

۱

مربع مقابل را در نظر بگیرید.

آیا می‌توان این مربع 4×4 را به گونه‌ای کامل کرد که مربع لاتین شود؟ توضیح دهید.

۱			
	۲		
		۳	

۲

۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

۳

تعداد جواب‌های صحیح $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ با شرط $x_i > 2$ برای $i = 1, 2, 3$ را پیدا کنید.

۴

۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که:

(الف) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند.

(ب) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.

(ج) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۵

نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است.

۶

می‌خواهیم ۸ نفر را که دوه‌دو برادر یک‌دیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۷

قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند به گونه‌ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقاً یکبار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هریک از مسیرها را دقیقاً یک بار طی کند. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

۸

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

۹

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱۰) چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان نوشت به طوری که هر رمز، حداقل یک رقم ۳ و یک رقم ۲ را شامل باشد؟ (نیاز به محاسبه پاسخ نهایی نمی‌باشد)

۱۱) از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰، $(1 \leq n \leq 300)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر است ولی بر ۵ بخش‌پذیر نیست؟

۱۲) چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشد.

۱۳) چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴، بخش‌پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش‌پذیر نباشند و بر ۴ نیز بخش‌پذیر نباشند.)

۱۴) چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که در آن هریک از ارقام ۲ و ۳ حداقل یک‌بار به کار رفته باشند.

۱۵) پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض‌اند. ثابت کنید: حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.

۱۶) تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی مقابل را پیدا کنید.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14, 1 \leq x_i \leq 7, i = 1, 2, 3$$

۱۷) با استفاده از برهان خلف، اصل لانه کبوتر را که تا حال به طور شهودی بدیهی فرض کرده بودیم اثبات کنید.

۱۸) S یک زیرمجموعه‌ی ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر ۲۵ تقسیم کنیم، نشان دهید که دست‌کم سه عضو S دارای یک باقی‌مانده‌اند.

۱۹) مجموعه‌ی اعداد $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

۲۰) مجموعه‌ی اعداد $A = \{1, 2, \dots, 84\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه‌ی ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.



۱) بله، چون هر عدد فقط در قطر اصلی آمده و فقط یک بار در هر سطر و ستون ظاهر شده است، می‌توان مربع را طوری پر کرد که هیچ عددی در سطر یا ستون تکرار نشود. مثلاً یکی از جواب‌های ممکن:

۱	۳	۴	۲
۴	۲	۱	۳
۲	۴	۳	۱
۳	۱	۲	۴

۲) $k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4, kn + 1 = 54 \Rightarrow 4n = 53, n = \left\lceil \frac{53}{4} \right\rceil = 13$ (ص ۸۲)

۳) $x_i > 2 : x_i \geq 3 \Rightarrow x_i - 3 \geq 0$ $\xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله}} (y_1 + 3) + (y_2 + 3) + (y_3 + 3) = 14$
 $\therefore \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 5 \\ y \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حسابی}} \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$

الف) $4! \times 6!$

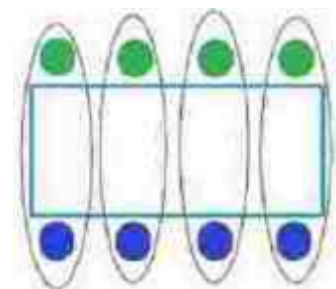
ب) $5! \times 4!$

ج) $3! \times 7!$ (ص ۷۲)

۵) به هر کدام از $x_k, \dots, x_2, x_1$ عدد ۱- را اضافه می‌کنیم.
 معادله جدید $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - k$
 لذا تعداد حالات جواب از رابطه $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ به دست می‌آید. (ص ۶۱)

۶) مسئله را به این صورت بیان می‌کنیم که:

مطابق شکل دور یک میز ۴ جفت صندلی روبه‌روی هم داریم که می‌خواهیم ۴ جفت برادر را روی آن‌ها بنشانیم. طبق اصل شمارش این عمل به $4!$ حالت امکان‌پذیر است. از طرفی برای هر جفت صندلی که دو برادر می‌خواهند روی آن بنشینند ۲ حالت داریم (کدام برادر روی صندلی آبی و کدام روی صندلی سبز بنشیند) و با وجود ۴ صندلی طبق اصل شمارش باید $4!$ در 2^4 ضرب شود. بنابراین جواب مسئله $4! \times 2^4$ است.



