌کنیم:



$$A_1 \rightarrow B_1 \Rightarrow A_2 \begin{cases} B_2 \Rightarrow A_4 \rightarrow B_3 : A_3 \begin{cases} B_4 \\ \text{یا} \\ B_5 \end{cases} \\ \text{یا} \\ B_3 \Rightarrow A_4 \rightarrow B_2 : A_3 \begin{cases} B_4 \\ \text{یا} \\ B_5 \end{cases} \end{cases}$$

آنچه مسلم است، به ۴ طریق می‌توان شغل‌های خالی را پر کرد.

۳

از هر رأس به خودش یک مسیر به طول صفر داریم و طول کوتاهترین مسیر بین هر رأس با خودش برابر صفر است:

$$d(U, U) = 0$$

۴

می‌دانیم اگر از u به v مسیر داشته باشیم، آن مسیر برگشتی نیز می‌باشد، پس طول کوتاهترین مسیر بین u, v با u, v یکسان است:

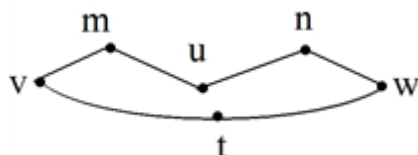
$$d(u, v) = d(v, u)$$

۵

کوتاهترین مسیر $d(v, u) = ۲ : u, v$ کوتاهترین مسیر $d(u, w) = ۲ : w, u$ کوتاهترین مسیر $d(v, w) = ۲ : w, v$

$$\Rightarrow d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$$

می‌دانیم وقتی از v به u مسیر داریم و از u به w ، از v به w نیز مسیر داریم، دقت کنیم که اگر مسیر مستقیم باشد، کوتاهترین مسیر بین v, w با مجموع کوتاهترین مسیر بین u, v و u, w برابر است و اگر مسیر دیگر داشته باشد، کوچکتر است.



۶

روش اول:

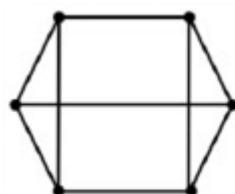
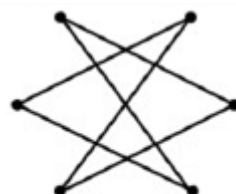
$$۲q(G) = ۳p(G) \Rightarrow ۲q(G) = ۱۸ \Rightarrow q(G) = ۹ \Rightarrow q(\bar{G}) = \binom{۶}{۲} - ۹ = ۶$$

روش دوم: می‌دانیم مکمل هر گراف منتظم، خود نیز گرافی منتظم است. لذا مکمل گراف ۳- منتظم با ۶ رأس، گرافی ۲-

$$\text{منتظم است. پس } ۲q(\bar{G}) = ۲p(G) \Rightarrow q(\bar{G}) = \frac{۲ \times ۶}{۲} = ۶$$

$$q(\bar{G}) = ۶$$

روش سوم:

 G  $\bar{G}$

x : تعداد رأس‌های زوج گراف

روش اول:

۷

$$m = ۲k \text{ : تعداد رأس‌های فرد گراف}$$

$$p = ۲t + ۱ \text{ : تعداد رأس‌های گراف}$$

$$p = m + x \Rightarrow ۲t + ۱ = ۲k + x \Rightarrow x = ۲t + ۱ - ۲k = ۲(t - k) + ۱ \Rightarrow x = ۲q + ۱$$

روش دوم: مجموع تعداد رأس‌های فرد و تعداد رأس‌های زوج این گراف، عددی فرد است. می‌دانیم تعداد رأس‌های فرد در هر گراف، عددی زوج است، لذا تعداد رأس‌های زوج در این گراف باید عددی فرد باشد.

$$pr = ۲q \Rightarrow ۵p = ۲q, ۲q - ۳p = ۱۲ \Rightarrow ۵p - ۳p = ۱۲ \Rightarrow p = ۶, q = ۱۵$$

۸

می‌دانیم در گراف‌های کامل k_p همواره درجه همه رئوس با هم برابر است و داریم:

۹

$$۴\Delta + p = q - ۱ \Rightarrow \Delta = p - ۱, q_{k_p} = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-1)}{۲}$$

$$۴(p-1) + p + (p-1) - \binom{p}{۲} = ۱۰$$

$$۴p - ۴ + p + p - ۱ - \frac{p(p-1)}{۲} = ۱۰ \Rightarrow ۶p - ۵ - \left(\frac{p^2 - p}{۲}\right) = ۱۰$$

$$\Rightarrow p^2 - ۱۳p + ۳۰ = ۰ \Rightarrow p = ۱۰ \text{ یا } p = ۳$$

چون گراف k_p کامل است، حداکثر طول مسیر $(p-1)$ است.



۱۰

$$P = 2: \text{مسیر: } UVU \Rightarrow P = 3: \begin{cases} UVU: \text{مسیر به طول ۱} \\ UVUUVU: \text{مسیر به طول ۲} \end{cases}$$

$$P = 4: \begin{cases} UVUUVU = 1: \text{مسیر به طول ۱} \\ UVUUVUUVU = 2: \text{مسیر به طول ۲} \\ UVUUVUUVUUVU = 3: \text{مسیر به طول ۳} \end{cases} \Rightarrow \text{مسیر ۵}$$

تعداد مسیرهای به طول m در گراف K_P بین دو رأس U و V چنین است:

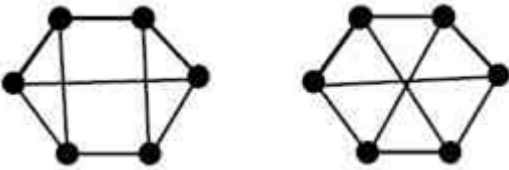
$$UVU - UVUUVU - UVUUVUUVU \dots UVUUVUUVUUVU \dots UVUUVUUVUUVUUVU \rightarrow (P-2) \times (P-3) \times \dots \times (P-m) = \frac{(p-2)!}{(p-m-1)!}$$

۱۱

برای گراف مورد سوال داریم $\chi(G) \leq 3 \Rightarrow \frac{10}{3+1} = 2.5 \Rightarrow \chi(G) = 3$. بنابراین $\chi(G) = 3$. (قسمت دوم کار در کلاس ص ۵۰)

۱۲

$$q = 2p - 3 \Rightarrow \frac{2p}{2} = 2p - 3 \Rightarrow p = 6 \text{ (ص ۴۲)}$$



به یکی از دو گراف زیر داده شود.

۱۳

هر قسمت که به هم بند باشد، یک کلاس هم‌ارزی برای مسیر است پس:

$$[a] = [d] = \{a, d\} \rightarrow \text{چون به هم بندند.}$$

$$[b] = [e] = [c] = \{b, c, e\} \rightarrow \text{چون به هم بندند.}$$

دقت کنیم تعداد کلاس‌های هم‌ارزی رابطه مسیر همان تعداد بخش‌های گراف است.

۱۴

$$k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4, kn + 1 = 54 \Rightarrow 4n = 53, n = \left\lceil \frac{53}{4} \right\rceil = 13 \text{ (ص ۸۲)}$$

۱۵

$$\begin{cases} q = \frac{kn}{r} \Rightarrow q = \frac{8 \times 3}{2} = 12 \\ q = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow q = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \end{cases} \Rightarrow 28 - 12 = 16 \text{ (ص ۴۰)}$$

$$\text{الف) } \gamma(G) \geq \frac{8}{3+1} = 2$$

مجموعه $\{a, g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری برای آن است. پس $\gamma(G) = 2$

$$\text{ب) } \gamma(G) \geq \frac{10}{4+1} = 2$$

مجموعه $\{e, j\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری برای آن است. پس $\gamma(G) = 2$