	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

9

	a	b	c
شنبه	۱	۳	۲
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۲	۱	۳

⇒

	a	b	c
شنبه	۱۱	۲۳	۳۲
یکشنبه	۳۳	۱۲	۲۱
دوشنبه	۲۲	۳۱	۱۳

(ص ۷۲)

اگر مربع‌های لاتین متعامد صحیح دیگری نیز بتوانید به دست آورید، درست است.

$$x_3 = 4, x_0 \geq 3 \Rightarrow x_0 = y_0 + 3$$

$$x_1 + x_2 + 4 + x_4 + 3 + y_0 + x_6 = 12 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + y_0 + x_6 = 5 \Rightarrow z = \binom{9}{4} \text{ (ص ۷۱)}$$

$$\begin{cases} x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \binom{12}{2} = 66 \\ x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow \binom{10}{2} = 45 \end{cases} \Rightarrow 66 + 45 = 111 \text{ (ص ۷۱)}$$

$$|S| = 5^4 \text{ (ص ۷۵) : تعداد کل رموز}$$

$$|A| = 4^4 \text{ : تعداد رموزهای فاقد ۳}$$

$$|B| = 4^4 \text{ : تعداد رموزهای فاقد ۲}$$

$$|A \cap B| = 3^4 \text{ : تعداد رموزهای فاقد ۲ و ۳}$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A \cup B| = 5^4 - (4^4 + 4^4 - 3^4)$$

$$A = \{1 \leq n \leq 300 | n = 4k (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{300}{4} \right\rfloor = 75$$

$$B = \{1 \leq n \leq 300 | n = 5k (k \in \mathbb{N})\}$$

$$A \cap B = \{1 \leq n \leq 300 | n = 20k (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{300}{20} \right\rfloor = 15$$

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = 75 - 15 = 60 \text{ (ص ۸۳)}$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$= 350 - \left\lfloor \frac{350}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{350}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{350}{12} \right\rfloor = 234 \text{ (ص ۸۴)}$$

توجه: تعداد مضارب k از ۱ تا n برابر است با $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ (ص ۲۵)}$$

$$n(A \cup B) = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{12} \right\rfloor \text{ (ص ۷۵)}$$

$$n(A \cup B) = 100 \text{ (ص ۲۵)}$$

$$1 - n(A \cup B) = 200 - 100 = 100 \text{ (ص ۲۵)}$$

(صفحات: ۷۵ و ۷۶)

$$۹۰۰ = ۱۰۰ \times ۱۰۰ = ۹۰۰ \text{ کل سه رقمی}$$

$$A: ۲ \text{ نباشد} \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$B: ۳ \text{ نباشد} \quad \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underline{۱} \quad \underline{۹} \quad \underline{۹} = ۶۴۸ & \underline{۱} \quad \underline{۹} \quad \underline{۹} = ۶۴۸ & \underline{۷} \quad \underline{۸} \quad \underline{۸} = ۴۴۸ \end{array}$$

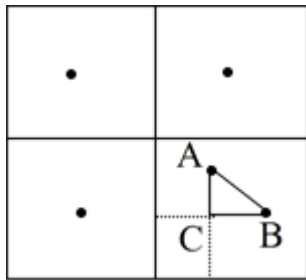
$$\Rightarrow \text{جواب} = \text{کل} - n(A \cup B) = ۴۲$$

مربع به ضلع ۲ را به ۴ مربع مساوی به ضلع ۱ تقسیم می‌کنیم بنابراین ۵ > ۴ چون ۵ نقطه را به

عنوان ۵ کبوتر و ۴ قسمت مربع را به عنوان ۴ لانه در نظر می‌گیریم در نتیجه با توجه به اینکه $\frac{۵}{۴} > ۱$ پس $۱ + ۱ = ۲$

یعنی حداقل دو تا از این نقطه‌ها در یکی از مربع‌ها قرار می‌گیرد.