$$\text{پ) } \gamma(G) \geq \frac{12}{5+1} = 2$$

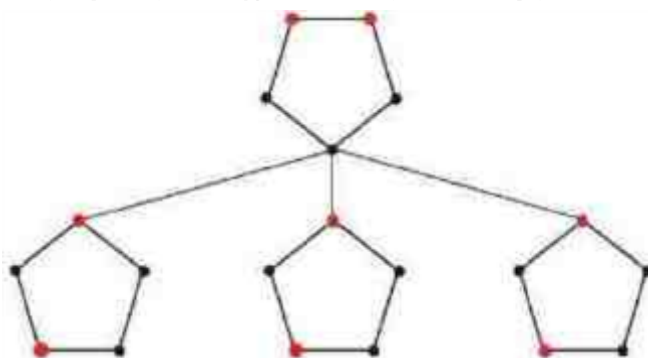
مجموعه $\{f, d, l\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری برای آن است. پس $\gamma(G) = 3$

$$\text{ت) } \gamma(G) \geq \frac{19}{5+1} = 4$$

از طرفی از هر مثلث حداقل یک راس باید انتخاب کنیم، به عنوان نمونه مجموعه $\{f, i, k, l, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گری آن است. بنابراین: $\gamma(G) = 5$

$$\text{ث) } \gamma(G) \geq \frac{20}{5+1} = 4$$

از طرفی از هر پنج ضلعی حداقل دو راس باید انتخاب کنیم، لذا $2 \times 4 = 8$ یعنی $\gamma(G) = 8$ به عنوان نمونه رئوس قرمز رنگ به عنوان یک مجموعه احاطه‌گری محسوب می‌شوند.



$$\text{الف) } \gamma(G) \geq \frac{p}{\Delta+1} \Rightarrow \gamma(G) \geq 3 \quad (*) \quad (\text{ص ۴۹})$$

از طرفی $A = \{a, e, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است بنابه رابطه $(*)$ پس: $\gamma(G) = 3$

$$\text{ب) } B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$$

به هر مجموعه احاطه‌گر هشت عضوی مینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۶)

$$\text{ج) } C = \{a, e, f, b\}$$

به هر مجموعه احاطه‌گر چهار عضوی غیرمینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۷)

الف) ۵ نفر را به عنوان ۵ راس یک گراف جهت‌دار در نظر می‌گیریم.

به طور مثال اگر نام علی در فهرست دوستان سامان وجود دارد، یک یال جهت‌دار از علی به سمت سامان رسم می‌کنیم. و برعکس اگر نام سامان در فهرست دوستان علی باشد یک یال جهت‌دار از سامان به علی رسم می‌کنیم. به همین ترتیب الی آخر پیش می‌رویم.

حداکثر تعداد یال‌ها در گراف جهت‌دار ۵ راسی $5 \times 4 = 20$ می‌باشد.

از طرفی برای هر یال دو حالت داریم (وجود داشتن یا وجود نداشتن آن یال) پس تعداد کل حالات برای آن 2^{20} می‌باشد. (ب) این قسمت هم‌چون قسمت الف است. با این تفاوت که گراف جهت‌دار نیست. پس حداکثر تعداد یال‌ها

$$\frac{p(p-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ می‌باشد. بنابراین تعداد کل حالات } 2^{10} \text{ است.}$$

الف) ۲۸ (۰/۵)

$$\text{تعداد یال های گراف کامل } k_p = \binom{p}{2} \Rightarrow k_8 \Rightarrow q = \binom{8}{2} = 28$$

$$\text{ب) ۳ رأس (۰/۵)} \quad \gamma \geq \frac{p}{\Delta + 1} \Rightarrow \gamma \geq \frac{10}{3 + 1} : \gamma \geq 3$$

$$\text{ج) } p - 1 \text{ (۰/۵)} \Rightarrow \Delta = p - 1 \Rightarrow \text{یعنی راس تمام رئوس } 1 \Rightarrow \gamma = 1 \Rightarrow \text{دیگر را احاطه می کند}$$

بازه‌های (a_i, b_i) و $i = 1, 2, 3, 4$ نظیر رأس‌های a, b, c, d در نظر می‌گیریم.

برهان خلف: فرض کنیم گراف بازه‌ای باشد. (بنا به مجاورت رأس‌ها) داریم:

که با توجه به نمودار مقابل $(a_4, b_4) \cap (a_3, b_3) \neq \emptyset$ است.

یعنی b با c مجاور است که یک تناقض است.