حال طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم که:



$$\Rightarrow (AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$\begin{cases} AC < ۱ \\ BC < ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (AC)^2 < (۱)^2 \\ (BC)^2 < (۱)^2 \end{cases} \Rightarrow (AB)^2 < (۱)^2 + (۱)^2$$

$$\Rightarrow (AB)^2 < ۱^2 + ۱^2 \rightarrow (AB)^2 < ۲ \rightarrow AB < \sqrt{۲}$$

کافیست کل جوابهای حسابی را منهای جواب غقوق کنیم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = ۱۴ \\ ۱ \leq x_i \leq ۷ : x_i = y_i + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = ۱۱ \\ y_i \leq ۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{کل حسابی}} \binom{۱۱ + ۳ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۱۳}{۲}$$

جوابهای غقوق آنها هستند که $y_1 \geq ۷$ یا $y_2 \geq ۷$, $y_3 \geq ۷$.

$$\underbrace{y_1 \geq ۷}_A \quad \underbrace{y_2 \geq ۷}_B, \quad \underbrace{y_3 \geq ۷}_C$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A) \xrightarrow{y_1 \geq ۷} Y_1 + y_2 + y_3 = ۲ \xrightarrow{\text{حسابی}} \binom{۶}{۲}$$

$$n(B) \rightarrow \binom{۶}{۲} \quad n(A \cap B) \xrightarrow[y_2 \geq ۷]{y_1 \geq ۷} Y_1 + Y_2 + y_3 = -۳ \text{ غقوق} \Rightarrow n(A \cap B) = ۰$$

$$n(C) \rightarrow \binom{۶}{۲} \quad n(A \cap C) = n(B \cap C) = n(A \cap B \cap C) = ۰ \text{ به همین ترتیب}$$

$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = ۲ \binom{۶}{۲} \xrightarrow{\text{جواب نهایی}} \text{کل} - n(A \cup A \cup BC) = \binom{۱۳}{۲} - ۳ \binom{۶}{۲}$$

فرض خلف: اگر تعداد لانه‌ها m باشد و در هر لانه حداکثر یک کبوتر قرار گیرد آن‌گاه تعداد کبوترها حداکثر m می‌شود،

یعنی تعداد لانه‌ها و کبوترها برابر است که متناقض با بیشتر بودن تعداد کبوترهاست. پس در بعضی لانه‌ها حداقل ۲

کبوتر یا بیشتر قرار می‌گیرد. پس فرض خلف، غلط است.



می‌دانیم اگر اعداد را بر ۲۵ تقسیم کنیم از ۰ تا ۲۴ باقی‌مانده داریم، یعنی ۲۵ لانه. حال ۷۰ عدد را در پخش‌ترین حالت در لانه‌ها می‌ریزیم اگر ۲ بار این کار را انجام دهیم $2 \times 25 = 50$ در هر لانه ۲ عدد داریم و ۲۰ عدد می‌ماند که آن‌ها را نیز در لانه‌ها پخش می‌کنیم طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۱ لانه داریم که در آن ۳ عدد قرار دارند.

مجموعه A را به ۱۲ زیرمجموعه به شکل زیر افراز می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{5, 85\} & A_2 &= \{9, 81\} & A_3 &= \{13, 77\} & A_4 &= \{17, 73\} & A_5 &= \{21, 69\} \\ A_6 &= \{25, 65\} & A_7 &= \{29, 61\} & A_8 &= \{33, 57\} & A_9 &= \{37, 53\} & A_{10} &= \{41, 49\} \\ A_{11} &= \{45\} & A_{12} &= \{1\} \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مجموع اعداد درون زیرمجموعه‌های دو عضوی برابر ۹۰ است. زیرمجموعه‌های فوق را به عنوان ۱۲ لانه در نظر می‌گیریم که می‌خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آن‌ها انتخاب کنیم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل از یکی از لانه ۲ کبوتر انتخاب خواهد شد، یعنی حداقل دو عدد انتخاب شده از یک زیرمجموعه هستند. واضح است که مجموع آن دو برابر ۹۰ است.

اعداد مجموعه‌ی A در ۴۲ قفس به شکل زیر افراز می‌کنیم:

$$\{1, 84\}, \{2, 83\}, \{3, 82\}, \dots, \{42, 43\}$$

قفس‌ها را به عنوان لانه‌ها و اعداد درون آن‌ها را کبوتر در نظر می‌گیریم، به طوری که می‌خواهیم از این لانه‌ها ۴۳ کبوتر به عنوان یک زیرمجموعه‌ی ۴۳ عضوی انتخاب کنیم. طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر از یک لانه برداشته خواهند شد، یعنی حداقل دو عدد در زیرمجموعه وجود دارند که مجموع آن‌ها ۸۵ است.



